

# Beam Optics for FEL

*Liu Tao 2015,09,02*

# Outline

- 基本物理概念
- 束流横向运动与传输
- FEL对束流横向品质要求
- 波荡器中束流传输

# 基本简介以及相关概念

- Beam Optics——束流光学
- **束流**：带电粒子流，粒子能够组成束流，意味着大量粒子在进行基本上整体有序的运动。
- **束流光学**：研究带电粒子流在电磁场中的运动，隶属束流动力学。

其任务主要是研究如何利用能产生某种电磁场的器件控制束流的运动,使之按使用者的要求传输。

其侧重点不在粒子能量的变化(纵向运动)，而在于约束粒子的轨迹(横向运动)，使束流产生偏转、聚焦、发散等要求。

之所以称“光学”，主要是我们对束流运动的要求和设计光学系统时对光束的要求相似，类比。“电磁透镜”、“色散”等名词的来源亦在于此。
- **数学物理需求**：电动力学、理论力学、狭义相对论；微积分、微分方程、复变函数、数学物理方程等。

# 基本简介以及相关概念

- **基本方程：**单个粒子的状态——六维相空间，运动方程是其状态随时间 $t$ 的变化关系。基本方程就是洛伦兹公式和位置动量关系：

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \vec{P} = m\vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- **理想粒子：**称具有“理想”初始状态的粒子为理想粒子；它处于理想的位置、理想的动量，走在理想的轨道上。
- **纵向运动：**理想粒子沿理想轨道前进的方向称为纵向 $s$ 。所有粒子沿该纵向的运动称为纵向运动，体现在纵向不理想程度的变化。
- **横向运动：**与 $s$ 轴正交的方向称为横向，理想粒子横坐标为零。所以粒子的横向变化，为横向运动，体现为横向不理想程度的变化。
- **相空间：**有两种定义，其一称为“物理相空间”，坐标是位移和动量，如 $x-P_x$ ；其二称为“几何相空间”，坐标是轨迹的几何参量即位移和轨迹斜率，如 $x-x'$ 。Liouville定理知，保守力学系统中，束流传输过程相空间面积不变，发射度守恒。

# 束流横向运动

- 从电子受到Lorentz力方程:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = e(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \vec{P} = m\vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- 约定横向磁场, 展开:

$$\frac{B_y}{(B\rho)_0} = \frac{1}{\rho} + Kx + \dots$$

$$\frac{B_x}{(B\rho)_0} = Ky + \dots$$

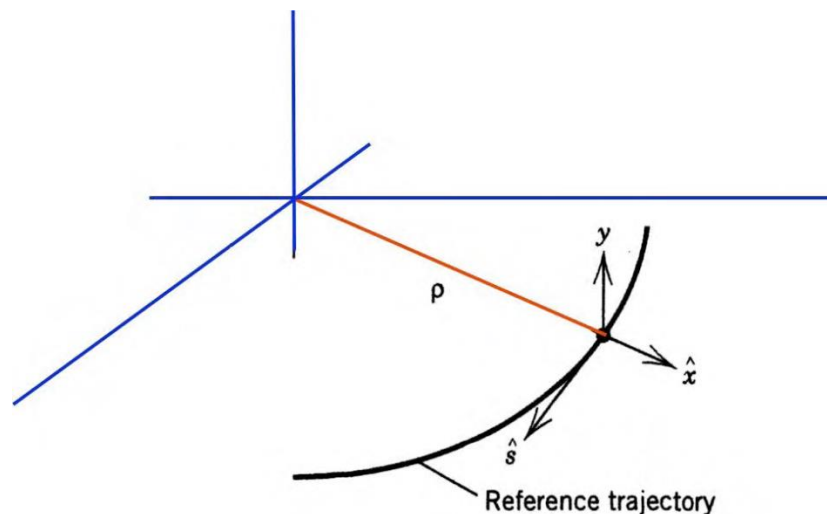
- 略去高阶项, 得横向运动线性方程:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} + \left[ K(s) + \frac{1}{\rho^2(s)} \right] x = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta P}{P} \\ \frac{d^2y}{ds^2} - K(s)y = 0 \end{cases}$$



$K(s)$ 为强聚焦项  
 $1/\rho^2$ 为弱聚焦项

- $\rho(s)$ 为曲率半径,  $K(s) = \frac{1}{(B\rho)_0} \frac{\partial B_y}{\partial x}$ 为聚焦函数,  $\frac{\Delta P}{P}$ 为动量分散



# 束流横向运动

- 运动方程:  $\frac{d^2x}{ds^2} + K(s)x = 0$   $K > 0$ , 聚焦;  $K < 0$ , 散焦

其中 $K(s)$ :

二级铁:  $x$ 径向 $\frac{1-n}{\rho^2}$ ,  $y$ 轴向 $\frac{n}{\rho}$ ,  $n$ 为磁降指数 $n = -\frac{x}{B_y} \frac{\partial B_y}{\partial x}$ ;

$0 < n < 1$ 时,  $x, y$ 方向均有弱聚焦(稳定);

$n = 0$ 时,  $x$ 方向聚焦,  $y$ 方向漂移段;

四极铁:  $\pm \frac{qk}{mv}$ ,  $k$ 为磁场梯度

漂移段: 0.

# Twiss参数

- Hill方程:  $\frac{d^2u}{ds^2} + F(s)u = 0$  , 在周期性条件下
- 二阶微分方程的矩阵形式: 
$$\begin{bmatrix} u(s) \\ u'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(s_0) \\ u'(s_0) \end{bmatrix}$$
- 引入传输矩阵: 
$$M(s/s_0) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$
- 行列式为1, 写为: 
$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{bmatrix}$$
- Twiss参数关系

$$\begin{cases} \beta\gamma = 1 + \alpha^2 \\ \alpha' = K\beta - \gamma \\ \beta' = -2\alpha \\ \gamma' = 2K\alpha \end{cases}$$

Twiss参数变换矩阵:

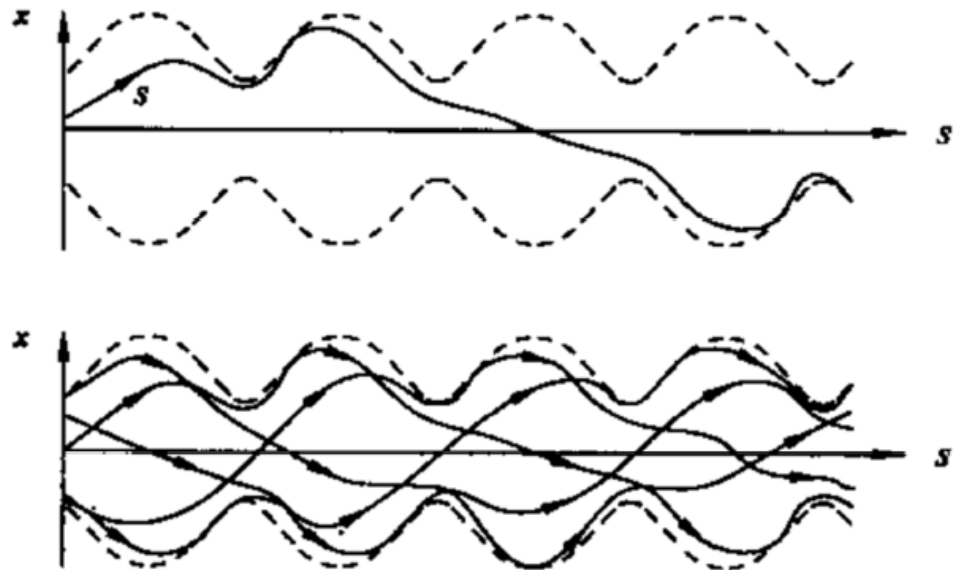
$$\begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{11}m_{21} & 1 + 2m_{12}m_{21} & -2m_{12}m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{21}m_{22} & m_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix}$$

# 横向振荡振幅函数

- 同样，运动方程可以得到振荡函数的通解形式
- 得横向振荡轨迹方程， $\beta$ 振荡方程：

$$u(s) = a\sqrt{\beta(s)}\cos\left(\int \frac{ds}{\beta} + \varphi_0\right)$$

- $a\sqrt{\beta}$ 是振荡函数的包络，所有振荡的振幅都在包络内，反应了束团尺寸的变化。 $\beta$ 为横向振荡的振幅函数。
- 我们不关心单个粒子的运动轨迹，而关心整个束团的包络或振幅函数，决定了束流尺寸大小，决定我们束流孔径的考虑。





# 相空间

- 横向振荡:

$$u(s) = a\sqrt{\beta(s)}\cos\varphi, \varphi = \int \frac{ds}{\beta} + \varphi_0$$

- 偏角:

$$u'(s) = a\sqrt{\gamma(s)}\sin(\varphi + \arctan\alpha)$$

- 得相椭圆方程:  $a^2 = \gamma u^2 + 2\alpha uu' + \beta u'^2$

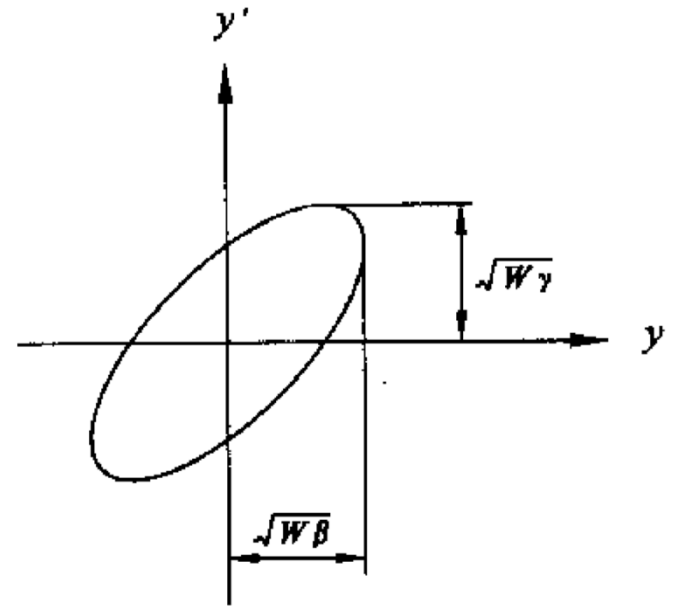
- 面积  $W = a^2$  为不变量 (省去 $\pi$ ) ;

- 发射度:  $\varepsilon = a^2 = \sqrt{\langle u^2 \rangle \langle u'^2 \rangle - \langle uu' \rangle^2}$

- 尺寸:  $\sigma_u^2 = \langle u^2 \rangle = \varepsilon\beta$

- 发散角:  $\sigma_{u'}^2 = \langle u'^2 \rangle = \varepsilon\gamma$

- 关联项:  $\langle uu' \rangle = -\varepsilon\alpha$



# 色散函数

- 运动方程:  $\frac{d^2x}{ds^2} + K(s)x = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta P}{P}$
- 通解:  $x(s) = x_h(s) + x_i(s)$ 

$$\begin{cases} \frac{d^2x_h}{ds^2} + K(s)x_h = 0 \\ \frac{d^2x_i}{ds^2} + K(s)x_i = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta P}{P} \end{cases} \xrightarrow{\text{色散函数}} x_i = D(s) \frac{\Delta P}{P}$$
- 有:  $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} + \frac{\Delta P}{P} \begin{bmatrix} D \\ D' \end{bmatrix}$
- 色散函数形容偏能粒子与中心能量粒子的轨道偏移, 会引起整个束斑尺寸的增大
- 色散产生于二极铁, 也只能消除于二极铁。
- 四极铁可以改变色散, 但不能消除色散。
- 色品校正只能发生在有色散的地方。

# 常用磁铁结构

- 扇形二极铁:

$$M_h = \begin{bmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$M_v = \begin{bmatrix} 1 & \rho \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 边缘场:

$$M_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \alpha}{\rho} & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tan \alpha}{\rho} & 1 \end{bmatrix}$$

- 6D:

$$M_{dipole} = \begin{bmatrix} 1 & l_B & 0 & 0 & 0 & \frac{l_B \theta}{2} \\ -\frac{\theta^2}{l_B} & 1 & 0 & 0 & 0 & \theta \\ 0 & 0 & 1 & l_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\theta & -\frac{l_B \theta}{2} & 0 & 0 & 1 & -\frac{l_B \theta^2}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 四极铁:

$$M_{Qf} = \begin{bmatrix} \cos \sqrt{K} s & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K} s \\ -\sqrt{K} \sin \sqrt{K} s & \cos \sqrt{K} s \end{bmatrix}$$

$$M_{Qd} = \begin{bmatrix} \cosh \sqrt{K} s & \frac{1}{\sqrt{K}} \sinh \sqrt{K} s \\ \sqrt{K} \sinh \sqrt{K} s & \cosh \sqrt{K} s \end{bmatrix}$$

薄透镜近似

$$f = \frac{1}{Ks} \gg s$$

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -Ks & 1 \end{bmatrix}$$

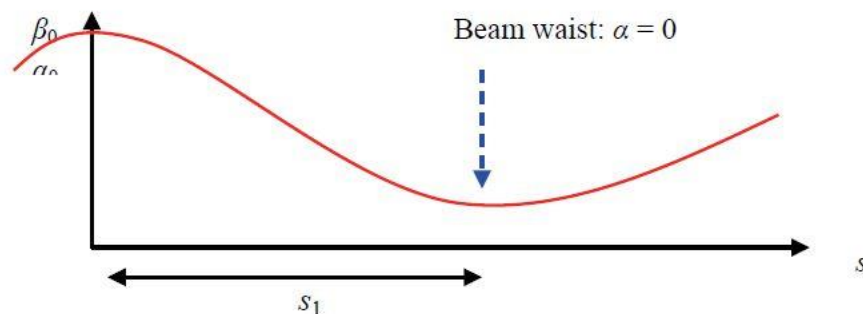
$$M_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Ks & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{1}{(B\rho)_0} \frac{\partial B_y}{\partial x}$$

# 漂移段

- 矩阵:  $M = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Twiss演变: 
$$\begin{cases} \beta(s) = \beta_0 - 2\alpha s + \gamma_0 s^2 \\ \alpha(s) = \alpha_0 - \gamma_0 s \\ \gamma(s) = \gamma_0 \end{cases}$$



- 当  $s = \alpha_0/\gamma_0$  时, 有  $\alpha = 0$ , 束腰位置, 束斑会聚到最小。

此时有:  $\alpha = 0, \gamma = \gamma_0, \beta = \frac{1}{\gamma_0}$

- 尺寸:  $\sigma(s) = \sqrt{\varepsilon \beta(s)}$       发散角:  $\sigma'(s) = \sqrt{\varepsilon \gamma(s)}$

束腰处有:  $\beta(s) = \frac{\sigma(s)}{\sigma'(s)} \quad \varepsilon(s) = \sigma(s)\sigma'(s)$

例: 发射度不变时, 参数的相互变化

# FODO结构

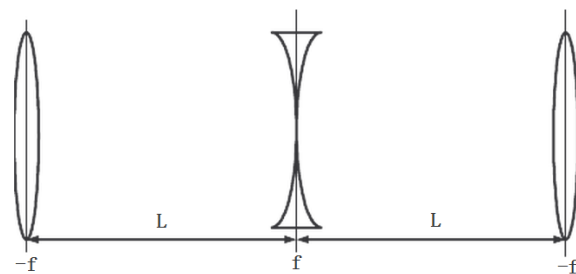
$$M_{FODO} = M_{f/2} M_{dr} M_d M_{dr} M_{f/2}$$

- 薄透镜近似，其中  $f = 1/K_s$ ， $l$ 为总长

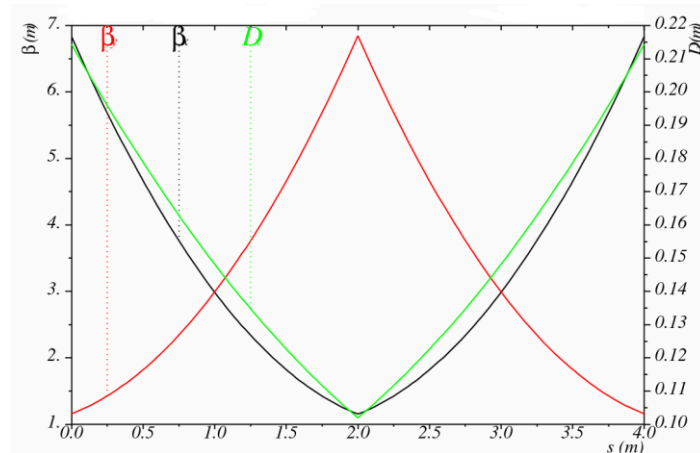
$$\rightarrow M = \begin{bmatrix} 1 - \frac{l^2}{8f} & l + \frac{l^2}{4f} \\ \frac{l^2}{16f^3} - \frac{l}{4f^2} & 1 - \frac{l^2}{8f} \end{bmatrix}$$

- 通常，Q铁之间的dipole铁的聚焦强度被忽略，视为漂移段。
- FODO结构，磁中心beta取最值，alpha为0。
- Twiss参数可与lattice结构互推：

$$\left. \begin{matrix} \beta_{\pm} \\ \alpha_{\pm} \end{matrix} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} l_d \\ l_Q \\ k \end{matrix} \right.$$



FODO 型磁聚焦结构



# FEL中束流横向尺寸

- 1D的FEL理论，高增益FEL中，FEL参数（Pierce参数）：

$$\rho = \left[ \frac{1}{16} \frac{I_0}{I_A} \frac{K_0^2 [JJ]^2}{\gamma_0^3 \sigma_x^2 k_u^2} \right]^{1/3}$$

- 增益长度：

$$L_{g0} = \frac{1}{4\pi\sqrt{3}} \frac{\lambda_u}{\rho}$$

- 束团流强一定，尺寸越小，流强密度越高， $\rho$ 越大，增益长度越短。尺寸为波荡器中束流的平均尺寸。
- 考虑3D效应下，尺寸太小，衍射太快，FEL性能下降

# 横向相干性与衍射

- 横向相干性条件：

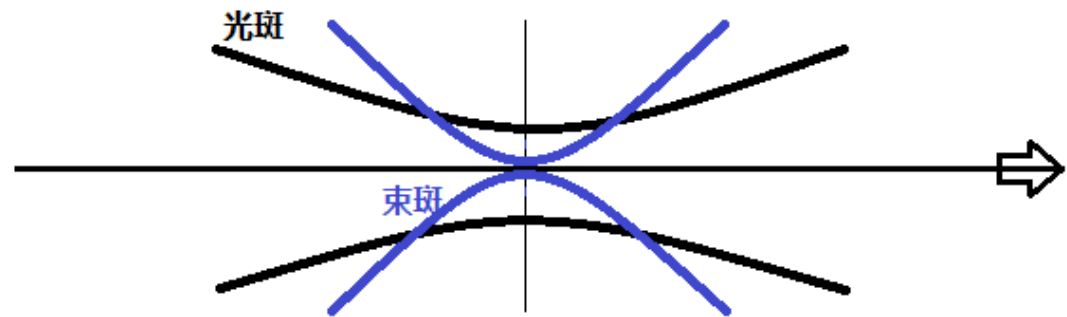
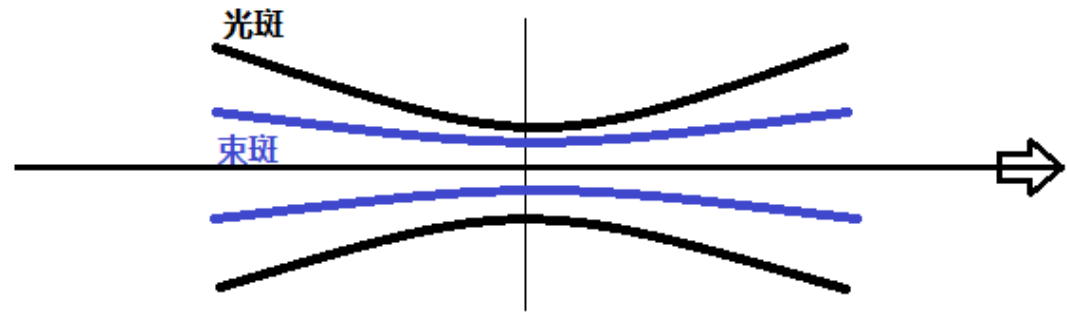
$$\varepsilon \leq \varepsilon_r = \frac{\lambda_s}{4\pi}$$

- 不满足条件：  
产生横向相干模式。

$$M_T = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_r}$$

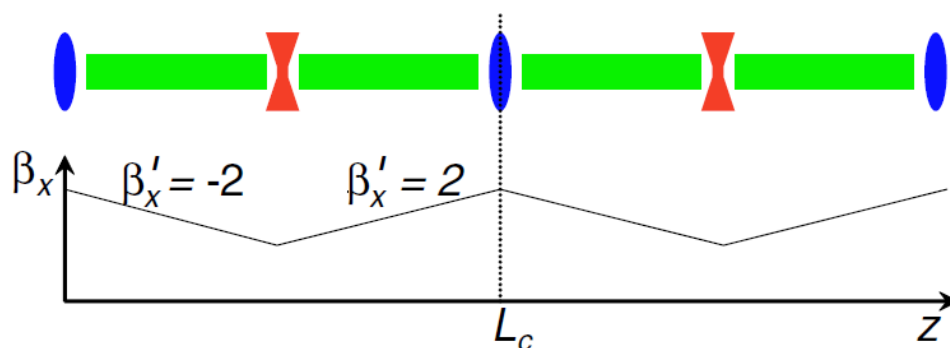
- 满足发射度的条件下，尺寸和发散角需要匹配。  
因此，匹配Twiss参数，才能保证横向束斑与光斑的overlap。

$$\begin{pmatrix} \sigma \leq \sigma_s \\ \sigma' \leq \sigma'_s \end{pmatrix}$$



# 波荡器中束流传输

- 可知，FEL辐射对束流品质要求较高。理论计算时，考虑束团横向尺寸，常用波荡器中平均尺寸来代替。
- 因此，为了维持一个理想的横向尺寸，采用波荡器之间插入Q铁来聚焦的方式。
- 通常方法：FODO结构。
- 设计时，避开衍射
- 波荡器水平方向：漂移段；  
垂直方向：自然聚焦（弱聚焦）。
- 波荡器类似于y向聚焦的半块Q铁；
- 通常情况，波荡器自然聚焦水平远小于Q铁强度，即可忽略自然聚焦，完全由Q铁构成一组完整的FODO结构。
- SASE模式采用很长的波荡器，需要考虑y的自然聚焦。





# 波荡器的自然聚焦

- 平面波荡器场:

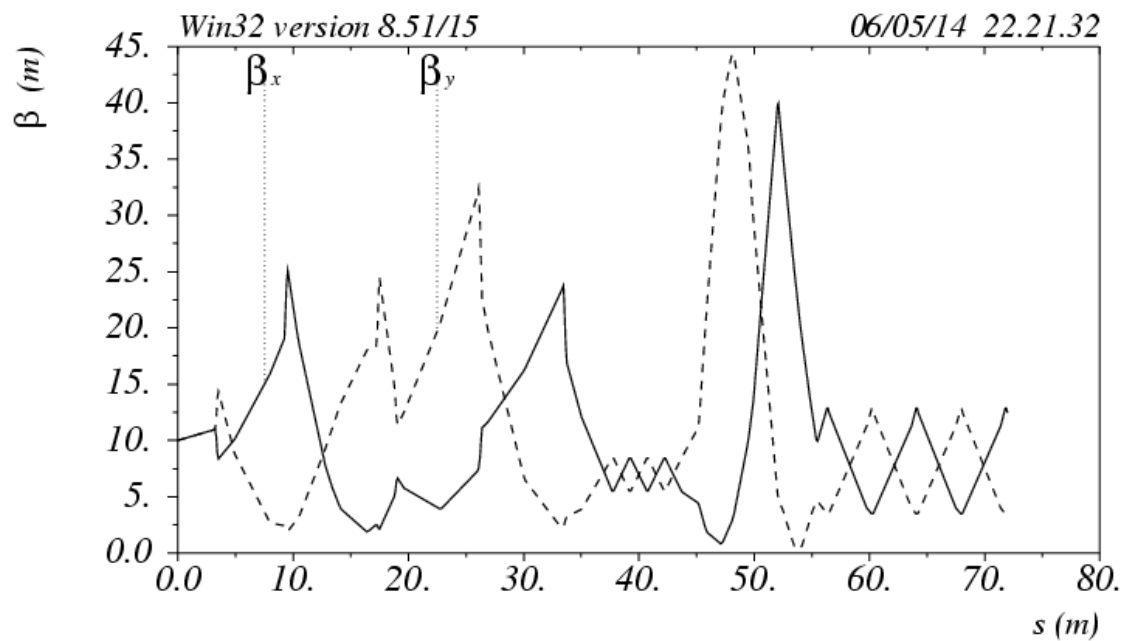
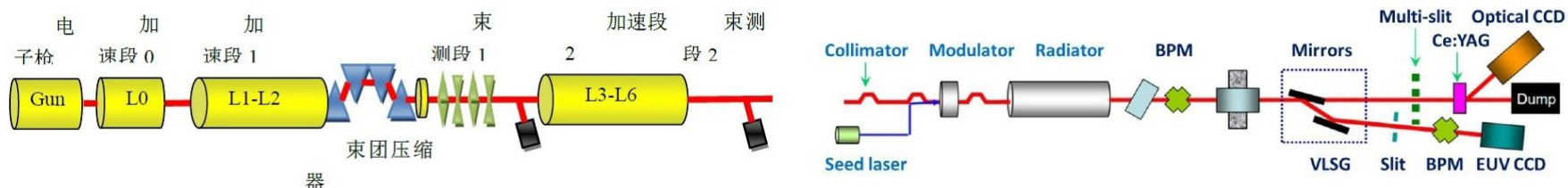
$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = -B_0 \cosh(k_u y) \sin(k_u z) \\ B_z = -B_0 \sinh(k_u y) \cos(k_u z) \end{cases} \xrightarrow{y=0 \text{ 平面}} B_y = -B_0 \sin(k_u z) \xrightarrow{\text{横向运动}} \begin{cases} x = \frac{K}{\gamma k_u} \sin(k_u z) \\ y = 0 \end{cases}$$

- 考虑  $y \neq 0$ , 展开到  $y$  的二阶, 解得:

$$\begin{cases} x = \left(1 + \frac{k_u^2 y_{\beta n}^2}{2}\right) \frac{K}{\gamma k_u} \sin(k_u z) + x_{\beta n} \rightarrow x''_{\beta n} = 0 \\ y = y_{\beta n} \rightarrow y''_{\beta n} \approx -\left(\frac{K^2 k_u^2}{2\gamma^2}\right) y_{\beta n} = -k_{n0}^2 y_{\beta n}, k_{n0} \ll k_u \end{cases}$$

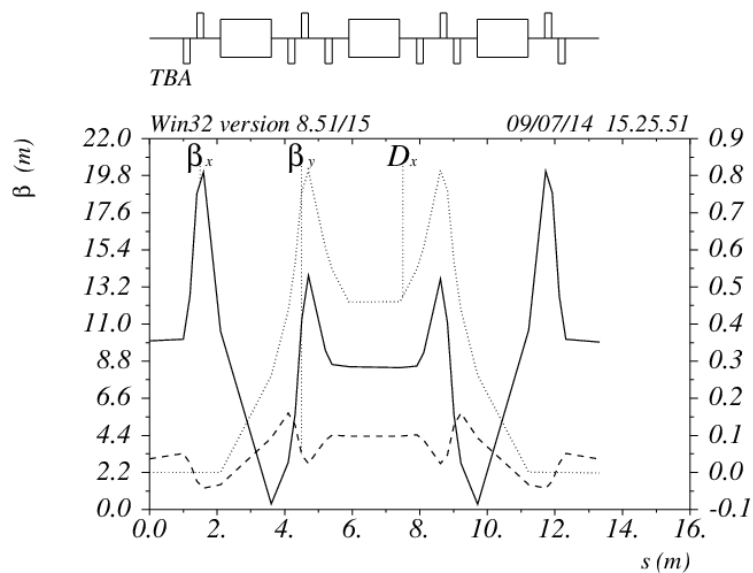
- 回顾Hill方程, 可知  $y$  方向有聚焦,  $x$  方向无聚焦。

# DCLS



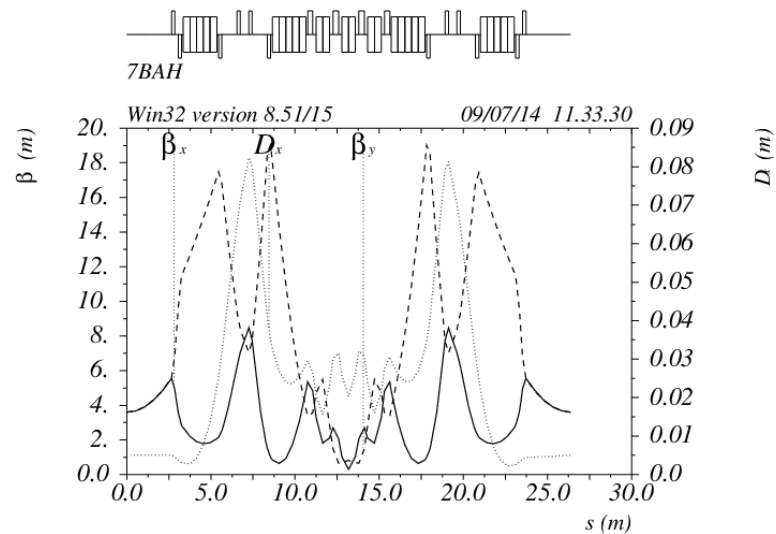
$$\delta_E / p_{oc} = 0.$$

Table name = TWISS



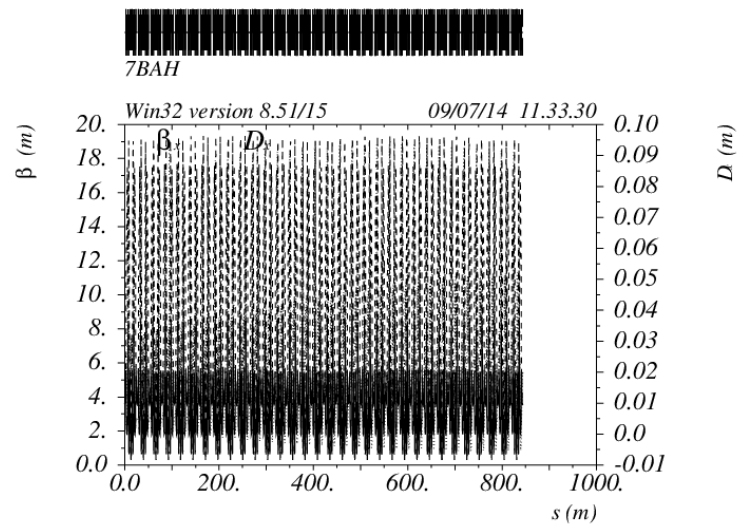
$$\delta_E / p_{oc} = 0.$$

Table name = TWISS



$$\delta_E / p_{oc} = 0.$$

Table name = TWISS



$$\delta_E / p_{oc} = 0.$$

Table name = TWISS

# 小结

- 束流光学，告诉我们束流在磁场中的运动变化，需要我们运用合理的磁铁结构lattice控制束流运动变化；
- FEL对束流的横向变化提出明确的要求，需要用lattice对束流进行控制，包括匹配出FEL入口处所需的参数和控制FEL过程中的参数；
- 掌握相应的束流物理模拟工具。