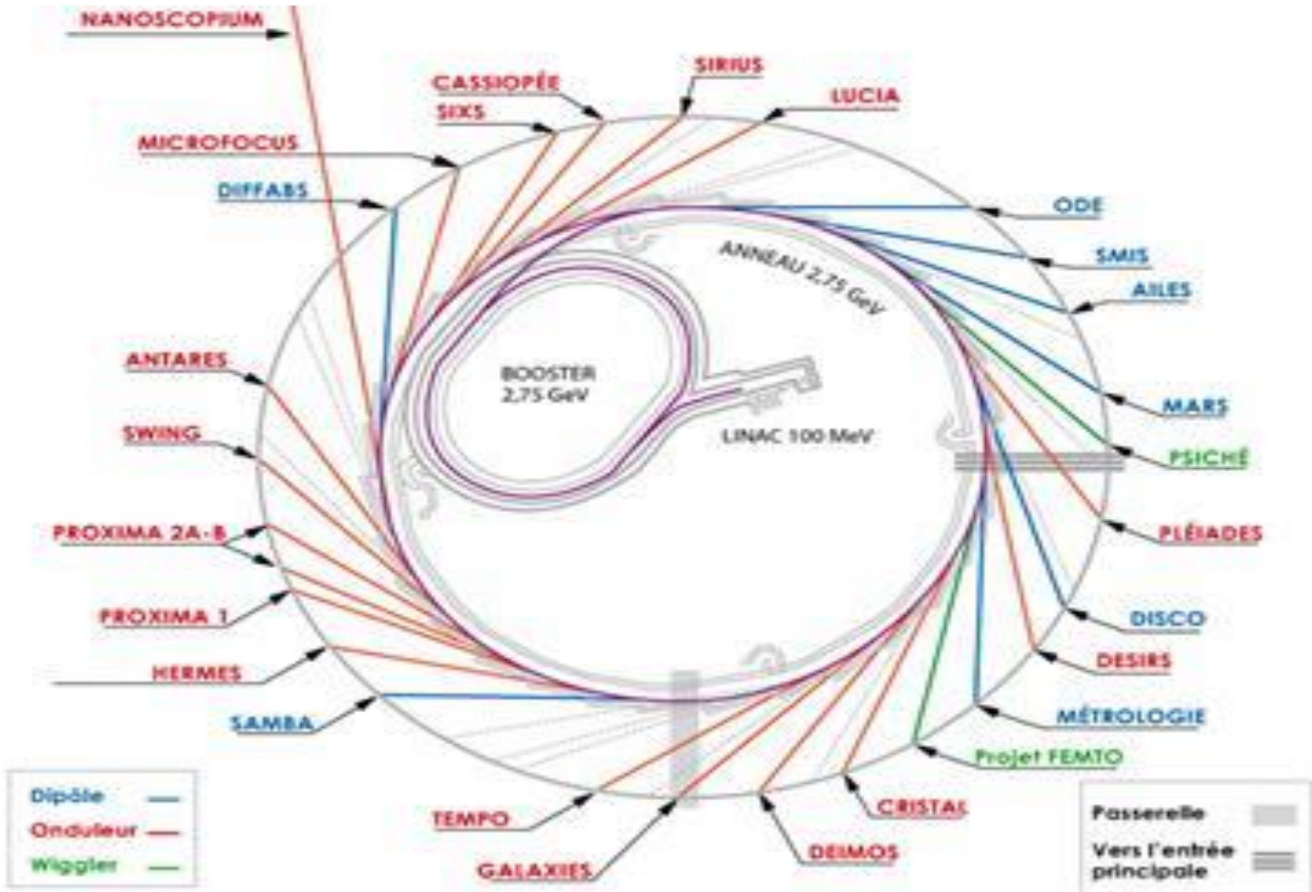
自由电子激光讲义

Zhou Kai Shang 2015/8/25

第一讲同步辐射光源物理



1.1 单电子辐射理论

1.静止坐标系下的李纳-维谢尔势：

$$\tilde{\phi} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 \tilde{R}} \quad , \quad \tilde{A} = 0 \quad , \quad \tilde{R} = c\ (\tilde{t} - \tilde{t}'\ )$$

经过洛伦兹变换到实验室坐标系：

$$\phi = \gamma \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 \tilde{R}}$$

$$A = \gamma \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\vec{v}}{\tilde{R}}$$

$$\tilde{R} = c\ (\tilde{t} - \tilde{t}'\ ) = \gamma (R - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{R})$$

矢量的洛伦兹变换公式：

$$\tilde{s} \longrightarrow s$$

$$x_0' = \gamma(x_0 - \beta x_1) \qquad \vec{A}_0' = \gamma(A_0 - \vec{\beta}\vec{A})$$

$$x_1' = \gamma(x_1 - \beta x_0) \qquad \vec{A}_{11}' = \gamma(\vec{A}_{11} - \vec{\beta} A_0)$$

$$x_2' = x_2$$

$$x_3' = x_3$$

2.实验室坐标系下的李纳-维谢尔势

$$\phi(\vec{R},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e}{R-\frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{R}}\right)^*=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{e}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})R}\right]^*$$

$$A(\vec{R},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{e\vec{v}}{R-\frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{R}}\right)^*=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{e\vec{v}}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})R}\right]^*$$

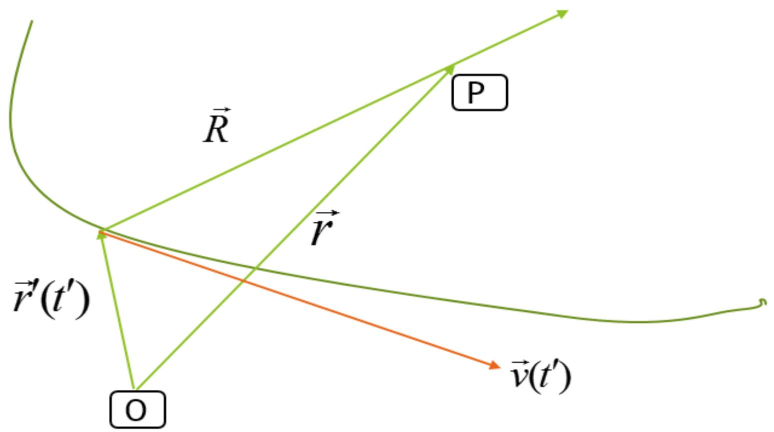


图1-1任意自由电子的运动轨迹与产生的辐射场

3.利用实验室坐标系下的李纳-维谢尔势求辐射场

$$\vec{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

$$\vec{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 cR}\left\{\frac{\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]}{(1-\vec{n}\times\vec{\beta})^3}\right\}^*$$

$$\vec{B}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}\left\{\frac{\dot{\vec{\beta}}\times(\vec{n}-\vec{\beta})}{(1-\vec{n}\times\vec{\beta})^3}\right\}^*$$

注意：从上面两个公式中，我们可以看出粒子的辐射场强不仅与速度有关，还与加速度有关。--粒子必须具有加速度才有辐射

瞬射辐射能流密度：

$$\vec{S}(t)=\vec{E}\times\vec{H}=\varepsilon_0 cE^2\vec{n}=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 cR^2}\left\{\frac{|\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}|^2]}{(1-\vec{n}\times\vec{\beta})^6}\right\}^*\vec{n}$$

粒子在单位立体角的辐射功率为：

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}=\frac{\Delta U}{\Delta t' d\Omega}=\vec{s}\cdot\vec{n}R^2\frac{\partial t}{\partial t'}=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\left\{\frac{|\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}|^2]}{(1-\vec{n}\times\vec{\beta})^5}\right\}$$

4.非相对论极限--拉莫尔（Larmor）公式：

$$P=\int(\vec{E}\times\vec{H})\cdot\vec{n}R^2 d\Omega=\frac{e^2(\dot{\vec{v}}^*)^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m_0^{\ 2}}(\frac{d\vec{p}}{dt})^2$$

5.相对论电子的辐射总功率—拉莫尔公式的相对论性推广

电子的辐射总功率是标量，即洛伦兹不变量，将三维的动量写成四维的形式：

$$P=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m_0^{\ 2}}\frac{dp_\mu}{d\tau}\cdot\frac{dp_\mu}{d\tau}$$

$$P=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c}\gamma^6\left[\dot{\vec{\beta}}^2-(\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})^2\right]=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c}\gamma^6\left[\dot{\vec{\beta}}^2+(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2\right]$$

1.2同步加速辐射功率

$$P = \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{6\pi\varepsilon_0 c}\gamma^4 \xrightarrow{\dot{v} = \frac{v^2}{\rho}} P_e = \frac{e^2 c}{6\pi\varepsilon_0}\frac{(\beta\gamma)^4}{\rho^2}$$

单个电子回旋一圈辐射的总能量：

$$U_0 = \oint P_e \frac{dz}{c} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0}\gamma^4 \oint \frac{dz}{\rho^2}$$

一台同步辐射光源的总功率：假设束流强度为I，回旋频率f_c ，
带电粒子数为 N_e

$$I = eN_e f_c$$

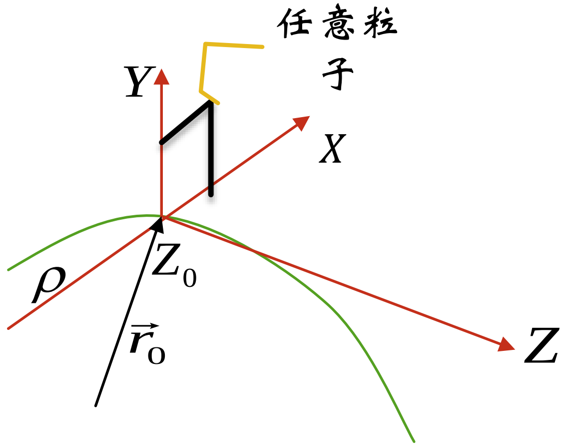
$$P_{SRS} = N_e f_c U_0 = \frac{IU_0}{e}$$

2.1电子束的横向运动

- 预备知识：

仅靠若干块磁铁的约束，要电子束在同步辐射光源中长期稳定的存在并不轻松，因为相对论电子束每秒跑约30万公里或者说绕环上百万圈，**其横向参量**x' 或 y'**稍微有点不理想，失之毫厘，差之千里**，要是缺乏有效的横向聚焦手段，真空室孔径再大，电子束中的大量电子难免“撞墙”，所以现代的同步辐射光源装置使用**分离作用**强聚焦结构。

- 电子运动坐标系：



$$\vec{r} = \vec{r}_0(z_0) + x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

$$(\vec{r}_0(z))' = \vec{e}_z$$

$$(\vec{e}_x)' = \frac{1}{\rho}\vec{e}_z$$

$$(\vec{e}_y)' = 0$$

$$(\vec{e}_z)' = -\frac{1}{\rho}\vec{e}_x$$

这里的求导是对坐标Z的求导，上述公式可用微元法分析得出。

曲线坐标系下粒子的速度：

$$\tilde{v}_z = \frac{dz}{dt} \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \tilde{v}_z(\vec{r})' = \tilde{v}_z\left[(1+\frac{x}{\rho})\vec{e}_z + x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y\right] \quad |\vec{v}| \approx \tilde{v}_z(1+\frac{x}{\rho}+\frac{1}{2}x'^2+\frac{1}{2}y'^2)$$

$$(\vec{v})' = \left[\tilde{v}_z(\frac{2}{\rho}x' + x(\frac{1}{\rho})') + \tilde{v}_z{}'(1+\frac{x}{\rho})\right]\vec{e}_z + \left[\tilde{v}_z(x'' - \frac{1}{\rho}(1+\frac{x}{\rho})) + \tilde{v}_z{}'x'\right]\vec{e}_x + \left[\tilde{v}_z y'' + \tilde{v}_z{}'y'\right]\vec{e}_y$$

两点说明：

- 量 $\frac{1}{\rho}$ 是理想粒子轨道的曲率，它标志着坐标系的弯曲程度，当理想粒子走直线时曲率为0，该坐标系蜕变成直线坐标系。

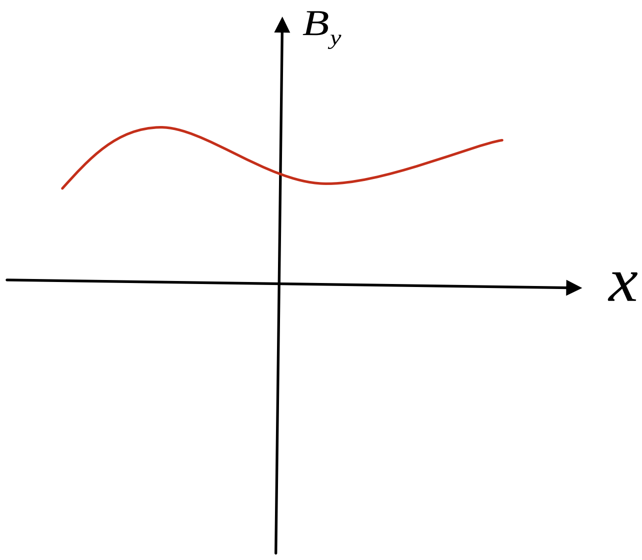
- 符号 $\tilde{v}_z$ 是特定粒子Z坐标随时间的增长率，是它在Z轴上“影子粒子”的移动速度，它近似于理想粒子的速度，而不等于理想粒子的速度，也不是该粒子在Z 方向的分量。

横向磁场的描述

① 任意恒定的磁场，总可以展开成坐标变量的幂级数，该级数的各阶系数反应磁场对横向坐标x或y的依赖关系，系数自身则仅是纵向位置Z的函数。

② 磁场之所以能够约束电子束横向运动，必然是因为粒子的横向运动不理想较大时，磁场能够提供横向“矫正力”，迫使其向理想轨道靠拢。

③ 磁场偏转粒子轨迹的效果，不仅取决于磁场的强度，也依赖于粒子的能量，能量越高，束流越不容易驾驭，越不容易偏转，常称为束流“越硬”，因此我们引入束流的“磁刚度”的概念来描述。



我们总是在理想轨道上的一点附近将磁场展开成幂级数。左图描画的实际上是任意的By,它总可以展开成坐标x 的泰勒级数。因为粒子的x多半很小，越低阶的项越重要，我们一般关心的是0阶项、一阶项、二阶项，分别由二级铁，四级铁，六级铁产生。

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{(B\rho)_0} B_{y0} & \text{(二级铁强度)} \\ K = \dfrac{1}{(B\rho)_0} \left(\dfrac{\partial B_y}{\partial x}\right)_0 & \text{（四级铁强度）} \\ \lambda = \dfrac{1}{(B\rho)_0} \left(\dfrac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}\right)_0 & \text{（六级铁强度）} \end{cases}$$

2.2横向运动标准方程及其解

若只考虑磁场，SR光源中的电子服从洛伦兹力方程

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

此时任意电子的参量 $\vec{p}$,m ,v都是常数，利用关系：

$$\vec{P} = m\vec{v} = (P/v)\vec{v} \qquad P = (1+\delta)P_0 \qquad P_0 = (1+\delta)e(B\rho)_0$$

$$\begin{cases} \frac{2}{\rho}x' + x(\frac{1}{\rho})') + \frac{\tilde{v}_z{}'}{\tilde{v}_z}(1+\frac{x}{\rho}) = \frac{v}{(1+\delta)\tilde{v}_z}\frac{1}{(B\rho)_0}(B_y x' - B_x y') \\ x'' - \frac{1}{\rho}(1+\frac{x}{\rho})) + \frac{\tilde{v}_z{}'}{\tilde{v}_z}x' = \frac{v}{(1+\delta)\tilde{v}_z}\frac{1}{(B\rho)_0}(B_z y' - B_y(1+\frac{x}{\rho})) \\ y'' + \frac{\tilde{v}_z{}'}{\tilde{v}_z}y' = \frac{v}{(1+\delta)\tilde{v}_z}\frac{1}{(B\rho)_0}(B_x(1+\frac{x}{\rho}) - B_z x') \end{cases}$$

小量假设

横向运动方程

$$\begin{cases} x'' + (K + \frac{1}{\rho^2})x = \frac{1}{\rho}\delta \\ y'' - K\,y = 0 \end{cases}$$

为了便于进一步的讨论，我们写出横向运动方程：

$$\begin{cases} x'' + (K + \dfrac{1}{\rho^2})x = \dfrac{1}{\rho}\delta \\ y'' - K\,y = 0 \end{cases}$$

利用Latttice函数，横向运动的通解可以写成下述形式：

$$\begin{cases} x = \delta\eta + \sqrt{\alpha_x \beta_x}\cos(\displaystyle\int_0^z \frac{dz}{\beta_x} + \varphi_{x0}) \\ y = \sqrt{\alpha_y \beta_y}\cos(\displaystyle\int_0^z \frac{dz}{\beta_y} + \varphi_{y0}) \end{cases}$$

附录A：希尔方程的求解-------横向振荡函数

当我们假设电子束的能散为0时，上述两个方程可以写成统一的形式：

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + K(s)y = 0$$

这个方程叫做希尔方程，它是一个具有周期性的振荡方程，由于在SR光源中平衡轨道是闭合的，因此 $K(s)$ 是以机器周长为周期的周期函数。

我们使用矩阵法来求解希尔方程：任何一个二阶微分方程的解都可以写成如下形式：

$$\begin{cases} y(s) = a\,y(s_0) + b\,y'(s_0) \\ y'(s) = c\,y(s_0) + d\,y'(s_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} y(s) \\ y'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(s_0) \\ y'(s_0) \end{bmatrix} = M(s/s_0) \begin{bmatrix} y(s_0) \\ y'(s_0) \end{bmatrix}$$

$$M(s/s_0) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

其中M是一个变换矩阵，它仅仅取决于两点间的函数$K(s)$，在分离作用聚焦结构中，它是分段常数，分别为聚焦元件，散焦元件，自由空间，边缘场等。

我们将方程的两个线性无关解写成下述形式：

$$\begin{cases} y_1(s) = A_1(s) e^{i\mu s/L} \\ y_2(s) = A_2(s) e^{-i\mu s/L} \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1(s+L) = A_1(s) \\ A_2(s+L) = A_2(s) \end{cases}$$

$$y_j(s+L) = y_j(s) e^{\pm i\mu/L} = y_j(s)(\cos\mu \pm i\sin\mu) \quad (1)$$

Twiss参数简介：

$$M=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}=M(s_0+L/s_0) \qquad DetM=1$$

任意一个行列式为1的矩阵，一定可以写成下述形式：

$$M=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\mu+\alpha\sin\mu & \beta\sin\mu \\ -\gamma\sin\mu & \cos\mu-\alpha\sin\mu \end{bmatrix}$$

$$y_j(s+L)=(\cos\mu+\alpha\sin\mu)y_j(s)+\beta\sin\mu y_j'(s) \qquad (2)$$

$$\begin{cases} m_{11}=\cos\mu+\alpha\sin\mu \\ m_{12}=\beta\sin\mu \\ m_{21}=-\gamma\sin\mu \\ m_{22}=\cos\mu-\alpha\sin\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{m_{11}-m_{22}}{2\sin\mu} \\ \beta=\dfrac{m_{12}}{\sin\mu} \\ \gamma=-\dfrac{m_{21}}{\sin\mu} \\ \cos\mu=(m_{11}+m_{22})/2 \end{cases}$$

粒子横向振荡的振幅函数

粒子每经过一个周期的相角改变量

我们给出twiss参数与聚焦参数的变化关系

$$\begin{cases} \alpha' = K\beta \\ \beta' = -2\alpha \\ \gamma' = 2K\alpha \end{cases} \qquad (3)$$

有了上述（1）（2）（3）关系式，我们可以得到下面的公式

$$\frac{y_j'(s)}{y_j(s)} = \frac{\pm i + \beta'/2}{\beta} \Longrightarrow y_j(s) = a_j\sqrt{\beta}e^{\pm i\mu}$$

2.3横向振荡的包络

$$y(s) = a\sqrt{\beta(s)}\cos(\psi + \psi_0)$$

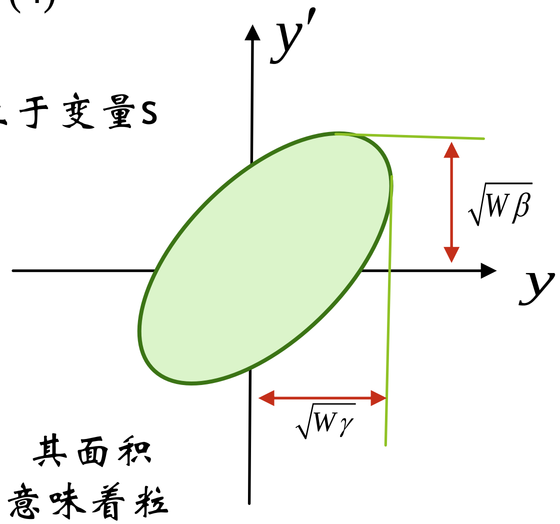
$$\psi = \int_0^s \frac{ds}{\beta} \qquad \psi_0\text{为初始相位}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y = a\sqrt{\beta}\cos(\int_0^s \frac{ds}{\beta} + \psi_0) \\ y' = \frac{\beta'}{2\beta}y - \frac{a\sqrt{\beta}}{\beta}\sin(\int_0^s \frac{ds}{\beta} + \psi_0) \end{cases}$$

$$W=\gamma y^2+2\alpha yy'+\beta y'^2 \quad (W=a^2) \qquad (4)$$

上式是一个椭圆方程，W为常数，它独立于变量s

$$\frac{dW}{ds}=0$$



方程（4）描写的是 yy'平面内的椭圆，其面积正比于W，又因为W是一个常数，这就意味着粒子在运动过程中，椭圆的面积不变。此椭圆就是粒子运动的**横向相空间**。

事实上，SR光源中束流在相空间对应的点群满足一定的统计规律，由内向外，大致满足高斯分布。

引入两个重要的统计公式：

$$<f>=\frac{\sum f}{N_e}$$

$$\sigma_f=\sqrt{<(f-<f>)^2>}$$

相空间的概念与束流整体运动的图像是粒子动力学研究的重点。

2.4色散函数简介

现在来考虑有动量分散的情况：

$$\frac{d^2x}{ds^2}+\left[K(s)+\frac{1}{\rho^2(s)}\right]x=\frac{1}{\rho(s)}\frac{\Delta P}{P}$$

方程的解依然可以写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x \\ \dfrac{dx}{ds} \\ \dfrac{\Delta P}{P} \end{bmatrix}=M(s/s_0)\begin{bmatrix} x_0 \\ (\dfrac{dx}{ds})_0 \\ \dfrac{\Delta P}{P} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ (\dfrac{dx}{ds})_0 \\ \dfrac{\Delta P}{P} \end{bmatrix}$$

根据周期性条件：

$$\begin{bmatrix} x \\ \dfrac{dx}{ds} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \eta \\ \dfrac{d\eta}{ds} \end{bmatrix}\frac{\Delta P}{P} \qquad \eta=\frac{(1-m_{22})m_{13}+m_{12}m_{23}}{2-(m_{11}+m_{22})}$$

$$\Rightarrow \quad x_\varepsilon=\eta\frac{\Delta P}{P}=\eta\frac{\Delta E}{E}=\eta\delta$$

所以又叫偏能函数，将在讨论纵向运动时起作用

3.1电子束的纵向运动

➢ 预备知识

电子束在SR光源中储存运行，，仅满足横向运动稳定性条件是不够的，在电子束的“长途旅行”中，粒子纵向坐标 z_d 和 δ 也会变化，形成粒子的纵向运动。在一定的条件下，纵向振荡也是稳定的振荡，相对于横向，纵向运动稳定性容易实现，这叫做**“自动稳相原理”**

1. SR能量损失

$$U_{rad}(\delta)=U_0+\delta\frac{dU}{d\delta}\qquad (D=\frac{dU}{d\delta}>0)$$

2. 高频电场

$$V(t)=\hat{V}\sin\varphi(t)=\hat{V}\sin\varphi\,(\,2\pi\, f_{RF}\,t+\varphi_0)$$

3. 理想粒子的稳定条件

要满足什么样的条件，理想粒子才能稳定在 $z_d=0,\quad \delta=0$ 的中心位置？

条件一：高频电场必须满足补偿SR光源损失

$$q = \frac{e\hat{V}}{U_0} > 1$$ q称为过电压因子

条件二：理想粒子通过高频电场的相位必须满足：

$$U_0 = e\hat{V}\sin(\varphi_s) \qquad \varphi_s = \arcsin(1/q)$$

条件三：高频频率必须是理想粒子回旋频率的整数倍：

$$f_{RF} = hf_c$$

4.任意粒子的纵向运动

SR光源中任意粒子的相位： $\varphi = \varphi_s + \frac{2\pi h}{L} z_d$

任意粒子穿过高频腔获得能量增益：$\Delta E(z_d) = eV(z_d) = e\hat{V}\sin\varphi = e\hat{V}\sin(\varphi_s + \frac{2\pi h}{L} z_d)$

由于高频电场的存在，环中的束流必定被分割成若干个“束团”（Bunch），每个束团由一群电子组成，束团中各有自己的同步电子，其它电子绕着这个同步电子振荡，这称为高频电场的“聚束”（Bunching）.

5.动量压缩因子

粒子的动量不同，闭合轨道的回旋周长也不同。动量压缩因子的定义为单位动量偏差的粒子的相对周长的增量。

$$\alpha=\frac{\Delta L}{\delta L}=\frac{1}{L}\oint\frac{\eta}{\rho}dz$$

动量压缩因子由横向聚焦结构决定，却在纵向运动中扮演重要作用。

3.2纵向运动方程及其解

$$\begin{cases}\Delta z_d=-\alpha L\delta \\ \Delta\delta=\dfrac{1}{E_0}\left[eV(z_d)-U_{rad}(\delta)\right]\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{dz_d}{dt}=-\alpha c\delta \\ \dfrac{d\delta}{dt}=\dfrac{1}{T_cE_0}\left[eV(z_d)-U_0-\dfrac{dU}{d\delta}\delta\right]\end{cases}$$

$$\frac{d^2z_d}{dt^2}+2\alpha_s\frac{dz_d}{dt}+F(z_d)=0 \qquad (\alpha_s=\frac{1}{2T_cE_0}\frac{dU}{d\delta} \qquad F(z_d)=\frac{\alpha c}{T_cE_0}(e\hat{V}\sin(\varphi_s+\frac{2\pi h}{L}z_d)-U_0))$$

纵向运动方程

小振幅纵向振荡

假设 z_d 为小量，将 $F(z_d)$ 展开，并略去二阶项，就得到 z_d 满足的线性奇次二阶微分方程

$$\frac{d^2 z_d}{dt^2}+2\alpha_s\frac{dz_d}{dt}+\Omega^2 z_d=0 \qquad (\Omega^2=(\frac{dF}{dz_d})_{z_d=0}=\frac{2\pi e}{T^2{}_c E_0}\alpha h\hat{V}\cos\varphi_s)$$

若忽略方程的阻尼项，方程变成简谐运动，其解为：

$$\begin{cases} z_d=Z_M\cos(\Omega t+\varphi_0) \\ \delta=\dfrac{\Omega}{\alpha c}Z_M\sin(\Omega t+\varphi_0) \end{cases}$$

大振幅纵向振荡

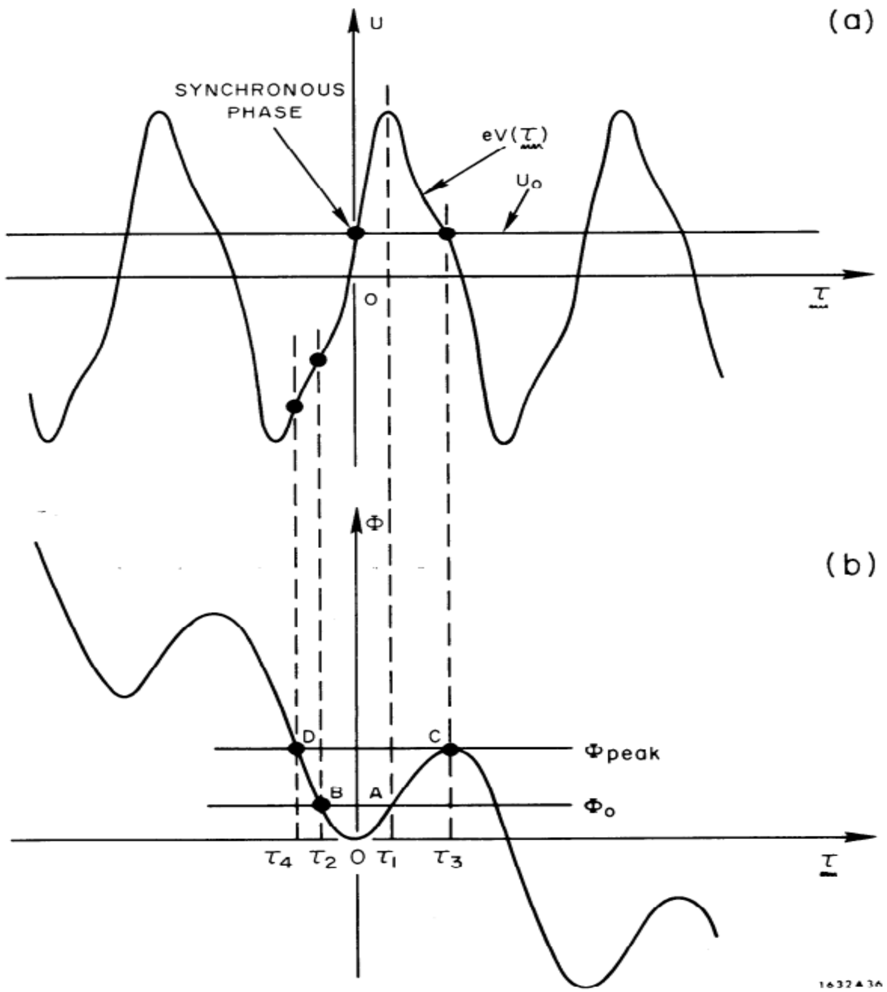
讨论大振幅振荡的重点是研究电子纵向振荡的宏观图像和多大振幅会造成振荡不稳定。对纵向运动方程积分，得到类“机械能守恒”的能量关系：

$$\frac{1}{2}(\frac{dz_d}{dt})^2+\phi(z_d)=const=\phi_M$$

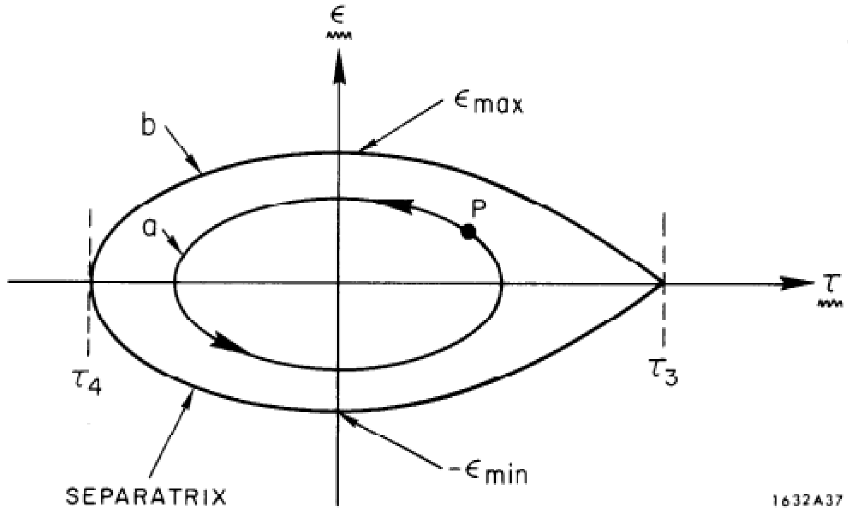
纵向振荡的特点

(a) 表示电子纵向位置与能量增益的关系。

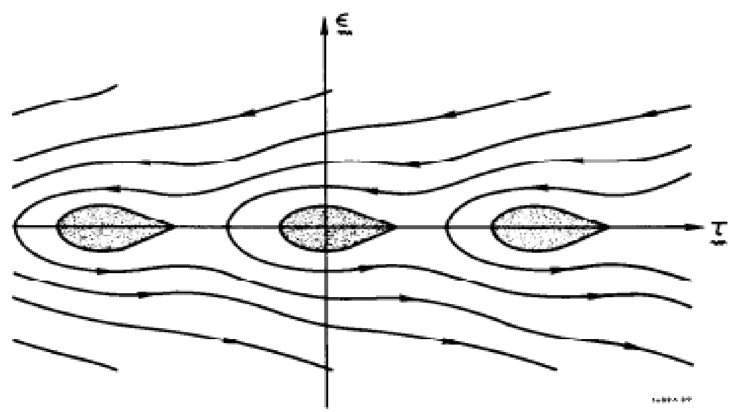
(b) 表示电子纵向位置与势能变化的关系。



（c）表示电子纵向位置与动量相对偏差的关系。



（d）表示不同束团电子纵向位置与动量相对偏差的关系



Thank you！

第一讲 完

1. 尹真 《电动力学》
2. 刘祖平《同步辐射光源物理引论》
3. 金玉明《 电子储存环物理》