# 综合测试 1

一、填空题(每小题 3 分,共 15 分).

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=$ <u>2.</u>.

2. 曲线 $y=2(x-1)^2$ 在 $x=$______处具有最小曲率半径 $R=$______.

3. 设 $f(x)$为已知的连续函数,则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}(x^2-t)f(t)\mathrm{d}t=$ <u>$2x\int_0^{x^2}f(t)dt$</u>.

$e^a$

4. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{-\infty}^{a}te^t\mathrm{d}t$,则常数 $a=$ <u>2.</u>.

5. 已知曲线上任一点处的二阶导数 $y''=6x$,且在曲线上点$(0,-2)$处的切线为 $2x-3y=6$,则这条曲线方程为 <u>$y=x^3+\frac{2}{3}x-2$.</u>

$y'_{x=0}=\frac{2}{3}$

$3x^2+C_1$

$x^3+C_1x$ $-2$.

二、选择题(每小题 3 分,共 18 分).

1. 设 $\alpha(x)=\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, $\beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$,则当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)$是$\beta(x)$的( ). C

$\frac{5}{e}$

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小

C. 同阶但不等价的无穷小　　D. 等价无穷小

2. 设函数 $f(x)$对任意 $x$ 均满足 $f(1+x)=af(x)$,且有 $f'(0)=b$,其中 $a,b$ 为非零常数,则( D)

A. $f(x)$在 $x=1$ 处不可导　　B. $f(x)$在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=a$

C. $f(x)$在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=b$　　D. $f(x)$在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=ab$

3. 若 $F(x)=\int_0^x(2t-x)f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)$在区间$(-1,1)$上二阶可导,且 $f'(x)>0$,则( ). C

A. 函数 $F(x)$必在 $x=0$ 处取得极大值

B. 函数 $F(x)$必在 $x=0$ 取得极小值

C. 函数 $F(x)$在 $x=0$ 处没有极值,但点$(0,F(0))$为曲线 $y=F(x)$的拐点

D. 函数 $F(x)$在 $x=0$ 处没有极值,点$(0,F(0))$也不是曲线 $y=F(x)$的拐点

4. 设周期函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导,周期为 4,又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,则曲线 $y=f(x)$在点$(5,f(5))$处的切线斜率为(D).

$f'(1)=-2$

A. $\frac{1}{2}$　　B. 0　　C. $-1$　　D. $-2$

曲线 $y=\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ ( ) D

A. 没有渐近线

B. 仅有水平渐近线

C. 仅有垂直渐近线

D. 既有水平渐近线又有垂直渐近线

$[-\frac{1}{2}]$

设 $f(x)$ 是连续函数,且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$,则 $f(x)=($ $)$. C

A. $\frac{x^2}{2}$

B. $\frac{x^2}{2}+2$

C. $x-1$

D. $x+2$

三、计算题(每小题 8 分,共 32 分).

1. 设 $\sqrt{x^2+y^2}=5e^{\arctan\frac{y}{x}}$,求 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y},\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$.

$\cancel{\frac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}}} = 5\cdot e^{\arctan\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}$

$x^2+y^2=25\cdot e^{2\arctan\frac{y}{x}}$

$2x+2y\cdot y'=25[2e^{2\arctan\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{\cdots}(y'x-y)$

$y=r\sin t$

$x=r\cos t$

$r=5e^t$

$y=5e^t\sin t$

$x=5e^t\cos t$

$\frac{y}{x}=\tan t$

$\frac{dx}{dy}=\frac{5e^t(\cos t-\sin t)}{5e^t(\sin t+\cos t)}=\frac{1-\tan t}{\tan t+1}=\frac{1-\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+1}=\frac{x-y}{y+x}$

$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{-2(x^2+y^2)}{(x+y)^3}$

2. 求 $\int\frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

$x=\sin t$

$\int\frac{t}{\sin^2 t}dt$

$=-\int t\,d\cot t$

$=-\frac{t\cos t}{\sin t}+\ln|\sin t|+C$

3. 设 $\begin{cases}x=\cos t^2,\\ y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u\end{cases}$,求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 在 $t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 的值.

班级________

4. 求 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\,dx$.

$\ln 1-t^2=-2x$

令 $t=\sqrt{1-e^{-2x}}$　　$1-t^2=\frac{1}{e^{2x}}$　　$x=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-t^2}$

## 四、解答题(每小题 8 分,共 16 分).

1. 求微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 的解.

$y'+\frac{2}{x}y=\ln x$

$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left[\int \ln x\cdot e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right]$

$x^{-2}\left[\int x^2\ln x\,dx+C\right]$

$\int \ln x\,d\frac{x^3}{3}$

$\frac{\ln x}{3}\cdot x^3-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx$

$\frac{x^3\ln x}{3}-\frac{1}{9}x^3+C$

$\frac{x\ln x}{3}-\frac{1}{9}x+\frac{C}{x^2}$

$\frac{3}{64}=\frac{1}{18}$

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

$\frac{1}{n}\cdot\left(n+\frac{1}{n}\right)$

$n+1$　$<\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}\cdots$

$n<n+\frac{1}{i}<n+1$

$\int_0^1\frac{\sin\pi x}{1+x}dx$　$\int_0^1\sin\pi x\,dx$

$n\to\infty$

$\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+1}$

$\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n}$

$\int_0^1\sin x\pi\,dx$

$\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+i}$　$\frac{1}{n}\cdot\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{1+\frac{i}{n}}$

$\int_0^1\frac{\sin x\pi}{1+x}dx$

# 综合测试 2

一、填空题(每小题 4 分,共 20 分).

1. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$,则 $a=$ 1 , $b=$ -4 .

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\leqslant c,\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c,\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,则 $c=$ 1 .

$c^3+c-2=0$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内可导,且 $f'(x)=e^{f(x)}$,$f(2)=1$,则 $f'''(2)$ $=$ $e^2$ .

$f''(x)=e^{f(x)}\cdot f'(x)$

$=e^{2f(x)}$

4. 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$,则 $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{2}}f(x)\,dx=$ [illegible] .

5. 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=\frac{1}{x}$ .

$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$ $-\ln y=\ln x$ $\frac{1}{y}=cx$

二、选择题(每小题 4 分,共 20 分).

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续,则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}$ 的( B ).

A. 跳跃间断点　　B. 可去间断点　　C. 无穷间断点　　D. 振荡间断点

2. 当 $x\to 0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是( B ).

A. $1-e^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln(1+\sqrt{x})$　　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$,则( C ).

A. $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在　　B. $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在

C. $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在　　D. $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

4. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x)>0$,$f''(x)>0$,$\Delta x$ 为自变量 $x$ 在点 $x_0$ 处的增量,$\Delta y$ 与 $dy$ 分别为 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$,则( A ).

A. $0<dy<\Delta y$　　B. $0<\Delta y<dy$　　C. $\Delta y<dy<0$　　D. $dy<\Delta y<0$

5. 设非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x)$,$y_2(x)$,C 为任意常数,则该方程的通解是( B

A. $C[y_1(x)-y_2(x)]$　　B. $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$

C. $C[y_1(x)+y_2(x)]$　　D. $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$

五、证明题(第 1 小题 7 分,第 2 小题 12 分,共 19 分).

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,且 $\int_0^{\pi} f(x)\,dx=0$, $\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx=0$. 证明:在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 $\xi_1,\xi_2$,使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

$F(x)=\int_0^x f(x)dx.$

$F(0)=F(\pi)=0$

$\xi_1\in(0,\pi).$ $f(\xi_1)=$ $f(\xi_1)=0$

$\int_0^{\pi}$ d $\int$ $\sin x$.

$f(\xi_2)=0.$

$f(\xi_1)=0.$

$\Rightarrow\exists\xi_3$ $f(\xi_3)=0.$

2. 设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的任一非负连续函数.

(1)证明:存在 $x_0\in(0,1)$,使得在区间 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积,等于在区间 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积;

(2)设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导,且 $f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$,证明:(1)中的 $x_0$ 是唯一的.

$x_0 f(x_0)=\int_{x_0}^1 f(x)dx.$ $xf(x)-\int_x^1 f(x)dx$

$x\int_1^x f(x)dx.$ $(0,1)$

$-\int_0^1 f(x)dx.$

$(\ )'=xf(x)+\int_1^x f(x)dx=0$ $2f(x)+xf'(x)$

(2.) $F(x)=xf(x)+\int_1^x f(x)dx$

$F'(x)=2f(x)+xf'(x)>0.$

$\therefore F(x)\uparrow$

唯一根 $F(x_0)$.