数学分析习题及其解答

持续更新

作者：迷途小书童

组织：Institute of Mathematics

时间：October 11, 2025

版本：第 5 次修正

Marie Curie：Life is not easy for any of us. But what of that?

We must have perseverance and above all confidence in ourselves.

We must believe that we are gifted for something and that this thing must be attained.

作者联系方式：learnweierstrass@gmail.com

目录

序言

此习题集的最大特点是：

1. 体系结构是全新的；
2. 题型新颖；
3. 习题侧重于理论上的证明；
4. 既适合于数学各专业的本科学生，也可以作为考研的深化训练. 研究生的学习及相应教师教学的参考书.

值得进一步指出的是：本书收集的习题，大部分都具有相当的难度. 有很多的习题还是书本内容的扩充及相关结论的总结. 因此读者将从本习题集中了解到许多新的知识和概念，这无疑对扩大知识面及培养读者独立分析问题和解决问题的能力会有一定的帮助.

第一章 集合与映射

习题 1

1. 设 X 是一非空集合，$A, B, C, D \subset X$ 都是非空子集.

1) 证明 $A - B = A \cap B^c$.

2) 利用 1) 的关系式，证明：

i) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

ii) $A - (B \cup C) = (A - B) - C$.

iii) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.

iv) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

v) $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$.

3) 指出使 $(A - B) \cup C = A - (B - C)$ 成立的充要条件.

证明：1)、2) 从略.

3)

$$\begin{aligned}(A - B) \cup C = A - (B - C) &\Leftrightarrow (A - B) \cup C = A - (B \cap C^c)\\ &\Leftrightarrow (A - B) \cup C = (A - B) \cup (A - C^c)\\ &\Leftrightarrow (A - B) \cup C = (A - B) \cup (A \cap C).\end{aligned}$$

若 $C \subset A$，则 $A \cap C = C$，因此 $(A - B) \cup C = (A - B) \cup (A \cap C)$ 即

$$(A - B) \cup C = A - (B - C).$$

若 $C \not\subset A$，则 $A \cap C \subset C$ 且 $A \cap C \neq C$，因此

$$(A - B) \cup (A \cap C) \subset (A - B) \cup C \text{ 且 } (A - B) \cup (A \cap C) \neq (A - B) \cup C,$$

故使 $(A - B) \cup C = A - (B - C)$ 成立的一个充要条件是 $C \subset A$.

2. 设 $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是一非空集族.

1) 令 $A_0 = E_0, A_1 = E_1 - E_0, \cdots, A_n = E_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k (\forall n \in \mathbb{N})$，证明：

$$A_n \cap A_m = \varnothing (n \neq m) \text{ 且 } \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} E_k (\forall n \in \mathbb{N}).$$

2) 证明：$\forall n \in \mathbb{N}$.

$$E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = (E_1 - E_2) \cup \cdots (E_{n-1} - E_n) \cup (E_n - E_1) \cup \left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k \right).$$

3) 若 $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是下降的，即 $\forall n \in \mathbb{N}, E_{n+1} \subset E_n$，证明：

$$(E_n - E_{n+1}) \cap (E_m - E_{m+1}) = \varnothing \quad (\forall n, m \in \mathbb{N} \text{ 且 } n \neq m).$$

$$E_1 = (E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_3) \cup \cdots \cup (E_n - E_{n+1}) \cup \cdots \cup \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \right).$$

证明：1) 设 $n, m \in \mathbb{N}$ 且 $m > n$，由于 $E_n \subset \bigcup_{k=1}^{m-1} E_k$，故

$$A_n \cap A_m = \left(E_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k \right) \cap \left(E_m - \bigcup_{k=1}^{m-1} E_k \right) \subset E_n \cap \left(E_m - \bigcup_{k=1}^{m-1} E_k \right) = \varnothing.$$

其次, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = E_1 \cup (E_2 - E_1) \cup (E_3 - E_1 \cup E_2) \cup \cdots \cup \left(E_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right) \subset \bigcup_{k=1}^{n} E_k,$$

反之, 设 $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$. 则存在 $k \in \{1,2,\cdots n\}$ 使得 $x \in E_k$. 令 $l = \min\{k \mid x \in E_k\}$, 那么 $l \in \{1,2,\cdots n\}$ 并且 $x \in E_l$, 但 $x \notin E_i, i < l$(若 $l > 0$). 因此 $x \in E_l - \bigcup\limits_{k=1}^{l-1} E_k$, 即 $x \in A_l$ 从而 $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. 换言之, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$.

2) 显然 $\forall n \in \mathbb{N}$ 有

$$(E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_3) \cup \cdots \cup (E_{n-1} - E_n) \cup (E_n - E_1) \cup \left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k\right) \subset \bigcup_{k=1}^{n} E_k,$$

反之, 设 $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$. 若 $\forall k \in \{1,2,\cdots n\}, x \in E_k$, 则 $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} E_k$, 否则存在 $k \in \{1,2,\cdots n\}$ 使得 $x \notin E_k$. 另一方面, 由于 $\exists m \in \{1,2,\cdots n\}$ 使得 $x \in E_m$, 故 $\exists l \in \{1,2,\cdots n\}$ 使得 $x \in E_l - E_{l+1}$, 这里当 $l = n$ 时, $E_{n+1} = E_1$. 因此

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k \subset \bigcup_{k=1}^{n-1} (E_k - E_{k+1}) \cup (E_n - E_1) \cup \left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k\right).$$

3) 显然当 $n \neq m$ 时, $(E_n - E_{n+1}) \cap (E_m - E_{m+1}) = \varnothing$. 由于 $E_{n+1} \subset E_n$, 故只需证明

$$E_1 \subset \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n - E_{n+1})\right) \cup \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right).$$

若 $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$, 则结论成立; 若 $x \notin \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$, 则存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $x \notin E_{n_0}$. 于是存在 $l \in \{1,2,\cdots n\}$, 使得 $x \in E_l - E_{l+1}$.

3. 设 A, B, C 是三个非空集合. 我们记 $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, 并称为 A 与 B 的对称差. 证明:

1)$A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

2)$A\Delta(A \cap B) = A - B$.

3)$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.

4)$A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.

5)$A\Delta B\Delta(A \cap B) = A \cup B$.

证明: 1)

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

2)

$$A\Delta(A \cap B) = (A - A \cap B) \cup (A \cap B - B) = A - B$$

3)

$$\begin{aligned} A \cap (B\Delta C) &= A \cap (B \cup C - B \cap C) = A \cap (B \cup C) - A \cap B \cap C \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C) - (A \cap B) \cap (A \cap C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C) \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} x \in A - B\Delta C &\Leftrightarrow x \in A \text{且 } x \notin B\Delta C = (B - C) \cup (C - B) \\ &\Leftrightarrow x \in A; \quad x \in B \cap C, \text{ 或 } x \notin B \text{ 且 } x \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in A - B - C \text{ 或 } x \in A \cap B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in (A - B - C) \cup (A \cap B \cap C), \end{aligned}$$

即

$$A - B\triangle C = (A - B - C) \cup (A \cap B \cap C).$$

于是

$$\begin{aligned}
A\Delta(B\Delta C) &= (A - B\Delta C) \cup (B\Delta C - A) \\
&= (A - B - C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (B - C - A) \cup (C - B - A) \\
&= (A - B - C) \cup (B - A - C) \cup (C - A - B) \cup (A \cap B \cap C) \\
&= ((A - B) - C) \cup (B - A) - C) \cup (C - A\Delta B) \\
&= (A\Delta B - C) \cup (C - A\Delta B) \\
&= (A\Delta B)\Delta C
\end{aligned}$$

即

$$A\triangle(B\triangle C) = (A\triangle B)\triangle C$$

5)

$$\begin{aligned}
A\Delta B\Delta(A \cap B) &= (A\Delta B)\Delta(A \cap B) = (A \cup B - A \cap B)\Delta(A \cap B) \\
&= [(A \cup B - A \cap B) \cup (A \cap B)] - [(A \cup B - A \cap B) \cap (A \cap B)] \\
&= A \cup B - \varnothing = A \cup B
\end{aligned}$$

4. 设 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 是两个关系，证明：

1)$\left(\mathscr{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathscr{A}$.

2)$(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})^{-1} = \mathscr{A}^{-1} \cup \mathscr{B}^{-1}$.

3)$(\mathscr{A} \cap \mathscr{B})^{-1} = \mathscr{A}^{-1} \cap \mathscr{B}^{-1}$.

4)$(\mathscr{A} \circ \mathscr{B})^{-1} = \mathscr{B}^{-1} \circ \mathscr{A}^{-1}$.

证明：1)$\left(\mathscr{A}^{-1}\right)^{-1} = \left\{(x, y) \mid y\mathscr{A}^{-1}x\right\} = \{(x, y) \mid x\mathscr{A}y\} = \mathscr{A}$.

2)

$$\begin{aligned}
(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})^{-1} &= \{(x, y) \mid y(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})x\} = \{(x, y) \mid y\mathscr{A}x \text{ 或 } y\mathscr{B}x\} \\
&= \{(x, y) \mid y\mathscr{A}x\} \cup \{(x, y) \mid y\mathscr{B}x\} \\
&= \left\{(x, y) \mid x\mathscr{A}^{-1}y\right\} \cup \left\{(x, y) \mid x\mathscr{B}^{-1}y\right\} \\
&= \mathscr{A}^{-1} \cup \mathscr{B}^{-1}.
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
(\mathscr{A} \cap \mathscr{B})^{-1} &= \{(x, y) \mid y(\mathscr{A} \cap \mathscr{B})x\} = \{(x, y) \mid y\mathscr{A}x \text{ 且 } y\mathscr{B}x\} \\
&= \{(x, y) \mid y\mathscr{A}x\} \cap \{(x, y) \mid y\mathscr{B}x\} \\
&= \left\{(x, y) \mid x\mathscr{A}^{-1}y\right\} \cap \left\{(x, y) \mid x\mathscr{B}^{-1}y\right\} \\
&= \mathscr{A}^{-1} \cap \mathscr{B}^{-1}.
\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
(\mathscr{A} \circ \mathscr{B})^{-1} &= \{(x, y) \mid y(\mathscr{A} \circ \mathscr{B})x\} = \{(x, y) \mid \exists z \text{ 使得 } y\mathscr{B}z, z\mathscr{A}x\} \\
&= \left\{(x, y) \mid \exists z \text{ 使得 } x\mathscr{A}^{-1}z, z\mathscr{B}^{-1}y\right\} \\
&= \mathscr{B}^{-1} \circ \mathscr{A}^{-1}.
\end{aligned}$$

5. 设 E 是一无限集. $\mathscr{P}(E)$ 是 E 的所有子集的集合，而 $\Omega(E) \subset \mathscr{P}(E)$ 是如下定义的子集：

$$\Omega(E) = \{A \in \mathscr{P}(E) \mid E - A \text{ 是有限子集 }\},$$

我们定义 $\mathscr{P}(E)$ 上的关系 $\mathscr{R}$ 为：

$$\forall X, Y \in \mathscr{P}(E), X\mathscr{R}Y \Leftrightarrow \exists A \in \Omega(E) \text{ 使得 } X \cap A = Y \cap A.$$

1) 证明 $\mathscr{R}$ 是 $\mathscr{P}(E)$ 上的等价关系.

2) 证明：$\forall X,Y\in\mathscr{P}(E), X\mathscr{R}Y \Leftrightarrow X\Delta Y$ 是有限子集.

证明： 1) 自反性：$\forall X\in\mathscr{P}(E), \exists E\in\Omega(E)$ 使得 $X\cap E=X\cap E$，故 $X\mathscr{R}X$.

对称性：$\forall X,Y\in\mathscr{P}(E), X\mathscr{R}Y\Rightarrow\exists A\in\Omega(E)$ 使得 $X\cap A=Y\cap A\Rightarrow Y\mathscr{R}X$.

传递性：$\forall X,Y,Z\in\mathscr{P}(E), X\mathscr{R}Y, Y\mathscr{R}Z$，于是 $\exists A,B\in\Omega(E)$ 使得 $X\cap A=Y\cap A, Y\cap B=Z\cap B$, 由此得 $X\cap(A\cap B)=Z\cap(A\cap B)$. 由于 $E-(A\cap B)=(E-A)\cup(E-B)$ 为有限集，故 $A\cap B\in\Omega(E)$，从而 $X\mathscr{R}Z$. 因此 $\mathscr{R}$ 是 $\mathscr{P}(E)$ 上的一个等价关系.

2) 设 $X,Y\in\mathscr{P}(E)$ 且 $X\mathscr{R}Y$. 那么 $\exists A\in\Omega(E)$ 使得 $X\cap A=Y\cap A$. 因此

$$E-X\cap A=E-Y\cap A \text{ 或 } (E-X)\cup(E-A)=(E-Y)\cup(E-A).$$

由此得

$$X\cap[(E-X)\cup(E-A)=X\cap[(E-Y)\cup(E-A)].$$

或

$$[X\cap(E-X)]\cup[X\cap(E-A)]=[X\cap(E-Y)]\cup[X\cap(E-A)].$$

因此

$$X\cap(E-A)=[X\cap(E-Y)]\cup[X\cap(E-A)]=(X-Y)\cup[X\cap(E-A)].$$

由此推出 $X-Y\subset X\cap(E-A)\subset E-A$. 因此 $X-Y$ 也是有限集. 由对称性知，$Y-X$ 也是有限集. 因此 $X\Delta Y=(X-Y)\cup(Y-X)$ 也是有限集.

反之，若 $X\Delta Y$ 是有限集. 那么 $E-X\Delta Y\in\Omega(E)$. 并且

$$\begin{aligned}
X\cap(E-X\Delta Y)&=X\cap[E-((X-Y)\cup(Y-X))]\\
&=X\cap[E-(X-Y)]\cap[E-(Y-X)]\\
&=X\cap[(E-X)\cup(E\cap Y)]\cap[(E-Y)\cup(E\cap X)]\\
&=X\cap[(E-X)\cup Y]\cap[(E-Y)\cup X]\\
&=[(X\cap(E-X))\cup(X\cap Y)]\cap[(E-Y)\cup X]\\
&=[(X\cap Y)\cap(E-Y)]\cup[(X\cap Y)\cap X]\\
&=X\cap Y.
\end{aligned}$$

由对称性得 $Y\cap(E-X\Delta Y)=X\cap Y$，因此

$$X\cap(E-X\Delta Y)=Y\cap(E-X\Delta Y),$$

此即 $X\mathscr{R}Y$.

6. 设 E 是一非空集合，A 是 E 的一子集，$\mathscr{P}(E)$ 上的关系 $\mathscr{R}$ 定义如下：

$$\forall X,Y\in\mathscr{P}(E), X\mathscr{R}Y\Leftrightarrow X\cup A=Y\cup A.$$

我们考虑如下定义的映射 $f:\mathscr{P}(E)\to\mathscr{P}(E-A)$：

$$\forall X\in\mathscr{P}(E), f(X)=X\cap(E-A).$$

1) 证明 f 在所有的等价类上是常数.

2) 写出 f 的标准分解.

证明： 1) 首先易证 $\mathscr{R}$ 是 $\mathscr{P}(E)$ 上的一个等价关系. 现设 $\tilde{X}$ 是 $X\in\mathscr{P}(E)$ 关于 $\mathscr{R}$ 的一等价类. $\forall Y\in\tilde{X}$，有：

$$\begin{aligned}
f(X)&=X\cap(E-A)=X\cap E-X\cap A=X-X\cap A=X-A,\\
f(Y)&=Y\cap(E-A)=Y\cap A.
\end{aligned}$$

由于 $X\mathscr{R}Y$，故 $X\cup A=Y\cup A$. 从而

$$\begin{aligned}(X\cup A)-A=(Y\cup A)-A &\Rightarrow (X-A)\cup(A-A)=(Y-A)\cup(A-A)\\ &\Rightarrow X-A=Y-A.\end{aligned}$$

因此 $f(X)=f(Y)$. 此即 f 在每一个等价类上取常值.

2) f 的标准分解为 $f=i\circ\tilde{f}\circ\varphi$，这里

$$i:\mathrm{Ima}(f)\to\mathscr{P}(E-A),\varphi:\mathscr{P}(E)\to\mathscr{P}(E)/\mathscr{R},\tilde{f}:\mathscr{P}(E)/\mathscr{R}\to\mathrm{Ima}(f),$$

定义如下：

$$\forall Y\in\mathrm{Ima}(f),i(Y)=Y,$$

$$\forall X\in\mathscr{P}(E),\varphi(X)=\widetilde{X}\in\mathscr{P}(E)/\mathscr{R},$$

$$\forall\widetilde{X}\in\mathscr{P}(E)/\mathscr{R},\widetilde{f}(\widetilde{X})=X\cap(E-A).$$

于是下述图式可交换：

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{P}(E) & \xrightarrow{f} & \mathscr{P}(E-A)\\ \varphi\big\downarrow & & \big\downarrow i\\ \mathscr{P}(E)/\mathscr{R} & \xrightarrow[\tilde{f}]{} & \mathrm{Ima}\,(f)\end{array}$$

7. 设 E,F 是两个非空集合，分别赋予了等价关系 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$. 我们定义 $E\times F$ 上的关系 $\mathscr{R}$ 如下：

$$\forall(x,y),\left(x',y'\right)\in E\times F,(x,y)\mathscr{R}\left(x',y'\right)\Leftrightarrow x\mathscr{A}x' \text{ 且 } y\mathscr{B}y'.$$

1) 证明 $\mathscr{R}$ 是一等价关系.

2) 证明存在一个自然的单全射 $f:(E\times F)/\mathscr{R}\to(E/\mathscr{A})\times(F/\mathscr{B})$.

证明：1) 显然 $\mathscr{R}$ 是 $E\times F$ 上的一个等价关系.

2) 设 $\varphi:E\to E/\mathscr{A},\psi:F\to F/\mathscr{B}$ 是两个标准投影，即

$$\forall x\in E,\forall y\in F,\varphi(x)=x\bmod(\mathscr{A}),\psi(y)=y\bmod(\mathscr{B}).$$

定义映射 $T:E\times F\to(E/\mathscr{A})\times(F/\mathscr{B})$ 如下：

$$\forall(x,y)\in E\times F,T(x,y)=(x\bmod(\mathscr{A}),y\bmod(\mathscr{B})).$$

由于 φ 与 ψ 都是全射，故 T 也是全射. 因此 $\mathrm{Ima}(T)=(E/\mathscr{A})\times(F/\mathscr{R})$.

现在考虑 T 的标准分解：$T=i\circ\widetilde{T}\circ\varphi$，即下列可交换图式：

$$\begin{array}{ccc}E\times F & \xrightarrow{T} & (E/\mathscr{A})\times(F/\mathscr{B})\\ \varphi\big\downarrow & & \big\downarrow i\\ (E\times F)/\mathscr{R} & \xrightarrow[\widetilde{T}]{} & \mathrm{Ima}\,(T)\end{array}$$

我们证明 $\widetilde{T}:(E\times F)/\mathscr{R}\to(E/\mathscr{A})\times(F/\mathscr{B})=\mathrm{Ima}(T)$ 是单全射. 事实上，$\forall(x\bmod(\mathscr{A}),y\bmod(\mathscr{B}))\in(E/\mathscr{A})\times(F/\mathscr{B}),(x,y)\in E\times F$，因此 $(x,y)\bmod(\mathscr{R})\in E\times F/\mathscr{R},\widetilde{T}((x,y)\bmod(\mathscr{R}))=(x\bmod(\mathscr{A}),y\bmod(\mathscr{B}))$ 此即 $\widetilde{T}$ 是全射. 其次，若 $(x,y)\bmod(\mathscr{R}),\left(x',y'\right)\bmod(\mathscr{R})\in E\times F/\mathscr{R}$ 使得 $\widetilde{T}((x,y)\bmod(\mathscr{R}))=\widetilde{T}\left(\left(x',y'\right)\bmod(\mathscr{R})\right)$，那么 $(x\bmod(\mathscr{A}),y\bmod(\mathscr{B}))=\left(x'\bmod(\mathscr{A}),y'\bmod(\mathscr{B})\right)$. 由此得 $x\bmod(\mathscr{A})=x'\bmod(\mathscr{A}),y\bmod(\mathscr{B})=y'\bmod(\mathscr{B})$，也即 $x\mathscr{A}x',y\mathscr{B}y'$. 因此 $(x,y)\mathscr{R}\left(x',y'\right)$ 或 $(x,y)\bmod(\mathscr{R})=\left(x',y'\right)\bmod(\mathscr{R})$. 此即 $\widetilde{T}$ 是单射. 因此 $\widetilde{T}$ 是从 $(E\times F)/\mathscr{R}$ 到 $(E/\mathscr{A})\times(F/\mathscr{B})$ 上的单全射.

8. 设 E 是一非空集合. $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 是 E 上的两个等价关系. 我们称 $\mathscr{B}$ 比 $\mathscr{A}$ 细，当且仅当 $(\forall x\in E),(\forall y\in E),x\mathscr{B}y\Rightarrow x\mathscr{A}y$. 我们考虑这样两个等价关系 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 使得 $\mathscr{B}$ 比 $\mathscr{A}$ 细.

1) 验证任一 $\mathrm{mod}(\mathscr{B})$ 等价类被包含在惟一的一个 $\mathrm{mod}(\mathscr{A})$ 中.

2) 设 $f : E/\mathscr{B} \to E/A$ 是一映射, 定义为:

$$\forall X \in E/\mathscr{B}, f(X) = Z \bmod (\mathscr{A}) \text{ 这里 } X \in Z.$$

验证 f 是全射.

3) 设 $\mathscr{R}$ 是 $E/\mathscr{R}$ 上由 f 如下定义的等价关系:

$$\forall X, Y \in E/\mathscr{B}, X\mathscr{R}Y \Leftrightarrow f(X) = f(Y).$$

由 2) 推出商集 $(E/\mathscr{B})/\mathscr{R}$ 与 $E/\mathscr{A}$ 之间的一个自然单全射.

证明: 1) 设 $x \bmod (\mathscr{B})$ 是 x 关于 $\mathscr{B}$ 的等价类. 那么:

$$\forall y \in x \bmod (\mathscr{B}), x\mathscr{B}y \Rightarrow x\mathscr{A}y \Rightarrow y \in x \bmod (\mathscr{A}).$$

由此推得 $x \bmod (\mathscr{B}) \subset x \bmod (\mathscr{A})$.

现在假设 $x \bmod (\mathscr{B}) \subset x' \bmod (\mathscr{A})$. 那么 $x \in x' \bmod (\mathscr{A}), x\mathscr{A}x'$ 从而 $x \bmod (\mathscr{A}) = x' \bmod (\mathscr{A})$. 此即表明 $x \bmod (\mathscr{B})$ 被包含在惟一的一个等价类 $\bmod(\mathscr{A})$ 中.

2) 根据 1), $\forall X \in E/\mathscr{B}$, 存在惟一的 $Z \in E/\mathscr{A}$ 使得 $X \subset Z$. 因此映射 $f : E/\mathscr{B} \to E/\mathscr{A}$, $X \mapsto Z$ 完全有定义. 现在设 $Z \in E/\mathscr{A}$ 且 $x \in Z$. 我们令: $X = x \bmod (\mathscr{B})$. 那么

$$\forall y \in X, x\mathscr{B}y \Rightarrow x\mathscr{A}y.$$

由此得 $y \in Z$, 即 $X \subset Z$. 因此 $f(X) = Z$. 从而 f 是满射. 即 $\mathrm{Ima}(f) = E/A$.

3) 易证, $\mathscr{R}$ 是 $E/\mathscr{B}$ 上的一个等价关系. 因此 f 在每一个等价类 $\bmod(\mathscr{R})$ 上取常值. 考虑 f 的标准分解: $f = i \circ \tilde{f} \circ \varphi$, 即下述可交换图式:

$$\begin{tikzcd}
E \times \mathscr{B} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & E/\mathscr{A} \arrow[d, "i"] \\
(E \times \mathscr{B})/\mathscr{R} \arrow[r, "\tilde{f}"'] & \mathrm{Ima}\,(f)
\end{tikzcd}$$

这里 $\tilde{f} : (E/\mathscr{B})\mathscr{R} \to \mathrm{Ima}(f) = E/\mathscr{A}$ 定义为:

$$\forall X \bmod (\mathscr{R}) \in (E/\mathscr{B})/\mathscr{R}, \tilde{f}(X \bmod (\mathscr{R})) = f(X),$$

它是单全射.

9. 设 E 与 F 是两个非空集合. 我们考虑所有 (X, f) 的集合 $\Phi_{E,F}$, 这里 $X \subset E, f : X \to F$ 是一映射, 在 $\Phi_{E,F}$ 上我们定义关系 $\leqslant$ 如下:

$$\forall (X, f), (Y, g) \in \Phi_{E,F}, (X, f) \leqslant (Y, g) \Leftrightarrow X \subset Y, g \mid x = f.$$

1) 证明 $\leqslant$ 是 $\Phi_{E,F}$ 上的一个序关系.

2) 它的最大元素是哪些?

证明: 1) 自反性: $\forall (X, f) \in \Phi_{E,F} (X, f) \leqslant (X, f)$.

反对称性: 设 $(X, f), (Y, g) \in \Phi_{E,F}$ 且 $(X, f) \leqslant (Y, g), (Y, g) \leqslant (X, f)$. 那么 $X \subset Y, g|X = f$; $Y \subset X, f|Y = g$. 由此得 $X = Y, f = g$. 因此 $(X, f) = (Y, g)$.

传递性: 设 $(X, f), (Y, g), (Z, h) \in \Phi_{E.F}$ 且 $(X, f) \leqslant (Y, g), (Y, g) \leqslant (Z, h)$. 那么 $X \subset Y, g|X = f, Y \subset Z, h|Y = g$. 由此得 $X \subset Z, h|X = (h \mid Y)|X = g \mid X = f$. 因此 $(X, f) \leqslant (Z, h)$. 因此 $\leqslant$ 是 $\Phi_{E,F}$ 上的一个序关系.

2) 设 $(X, f) \in \Phi_{E,F}$. 我们令: $A = \{(Y, g) \in \Phi_{E,F} \mid (X, f) \leqslant (Y, g)\}$, 并定义 A 的一个子集 B 为:

$$\forall (Y, g), (Z, h) \in B \Leftrightarrow (Y, g) \leqslant (Z, h) \text{ 或 } (Z, h) \leqslant (Y, g).$$

显然, $B \neq \varnothing$, 因为 $(X, f) \in B$. 为确定起见, 我们记 $B = \{(Y_\lambda, g_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$. 并令 $W = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$, 那么 $X \subset W$.

现在定义映射 $k : W \to F$ 如下: $\forall x \in W, \exists \lambda \in \Lambda$ 使得 $x \in Y_\lambda$, 那么 $k(x) = g_\lambda(x)$. 映射 k 完全有定义.

事实上，对 $x \in W$，若 $\exists \lambda, \mu \in \Lambda$ 使得 $x \in Y_\lambda, x \in Y_\mu$，那么 $(Y_\lambda, g_\lambda) \leqslant (Y_\mu, g_\mu)$ 或 $(Y_\mu, g_\mu) \leqslant (Y_\lambda, g_\lambda)$. 为确定起见，假设 $(Y_\lambda, g_\lambda) \leqslant (Y_\mu, g_\mu)$. 于是 $Y_\lambda \subset Y_\mu, g_\mu \mid Y_\lambda = g_\lambda$. 从而

$$g_\lambda(x) = g_\mu(x) \Rightarrow k(x) = g_\lambda(x) = g_\mu(x)$$

显然 $(W, k) \in \Phi_{E,F}$. 我们证明 (W, k) 是最大元素. 事实上，设 $(Y, g) \in \Phi_{E,F}$ 使得 $(W, k) \leqslant (Y, g)$，那么 $(Y, g) \in B$，因此 $Y \subset W, k \mid Y = g$ 由此得 $(Y, g) \leqslant (W, k)$. 因此 $(Y, g) = (W, k)$.

10. 设 $(E, \leqslant)$ 是一有序集，$A, B \subset E$ 是两个子集. 我们说 (A, B) 形成 $(E, \leqslant)$ 的一个划分，当且仅当 $A \cup B = E, A \cap B = \varnothing$ 并且 $\forall x \in A, \forall y \in B, x < y$. 证明：若 (A, B) 与 (C, D) 是 $(E, \leqslant)$ 的两个划分，则 $A \subset C$ 或 $C \subset A$.

证明：用反证法. 假设 $A \not\subset C, C \not\subset A$. 那么存在 $x \in A, y \in C$ 使得 $x \notin C, y \notin A$. 可是 $x \in D$，$y \in B$. 由此推得 $x < y, y < x$，这是矛盾的. 因此 $A \subset C$ 或 $C \subset A$.

11. 设 E 是一非空集合. $\Omega \subset \mathscr{P}(E)$ 且 $E \in \Omega$. 设 $p \subset E$. 在 $\mathscr{P}(E)$ 上赋予由包含定义的序关系，并且令 $\Omega_p = \{A \in \Omega \mid p \subset A\}$.

1) 证明 Ω_p 有一个且只有一个关于包含关系的下确界，记为 $\hat{p}$.（$\hat{p}$ 称为 Ω_p 的关于包含关系的下确界，当且仅当 $\hat{p} \in \mathscr{P}(E)$ 并且 $\forall A \in \Omega_p, \hat{p} \subset A$；其次若 $B \in \mathscr{P}(E)$ 使得 $\forall A \in \Omega_p, B \subset A$，则 $B \subset \hat{p}$.）

2) 证明若 $p \in \Omega$，则 $\hat{p} = p$.

3) 证明 $\forall p \in \mathscr{P}(E), \hat{\hat{p}} = \hat{p}$.

证明：1) 令 $\hat{p} = \bigcap\limits_{A \in \Omega_p} A$. 由于 $\forall A \in \Omega_p, p \subset A$，故 $p \subset \hat{p}$，即 $\hat{p} \neq \varnothing$. 其次，$\forall A \in \Omega_p, \hat{p} \subset A$，现设 $B \in \mathscr{P}(E)$ 使得 $\forall A \in \Omega_p, B \subset A$. 那么 $B \subset \bigcap\limits_{A \in \Omega_p} A = \hat{p}$，因此 $\hat{p} = \bigcap\limits_{A \in \Omega_p} A$ 是 Ω_p 的下确界.

现在假设 Ω_p 有关于包含关系的另一个下确界 $\hat{q}$. 根据定义有：

$$\forall A \in \Omega_p, \hat{q} \subset A \Rightarrow \hat{q} \subset \hat{p}, \forall A \in \Omega_p, \hat{p} \subset A \Rightarrow \hat{p} \subset \hat{q}.$$

由此推得 $\hat{p} = \hat{q}$. 换句话说 Ω_p 有一个且只有一个下确界 $\hat{p} = \bigcap\limits_{A \in \Omega_p} A$.

2) 若 $p \in \Omega$，则 $\hat{p} = \bigcap\limits_{A \in \Omega_p} A \subset p$. 从而 $p = \hat{p}$.

3) 设 $p \in \mathscr{P}(E)$. 那么 $\hat{\hat{p}} = \bigcap\limits_{\lambda \in \Omega_{\hat{p}}} A \supset \hat{p}$. 另一方面，由于 $\Omega_p \supset \Omega_{\hat{p}}$，故

$$\hat{\hat{p}} = \bigcap_{A \in \Omega_{\hat{p}}} A \subset \bigcap_{A \in \Omega_p} A = \hat{p} \Rightarrow \hat{\hat{p}} = \hat{p}.$$

12. 设 E 是一非空集合. $f : E \to E$ 是一映射，$A \subset E$ 是一非空子集. 我们说 A 是关于 f 不变的，当且仅当 $f(A) = A$. 我们定义 $B \subset E$ 如下：$B = \{x \in E \mid \exists x_n \in E (n \in \mathbb{N})$ 使得 $x = x_1, x_n = f(x_{n-1})\}$，证明 B 是 $\mathscr{P}(E)$ 上对包含关系是关于 f 不变的最大子集.

证明：首先证明 B 关于 f 不变. 设 $x \in B$，于是 $\exists x_n \in E (n \in \mathbb{N})$ 使得 $x = x_1, x_n = f(x_{n-1})$. 那么 $x_1 \in B$，因此 $x = f(x_1) \in f(B)$，即 $B \subset f(B)$.

反之，设 $y \in f(B)$. 那么 $\exists x \in B$ 使得 $y = f(x)$. 因此，$\exists x_n \in E (n \in \mathbb{N})$ 使得 $x = x_1, x_n = f(x_{n-1})$. 令 $y_0 = f(x), y_n = f(x_n) (n \in \mathbb{N})$. 于是有：

$$y_n = f(x_n) = f(f(x_{n-1})) = f(y_{n-1}) (n \in \mathbb{N}).$$

因此，$y_0 = y \in B$，即 $f(B) \subset B$. 由此推得 $B = f(B)$，因此 B 是关于 f 不变的.

下面证明 B 是 $\mathscr{P}(E)$ 上对于包含关系是关于 f 不变的最大子集. 设 $C \subset E$ 是另一个关于 f 不变的子集，使得 $B \subset C$. 设 $x \in C$. 由于 $C = f(C)$，故 $\exists x_1 \in C$ 使得 $x = f(x_1)$. 同理，$\exists x_2 \in C$ 使 $x_1 = f(x_2)$. 如此类推，我们得到 C 的一序列 $\langle x_n \rangle$ 使得 $x = x_1, x_n = f(x_{n+1}) (\forall n \in \mathbb{N})$. 此即表明 $x \in B$. 因此 $C \subset B$. 故 $C = B$，换句话说，B 是对于 $\mathscr{P}(E)$ 上的包含关系关于 f 的最大不变子集.

13. 设有集合 E 的一子集族，以乘积 $I \times J$ 的元素为其指标，A_{ij} 是 E 的非空子集，这里 $(i, j) \in I \times J$. 设 $f : I \to J$ 是一映射并且 $\mathscr{F}$ 是所有这样的映射的族.

1) 试比较 $\bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}A_{ij}\right)$ 与 $\bigcup_{j\in J}\left(\bigcap_{i\in I}A_{ij}\right)$.

2) 证明 $\bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}A_{ij}\right)=\bigcup_{f\in\mathscr{F}}\left(\bigcap_{i\in I}A_{if(i)}\right)$.

证明: 1) 设 $x\in\bigcup_{j\in J}\left(\bigcap_{i\in I}A_{ij}\right)$. 那么 $\exists j_0\in J$ 使得 $x\in\bigcap_{i\in J}A_{ij_0}$. 因此, $x\in\bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}A_{ij}\right)$, 从而 $\bigcup_{j\in J}\left(\bigcap_{i\in I}A_{ij}\right)\subset\bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}A_{ij}\right)$. 但一般说来, 我们有 $\bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}A_{ij}\right)\not\subset\bigcup_{j\in J}\left(\bigcap_{i\in I}A_{ij}\right)$.

2) 设 $x\in\bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}A_{ij}\right)$. 那么 $\forall i\in I,x\in\bigcup_{j\in J}A_{ij}$, 因此 $\exists j(i)\in J$ 使得 $x\in A_{ij(i)}$. 若我们定义映射 $f:I\to J$ 为 $i\mapsto f(i)=j(i)$, 则 $f\in\mathscr{F},x\in A_{if(i)}$, 从而 $x\in\bigcup_{f\in\mathscr{F}}\left(\bigcap_{i\in I}A_{if(i)}\right)$, 即 $\bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}A_{ij}\right)\subset\bigcup_{f\in\mathscr{F}}\left(\bigcap_{i\in I}A_{if(i)}\right)$.

反之, 设 $x\in\bigcup_{f\in\mathscr{F}}\left(\bigcap_{i\in I}A_{if(i)}\right)$. 那么 $\exists f_0\in\mathscr{F}$ 使得 $x\in\bigcap_{i\in I}A_{if_0(i)}$. 因此 $\forall i\in I,x\in A_{if_0(i)}$. 由此得 $x\in\bigcup_{j\in J}A_{ij}$. 因此 $x\in\bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}A_{ij}\right)$, 即 $\bigcup_{f\in\mathscr{F}}\left(\bigcap_{i\in I}A_{if(i)}\right)\subset\bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}A_{ij}\right)$. 最后, 根据 Morgan 公式有:

$$E-\bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}A_{ij}\right)=\bigcup_{i\in I}\left(E-\bigcup_{j\in J}A_{ij}\right)=\bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J}(E-A_{ij})\right)$$

$$E-\bigcup_{f\in\mathscr{F}}\left(\bigcap_{i\in I}A_{if(i)}\right)=\bigcap_{f\in\mathscr{F}}\left(E-\bigcap_{i\in I}A_{if(i)}\right)=\bigcap_{f\in\mathscr{F}}\left(\bigcup_{i\in I}(E-A_{if(i)})\right)$$

因此

$$\bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J}(E-A_{ij})\right)=\bigcap_{f\in\mathscr{F}}\left(\bigcup_{i\in I}(E-A_{if(i)})\right).$$

由此得到下述对偶公式:

$$\bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J}A_{ij}\right)=\bigcap_{f\in\mathscr{F}}\left(\bigcup_{i\in I}A_{if(i)}\right)$$

14. 设 $f:X\to Y$ 是一映射. 证明下列性质是等价的:

1) f 是单射.

2) 对任一子集 $A\subset X, f^{-1}(f(A))=A$.

3) 对任两子集 $A,B\subset X, f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

4) 对任两子集 $A,B\subset X, A\cap B=\varnothing\Rightarrow f(A)\cap f(B)=\varnothing$.

5) 对任两子集 $A,B\subset X, B\subset A\Rightarrow f(A-B)=f(A)-f(B)$.

证明: 1)$\Rightarrow$ 2). 由于 $\forall A\subset X, A\subset f^{-1}(f(A))$. 故只需证明 $f^{-1}(f(A))\subset A$ 设 $x\in f^{-1}(f(A))$. 那么 $f(x)\in f(A)$. 由于 f 是单射, 故 $x\in A$, 即 $f^{-1}(f(A))\subset A$.

2) $\Rightarrow$ 3). 由于

$$f^{-1}(f(A\cap B))=A\cap B=f^{-1}(f(A))\cap f^{-1}(f(B))=f^{-1}(f(A)\cap f(B)),$$

故

$$f(A\cap B)=f(A)\cap(B(B)$$

3)$\Rightarrow$ 4) 显然.

4) $\Rightarrow$ 5) 由于 $A=(A-B)\cup B$, 故

$$f(A)=f((A-B)\cup B)=f(A-B)\cup f(B).$$

由此得

$$\begin{aligned} f(A)-f(B) &= [f(A-B)\cup f(B)]-f(B) \\ &= [f(A-B)-f(B)]\cup[f(B)-f(B)] \\ &= f(A-B)-f(A-B)\cap f(B). \end{aligned}$$

由于 $(A-B)\cap B=\varnothing$，根据 4)，$f(A-B)\cap f(B)=\varnothing$，从而

$$f(A)-f(B)=f(A-B).$$

5)$\Rightarrow$ 1). 设 $y\in f(X)$，只需证明 $f^{-1}(y)$ 是单点集. 设 $x\in f^{-1}(y)$，有：

$$f\left(f^{-1}(y)-\{x\}\right)=f\left(f^{-1}(y)\right)-f(\{x\})=\{y\}-\{y\}=\varnothing,$$

由此得

$$f^{-1}(y)-\{x\}=\varnothing,\ \text{即}\ f^{-1}(y)=\{x\}.$$

15. 设 A,B 是两集合. 我们称 A 与 B 是等势的, 当且仅当存在一单全射 $f:A\to B$.
1) 证明对任一集合 E, E 与 $\mathscr{P}(E)$ 是不等势的.
2) 证明 $(0,1),[0,1],(0,+\infty)$ 是互相等势的.
证明：1) 用反证法. 假设 E 与 $\mathscr{P}(E)$ 等势. 那么存在单全射 $f:E\to\mathscr{P}(E)$. 于是 $\forall x\in E$, $f(x)\in\mathscr{P}(E)$. 因此 $x\in f(x)$ 或 $x\notin f(x)$. 令

$$A=\{x\in E\mid x\notin f(x)\},$$

那么 $A\in\mathscr{P}(E)$. 因此 $\exists x_0\in E$ 使得 $f(x_0)=A$, 若 $x_0\in A$, 则 $x_0\notin f(x_0)$. 若 $x_0\notin A$, 则 $x_0\in f(x_0)=A$, 这都是矛盾的, 因此 E 与 $\mathscr{P}(E)$ 不等势.
2) 首先证明 $(0,1)$ 与 $[0,1]$ 等势. 事实上, 设 $\mathbb{Q}$ 为所有有理数集合. 那么 $(0,1)\cap\mathbb{Q}$ 与 $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ 是两个可数集. 于是存在两个单全射 $f:\mathbb{N}\to(0,1)\cap\mathbb{Q}$, $g:\mathbb{N}\to[0,1]\cap\mathbb{Q}$. 由此得单全射 $g\circ f^{-1}:(0,1)\cap\mathbb{Q}\to[0,1]\cap\mathbb{Q}$. 其次，$(0,1)\cap\mathbb{Q}^c=[0,1]\cap\mathbb{Q}^c$ 我们定义映射 $h:(0,1)\to[0,1]$ 如下：

$$h(x)=\begin{cases} g\circ f^{-1}(x), & \text{若 } x\in(0,1)\cap\mathbb{Q}, \\ x, & \text{若 } x\in(0,1)\cap\mathbb{Q}^c \end{cases}$$

显然 h 是单全射，因此 $(0,1)$ 与 $[0,1]$ 等势.
下面证明 $(0,1)$ 与 $(0,+\infty)$ 等势. 我们定义映射 $k:(0,1)\to(0,+\infty)$：

$$\forall x\in(0,1), k(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

那么 k 是单全射，从而 $(0,1)$ 与 $(0,+\infty)$ 等势，因此 $(0,1)$；$[0,1]$；$(0,+\infty)$ 互相等势.

16. 设 E 是一非空集合，$f:E\to E$ 是一映射，证明 f 是单射，当且仅当对任意两个映射 $h,k:E\to E$，下述性质成立：

$$f\circ k=f\circ h\Rightarrow k=h.$$

证明：假设 f 是单射. 若 $h,k:E\to E$ 使得 $f\circ k=f\circ h$，那么

$$\forall x\in E, f(k(x))=f(h(x)).$$

由 f 的单射性推知 $k(x)=h(x)$，从而 $k=h$.
反之，假设所指性质成立. 但 f 不是单射，那么必存在 $x_0,y_0\in E, x_0\neq y_0$ 使得 $f(x_0)=f(y_0)$. 设 $a\in E$ 是一固定点，我们定义两个映射 $k,h:E\to E$ 如下：

$$k(x)=\begin{cases} x, \text{若 } x\in E, x\neq a \\ x_0, \text{若 } x=a \end{cases}\qquad h(x)=\begin{cases} x, \text{若 } x\in E, x\neq a \\ y_0, \text{若 } x=a \end{cases}$$

那么 $\forall x\in E$ 且 $x\neq a, k(x)=h(x)$.

因此

$$f \circ k(x) = f \circ h(x), x \neq a.$$

$$f \circ k(a) = f(x_0) = f(y_0) = f \circ h(a).$$

因此 $f \circ k = f \circ h$. 根据假设有 $k = h$, 这显然与 k, h 的构造相矛盾. 因此 f 必为单射.

17. 设 A、B、C、D 是四个非空集合. $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D, k : C \to A$ 是四个映射.

1) 证明若 $g \circ f$ 与 $h \circ g$ 都是单全射, 则 f, g, h 都是单全射.

2) 证明若映射 $k \circ g \circ f, g \circ f \circ k, f \circ k \circ g$ 中或者两个是全射而第三个是单射, 或者两个是单射而第三个是全射, 则 f, g, k 都是单全射.

证明: 1) 首先证明 f 是单射. 设 $x, y \in A$ 使得 $f(x) = f(y)$, 那么 $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. 由于 $g \circ f$ 为单射, 故 $x = y$, 因此 f 为单射.

其次证明 f 是全射. 如果 $f(A) \neq B$, 那么 $\exists b \in B$ 使得 $b \notin f(A)$. 令 $c = g(b)$. 由于 $g \circ f : A \to C$ 为单全射, 故 $\bar{x} \in A$ 使得 $g \circ f(\bar{x}) = c$. 即 $g(f(\bar{x})) = g(b)$. 另一方面, 由于 $h \circ g$ 为单全射, 故 g 为单射. 因此 $f(\bar{x}) = b$. 这与 $b \notin f(A)$ 矛盾, 因此 f 为全射, 从而 f 为单全射得证.

最后, 由于 $g \circ f$ 为单全射, 故 g 为单全射. 而 $h \circ g$ 为单全射, 故 h 也是单全射.

2) 我们假设 $k \circ g \circ f : A \to A, g \circ f \circ k : C \to C$ 是全射而 $f \circ k \circ g : B \to B$ 为单射, 由 $f \circ k \circ g$ 的单射性推知 g 是单射, 而由 $g \circ f \circ k$ 的全射性推知 g 是全射, 因此 g 是单全射, 由此推知 $f \circ k$ 是单射.

另一方面, 由于 $g \circ f \circ k$ 是全射知 $f \circ k$ 是全射. 因此 $f \circ k$ 是单全射. 由于 $f \circ k \circ g$ 为单射, 故 $k \circ g$ 为单射而 $k \circ g \circ f$ 是全射, 故 $k \circ g$ 是全射. 因此 $k \circ g$ 是单全射. 于是有:

$$(g \text{ 是单全射}) \text{ 与 } (k \circ g \text{ 是单全射}) \Rightarrow k \text{ 是单全射},$$
$$(k \text{ 是单全射}) \text{ 与 } (f \circ k \text{ 是单全射}) \Rightarrow f \text{ 是单全射}.$$

因此 f, g, k 都是单全射.

同理, 对其他的组合情况, 可以证明 f, g, k 均为单全射.

现在假设 $k \circ g \circ f$ 与 $g \circ f \circ k$ 是单射而 $f \circ k \circ g$ 是全射.

$$\left.\begin{array}{r} k \circ g \circ f \text{ 是单射 } \Rightarrow f \text{ 是单射} \\ f \circ k \circ g \text{ 是全射 } \Rightarrow f \text{ 是全射} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ 是单全射},$$

$$\left.\begin{array}{r} g \circ f \circ k \text{ 是单射 } \Rightarrow f \circ k \text{ 是单射} \\ f \circ k \circ g \text{ 是全射 } \Rightarrow f \circ k \text{ 是全射} \end{array}\right\} \Rightarrow f \circ k \text{ 是全射}.$$

因此 k 是单全射.

$$f \text{ 是单全射}, k \circ g \circ f \text{ 是单射} \Rightarrow k \circ g \text{ 是单射},$$
$$f \text{ 是单全射}, f \circ k \circ g \text{ 是全射} \Rightarrow k \circ g \text{ 是全射}.$$

因此 $k \circ g$ 是单全射, 因而 g 也是单全射. 因此 f, g, k 都是单全射.

同理可证, 对其他组合情况, f, g, k 都是单全射.

18. 设 $E \subset \mathbb{N}$ 是一无限子集. 证明存在一个且只有一个严格上升的单全射 $f : \mathbb{N} \to E$.

证明: 首先证明惟一性. 假设存在两个单全射 $f, g : \mathbb{N} \to E$, 它们都是严格单调增加的, 那么 $g^{-1} \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是单全射并且严格单调增加. 另一方面, 映射 id: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是惟一的一个严格单调增加的单全射. 因此 $g^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ 即 $f = g$. 由此得惟一性.

下面再证存在性. 我们用归纳法构造一个严格单调增加的单全射 $f : \mathbb{N} \to E$.

令 $f(1) = \min E, f(2) = \min(E - \{f(1)\})$, 那么 $f(1) < f(2)$.

假设 $f(1), f(2), \cdots, f(n)$ 已构造满足 $f(1) < f(2) < \cdots < f(n)$. 由于 E 是无限集, 故 $E - \{f(1), f(2), \cdots, f(n)\} \neq \varnothing$. 令

$$f(n+1) = \min(E - \{f(1), f(2), \cdots, f(n)\}),$$

则我们定义了一映射 $f : \mathbb{N} \to E$.

我们证明 $f(n) < f(n+1) (\forall n \in \mathbb{N})$. 用反证法, 假设 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $f(n) \geqslant f(n+1)$, 那么必有 $f(n) > f(n+1)$.

其次, 由 $f(n+1)$ 的构造, $\forall k=1,2,\cdots,n, f(n+1)\neq f(k)$. 因此 $f(n+1)\in E-\{f(1),f(2),\cdots,f(n)\}$. 由此推得 $f(n)\leqslant f(n+1)$, 这与 $f(n)>f(n+1)$ 矛盾, 因此必有 $f(n)<f(n+1)(\forall n\in\mathbb{N})$. 从而 $f:\mathbb{N}\to E$ 是严格单调增加的, 因而是单射.

接下来证明 f 是全射. 仍用反证法.

假设 $E\neq f(\mathbb{N})$. 令 $n_0=\min(E-f(\mathbb{N}))$.

那么

$$\forall n\in\mathbb{N}, E-f(\mathbb{N})\subset E-\{f(1),f(2),\cdots,f(n)\}.$$

由此推得 $n_0=\min(E-f(\mathbb{N}))\geqslant\min(E-\{f(1),f(2),\cdots,f(n)\})=f(n+1)$. 因此 $\forall n\in\mathbb{N}, f(n+1)\leqslant n_0$, 但是 f 是严格增加的, 并且 $f(n+1)\in\mathbb{N}$, 若 n 充分大, 必有 $f(n+1)>n_0$. 此矛盾表明 $E=f(\mathbb{N})$.

因此 $f:\mathbb{N}\to E$ 是严格单调增加的单全射.

19. 设 $\mathbb{N}$ 是自然数集合,

1) 记 $\Omega(\mathbb{N})$ 为 $\mathbb{N}$ 的所有有限子集的集合. 证明 $\Omega(\mathbb{N})$ 是可数的.

2) 记 $\Phi(\mathbb{N})$ 为 $\mathbb{N}$ 的所有有限序列的集合. 证明 $\Phi(\mathbb{N})$ 是可数的.

证明: 1) 我们定义映射 $f:\Omega(\mathbb{N})\to\mathbb{N}$ 如下:

$$\forall A=\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}\in\Omega(\mathbb{N}), f(A)=i_1+i_2+\cdots+i_n,$$

显然 f 是全射. 在 $\Omega(\mathbb{N})$ 上定义关系 $\mathscr{R}$ 如下:

$$\forall A,B\in\Omega(\mathbb{N}), A\mathscr{R}B\Leftrightarrow f(A)=f(B).$$

容易证明 Ω 是 $\Omega(\mathbb{N})$ 上的一等价关系. 于是我们得到一商集 $\Omega(\mathbb{N})/\mathscr{R}$. 考虑 f 的标准分解: $f=i\circ\tilde{f}\circ\varphi$, 这里 $\tilde{f}:\Omega(\mathbb{N})/\mathscr{R}\to\mathrm{Ima}(f)=\mathbb{N}$ 定义为:

$$\forall\widetilde{A}=A\bmod(\mathscr{R})\in\Omega(\mathbb{N})/\mathscr{R}, \tilde{f}(\widetilde{A})=f(A),$$

它是单全射. 由于 $\mathbb{N}$ 是可数集, 故 $\Omega(\mathbb{N})/\mathscr{R}=(\tilde{f})^{-1}(\mathbb{N})$ 也是可数集. 我们令 $\Omega(\mathbb{N})/\mathscr{R}=\left\{\widetilde{A}_n\mid n\in\mathbb{N}\right\}$ 使得 $\tilde{f}\left(\widetilde{A}_n\right)=n(\forall n\in\mathbb{N})$. 由于 $\forall n\in\mathbb{N}$, 使 $i_1+i_2+\cdots+i_m=n$ 的自然数 i_k 的个数是有限的, 故使 $f(A)=n$ 的子集 $A\in\Omega(\mathbb{N})$ 的个数也是有限的. 因此 $\forall n\in\mathbb{N}, \varphi^{-1}\left(\widetilde{A}_n\right)\in\Omega(\mathbb{N})$ 是有限子集. 最后, 由于

$$\Omega(\mathbb{N})=\varphi^{-1}(\Omega(\mathbb{N})/\mathscr{R})=\varphi^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\widetilde{A}_n\right)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\varphi^{-1}\left(\widetilde{A}_n\right)$$

因此 $\Omega(\mathbb{N})$ 是可数集.

2) 类似可证 $\Phi(\mathbb{N})$ 是可数集.

20. 设 E 是一非空集合. 证明: 为了使 E 是无限集, 必须且只需对任一映射 $f:E\to E$, 存在子集 $A\subset E, A\neq E$ 使得有: $f(A)\subset A$.

证明: 首先假设 E 具有所指性质. 即对任一映射 $f:E\to E$, 存在一子集 $A\subset E$ 使得 $f(A)\subset A$. 若 E 是有限集, 那么 $E=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$. 考虑如下定义的置换 $f:E\to E$,

$$\forall i\in\{1,2,\cdots,n-1\}, f(a_i)=a_{i+1}, f(a_n)=a_1.$$

那么对任一子集 $A\subset E$ 且 $A\neq E$, 有 $A=\left\{a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_k}\right\}$, 这里 $k<n$, 并且

$$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n, f(A)=\left\{a_{i_1+1},a_{i_2+1},\cdots,a_{i_k+1}\right\}\not\subset A.$$

这与假设相矛盾, 因此 E 必为无限集.

反之, 假设 E 是无限集, 但所指性质不成立. 我们首先证明 E 是无限可数集. 事实上, 由于 E 不具有所指性质, 那么必存在一映射 $f:E\to E$ 使得对任一子集

$$A\subset E \text{ 且 } A\neq E, f(A)\not\subset A.$$

设 $x_1\in E$, 那么 $f(x_1)\in E-\{x_1\}$. 令 $x_2=f(x_1), A=\{x_1,x_2\}$. 由于 $f(\{x_1,x_2\})\not\subset\{x_1,x_2\}$, 故 $f(x_2)\neq x_1$. 由此得 $f(x_2)\in E-\{x_1,x_2\}$.

假设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 已构造使得

$$x_{i+1} = f(x_i) \text{ 且 } f(x_i) \in E - \{x_1, x_2, \cdots, x_i\} (i = 1, 2, \cdots, n-1).$$

我们令 $x_{n+1} = f(x_n)$. 由于 $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3, \cdots, f(x_{n-1}) = x_n$, 若 $f(x_n) \in \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 那么 $f(\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}) \subset \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 这与上述假设相矛盾.
因此 $x_{n+1} = f(x_n) \in E - \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. 由归纳法可知我们就构造了一可数集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ 使得

$$f(\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}) \subset \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} \tag{$*$}$$

若 $E \neq \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$, 那么根据假设, $f(\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}) \not\subset \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$, 这与 $(*)$ 式矛盾, 故 $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$, 也即 E 为可数集.
下面我们定义映射 $g : \mathbb{N} \to E : \forall n \in \mathbb{N}, g(n) = x_n$. 显然 g 是单全射. 我们考虑映射 $g^{-1} \circ f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 并记为 $h = g^{-1} \circ f \circ g$. 那么

$$\forall n \in \mathbb{N}, h(n) = g^{-1} \circ f \circ g(n) = g^{-1} \circ f(x_n) = g^{-1}(x_{n+1}) = n + 1.$$

另一方面, 对任一子集 $B \subset \mathbb{N}$ 且 $B \neq \mathbb{N}, g(B) = A \subset E$ 且 $A \neq E$. 根据假设 $f(A) \not\subset A$, 因此

$$g^{-1} \circ f \circ g(B) = g^{-1} \circ f(A) \not\subset g^{-1}(A) = B, \text{即 } h(B) \not\subset B.$$

但是若取 $B = \{2, 3, \cdots, n, \cdots\} \subset \mathbb{N}$, 则 $B \neq \mathbb{N}$, 并且有 $h(B) = \{3, 4, \cdots, n, \cdots\} \subset B$. 这与假设相矛盾.
因此, 若 E 为无限集, 则所指性质必成立.

第二章 实数

习题 2

1. 设 $r_0, r_1 \in \mathbb{Q}, \langle r_n \rangle$ 是如下定义的 $\mathbb{Q}$ –序列：
$$r_{n+1} = \frac{1}{2}(r_n + r_{n-1})\,(\forall n \in \mathbb{N}).$$
证明 $\langle r_n \rangle$ 是 Cauchy 序列.
证明： 首先，由于 $r_0, r_1 \in \mathbb{Q}$ 递推式可知，$\forall n \in \mathbb{N}, r_n \in \mathbb{Q}$. 因此 $\langle r_n \rangle$ 是 $\mathbb{Q}$ 一序列. 其次，$\forall n \geqslant 2$,
$$|r_{n+1} - r_n| = \frac{1}{2}|r_n - r_{n-1}| = \cdots = \frac{1}{2^n}|r_1 - r_0|$$
$$|r_{n+k} - r_n| \leqslant |r_{n+k} - r_{n+k-1}| + |r_{n+k-1} - r_{n+k-2}| + \cdots + |r_{n+1} - r_n|$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{2^{n+k-1}} + \frac{1}{2^{n+k-2}} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)|r_1 - r_0| < \frac{1}{2^{n-1}}|r_1 - r_0|.$$
令 $|r_1 - r_0| = \frac{l}{s}$ ，这里 $l, s \in \mathbb{N}$. 对 $0 < \varepsilon = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$，由于
$$\frac{1}{2^{n-1}}|r_1 - r_0| = \frac{l}{s2^{n-1}} < \frac{l}{s(n-1)},$$
由 $\frac{l}{s(n-1)} < \frac{q}{p}$ 推知 $n > 1 + \frac{lp}{sq}$. 若令 $N = 1 + lp$，则 $N \in \mathbb{N}$ 并且
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow n - 1 > lp > \frac{lp}{sq} \Rightarrow \frac{l}{s(n-1)} < \frac{q}{p} \Rightarrow \frac{1}{2^{n-1}}|r_1 - r_0| < \frac{q}{p}$$
$$\Rightarrow |r_{n+k} - r_n| < \frac{q}{p}(\forall k \in \mathbb{N}).$$
此即表明 $\langle r_n \rangle$ 是 Cauchy $\mathbb{Q}$ 一序列.

2. 证明 $\forall x \in \mathbb{R}$，存在惟一的整数，记为 $[x]$ 使得 $[x] \leqslant x < [x] + 1$，这里 $[x]$ 称为 x 的整数部分.
证明： 惟一性：设 $n, m \in \mathbb{Z}$ 使得 $n \leqslant x < n + 1, m \leqslant x < m + 1$，那么
$$-(m+1) < (-x) \leqslant -m.$$
由此得 $n - (m+1) < 0 < n + 1 - m$ 即 $n - m - 1 < 0 < n - m + 1$，因此
$$-1 < m - n < 1.$$
由此推出 $m - n = 0$，即 $m = n$.
存在性：
1) 若 $0 \leqslant x < 1$：则 $[x] = 0$ 并且 $[x] \leqslant x < [x] + 1$.
2) 若 $x \geqslant 1$：根据实数的 Archimedes 性质, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $x < N$, 令 $E = \{n \in \mathbb{N} \mid x < n\}$, 则 $E \neq \varnothing$, 因为 $N \in E$, 因此 $n_0 = \min E$ 存在并且有 $n_0 - 1 \leqslant x < n_0$. 若令 $[x] = n_0 - 1$, 则 $[x] \leqslant x < [x] + 1$.
3) 若 $x < 0$：则 $0 < -x$. 根据 1) 与 2) 所证，存在 $[-x] \in \mathbb{N}$ 使得
$$[-x] \leqslant -x < [-x] + 1 \Rightarrow -([-x] + 1) < x \leqslant -[-x].$$
当 $x = -[-x]$ 时，我们有 $-[-x] \leqslant x < -[-x] + 1$. 令 $[x] = -[-x]$，则
$$[x] \leqslant x < [x] + 1.$$
当 $x < -[-x]$ 时，则 $-[-x] - 1 < x < -[-x]$，令 $[x] = -[-x] - 1$，则
$$[x] < x < [x] + 1.$$
因此 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists [x] \in \mathbb{Z}$ 使得 $[x] \leqslant x < [x] + 1$.

3. 设 K 是 Cauchy $\mathbb{Q}$ –序列集合 E 的一子集合. 我们称 K 是一个理想，当且仅当下述条件满足：

1)$\forall \langle r_n\rangle, \langle s_n\rangle \in K, \langle r_n\rangle + \langle s_n\rangle \in K$.
2)$\forall \langle a_n\rangle \in E, \forall \langle r_n\rangle \in K, \langle a_n\rangle \cdot \langle r_n\rangle \in K$.
我们称 K 是 E 的极大理想，当且仅当 E 的所有包含 K 的理想是 E 和 K .
1) 证明 $K = \left\{\langle r_n\rangle \in E \mid \lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0\right\}$ 是 E 的一个理想.
2) 设 A 是 E 的一个理想使得 $K \subset A, K \neq A$. 设 $\langle s_n\rangle \in A - K$.
证明：(a) 存在 $\langle r_n\rangle \in E$ 使得 $\langle r_n\rangle + \langle s_n\rangle \in A$ 且 $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$r_n + s_n \neq 0, \left\langle \frac{1}{r_n + s_n}\right\rangle \in E$$

(b) 常数序列 $\langle 1_n\rangle$ ($\forall n \in \mathbb{N}, 1_n = 1$) 属于 A .

(c)K 是 E 的一个极大理想.

证明： 1) 从略.
2) 设 A 是 E 的一理想使得 $K \subset A$ 且 $K \neq A$.
(a) 设 $\langle s_n\rangle \in A - K$, 那么 $\langle s_n\rangle \notin K$, 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n \neq 0$. 于是 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k_n \geqslant n$ 有 $\left|s_{k_n}\right| \geqslant \varepsilon_0$. 另一方面，由于 $\langle s_n\rangle$ 是 Cauchy 序列，故对此 $\varepsilon_0 > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geqslant N$. $|s_n - s_m| < \varepsilon_0/2$, 因此 $\left|s_n - s_{k_N}\right| < \varepsilon_0/2$. 假设 $s_{k_N} > \varepsilon_0$, 否则可以考虑 $\langle -s_n\rangle$, 因此

$$\forall n \geqslant N, s_n - s_{k_N} > -\frac{\varepsilon_0}{2} \Rightarrow s_n > s_{k_N} - \frac{\varepsilon_0}{2} \geqslant \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

现设 $\langle \mu_n\rangle \in K$. 于是 $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n = 0$, 从而 $\exists N_0 \in \mathbb{N}, N_0 > N$ 使得

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \Rightarrow \mu_n > -\frac{\varepsilon_0}{4}$$

因此 $\forall n \geqslant N_0, \mu_n + s_n > -\frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{4}$. 我们定义 $\mathbb{Q}$–序列 $\langle r_n\rangle$ 如下：

$$\forall n = 0, 1, \cdots, N_0 - 1, r_n \in \mathbb{Q} \text{ 且 } r_n + s_n > \frac{\varepsilon_0}{4}; \quad \forall n \geqslant N_0, r_n = \mu_n.$$

那么 $\langle r_n\rangle \in E$, 并且 $\langle r_n\rangle + \langle s_n\rangle \in A$(因 A 是理想), 并且 $\forall n \in \mathbb{N}, r_n + s_n > \frac{\varepsilon_0}{4} > 0$. 其次，$\forall n, m \in \mathbb{N}$, 有

$$\left|\frac{1}{r_n + s_n} - \frac{1}{r_m + s_m}\right| = \left|\frac{r_m + s_m - r_n - s_n}{(r_n + s_n)(r_m + s_m)}\right| \leqslant \frac{16}{\varepsilon_0^2}(|r_n - r_m| + |s_n - s_m|)$$

由于 $\langle r_n\rangle$ 与 $\langle s_n\rangle$ 都是 Cauchy 序列，故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$,

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geqslant N_1 \Rightarrow |r_n - r_m| < \frac{\varepsilon_0^2}{32}\varepsilon, |s_n - s_m| < \frac{\varepsilon_0^2}{32}\varepsilon.$$

由此推得：$\forall n, m \geqslant N_1, \left|\frac{1}{r_n + s_n} - \frac{1}{r_m + s_m}\right| < \frac{16}{\varepsilon_0^2}\left(\frac{\varepsilon_0^2}{32}\varepsilon + \frac{\varepsilon_0^2}{32}\varepsilon\right) = \varepsilon$. 此即证明了 $\left\langle \frac{1}{r_n + s_n}\right\rangle \in E$.
(b) 由于 A 是理想，故 $\langle 1_n\rangle = \left\langle \frac{1}{r_n + s_n}\right\rangle \cdot \langle r_n + s_n\rangle \in A$.
(c) 设 $\langle a_n\rangle \in E$. 由于 $\langle 1_n\rangle \in A$, 故

$$\langle a_n\rangle = \langle a_n\rangle \cdot \langle 1_n\rangle \in A \Rightarrow E \subset A \Rightarrow A = E$$

此即表明 K 是 E 的一个极大理想.

4. (实数的 Dedekind 构造). 设 $\mathbb{Q}$ 为全体有理数集合. $X \subset \mathbb{Q}$ 是满足下述条件的一子集：
1)$X \neq \varnothing, X \neq \mathbb{Q}$.
2) 若 $r \in X, s \in \mathbb{Q}$ 且 $s < r$, 则 $s \in X$.
3)$\forall r \in X, \exists s \in X$ 使得 $r < s$.
则称 X 是一个 Dedekind 实数. 设 X 是一个 Dedekind 实数. 若 $\mathbb{Q} - X$ 有最小元素，则称 X 为第一类的，否则称 X 是第二类的.
1) 证明 $X_0 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < 1\}$ 是第一类 Dedekind 实数. 而 $Y_0 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < 0 \text{ 或 } r^2 < 2\}$ 是第二类 Dedekind 实数.
2) 证明 X 是第一类 Dedekind 实数，当且仅当存在 $r_0 \in \mathbb{Q}$ 使得 $X = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < r_0\}$.

3) 证明 $\mathbb{R}$ 为全体 Dedekind 实数的集合. 并在 $\mathbb{R}$ 上定义关系 $\leqslant$ 如下:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}, X \leqslant Y \Leftrightarrow X \subset Y.$$

证明 " $\leqslant$ " 是 $\mathbb{R}$ 上的一个序关系, 因此 $(\mathbb{R}, \leqslant)$ 是全序集.

证明: 1) 从略.

2) 设 X 是第一类 Dedekind 实数. 那么 $\mathbb{Q}-X$ 有最小元素 r_0, 即 $\forall r \in \mathbb{Q}-X, r \geqslant r_0$. 由此得

$$\mathbb{Q}-X \subset \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geqslant r_0\} \Rightarrow X \supset \{r \in \mathbb{Q} \mid r < r_0\}$$

若存在 $r' \in X$ 使得 $r' \notin \{r \in \mathbb{Q} \mid r < r_0\}$, 那么根据 X 的性质 ii) 知, $r_0 \in X$, 这与 $r_0 \in \mathbb{Q}-X$ 相矛盾. 因此 $X = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < r_0\}$. **注:** 定义 2) 中的 $s < r$ 可以等价换成 $s \leqslant r$.

反之, 若 $X = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < r_0\}$, 其中 $r_0 \in \mathbb{Q}$, 那么易证 X 是第一类的 Dedekind 实数.

3) 显然 " $\leqslant$ " 是 $\mathbb{R}$ 上的一个偏序关系. 为了证明 " $\leqslant$ " 是序关系, 设 $X, Y \in \mathbb{R}$ 使得 $X \nleqslant Y$, $Y \nleqslant X$, 那么 $\exists r \in X, r \notin Y, \exists s \in Y, s \notin X$. 根据 Dedekind 实数的性质 ii). $r \leqslant s, s \leqslant r$, 从而 $r = s$, 这是矛盾的. 因此 $\forall X, Y \in \mathbb{R}, X \leqslant Y$ 或 $Y \leqslant X$. 此即 " $\leqslant$ " 是 $\mathbb{R}$ 上的序关系.

5. 分别确定集合 A 与 B 的所有聚点, 这里

$$A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{N} \right\}, B = \left\{ \frac{m}{nm+1} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

证明: 1) 集 A 的聚点集 E_A.

由于 $0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right)$ 且 $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} = \lim\limits_{m \to +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)$, 故 $0 \in E_A, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} \in E_A$. 下面证明: $E_A = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$. 只需证明:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right), x \notin E_A.$$

用反证法. 假设 $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists x_0 \in \left(\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0} \right)$ 使得 $x_0 \in E_A$. 那么必存在 $\delta > 0$ 使得 $x_0 \in \left(\frac{1}{n_0+1} + \delta, \frac{1}{n_0} - \delta \right)$ 并且此开区间包含 A 的无穷多个点, 从而存在一无限集 $D \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 使得

$$\forall (n, m) \in D, \frac{1}{n_0+1} + \delta < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{n_0} - \delta.$$

由于 D 是可数集, 设 $D = \{(n_k, m_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$. 于是有

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{1}{n_0+1} + \delta < \frac{1}{n_k} + \frac{1}{m_k} < \frac{1}{n_0} - \delta. \tag{$*$}$$

i) 若集合 $\{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ 是有限的: 那么集合 $\{m_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ 必是无限集. 从而有个发散于 $+\infty$ 的子序列, 为了简化记号, 不妨假设 $\lim\limits_{k \to +\infty} m_k = +\infty$. 另一方面, 由于 $\{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ 是有限集, 故存在一子序列 $\langle n_{k_s} \rangle$ 及 $l \in \mathbb{N}$ 使得 $n_{k_s} = l (\forall s \in \mathbb{N})$. 根据 $(*)$ 式有

$$\forall s \in \mathbb{N}, \frac{1}{n_0+1} + \delta < \frac{1}{l} + \frac{1}{m_{k_s}} < \frac{1}{n_0} - \delta.$$

在上式中令 $s \to +\infty$, 得到

$$\frac{1}{n_0+1} < \frac{1}{n_0+1} + \delta \leqslant \frac{1}{l} \leqslant \frac{1}{n_0} - \delta < \frac{1}{n_0} \Rightarrow n_0 < l < n_0 + 1,$$

这是矛盾的. 因为 $l \in \mathbb{N}$.

ii) 若集合 $\{m_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ 是有限的: 同理可证这也是不可能的.

iii) 若集合 $\{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ 与集合 $\{m_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ 都是无限集: 显然在这种情况下, 只需考虑这样一种情形, 即存在两个子序列 $\langle n_{k_s} \rangle, \langle m_{k_s} \rangle$ 使得 $\lim\limits_{s \to +\infty} n_{k_s} = \lim\limits_{s \to +\infty} m_{k_s} = +\infty$. 由 $(*)$ 式推得

$$\forall s \in \mathbb{N}, \frac{1}{n_0+1} + \delta < \frac{1}{n_{k_s}} + \frac{1}{m_{k_s}} < \frac{1}{n_0} - \delta \Rightarrow \frac{1}{n_0+1} + \delta \leqslant 0 \leqslant \frac{1}{n_0} - \delta,$$

这显然矛盾, 因此

$$E_A = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \right\} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2) 集合 B 的聚点集 E_B . 证明完全类似, 有: $E_B=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$.

6. 分别确定集合 C 与 D 的所有聚点, 这里

$$C=\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m^2}\,\middle|\, n,m\in\mathbb{N}\right\},D=\left\{\frac{n+m}{2n+m+1}\,\middle|\, n,m\in\mathbb{N}\right\}.$$

证明: 1) 集 C 的聚点集 E_C.

与习题 5 的证明类似, $E_C=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$.

2) 集 D 的聚点集 E_D . 首先:

$$\forall n,m\in\mathbb{N},\frac{n+m}{2n+m+1}=\frac{2n+m+1-(n+1)}{2n+m+1}=1-\frac{n+1}{2n+m+1}=1-\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{m}{n}+\frac{1}{n}}$$

受此表达式启发, 考虑 $1-\frac{1}{2+x}$, 这里 $x\in[0,+\infty)$.

显然 $\forall x\in[0,+\infty),\frac{1}{2}\leqslant 1-\frac{1}{2+x}<1$. 先来证明 $\left[\frac{1}{2},1\right]\subset E_D$.

设 $y\in\left[\frac{1}{2},1\right)$. 于是 $\exists x\in[0,+\infty)$ 使得 $y=1-\frac{1}{2+x}$. 由于 $\mathbb{Q}\cap[0,+\infty)$ 在 $[0,+\infty)$ 中稠密, 故存在一 $\mathbb{Q}^+$–序列 $\left(\frac{m_k}{n_k}\right)$ 使得

$$\forall k\in\mathbb{N},\frac{m_k}{n_k}\neq x \text{ 且 } \lim_{k\to+\infty}\frac{m_k}{n_k}=x, \tag{$*$}$$

必有 $\lim\limits_{k\to+\infty}n_k=+\infty$. 事实上, 若 $n_k\nrightarrow+\infty(k\to+\infty)$, 那么 $\langle n_k\rangle$ 必存在一有界子序列 $\langle n_{k_s}\rangle$. 由于每一个 $n_{k_s}\in\mathbb{N}$, 故 $\langle n_{k_s}\rangle$ 至少有一个子序列是常值的. 为简单起见, 不妨假设 $n_{k_s}=l\in\mathbb{N}(\forall s\in\mathbb{N})$. 由 $(*)$ 式得:

$$x=\lim_{k\to+\infty}\frac{m_k}{n_k}=\lim_{s\to+\infty}\frac{m_{k_s}}{n_{k_s}}=\lim_{s\to+\infty}\frac{m_{k_s}}{l}\Rightarrow\lim_{s\to+\infty}m_{k_s}=xl.$$

由于 $m_{k_s},\in\mathbb{N}(\forall s\in\mathbb{N})$. 故 $\exists N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\forall s\in\mathbb{N},s\geqslant N,m_{k_s}=xl\Rightarrow\frac{m_{k_s}}{n_{k_s}}=\frac{xl}{l}=x.$$

这与 $(*)$ 式矛盾, 现在由于

$$\frac{n_k+m_k}{2n_k+m_k+1}=1-\frac{1+\frac{1}{n_k}}{2+\frac{m_k}{n_k}+\frac{1}{n_k}}=y(\forall k\in\mathbb{N}).$$

因此 $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{n_k+m_k}{2n_k+m_k+1}=1-\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n_k}}{2+\frac{m_k}{n_k}+\frac{1}{n_k}}=1-\frac{1}{2+x}=y$, 此即表明 $y\in E_D$. 因此 $\left[\frac{1}{2},1\right)\subset E_D$, 从而 $\left[\frac{1}{2},1\right]\subset E_D$.

下面再证: $E_D\subset\left[\frac{1}{2},1\right]$. 设 $y\in E_D$. 于是存在 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 的一序列 $\langle(n_k,m_k)\rangle$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{n_k+m_k}{2n_k+m_k+1}=1-\lim_{k\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n_k}}{2+\frac{m_k}{n_k}+\frac{1}{n_k}}=y. \tag{$*$}$$

分情况进行讨论

i) 若 $\{n_k\mid k\in\mathbb{N}\}$ 是无限集: 通过选取子序列, 可以假设 $\lim\limits_{k\to+\infty}n_k=+\infty$. 于是由关系式 $(**)$ 给出:

$$y=1-\frac{1}{2+\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{m_k}{n_k}}\Rightarrow\lim_{k\to+\infty}\frac{m_k}{n_k}=x.$$

因此 $y=1-\frac{1}{2+x}$, 这里 $x\in[0,+\infty)$, 此即表明 $y\in\left[\frac{1}{2},1\right]$.

ii) 若 $\{m_k\mid k\in\mathbb{N}\}$ 是无限集: 同理可以假设 $\lim\limits_{k\to+\infty}m_k=+\infty$. 当 $\{n_k\mid k\in\mathbb{N}\}$ 是无限集时, 根据前面所证

有 $y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

当 $\{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ 是有限集时，则存在一子序列 $\{n_{k_s}\}$ 使得 $n_{k_s} = l \in \mathbb{N} \cdot (\forall s \in \mathbb{N})$. 因此

$$y = 1 - \lim_{s\to+\infty} \frac{1 + \frac{1}{n_{k_s}}}{2 + \frac{m_{k_s}}{n_{k_s}} + \frac{1}{n_{k_s}}} = 1 - \frac{1 + \frac{1}{l}}{2 + \lim\limits_{s\to+\infty} \frac{m_{k_s}}{n_{k_s}} + \frac{1}{l}}$$

由此推知 $\lim\limits_{s\to+\infty} \frac{m_{k_s}}{n_{k_s}} = x$ 存在，并且 $y = 1 - \frac{1 + \frac{1}{l}}{2 + x + \frac{1}{l}} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. 此即 $E_D \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$，因此 $E_D = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

iii) 如果两者都有限，那么极限点 y 就是 D 中某个元素.

7. 设 $\langle x_n \rangle$ 是一 $\mathbb{R}$ –序列. $a \in \mathbb{R}$. 我们称 a 是 $\langle x_n \rangle$ 的一个极限点，当且仅当下述性质成立：

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists k_n \geqslant n) \Rightarrow \left|x_{k_n} - a\right| < \varepsilon.$$

1) 证明 a 是 $\langle x_n \rangle$ 的一个极限点，当且仅当 a 是 $\langle x_n \rangle$ 的一个子序列的极限.

2) 证明下述两个结论等价：

  i) 任一有界的无限集至少有一个聚点.

  ii) 任一有界的 $\mathbb{R}$ –序列至少有一个极限点.

3) 一个具有惟一极限点的 $\mathbb{R}$ –序列一定收敛吗？

4) 证明对任一有界的 $\mathbb{R}$ 一序列 $\langle x_n \rangle$，下述两个结论等价：

  i)$\langle x_n \rangle$ 收敛.

  ii)$\langle x_n \rangle$ 有惟一的极限点.

证明： 我们只证明 ii), 其他结论的证明由读者自己完成.

i) $\Rightarrow$ ii). 设 (x_n) 是一有界思一序列. 若集合 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是有限集：令：

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \left\{x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_m}\right\} \text{ 及 } \mathbb{N} = \left\{n \in \mathbb{N} \mid x_n = x_{n_i}\right\}.$$

于是有：$\mathbb{N} \cap \mathbb{N}, = \varnothing (i \neq j)$, $\underset{i=1}{\overset{m}{}}\ \mathbb{N} = \mathbb{N}$. 由于 $\mathbb{N}$ 是无限集，至少存在一个 $\mathbb{N}_{i_0}$ 是无限集. 令

$$\mathbb{N}_0 = \{k_n \mid k \in \mathbb{N}\}, \text{其中 } k_n < k_{n+1} (\forall n \in \mathbb{N}).$$

那么 $\forall n \in \mathbb{N}, x_{k_n} = x_{n_{n_0}}$，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n} = x_{n_{n_0}}$，根据结论 1), $x_{n_{n_0}}$ 是 $\langle x_n \rangle$ 的一个极限点. 若集合 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是无限集:那么根据假设，此集合至少有一个聚点 a . 于是 $\forall n \in \mathbb{N}, a$ 也是集合 $\{x_m \mid m \in \mathbb{N}, m \geqslant n\}$ 的聚点，从而

$$\forall \varepsilon > 0,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap (\{x_m \mid m \in \mathbb{N}, m \geqslant n\} - \{a\}) \neq \varnothing.$$

取 $x_{k_n} \in \left]a - \varepsilon, a + \varepsilon\right[\cap (\{x_m \mid m \in \mathbb{N}, m \geqslant N\} - \{a\})$，于是：

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists k_n \geqslant n \text{ 使得 } \left|x_{k_n} - a\right| < \varepsilon.$$

此即表明 a 是 $\langle x_n \rangle$ 的极限点.

ii)$\Rightarrow$ i). 设 $X \subset \mathbb{R}$ 是一有界无限集. 任取 $x_1 \in X$. 假设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 已经构造，由于 $X - \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \neq \varnothing$(因 X 为无限集). 故 $\exists x_{n+1} \in X - \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. 由归纳法，我们就构造了一有界无限序列 $\langle x_n \rangle$ 使得 $x_n \neq x_m (n \neq m)$. 根据已知条件，序列 $\langle x_n \rangle$ 有极限点，记为 a . 因此

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists k_n \geqslant n, \left|x_{k_n} - a\right| < \varepsilon.$$

此即表明 $x_{k_n} \in \left]a - \varepsilon, a + \varepsilon\right[\cap X (\forall n \in \mathbb{N})$. 由于 $x_n \neq x_m (n \neq m)$，可以假定 $\forall n \in \mathbb{N}$，$x_{k_n} \neq a$. 换句话说 a 就是 X 的一个聚点.

8. 设 $\langle x_n \rangle$ 是一有界的 $\mathbb{R}$–序列，证明 $\langle x_n \rangle$ 的所有极限点在下列两情形之一形成 $\mathbb{R}$ 的一个闭区间：

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$.

2) 存在一个 $\mathbb{R}_+$ –序列 $\langle \varepsilon_n \rangle$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ 并且 $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - x_n > -\varepsilon_n$.

证明： 1) 由于 $\langle x_n \rangle$ 是有界的，故 $\langle x_n \rangle$ 的极限点集非空. 若 $E = \{x\}$，则 $\{x\}$ 就是思的闭区间. 若 E 不是单点集，首先证明：$\forall x, y \in E, x < y, [x, y] \subset E$.

用反证法. 假设存在 $x, y \in E, x < y$ 及 $z \in]x, y[$ 使得 $z \in E$. 于是

$$(\exists \varepsilon_0) > 0\, (\exists N_1 \in \mathbb{N})\, \big(\forall n \in \mathbb{N} \text{ 且 } n \geqslant N_1\big) \Rightarrow |x_n - z| \geqslant \varepsilon_0.$$

假设 $\varepsilon_0 > 0$ 充分小使得 $x < z - \varepsilon_0 < z + \varepsilon_0 < y$.
另一方面, 由于 $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$, 故对此 $\varepsilon_0 > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_2 \Rightarrow |x_{n+1} - x_n| < 2\varepsilon_0.$$

现在由于 $x, y \in E$, 故存在 $\langle x_n \rangle$ 的两个子序列 $\langle x_{k_n} \rangle$ 及 $\langle x_{m_n} \rangle$ 使得 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{k_n} = x$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{s_n} = y$. 由此得到:

$$\exists N_3 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_3 \Rightarrow x_{n_n} < z - \varepsilon_0 < z + \varepsilon_0 < x_{n_n}.$$

令: $N = \max(N_1, N_2, N_3)$. 那么 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_3$, 上述关系式 (1)、(2)、(3) 都成立. 如果 $\forall n \geqslant N, x_{k_n}, x_{k_n+1}, x_{k_n+2}, \cdots, x_{k_{n+1}} - 1 < z - \varepsilon_0$, 那么这将与 (3) 式矛盾. 从而 $\exists n_0 \geqslant N$, $\exists i \in \mathbb{N}$, 且 $0 \leqslant i < k_{n_0+1} - k_{n_0} - 1$ 使得

$$x_{k_{n_0}}, x_{k_{n_0}+1}, \cdots, x_{k_{n_0}+i} < z - \varepsilon_0, x_{k_{n_0}+i+1} \geqslant z + \varepsilon_0.$$

由此推得

$$x_{k_{n_0}+i+1} - x_{k_{n_0}+i} > 2\varepsilon_0.$$

这与 (2) 式矛盾. 因此 $\forall z \in]x, y[, z \in E$, 即 $[x, y] \subset E$. 换句话说, E 是 $\mathbb{R}$ 的一个区间. 最后, 证明 E 是闭集. 设 $x \in \mathbb{R} - E$. 于是

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ 且 } n \geqslant N \Rightarrow x_n \notin \big]x - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0[.$$

由此推得 $]x - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0[C\mathbb{R} - E$, 因此 $\mathbb{R} - E$ 是开集, 从而 E 为 $\mathbb{R}$ 的闭集.
2) 证明与 1) 类似. 用反证法. 于是上述关系式 (1) 仍然成立. 由于 $\varepsilon_n \to 0 (n \to +\infty)$, 并且 $x_{n+1} - x_n \geqslant -\varepsilon_n$, 因此

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_2 \Rightarrow \varepsilon_n < \varepsilon_0, x_{n+1} - x_n \geqslant -\varepsilon_n > -\varepsilon_0.$$

上述关系式 (3) 仍然成立. 若令 $N = \max(N_1, N_2, N_3)$, 并且如果

$$\forall n \geqslant N, x_{s_n}, x_{s_n+1}, \cdots, x_{s_{n+1}} > z + \varepsilon_0$$

成立, 那么这与关系式 (3) 矛盾. 因此必存在 $n_0 \geqslant N$ 及 $i \in \mathbb{N}, 0 \leqslant i \leqslant s_{n_0+1} - s_{n_0} - 2$ 使得

$$x_{s_0+i+1} < z - \varepsilon_0 < z + \varepsilon_0 < x_{s_0+i}$$

由此推得

$$x_{s_0+i+1} - x_{s_0+i} < z - \varepsilon_0 - z - \varepsilon_0 = -2\varepsilon_0$$

这与关系式 (2 ′) 矛盾, 因此 E 是哌的一闭区间.

9. 设 $\langle x_n \rangle$ 与 $\langle y_n \rangle$ 是两个 $\mathbb{R}$ –序列.
1) 假设: $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty, \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = +\infty$ 且 $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$. 证明集合 $A = \{x_n - y_m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.
2) 假设 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty, \lim\limits_{n \to +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$, 证明集合 $B = \{x_n - [x_n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ 在 $[0, 1]$ 中稠密, 并且序列 $\langle \sin x_n \rangle$ ($\langle \cos x_n \rangle$) 的极限点集合等于 $[-1, 1]$.

证明: 1) 用反证法. 假设 $A = \{x_n - y_m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ 不在 $\mathbb{R}$ 中稠密. 那么 $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon_0 > 0$ 使得

$$A \cap]x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0[= \varnothing.$$

现在由于 $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$, 对此 $\varepsilon_0 > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow |x_{n+1} - x_n| < 2\varepsilon_0.$$

令 $A_N=\{x_n-y_m \mid n\geqslant N, m\geqslant N\}$，那么 $A_N\cap]x_0-\varepsilon_0,x_0+\varepsilon_0[=\varnothing$. 其次定义两个集合 E 与 G 如下：

$$E=\{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x_n-y_m\in A_N\cap[x_0+\varepsilon_0,+\infty[\}.$$

$$G=\{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x_n-y_m\in A_N\cap]-\infty,x_0-\varepsilon_0]\}.$$

那么 $E\neq\varnothing, G\neq\varnothing, E\cup G=\{n\in\mathbb{N} \mid n\geqslant N\}\times\{m\in\mathbb{N} \mid m\geqslant N\}, E\cap G=\varnothing$. 令 $E_1=\{n\in\mathbb{N} \mid \exists m\in\mathbb{N}$ 使得 $(n,m)\in E\}$； $\forall n\in E_1, E_1^{(n)}=\{m\in\mathbb{N} \mid (n,m)\in E\}$. 那么 $E_1\neq\varnothing$，并且由于 $y_m\to+\infty(m\to+\infty), \forall n\in E_1$，集合 $E_1^{(n)}$ 是有限集. 现在设 $k\in E_1$. 证明 $k+1\in E_1$. 事实上，若 $k+1\in E_1$，则

$$\forall m\in E_1^{(k)}, (k+1,m)\notin E\Rightarrow(k+1,m)\in G,(k,m)\in E.$$

即

$$x_k-y_m\geqslant x_0+\varepsilon_0, x_{k+1}-y_m\leqslant x_0-\varepsilon_0.$$

由此推得

$$x_{k+1}-x_k\leqslant x_0-\varepsilon_0-(x_0+\varepsilon_0)=-2\varepsilon_0.$$

这与 $(*)$ 式矛盾，因此 $k+1\in E_1$.

下面证明 $E_1^{(k+1)}=E_1^{(k)}$. 事实上，若 $E_1^{(k+1)}\neq E_1^{(k)}$，则有：

$$E_1^{(k+1)}\not\subset E_1^{(k)} \text{ 或 } E_1^{(k)}\not\subset E_1^{(k+1)}.$$

i) 若 $E_1^{(k+1)}\not\subset E_1^{(k)}$：则 $m\in E_1^{(k+1)}$，但 $m\notin E_1^{(k)}$. 因此

$$(k+1,m)\in E,(k,m)\in G\Rightarrow x_{k+1}-y_m\geqslant x_0+\varepsilon_0, x_k-y_m\leqslant x_0-\varepsilon_0.$$

由此得：

$$x_{k+1}-x_k\geqslant x_0+\varepsilon_0-(x_0-\varepsilon_0)=2\varepsilon_0.$$

这与 $(*)$ 式矛盾.

ii) 若 $E_1^{(k)}\not\subset E_1^{(k+1)}$：则 $\exists m\in E_1^{(k)}$，但 $m\notin E_1^{(k+1)}$，从而

$$(k,m)\in E,(k+1,m)\in G\Rightarrow x_k-y_m\geqslant x_0+\varepsilon_0, x_{k+1}-y_m\leqslant x_0-\varepsilon_0.$$

由此得：

$$x_{k+1}-x_k\leqslant x_0-\varepsilon_0-(x_0+\varepsilon_0)=-2\varepsilon_0.$$

这也与 $(*)$ 式矛盾.

因此 $E_1^{(k+1)}=E_1^{(k)}$. 由归纳法可证：$\forall s\in\mathbb{N}, k+s\in E_1$ 且 $E_1^{(k+s)}=E_1^{(k)}$，由于 $E_1^{(k)}$ 是有限集，故 $\exists m\in\mathbb{N}$ 使得 $m\notin E_1^{(k)}$，由此推得

$$\forall s\in\mathbb{N}, m\notin E_1^{(k+s)}, \text{即 } \forall s\in\mathbb{N},(k+s,m)\notin E, \text{因此 } (k+s,m)\in G.$$

因此 $\forall s\in\mathbb{N}, x_{k+s}-y_m\leqslant x_0-\varepsilon_0$. 令 $s\to+\infty$，注意到 $\lim\limits_{s\to+\infty}x_{k+s}=+\infty$，那么得出一个矛盾：$+\infty\leqslant x_0-\varepsilon_0$，因此 A 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

2) 令 $y_n=m(\forall n\in\mathbb{N})$. 那么 $y_n\to+\infty(n\to+\infty)$. 根据 1) 集合 $A=\{x_n-m \mid n,m\in\mathbb{N}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密. 因此 $\forall x,y\in[0,1]$ 且 $x<y, \exists n,m\in\mathbb{N}$ 使得 $x<x_n-m<y$. 由于 $0<x_n-m<1$，根据习题 2 − 2 有 $m=[x_n]$. 此即表明集合 $B=\{[x_n-[x_n] \mid n\in\mathbb{N}\}$ 在 $[0,1]$ 中稠密.

对于序列 $(\sin x_n)$. 由于 $\forall x\in[-1,1], \exists$ 惟一的 $\theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 使得 $\sin\theta=x$. 考虑到 $y_n=2\pi n, y_n\to+\infty(n\to+\infty)$. 根据 1)，集合 $A=\{x_n-2\pi m \mid n,m\in\mathbb{N}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，因此存在序列 $\langle x_{k_n}-2\pi s_n\rangle$ 使得由此得

$$\lim_{n\to+\infty}\left(x_{k_n}-2\pi s_n\right)=\theta$$

$$x=\sin\theta=\lim_{n\to+\infty}\sin\left(x_{k_n}-2\pi s_n\right)=\lim_{n\to+\infty}\sin x_{k_n}$$

此即表明 x 是序列 $(\sin x_n)$ 的极限点. 因此 $\langle\sin x_n\rangle$ 的极限点集等于 $[-1,1]$，同理可证序列 $\langle\cos x_n\rangle$ 的极限点集也等于 $[-1,1]$.

10. 设 $\langle x_n\rangle$ 是 $\mathbb{R}_+^*$ –序列. 假设 0 是 $\langle x_n\rangle$ 的极限点.
1) 证明存在 $\langle x_n\rangle$ 的一个严格单调下降的子序列 $\langle x_{k_n}\rangle$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n}=0$.
2) 证明存在一个自然数序列 $\langle s_n\rangle$ 使得:

$$\forall n\in\mathbb{N}, s_n<s_{n+1} \text{ 且 } \forall k\leqslant s_n, x_k\geqslant x_{s_n}.$$

证明: 1) 由于 0 是 $\langle x_n\rangle$ 的极限点, 故

$$(\forall\varepsilon>0)(\forall n\in\mathbb{N})\,(\exists k_n\in\mathbb{N}, k_n\geqslant n)\Rightarrow 0<x_{k_n}<\varepsilon.$$

设 $x_{k_0}=x_0$. 为了构造 x_{k_1} , 根据 ($\star$) 式, 对 $\varepsilon=1, \exists k_1>1$ 使得

$$0<x_{k_1}<\min\left(1,\frac{x_0}{2}\right), \text{于是 } x_{k_0}>x_{k_1}.$$

现在假设 $x_{k_0},x_{k_1},\cdots,x_{k_n}$ 已经构造, 使得

$$k_0<k_1<\cdots<k_n, 0<x_{k_i}<\min\left(\frac{1}{i},\frac{x_{k_{i-1}}}{2}\right)(i=1,2,\cdots,n).$$

那么对 $\varepsilon=\min\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{x_{k_n}}{2}\right)>0, \exists k_{n+1}>k_n$ 使得 $0<x_{k_{n+1}}<\min\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{x_{k_n}}{2}\right)$. 根据归纳法, 这就构造了 $\langle x_n\rangle$ 的子序列 $\langle x_{k_n}\rangle$ 使得

$$\forall n\in\mathbb{N}, x_{k_{n+1}}<\frac{x_{k_n}}{2}<x_{k_n}<\frac{1}{n}.$$

子序列 $\langle x_{k_n}\rangle$ 是严格单调下降收敛于 0 的.
2) 子序列 $\langle x_{s_n}\rangle$ 的构造.
i) 若 $\forall k\leqslant k_1, x_k\geqslant x_{k_1}$: 则令 $s_1=k_1$.
ii) 若 $\exists l\in\mathbb{N}, 0\leqslant l<k_1$ 使得 $x_l<x_{k_1}$:则令 s_1 是最大自然数, 使得 $x_{s_1}=\min\limits_{0\leqslant i\leqslant k_1} x_i$. 那么 $\forall k\leqslant s_1, x_k\geqslant x_{s_1}$, 由于 (x_{k_n}) 是严格单调下降的且收敛于 0 , 因此存在 $k_{m_2}>s_1$ 使得 $x_{s_1}>x_{k_{m_2}}$.
iii) 若 $\forall k\leqslant k_{m_2}, x_k\geqslant x_{k_{m_2}}$: 则令 $s_2=k_{m_2}$.
iv) 若 $l\in\mathbb{N}, 0\leqslant l<k_{m_2}$ 使得 $x_l<x_{k_{m_2}}$: 则令 s_2 为最大自然数使得 $x_{s_2}=\min\limits_{0\leqslant i\leqslant k_{m_2}} x_i$. 由于 $x_{s_2}<x_{m_{m_2}}<x_{s_1}$, 则有:

$$s_1<s_2 \text{ 且 } \forall k\leqslant s_2, x_k\geqslant x_{s_s}.$$

假设 $x_{s_1},x_{s_2},\cdots,x_{s_n}$ 已经构造使得

$$\forall k\leqslant s_i, x_k\geqslant x_{s_i}(i=1,2,\cdots,n);\quad s_i<s_{i+1}, x_{s_{i+1}}<x_{s_i}(i=1,2,\cdots,n-1).$$

选择 $k_{m_{n+1}}\in\mathbb{N}$ 使得 $x_{s_n}>x_{k_{m_{n+1}}}$, 重复前述过程, 即可找到 $s_{n+1}\in\mathbb{N}$ 使得

$$\forall k\leqslant s_{n+1}, x_k\geqslant x_{s_{n+1}} \text{ 并且 } s_n<s_{n+1}, x_{s_{n+1}}<x_{s_n}.$$

因此得到 $\langle x_n\rangle$ 的一子序列 $\langle x_{s_n}\rangle$ 使得 $\forall n\in\mathbb{N}, \forall k\leqslant s_n, x_k\geqslant x_{s_n}$.

11. 设 $\langle x_n\rangle, \langle y_n\rangle$ 是满足下列条件的两个 $\mathbb{R}$ –序列:
1) $\forall n\in\mathbb{N}, y_n<y_{n+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=+\infty$; 3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l\in\mathbb{R}$.
证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l$. (Stolz 定理).
证明: 1)$l\in\mathbb{R}$. 根据 3) 的假设, $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant N\Rightarrow\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}-l\right|<\varepsilon.$$

由此得到, $\forall n\geqslant N$,

$$l\left(y_{n+1}-y_n\right)-\varepsilon\left(y_{n+1}-y_n\right)<x_{n+1}-x_n<\varepsilon\left(y_{n+1}-y_n\right)+l\left(y_{n+1}-y_n\right).$$

对 n 从 N 到 $n-1>N$ 求和得到: 或

$$(l-\varepsilon)\sum_{k=N}^{n-1}\left(y_{k+1}-y_k\right)<\sum_{k=N}^{n-1}\left(x_{k+1}-x_k\right)<(l+\varepsilon)\sum_{k=N}^{n-1}\left(y_{k+1}-y_k\right)$$

$$(l-\varepsilon)(y_n-y_N)<(x_n-x_N)<(l+\varepsilon)(y_n-y_N).$$

由于 $y_n\to+\infty(n\to+\infty)$，可以假设 $\forall n\geqslant N, y_n>0$．于是

$$(l-\varepsilon)\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)+\frac{x_N}{y_n}<\frac{x_n}{y_n}<(l+\varepsilon)\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)+\frac{x_N}{y_n}.$$

其次，通过用 $-x_n$ 代换 x_n，可以假设 $l\geqslant 0$．现在根据假设 2)，

$$\forall 0<\varepsilon<\frac{1}{2}, \exists K\in\mathbb{N}, K>N, \forall n\geqslant K\Rightarrow 0<\frac{y_N}{y_n}<\varepsilon<\frac{1}{2}, \left|\frac{x_N}{y_n}\right|<\varepsilon.$$

由 $(*)$ 式推得：

$$\forall n\geqslant K, -(l+2)\varepsilon<\frac{x_n}{y_n}-l<2\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{x_n}{y_n}-l\right|<(l+2)\varepsilon.$$

此即表明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=l$．

2)$l=+\infty$．这时，$\forall M>1, \exists N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant N, \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}>M\Rightarrow x_{n+1}-x_n>M(y_{n+1}-y_n).$$

对上式从 N 到 $n-1$ 求和得

$$\forall n\geqslant N+1, \sum_{k=N}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)>M\sum_{k=N}^{n-1}(y_{k+1}-y_k)\Rightarrow x_n-x_N>M(y_n-y_N)$$

或

$$\forall n\geqslant N+1, \frac{x_n}{y_n}>M+\frac{x_N}{y_n}-\frac{My_N}{y_n}>M-\frac{M+1}{2}=\frac{M-1}{2}.$$

此即证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty$．

3)$l=-\infty$．证明类似.

12. (Cesaro 平均)，设 $\langle a_n\rangle$ 是一 $\mathbb{R}$ –序列:

1) 设 $\langle\lambda_n\rangle$ 是一 $\mathbb{R}_+$–序列使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda_k=+\infty$．证明若序列 $\langle a_n\rangle$ 有极限 a，那么由下述定义的序列 $\langle b_n\rangle$，

$$b_n=\frac{\lambda_0a_0+\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_na_n}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}(\forall n\in\mathbb{N})$$

也有极限 a．

2) 证明若存在 $p\in\mathbb{N}$ 使得序列 $\langle a_{n+p}-a_n\rangle$ 有极限 λ，则序列 $\left\langle\frac{a_n}{n}\right\rangle$ 有极限 $\frac{\lambda}{p}$．

3) 证明若序列 $\left\langle\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rangle$(这里 $a_n>0, \forall n\in\mathbb{N}$) 有极限 $l>0$，则序列 $\langle\sqrt[n]{a_n}\rangle$ 也有极限 l．

证明: 1) 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，故有:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\geqslant N)\Rightarrow|a_n-a|<\varepsilon,$$
$$(\exists M>0)(\forall n\in\mathbb{N})\Rightarrow|a_n-a|\leqslant M.$$

于是 $\forall n\geqslant N$，有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\lambda_0a_0+\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_na_n}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}-a\right|&=\left|\frac{\lambda_0(a_0-a)+\lambda_1(a_1-a)+\cdots+\lambda_n(a_n-a)}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}\right|\\&\leqslant\frac{\lambda_0|a_0-a|+\lambda_1|a_1-a|+\cdots+\lambda_{N-1}|a_{N-1}-a|}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}+\frac{\lambda_N|a_N-a|+\cdots+\lambda_n|a_n-a|}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}\\&\leqslant\frac{M(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{N-1})}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}+\varepsilon\left(\frac{\lambda_N+\cdots+\lambda_n}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}\right)\\&\leqslant\frac{M'}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}+\varepsilon.\end{aligned}$$

由于 $\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n\to+\infty(n\to+\infty)$，故

$$\forall\varepsilon>0,\exists K\in\mathbb{N},K>N,\forall n\geqslant K\Rightarrow\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n>\frac{M'}{\varepsilon}.$$

因此，$\forall n\geqslant K,\left|\dfrac{\lambda_0a_0+\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_na_n}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}-a\right|<\dfrac{M'}{M'}\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$．此即表明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\lambda_0a_0+\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_na_n}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}=a.$$

特别地，对 $\lambda_n=1$ 与 $\lambda_n=n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$，可得到：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a;\quad\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}=\frac{a}{2}.$$

2)$\forall i=0,1,\cdots,p-1$，令 $A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}$，那么序列 $\left\langle A_n^{(i)}\right\rangle$ 是序列 $\langle a_{n+p}-a_n\rangle$ 的子序列. 因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n^{(i)}=\lambda$．根据 1) 有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}}{n}=\lambda(i=0,1,\cdots,p-1).$$

另一方面，由于

$$\begin{aligned}A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}&=\left(a_{2p+i}-a_{p+i}\right)+\left(a_{3p+i}-a_{2p+i}\right)+\cdots+\left(a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}\right)\\&=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}.\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\lambda$．由此推得：

$$\forall i=0,1,\cdots,p-1,\ \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\frac{\lambda}{p}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}.$$

3) 令 $A_n=\log a_{n+1}-\log a_n$，那么 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\log a_{n+1}-\log a_1$．根据 1)，有：

$$\log l=\lim_{n\to+\infty}\frac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\log a_{n+1}-\log a_1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\log a_n}{n}.$$

由此得到

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=l.$$

13. 设 $\langle a_n\rangle$ 是一 $\mathbb{R}$ –序列.

1) 假设 $\forall n,m\in\mathbb{N},a_{n+m}\geqslant a_n+a_m$ 并且序列 $\left\langle\dfrac{a_n}{n}\right\rangle$ 是上有界的，证明序列 $\left\langle\dfrac{a_n}{n}\right\rangle$ 收敛.

2) 假设 $\forall n,m\in\mathbb{N},a_{n+m}\leqslant a_n\cdot a_m$ 并且 $\forall n\in\mathbb{N},a_n\geqslant1$，证明序列 $\langle b_n\rangle$ 收敛，这里 $b_n=\log a_n/n(n\in\mathbb{N})$，并由此推出序列 $(\sqrt[n]{a_n})$ 收敛于 $\inf\limits_{n>0}\sqrt[n]{a_n}$.

证明： 1) 由于 $\left\langle\dfrac{a_n}{n}\right\rangle$ 是上有界的，故 $l=\sup\limits_{n\in\mathbb{H}}\cdot\dfrac{a_n}{n}<+\infty$．由此得：$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$ 使得 $l-\varepsilon<\dfrac{a_N}{N}\leqslant l$．其次，由于 $a_n+a_m\leqslant a_{n+m}$，故 $\forall k\in\mathbb{N},ka_n\leqslant a_{kn}$．现设 $n\in\mathbb{N}$ 且 $n\geqslant N$．那么 $n=kN+\gamma$ 这里 $k\in\mathbb{N},0\leqslant\gamma\leqslant N$．于是

$$\begin{aligned}l\geqslant\frac{a_n}{n}=\frac{a_{kN+\gamma}}{kN+\gamma}&\geqslant\frac{a_{kN}+a_\gamma}{(k+1)N}=\frac{a_{kN}}{(k+1)N}+\frac{a_\gamma}{(k+1)N}\geqslant\frac{ka_v}{(k+1)N}+\frac{a_\gamma}{(k+1)N}\\&\geqslant\left(\frac{k}{k+1}\right)(l-\varepsilon)+\frac{m}{(k+1)N},\text{ 这里 }m=\min_{0\leqslant i\leqslant N}a_i.\end{aligned}$$

由于 " $n\to+\infty$ " 蕴含 " $k\to+\infty$ "，故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{k}{k+1}=1,\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{m}{(k+1)N}=0$．因此

$$\forall\varepsilon>0,\exists K\in\mathbb{N},K>N,\forall n\geqslant K\Rightarrow\frac{k}{k+1}>l-\varepsilon,\frac{m}{(k+1)N}>-\varepsilon.$$

若 $l\leqslant0$，则由 $(*)$ 式得 $\forall n\geqslant K,l\geqslant\dfrac{a_n}{n}\geqslant l-\varepsilon-\varepsilon=l-2\varepsilon$．

若 $l>0$，则对 $\varepsilon\in]0,l[$，由 $(\star)$ 式得

$$\forall n\geqslant K,l\geqslant\frac{a_n}{n}\geqslant(1-\varepsilon)(l-\varepsilon)-\varepsilon=l-\varepsilon(1+l-\varepsilon).$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=l=\sup_{n\in\mathbb{N}}\cdot\frac{a_n}{n}.$$

2) 由于 $a_n\geqslant 1(\forall n\in\mathbb{N})$，故 $b_n=\dfrac{\log a_n}{n}\geqslant 0$. 从而 $\lambda=\inf_{n\in\mathbb{N}}.b_n\geqslant 0$ 并且

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}\text{ 使得 }\lambda\leqslant h_n<\lambda+\varepsilon.$$

其次，由于 $a_{n+m}\leqslant a_n+a_m$，故 $\forall k\in\mathbb{N},a_{kn}\leqslant(a_n)^k$，从而

$$\log a_{kn}\leqslant k\log a_n\Rightarrow\frac{\log a_n}{kn}\leqslant\frac{\log a_n}{n}.$$

设 $n\in\mathbb{N},n\geqslant N$，那么 $n=kN+\gamma$，这里 $k\in\mathbb{N},0\leqslant\gamma<N$. 因此

$$\begin{aligned}\lambda&\leqslant\frac{\log a_n}{n}=\frac{\log a_{kN+\gamma}}{kN+\gamma}\leqslant\frac{\log a_{kN}+\log a_\gamma}{kN+\gamma}\leqslant\frac{\log a_{kN}}{kN}+\frac{\log a_\gamma}{n}\\&\leqslant\frac{\log a_N}{N}+\frac{\log\max(a_0,a_1,\cdots,a_{N-1})}{n}<\lambda+\varepsilon+\frac{M}{n}.\end{aligned}$$

这里 $M=\log\max(a_0,a_1,\cdots,a_{N-1})$. 设 $K\in\mathbb{N},K>N$ 使得 $\forall n\geqslant K,\dfrac{M}{n}<\varepsilon$，于是

$$\forall n\geqslant K,\lambda\leqslant\frac{\log a_n}{n}<\lambda+\varepsilon+\varepsilon=\lambda+2\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log a_n}{n}=\lambda=\inf\limits_{n\in\mathbb{X}}.\dfrac{\log a_n}{n}$. 由此推得：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}&=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{\log\sqrt[n]{a_n}}=\mathrm{e}^{\lim_n+\infty\sqrt[1]{}\log\sqrt[n]{a_n}}=\mathrm{e}^{\inf_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\log a_n}{n}}\\&=\inf_{n\in\mathbb{M}^*}\mathrm{e}^{\frac{\log s_n}{n}}=\inf_{n\in\mathbb{N}^*}\sqrt[n]{a_n}.\end{aligned}$$

14. 设 $\langle a_n\rangle$ 是一 $\mathbb{R}$–序列使得：$\forall n,m\in\mathbb{N},a_n+a_m-1<a_{n+m}<a_n+a_m+1$.

1) 证明序列 $\left\langle\dfrac{a_n}{n}\right\rangle$ 收敛，记其极限为 l .

2) 证明 $\forall n\in\mathbb{N},nl-1\leqslant a_n\leqslant nl+1$.

证明： 1) 由于 $\forall n_1,m\in\mathbb{N},a_n+a_m-1<a_{n+m}<a_n+a_m+1$，故首先有

$$2a_1-1<a_2<2a_1+1$$

由归纳法易证： $\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant 2,na_1-(n-1)<a_n<na_1+(n-1)$. 由此得：

$$\forall n\in\mathbb{N},a_1-\frac{n-1}{n}<\frac{a_n}{n}<a_1+\frac{n-1}{n}$$

或

$$\forall n\in\mathbb{N},a_1-1<\frac{a_n}{n}<a_1+1.$$

此即表明序列 $\left\langle\dfrac{a_n}{n}\right\rangle$ 是有界的. 令 $l=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}.\dfrac{a_n}{n}$. 与习题 2 − 12 同样方法可证：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=\sup_{n\in\mathbb{H}}\cdot\frac{a_n}{n}.$$

2) 由于 $l=\sup\limits_{n\in\Bbbk}\dfrac{a_n}{n}$，故 $\forall n\in\mathbb{N},l>\dfrac{a_n}{n}$，由此得 $a_n<nl+1$. 为了证明 $\forall n\in\mathbb{N}^*,a_n\geqslant nl-1$，用反证法. 假设 $\exists N\in\mathbb{N}^*$ 使得 $a_N<Nl-1$. 设 $\varepsilon_0>0$ 足够小使得 $a_N<Nl-1-\varepsilon_0N$. 现设 $n\in\mathbb{N},n\geqslant N$，那么 $n=kN+\gamma$. 这里 $k\in\mathbb{N},0\leqslant\gamma<N$ 且 $k\to+\infty(n\to+\infty)$. 因此

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{n}&=\frac{a_{kN+\gamma}}{kN+\gamma}<\frac{a_{kN}+a_\gamma+1}{kN+\gamma}<\frac{ka_N+a_\gamma+k}{kN+\gamma}\\&<\frac{a_N}{N}+\frac{a_\gamma}{n}+\frac{1}{N}<l-\frac{1}{N}-\varepsilon_0+\frac{a_\gamma}{n}+\frac{1}{N}=l-\varepsilon_0+\frac{a_\gamma}{n}\end{aligned}$$

令 $n\to+\infty$ 得到 $l=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n}\leqslant l-\varepsilon_0$. 此矛盾说明 $\forall n\in\mathbb{N},a_n\geqslant ln-1$. 因此

$$\forall n\in\mathbb{N},ln-1\leqslant a_n\leqslant ln+1.$$

15. 设 $a>0,b>0,c>0$. 令

$$\frac{3}{u_0}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}, v_0=\sqrt[3]{abc}, w_0=\frac{a+b+c}{3}$$

并由下述类推关系式定义序列 $\langle u_n\rangle,\langle v_n\rangle,\langle w_n\rangle$:

$$\frac{3}{u_{n+1}}=\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}+\frac{1}{w_n}, v_{n+1}=\sqrt[3]{u_nv_nw_n}, w_{n+1}=\frac{u_n+v_n+w_n}{3}$$

证明三个序列 $\langle u_n\rangle,\langle v_n\rangle,\langle w_n\rangle$ 收敛于同一极限.

证明: 首先下述不等式成立: $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\leqslant v_n\leqslant w_n$. 由此得到:

$$\omega_{n+1}=\frac{u_n+v_n+w_n}{3}\leqslant w_n, u_{n+1}=\frac{3}{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}+\frac{1}{w_n}}\geqslant u_n.$$

此即表明序列 $\langle u_n\rangle$ 是单调上升的且有上界 w_0 , 而序列 $\langle w_n\rangle$ 是单调下降并有下界 u_0 . 因此 $\langle u_n\rangle$ 与 $\langle w_n\rangle$ 都收敛.

其次由 $w_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n+v_n+w_n)$ 知 $v_n=3w_{n+1}-u_n-w_n$, 因此序列 $\langle v_n\rangle$ 收敛. 令

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=u, \lim_{n\to+\infty}v_n=v, \lim_{n\to+\infty}w_n=w$$

在 $v_{n+1}=\sqrt[3]{u_nv_nw_n}$ 及 $w_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n+v_n+w_n)$ 中令 $n\to+\infty$ 取极限得 $v=\sqrt[3]{uvw}$, $w=\frac{1}{3}(u+v+w)$. 由于 $u>0,w>0$, 故 $v>0$, 并且

$$\frac{u}{v}\cdot\frac{w}{v}=1, \frac{u}{w}+\frac{v}{w}=2.$$

若令 $\frac{u}{v}=x, \frac{w}{v}=y$, 则 $xy=1, \frac{x}{y}+\frac{1}{y}=2$, 即 $xy=1, x+1=2y$. 由此得: $2y^2-y+1=0$ 或 $y=1$. 从而 $x=1$, 即 $u=v=w$, 这就证明了序列 $\langle u_n\rangle,\langle v_n\rangle$ 及 $\langle w_n\rangle$ 收玫于同一极限.

16. 设 $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $0<a<b$. 令 $u_0=a, v_0=b$ 并由下述类推关系式定义序列 $\langle u_n\rangle$ 与 $\langle v_n\rangle$(称为 Schwod 序列):

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+v_n), v_{n+1}=\sqrt{u_{n+1}+v_n}.$$

1) 证明 $\langle u_n\rangle$ 与 $\langle v_n\rangle$ 收敛于同一极限.

2) 设 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $a=b\cos\theta$. 将上述极限表示为 b 与 θ 的函数.

证明: 1) 首先用归纳法证明: $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\leqslant v_n$.

事实上, $u_0\leqslant v_0$, 假设 $u_n\leqslant v_n$, 那么

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+v_n)\leqslant v_n\Rightarrow v_{n+1}=\sqrt{u_{n+1}v_n}\geqslant u_{n+1}$$

$$\Rightarrow v_{n+1}=\sqrt{u_{n+1}v_n}\leqslant\sqrt{v_nv_n}=v_n$$

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+v_n)\geqslant u_n$$

因此

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant v_{n+1}\leqslant v_n.$$

此表明 $\langle u_n\rangle$ 是单调上升且以 v_0 为上界, 而 $\langle v_n\rangle$ 是单调下降且以 u_0 为下界. 故 $\langle u_n\rangle$ 与 $\langle v_n\rangle$ 收敛. 设 $\lim_{n\to+\infty}u_n=u$, $\lim_{n\to+\infty}v_n=v$. 有:

$$u=\frac{1}{2}(u+v)\Rightarrow u=v$$

即证明 $\langle u_n\rangle$ 与 $\langle v_n\rangle$ 收敛于同一极限 λ .

2) 由于 $a = b\cos\theta, \theta \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$，故 $\cos\theta > 0$，因此

$$\begin{aligned}
&u_0 = a = b\cos\theta, v_0 = b\\
&u_1 = \frac{1}{2}(u_0+v_0) = \frac{1}{2}(b\cos\theta + b) = \frac{b}{2}(1+\cos\theta) = b\cos^2\frac{\theta}{2}.\\
&v_1^2 = u_1 v_0 = b^2\cos^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow v_1 = b\cos\frac{\theta}{2}.\\
&u_2 = \frac{1}{2}(u_1+v_1) = \frac{1}{2}\left(b\cos^2\frac{\theta}{2} + b\cos\frac{\theta}{2}\right) = \frac{b}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right) = b\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2^2}.\\
&v_2^2 = u_2 v_1 = b\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2^2} b\cos\frac{\theta}{2} = b^2\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2^2} \Rightarrow v_2 = b\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}.
\end{aligned}$$

由此用归纳法可证：$u_n = b\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdots\cos\dfrac{\theta}{2^{n-1}}\cos^2\dfrac{\theta}{2^n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

$$v_n = b\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

由此推得：

$$\begin{aligned}
v_n\sin\frac{\theta}{2^n} &= b\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n}\sin\frac{\theta}{2^n}\\
&= \frac{b}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\sin\frac{\theta}{2^{n-1}} = \cdots = \frac{b}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{b}{2^n}\sin\theta
\end{aligned}$$

因此 $v_n = (b\sin\theta)\left(\dfrac{1}{2^n}/\sin\dfrac{\theta}{2^n}\right) = b\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)\left(\dfrac{\theta}{2^n}/\sin\dfrac{\theta}{2^n}\right)$. 令 $n \to +\infty$，得出 $\lambda = b\dfrac{\sin\theta}{\theta}$.

17. 设 $\langle u_n\rangle$ 是一 $\mathbb{R}_+^*$ –序列使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{u_0+u_1+\cdots+u_n} = 0$，并且 $\langle s_n\rangle$ 是收敛于 $s \in \mathbb{C}$ 的复数序列，证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{s_0u_n+s_1u_{n-1}+\cdots+s_nu_0}{u_0+u_1+\cdots+u_n} = s$.

证明： 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{u_0+u_1+\cdots+u_n} = 0$. 因此

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow |s_n - s| < \varepsilon.$$

固定 N，那么 $\exists\ K \in \mathbb{N}, K > N$ 使得 $\forall n \geqslant K, 0 < \dfrac{u_n}{u_0+u_1+\cdots+u_n} < \dfrac{\varepsilon}{N}$. 现在设 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geqslant K+N$，那么有：

$$0 < \frac{u_{n-N+1}}{u_0+u_1+\cdots+u_{n-N+1}} < \frac{\varepsilon}{N}, 0 < \frac{u_{n-N+2}}{u_0+u_1+\cdots+u_{n-N+2}} < \frac{\varepsilon}{N}, \cdots, 0 < \frac{u_n}{u_0+u_1+\cdots+u_n} < \frac{\varepsilon}{N}.$$

因此 $\forall n \in K+N$.

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{s_0u_n}{u_0+s_1u_{n-1}+\cdots+u_n+\cdots+u_n} - s\right|\\
&= \left|\frac{s_0u_n+s_1u_{n-1}+\cdots+s_nu_0-u_0s-u_1s-\cdots-u_ns}{u_0+u_1+\cdots+u_n}\right|\\
&\leqslant \frac{u_0|s_n-s|+u_1|s_{n-1}-s|+\cdots+u_{n-N}|s_N-s|+u_{n-N+1}|s_{N-1}-s|+\cdots+u_n|s_0-s|}{u_0+u_1+\cdots+u_n}\\
&\leqslant \frac{\varepsilon(u_0+u_1+\cdots+u_{n-N})+(u_{n-N+1}+u_{n-N+2}+\cdots+u_n)\sup_{n\in\mathbb{R}}(|s_n|+|s|)}{u_0+u_1+\cdots+u_n}\\
&\leqslant \varepsilon + M\left(\frac{u_{n-N+1}}{u_0+u_1+\cdots+u_n}+\frac{u_{n-N+2}}{u_0+u_1+\cdots+u_n}+\cdots+\frac{u_n}{u_0+u_1+\cdots+u_n}\right)\\
&\leqslant \varepsilon + M\left(\frac{u_{n-N+1}}{u_0+u_1+\cdots+u_{n-N+1}}+\frac{u_{n-N+2}}{u_0+u_1+\cdots+u_{n-N+2}}+\cdots+\frac{u_n}{u_0+u_1+\cdots+u_n}\right)\\
&< \varepsilon + NM\frac{\varepsilon}{N} = (1+M)\varepsilon, \text{ 这里 } M = \sup_{n\in\mathbb{R}}(|s_n|+|s|) < +\infty.
\end{aligned}$$

此即表明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{s_0u_n+s_1u_{n-1}+\cdots+s_nu_0}{u_0+u_1+\cdots+u_n} = s.$$

18. 设 G 是一非空集合. 我们称 G 是加群 $(\mathbb{R}, +)$ 的子群，当且仅当 G 具有下列两个性质：

i)$\forall x, y \in G, x+y \in G$；ii)$\forall x \in G, -x \in G$.

1) 证明 $\mathbb{Z}$ 是 $(\mathbb{R},+)$ 的子群，并且 $\forall a \in \mathbb{R}, a\mathbb{Z}$ 也是 ($\mathbb{R},+$) 的子群.

2) 证明 $\forall a, b \in \mathbb{R}, G(a,b) = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ 是 $(\mathbb{R},+)$ 的子群.

3) 设 G 是 $(\mathbb{R},+)$ 的子群并且 $G \neq \{0\}$，令

$$G^* = \{x \in G \mid x > 0\}, \alpha = \inf G^*.$$

i) 证明 $G^* \neq \varnothing$.

ii) 证明若 $\alpha > 0$，则 $\alpha \in G^*$ 并且 $G = \alpha\mathbb{Z}$.

iii) 证明若 $\alpha = 0$，则 G 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

4) 证明若 F 是 $(\mathbb{R},+)$ 的一闭子群并且 $F \neq \mathbb{R}$，则存在 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得 $F = \alpha\mathbb{Z}$.

5) 证明若 E 是 $(\mathbb{R},+)$ 的非闭子群. 则 E 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

6) 证明 $\forall a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ 且 $\dfrac{b}{a} \notin \mathbb{Q}$，子群 $G(a,b) \neq \mathbb{R}$ 且在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

7) 由此推出集合 $\{\sin n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 与集合 $\{\cos n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 都在 $[-1,1]$ 中稠密.

证明：1)、2) 证明从略.

3)i) 由于 $G = (G \cap \mathbb{R}_+) \cup (G \cap \mathbb{R}_-)$ 且 $G \neq \{0\}$，故

$$G \cap \mathbb{R}_+ \neq \{0\} \text{ 或 } G \cap \mathbb{R}- \neq \{0\}.$$

若 $G \cap \mathbb{R}_+ \neq \{0\}$，则 $\exists x \in G \cap \mathbb{R}_+, x \neq 0, x \in G^*$；若 $G \cap \mathbb{R}_- \neq \{0\}$，则 $\exists x \in G \cap \mathbb{R}_-, x \neq 0$，$-x \in G^*$. 因此 $G^* \neq \varnothing$.

ii) 设 $\alpha = \inf G^* > 0$，若 $\alpha \notin G^*$，则 $\exists x, y \in G^*$ 使得 $0 < \alpha < x < y < 2\alpha$. 由于 $y - x \in G$，$0 < y - x$，故 $y - x \in G^*$ 且 $0 < y - x < \alpha$ 这与 α 的定义矛盾，从而 $\alpha \in G^*$.

现在设 $n \in \mathbb{N}$. 则 $n\alpha = \alpha + \alpha + \cdots + \alpha \in G$，从而 $(-n)\alpha = -(n\alpha) \in G$，因此 $\alpha\mathbb{Z} \subset G$. 其次，$\forall x \in]\alpha, 2\alpha[$，必有 $x \notin G$. 否则若 $\exists x \in]\alpha, 2\alpha[$，使得 $x \in G$. 那么 $x - \alpha \in G$ 且 $0 < x - \alpha < \alpha$，于是 $x - \alpha \in G^*$，这又与 α 的定义矛盾. 同理可证，$\forall x \in]n\alpha, (n+1)\alpha[(n \in \mathbb{Z}), x \notin G$，因此 $G = \alpha\mathbb{Z}$.

iii) 设 $\alpha = 0$. 那么由下确界性质，$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in G^*$ 使得 $0 < x < \varepsilon$. 设 $a \in \mathbb{R}$. 那么 $a = nx + \gamma$ 这里 $n \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant \gamma < x$. 由此得：

$$nx \in G \text{ 且 } 0 < a - nx = \gamma < x < \varepsilon \Rightarrow nx \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[.$$

此即表示 G 在发中稠密.

4) 设 F 是 $(\mathbb{R},+)$ 的闭子群并且 $F \neq \mathbb{R}$. 若 $F = \{0\}$，则 $F = 0\mathbb{Z}$. 若 $F \neq \{0\}$. 根据 3)，如果 $\alpha = \inf F^* = 0$，则 F 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，从而 $\bar{F} = \mathbb{R}$，但 $F = \bar{F}$，故 $F = \mathbb{R}$，这与假设矛盾，故 $\alpha = \inf F^* > 0$. 由 3) 知，$F = \alpha\mathscr{Z}$.

5) 设 E 是 $(\mathbb{R},+)$ 的非闭子群. 显然 $E \neq \{0\}$ 并且 $\alpha = \inf E^* = 0$. 否则由 3) 知 $E = \alpha\mathbb{Z}$ 为闭子群. 这与已知条件矛盾，故 $\alpha = 0$. 根据 3), E 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

6)$\forall a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ 且 $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{Q}, G(a,b) \neq \{0\}$. 若 $\alpha = \inf G(a,b)\cdot > 0$，则由 3) 知，$G(a,b) = \alpha\mathbb{Z}$. 由于 $a, b \in G(a,b)$，故 $a = \alpha x, b = \alpha y, x, y \in \mathbb{Z}$ 从而 $\dfrac{b}{a} = \dfrac{y}{x} \in \mathbb{Q}$. 这与假设 $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ 矛盾. 因此 $\alpha = 0$. 根据 3), $G(a,b)$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

7) 为了证明集合 $\{\sin n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 在 $[-1,1]$ 中稠密，任取 $x, y \in [-1,1]$ 且 $x < y$. 于是 $\exists \theta, \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ 使得 $x = \sin\theta, y = \sin\varphi$. 由于 $G(1, 2\pi)$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，故 $\exists n, m \in \mathbb{Z}$ 使得 $\theta < n + 2\pi m < \varphi$，由此得

$$x = \sin\theta < \sin(n + 2\pi m) < \sin\varphi = y \Leftrightarrow x < \sin n < y.$$

此即表明 $\{\sin n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 在 $[-1,1]$ 中稠密. 同理可证 $\{\cos n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 在 $[-1,1]$ 中稠密.

19. 设 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 是一闭区间. $\mathscr{A} = \{[a_\lambda, b_\lambda]\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 $[a,b]$ 的闭区间族. 称 $\mathscr{A}$ 是 $[a,b]$ 的一个完备覆盖，当且仅当下述性质满足：

i)$\forall\, [a_\lambda, b_\lambda] \in \mathscr{A}$ 且对任一闭区间 $I \subset [a_\lambda, b_\lambda]$，必有 $I \in \mathscr{A}$.

ii)$\forall x \in [a,b], \exists \delta(x) > 0$，若 $[\alpha, \beta] \subset [a,b], x \in [\alpha, \beta], 0 < \beta - \alpha < \delta(x)$，则 $[\alpha, \beta] \in \mathscr{A}$.

1) 证明若 $\mathscr{A} = \{[a_\lambda, b_\lambda]\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $[a,b]$ 的一个完备覆盖. 则 $\mathscr{A}$ 包含 $[a,b]$ 的一个分割 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 即 $\forall i = 0, 1, \cdots, n-1, [x_i, x_{i+1}] \in \mathscr{A}$.
2) 设 $\{(a_\lambda, b_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖，令：

$$\mathscr{A} = \{I \mid I \subset [a,b] \text{ 是一闭区间且 } \exists\lambda \in \Lambda \text{ 使得 } I \subset (a_\lambda, b_\lambda)\}.$$

证明 $\mathscr{A}$ 是 $[a,b]$ 的一个完备覆盖并由此推出 Cantor 有限覆盖定理.
3) 设 X 是一有界的无限集合并且 $X \subset [a,b] \subset \mathbb{R}$，令：

$$\mathscr{B} = \{I \mid I \subset [a,b] \text{ 是一闭区间使得 } I \cap X \text{ 是有限集 }\}.$$

证明若 X 没有聚点，则 $\mathscr{B}$ 是 $[a,b]$ 的一个完备覆盖并由此推出聚点定理.

证明： 设 $\mathscr{A} = \{[a_\lambda, b_\lambda]\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $[a,b]$ 的一完备覆盖. 假设 $\mathscr{A}$ 不包含 $[a,b]$ 的任何分割. $\forall n \in \mathbb{N}$，记 σ_n 为下述 $[a,b]$ 的分割：

$$\sigma_n = \left\{a, a + \frac{b-a}{2^n}, a + 2\frac{b-a}{2^n}, \cdots, a + (2^n - 1)\frac{b-a}{2^n}, b\right\}.$$

根据假设，$\mathscr{A}$ 不包含 σ_n . 因此对 σ_1 ，至少存在 $i_1 \in \left[0, 2^2 - 1\right]$ 使得

$$\left[a + i_1\frac{b-a}{2^1}, a + (i_1+1)\frac{b-a}{2^1}\right] \notin \mathscr{A},$$

记 $[a_1, b_1]$ 为这个闭区间，那么 $0 < b_1 - a_1 = \dfrac{b-a}{2^1}$. 对于 σ_2 ，至少存在 $i_2 \in 0, 2^2 - 1\big]$ 使得

$$\left[a + i_2\frac{b-a}{2^2}, a + (i_2+1)\frac{b-a}{2^2}\right] \notin \alpha,$$

记 $[a_2, b_2]$ 为这个闭区间，那么 $0 < b_2 - a_2 = \dfrac{b-a}{2^2}$. 如此继续下去. 得到一闭区间序列《$[a_n, b_n]$) 使得 $0 < b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}(\forall n \in \mathbb{N})$.
由于 $[a_n, b_n] \subset [a,b]$ 故由 Bolzano — Weierstrass 定理，序列 $\langle a_n\rangle$ 有收玫子序列，不妨就假设 $\langle a_n\rangle$ 本身收敛，并且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \xi \in [a,b]$.
另一方面，$\mathscr{A}$ 是 $[a,b]$ 的完备覆盖，对此 $\xi \in [a,b]$ ，可以假设 $\xi \in]a,b[$ ，对 $\xi = a$ 或 $= b$ 的情形其证明完全类似. 因此 $\delta(\xi) > 0$ 使得：

$$\forall[\alpha,\beta] \subset [a,b] \text{ 且 } \xi \in [\alpha,\beta], \text{若 } \beta - \alpha < \delta(\xi), \text{则 } [\alpha,\beta] \in \mathscr{A}.$$

现在令 $[\alpha,\beta] = [\xi - \mu, \xi + \mu]$ 这里 $0 < 2\mu < \delta(\xi)$. 根据 $(*)$ 式，$[\alpha,\beta] \in, \alpha$. 由于 $\xi \in]\alpha,\beta[$ 且

$$a_n \to \xi(n \to +\infty), 0 < b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0(n \to +\infty).$$

故 $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n \geqslant N, [a_n, b_n] \subset [\alpha,\beta]$. 根据 $\mathscr{O}$ 的性质 i) 知，$[a_n, b_n] \in \mathscr{A}$. 这与区间 $[a_n, b_n]$ 的定义矛盾. 因此 $\mathscr{A}$ 必包含 $[a,b]$ 的一个分割.
2) 设 $]a_\lambda, b_\lambda[\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $[a,b]$ 的一开区间覆盖. 由于

$$\mathscr{A} = \{I \mid I \subset [a,b] \text{ 是闭区间并且 } \exists\lambda \in \Lambda \text{ 使得 } I \subset]a_\lambda, b_\lambda[\}.$$

若 $I \in \mathscr{A}$ ，那么 $\exists\lambda \in \Lambda$ 使得 $I \subset]a_\lambda, b_\lambda[$. 因此对任一闭区间 $J \subset I$ ，有 $J \subset]a_\lambda, b_\lambda[$ ，从而 $J \in \mathscr{A}$. 即完备覆盖的性质 i) 满足.
其次，$\forall x \in [a,b], \exists\lambda \in \Lambda$ 使得 $x \in]a_\lambda, b_\lambda[$ ，因此 $\exists\delta(x) > 0$ 使得：

$$[x - \delta(x), x + \delta(x) \subset]a_\lambda, b_\lambda[. \text{ 现设 } [\alpha,\beta] \subset [a,b] \text{ 且 } x \in [\alpha,\beta], \beta - \alpha < \delta(x). \text{ 那么}$$

$[\alpha,\beta] \subset [x - \delta(x), x + \delta(x)]$ ，从而 $[\alpha,\beta] \subset]a_\lambda, b_\lambda[$ ，即 $[\alpha,\beta] \in \sim \gamma$. 因此完备覆盖的性质 ii) 满足. 换句话说，$\mathscr{A}$ 是 $[a,b]$ 的一个完备覆盖.
根据 1)，$\mathscr{A}$ 包含 $[a,b]$ 的一个分割 $\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$. 从而 $\forall i = 0, 1, \cdots, n-1$ ，$\exists\lambda_i \in \Lambda$ 使得 $[x_i, x_{i+1}] \subset]a_{\lambda_i}, b_{\lambda_i}[$. 由此得：

$$[a,b] = \bigcup_{i=0}^{n-1}[x_i, x_{i+1}] \subset \bigcup_{i=0}^{n-1}\Big]a_{\lambda_i}, b_{\lambda_i}\Big[.$$

这就证明了 $]a_\lambda, b_\lambda[\}_{\lambda\in A}$ 有一个 $[a,b]$ 的有限覆盖 $]a_{\lambda_1}, b_{\lambda_1}[,]a_{\lambda_2}, b_{\lambda_2}, \cdots,]a_{\lambda_{n-1}}, b_{\lambda_{n-1}}[\}$. 3) 同理可证 $\mathscr{E}$ 也是 $[a,b]$ 的一个完备覆盖. 根据 1), $\mathscr{B}$ 包含 $[a,b]$ 的一个分割 $\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, 即 $\forall i = 0,1,\cdots,n, [x_i, x_{i+1}] \in \mathscr{B}$. 因此 $[x_i, x_{i+1}] \cap X$ 是有限集. 因此 $X = {}_{i=0}^{n-1}[x_i, x_{i+1}] \cap X$ 是有限集, 这与 X 为无限集的假设矛盾. 故 X 至少有一个聚点.

20. 利用区间套定理证明实数集 $\mathbb{R}$ 是不可数的.

证明: 由于映射 $x \mapsto f(x) = \tan\frac{\pi}{2}x, x \in \left]-1,1\right[$ 是从 $]-1,1[$ 到 $\mathbb{R}$ 上的单全射, 并且 $]-1,1[$ 与 $[-1,1]$ 等势, 故只需证明 $[-1,1]$ 不可数即可. 用反证法. 假设区间 $[-1,\ 1]$ 是可数集. 那么有 $[-1,1] = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. 将 $[-1,1]$ 分为三个长度相等的闭子区间, 记它们为 $I_1^{(0)}, I_2^{(0)}, I_3^{(0)}$. 那么它们中至少存在一个不包含 x_0 的子区间, 不妨设它为 I_1 .
同理, 将 I_1 分为长度相等的三个闭子区间, 其中必有一个闭子区间不包含 x_1 , 记它为 I_2 . 如此无限继续下去, 我们得到 $[-1,1]$ 的一个闭区间序列 $\langle I_n\rangle$ 使得
1)$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n, |I_n| = \frac{2}{3^n}$($|I_n|$ 为 I_n 的长度),
2)$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \notin I_n$. 根据区间套定理, 存在惟一的 $\xi \in {}_{n\in H} I_n$. 显然, $\forall n \in \mathbb{N}, \xi \neq x_n$. 因此 $\xi \in [-1,1]$. 这与 $\xi \in I_n \subset [-1,1] = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 矛盾. 因此 $[-1,1]$ 不可数.

21. 设 I 是 $\mathbb{R}$ 的一开区间. 假设存在有限个开区间 $I_1, I_2, \cdots, I_m$ 使得 $I = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant m} I_i$.
1) 证明存在 $i \in \{1,2,\cdots,m\}$ 使得 $\bigcup_{j\neq i} I_j$ 是一区间.
2) 举一例说明此性质不可以推广到无限个开区间 $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 上去, 使得 $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k = I$.

证明: 1) 令 $\Lambda = \{1,2,\cdots,m\}$. 定义集 Λ_1 与集 J_1 如下:

$$\Lambda_1 = \{i \in \Lambda \mid I_1 \cap I_i \neq \varnothing\}, J_1 = {}_{i\in\Lambda_1} I_i$$

由于 $I = {}_{i\in A} I_i$ 是一区间, 故 $\Lambda_1 \neq \varnothing$. 现证明 J_1 是一个开区间. 事实上, 令 $\Lambda_1 = \{i_1,\ i_2, \cdots, i_k\}$. 由于 $I_1 \cap I_{i_1} \neq \varnothing$, 故 $I_1 \cup I_{i_1}$ 是一开区间, 假设 $I_1 \cup I_{i_1} \cup I_{i_2} \cup \cdots \cup I_{i_{k-1}}$ 是一开区间, 由于 $I_1 \cap I_{i_k} \neq \varnothing$, 故 $(I \cup I_{i_1} \cup I_{i_2} \cup \cdots \cup I_{i_{k-1}}) \cap I_{i_k} \neq \varnothing$, 从而 $I \cup I_{i_1} \cup \cdots \cup I_{i_{k-1}} \cup I_{i_k}$ 是一区间, 即 J_1 是一区间.
若 $\Lambda_1 = \Lambda$, 显然 $\forall i \in \Lambda\ {}_{j\neq i} I_j$ 是一开区间, 若 $\Lambda_1 \neq \Lambda$, 则定义 I_2 及. J_2 如下:

$$\Lambda_2 = \{i \in \Lambda \mid, J_1 \cap I_i \neq \varnothing\}, J_2 = {}_{i\in\Lambda_2} I_i.$$

由于 $I = {}_{i\in A} I_i$ 是一区间, 故 $\Lambda_2 \neq \varnothing$. 因此 J_2 是一开区间. 若 $\Lambda_2 = \Lambda$, 则 $\forall i \in \Lambda_2 - \Lambda_1$, ${}_{j\neq i} I_i$ 是一开区间; 若 $\Lambda_2 \neq \Lambda$, 则可以继续定义集 Λ_3 与 J_3 等等. 由于 Λ 是有限集, 最后必存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\Lambda_k = \{i \in \Lambda \mid J_{k-1} \cap I_i \neq \varnothing\} = \Lambda$, 这里 J_{k-1} 是一开区间. 因此 $J_k = {}_{i\in\Lambda_k} I_i = I$. 由于 $\Lambda_k - \Lambda_{k-1} \neq \varnothing$, 故 $\forall i \in \Lambda_k - \Lambda_{k-1}$, 集合 ${}_{j\neq i} I_j$ 是一开区间.
2)$\forall n \in \mathbb{N},]n - \frac{1}{3}, n+1+\frac{1}{3}[\subset \mathbb{R}$ 是一开区间, 并且有:

$$\mathbb{R} = {}_{n\in\mathbf{N}}\left]n - \frac{1}{3}, n+1+\frac{1}{3}\right[.$$

显然, $\forall m \in \mathbb{N}, {}_{n\neq m}\left]n - \frac{1}{3}, n+1+\frac{1}{3}\right[=]-\infty, m+\frac{1}{3}[\cup]m+\frac{2}{3}, +\infty[$ 不是一个开区间.

22. 1) 设 $l > 0$. 给每一个 x 对应于一个开区间 $I(x) = \left(x - \frac{l}{2}, x + \frac{l}{2}\right)$. 设 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$. 证明存在一有限集 E 使得

$$[a,b] \subset \bigcup_{x\in E} I(x) \text{ 并且 } l \cdot \operatorname{card}(E) \leqslant l + 2(b-a).$$

2) 设 $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in A}$ 是一族 $\mathbb{R}$ 的开区间使得 $[a,b] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Omega_\lambda$. 证明存在 $l > 0$ 使得 $\forall x \in [a,b], \exists\lambda \in \Lambda$ 使得 $(x-l, x+l) \subset \Omega_\lambda$. 利用结论 1) 给出 Cantor 有限覆盖定理的一个新证明.

证明： 1) 令 $b-a=n\cdot\frac{l}{2}+\nu$ 这里 $n\in\mathbb{N}, 0\leqslant\gamma\leqslant\frac{l}{2}$. 由此得

$$b-a\leqslant(n+1)\frac{l}{2} \text{ 并且 } n\leqslant\frac{2(b-a)}{l}.$$

设 $x_i=a+i\frac{l}{2}$ ，这里 $i\in\left\{0,1,\cdots,\left[\frac{2(b-a)}{l}\right]\right\}$ ，令 $E=\left\{x_0,x_1,\cdots,x_{\left[\frac{3(b-a)}{l}\right]}\right\}$. 有 $[a,b]\subset\bigcup_{x\in E}I(x)$ ，这里 $I(x)=]x-\frac{l}{2},x+\frac{l}{2}[$ 且 $\operatorname{card}(E)\leqslant 1+\frac{2(b-a)}{l}$.

2) 设 $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in A}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一族开区间使得 $[a,b]\subset\bigcup_{\lambda\in A}\Omega_\lambda$. 证明 $\exists>0$，它具有下述性质：

$$\forall x\in[a,b],\exists\lambda\in\Lambda \text{ 使得 }]x-l,x+l[\subset\Omega_\lambda.$$

用反证法．假设性质 $(*)$ 式不成立，取 $l=\frac{1}{n}(n\in\mathbb{N})$ ，那么 $\forall n\in\mathbb{N}\exists x_n\in[a,b]$ 使得 $\forall\lambda\in\Lambda,]x_n-\frac{1}{n},x_n+\frac{1}{n}[\not\subset\Omega_\lambda$. 根据 Bolzano — Weierstrass 定理，$\langle x_n\rangle$ 有一个收玫子序列，不妨假设 $\langle x_n\rangle$ 本身收敛且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\bar{x}\in[a,b]$. 由于 $[a,b]\subset\bigcup_{\lambda\in A}\Omega_\lambda$ ，故 $\exists\lambda_0\in\Lambda$ 使得 $\bar{x}\in\Omega_{\lambda_0}$. 因为 Ω_{λ_0} 是开区间，故 $\exists\delta>0$ 使得 $]\bar{x}-\delta,\bar{x}+\delta[\subset\Omega_{\lambda_0}$.

现设 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $|x_N-\bar{x}|<\frac{\delta}{2},\frac{1}{N}<\frac{\delta}{2}$，那么 $\forall x\in]x_N-\frac{1}{N},x_N+\frac{1}{N}[$ 有

$$|x-\bar{x}|\leqslant|x-x_N|+|x_N-\bar{x}|<\frac{1}{N}+\frac{\delta}{2}<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta.$$

此即表明 $x\in]\bar{x}-\delta,\bar{x}+\delta[$，因此 $]x_N-\frac{1}{N},x_N+\frac{1}{N}[\subset]\bar{x}-\delta,\bar{x}+\delta[\subset\Omega_{\lambda_0}$ ，这与下述事实相矛盾：$\forall\lambda\in\Lambda,]x_N-\frac{1}{N},x_N+\frac{1}{N}[\not\subset\Omega_\lambda$. 因此上述性质 $(*)$ 式成立.

现在根据 1)，对此 $l>0$，存在有限集 $E=\{x_1,x_2,\cdots,x_m]\subset\mathbb{R}$ 使得 $a,b]\subset\bigcup_{i=1}^{m}\left]x_i-\frac{l}{2},x_i+\frac{l}{2}\right[$. 由于 $\forall x_i,\exists\lambda_i\in\Lambda$ 使得 $]x_i-l,x_i+l[\subset\Omega_\lambda$ ，故

$$[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^{m}\left]x_i-\frac{l}{2},x_i+\frac{l}{2}\right[\subset\bigcup_{i=1}^{m}\Omega_{\lambda_i}.$$

由此 Cantor 有限覆盖定理得证.

23. 设 $\langle x_n\rangle$ 与 $\langle p_n\rangle$ 是两个 $\mathbb{R}$ –序列使得

$$\forall n\in\mathbb{N}, p_n\geqslant 0 \text{ 且 } \lim_{n\to+\infty}(p_0+p_1+\cdots+p_n)=+\infty.$$

1) 设 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得 $\forall n\geqslant n_0,\sum\limits_{k=0}^{n}p_k>0$. 令：$\forall n\geqslant n_0$

$$y_n=\frac{p_0x_0+p_1x_1+\cdots+p_nx_n}{p_0+p_1+\cdots+p_n}.$$

证明：$\varliminf\limits_{n\to+\infty}x_n\leqslant\varliminf\limits_{n\to+\infty}y_n\leqslant\varlimsup\limits_{n\to+\infty}y_n\leqslant\varlimsup\limits_{n\to+\infty}x_n$.

2) 当 $\langle x_n\rangle$ 在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中收敛时，结论如何？

证明： 1) 若 $\langle x_n\rangle$ 是下无界的，那么 $\varliminf\limits_{n\to+\infty}x_n=-\infty$ ，从而 $\varliminf\limits_{n\to+\infty}x_n\leqslant\varliminf\limits_{n\to+\infty}y_n$. 若 $\langle x_n\rangle$ 是下有界的，那么

$$\varliminf_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{m\geq n}x_m\right)=l\in\mathbb{R} \text{ 或 } \varliminf_{n\to+\infty}x_n=+\infty.$$

当 $\varliminf\limits_{n\to+\infty}x_n=l\in\mathbb{R}$ 时，则 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$ 使得 $\forall n\geqslant N,\inf\limits_{m\geqslant n}x_m>l-\varepsilon$，由此推得 $\forall n\geqslant N,x_n>l-\varepsilon$. 因此 $\forall m\geqslant n\geqslant N$.

$$\begin{aligned}y_m&=\frac{p_0x_0+\cdots+p_mx_m}{p_0+\cdots+p_m}=\frac{p_0x_0+\cdots+p_{N-1}x_{N-1}}{p_0+\cdots+p_m}+\frac{p_Nx_N+\cdots+p_mx_m}{p_0+\cdots+p_m}\\&\geqslant\frac{p_0x_0+\cdots+p_{N-1}x_{N-1}}{p_0+\cdots+p_m}+\left(\frac{p_N+\cdots+p_m}{p_0+\cdots+p_m}\right)(l-\varepsilon)\\&=(l-\varepsilon)+\frac{p_0\left(x_0-l+\varepsilon\right)+\cdots+p_{N-1}\left(x_{N-1}-l+\varepsilon\right)}{p_0+\cdots+p_m}.\end{aligned}$$

由此推得 $\inf\limits_{m\geqslant n} y_m \geqslant l-\varepsilon+\inf\limits_{m\geqslant n}\left(\dfrac{p_0\left(x_0-l+\varepsilon\right)+\cdots+p_{N-1}\left(x_{N-1}-l+\varepsilon\right)}{p_0+\cdots+p_m}\right)=l-\varepsilon$. 因此 $\underline{\lim}_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\inf\limits_{m\geqslant n} y_m\right)\geqslant l-\varepsilon$. 由于 $\varepsilon>0$ 的任意性，故 $\underline{\lim}_{n\to+\infty} y_n \geqslant l = \underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n$.

当 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ 时：则有 $\underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ ，从而 $\forall M>0, \exists N\in\mathbb{N}$ ，使得 $\forall n\geqslant N, x_n>M$. 由此得 $\forall n\geqslant N$.

$$\begin{aligned}
y_n &= \frac{p_0x_0+\cdots+p_nx_n}{p_0+\cdots+p_n} = \frac{p_0x_0+\cdots+p_{N-1}x_{N-1}}{p_0+\cdots+p_n}+\frac{p_Nx_N+\cdots+p_nx_n}{p_0+\cdots+p_n} \\
&\geqslant \frac{p_0x_0+\cdots+p_{N-1}x_{N-1}}{p_0+\cdots+p_n}+\left(\frac{p_N+\cdots+p_n}{p_0+\cdots+p_n}\right)M \\
&= M+\frac{p_0\left(x_0-\mu\right)+\cdots+p_{N-1}\left(x_{N-1}-M\right)}{p_0+\cdots+p_n}.
\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}(p_0+\cdots+p_n)=+\infty$ ，故 $\underline{\lim}_{n\to+\infty} y_n \geqslant M$ ，即 $\underline{\lim}_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ ，因此

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} y_n = +\infty.$$

其次，由于 $\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = -\underline{\lim}_{n\to+\infty}(-x_n)$ ，故

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = -\underline{\lim}_{n\to+\infty}(-x_n)\geqslant -\underline{\lim}_{n\to+\infty}(-y_n) = \overline{\lim}_{n\to+\infty} y_n.$$

从而

$$\underline{\lim}_{\to+\infty} x_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to+\infty} y_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to+\infty} y_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n.$$

若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l\in\mathbb{R}$ ，则 $\underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = l$ ，从而

$$l = \underline{\lim}_{n\to+\infty} y_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to+\infty} y_n = l \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y_n = l$$

若 $\lim x_n = +\infty$ ，则根据 1)， $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ ，则 $\forall M>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geqslant N, x_n\leqslant -M$. 从而

$$\forall n\geqslant N, y_n = \frac{p_0x_0+\cdots+p_nx_n}{p_0+\cdots+p_n}\leqslant\frac{p_0\left(x_0+M\right)+\cdots+p_{N-1}\left(x_{N-1}+M\right)}{p_0+\cdots+p_n}-M.$$

由此推得

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} y_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to+\infty}\left(\frac{p_0\left(x_0+M\right)+\cdots+p_{N-1}\left(x_{N-1}+M\right)}{p_0+\cdots+p_n}\right)-M=-M.$$

由 $M>0$ 的任意性知， $\overline{\lim}_{n\to+\infty} y_n = -\infty$ ，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = -\infty$. 因此

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = l\in\overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y_n = l\in\overline{\mathbb{R}}$$

24. 设 $\langle x_n\rangle$ 是一 $\mathbb{R}$ –序列， $\alpha>0$. 令：

$$y_n=\frac{1}{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right), z_n=\alpha x_n+(1-\alpha)y_n.$$

证明若 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$ ，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. 为此：

1) 验证若 $x_n\leqslant y_n$ ，则 $y_{n-1}\geqslant y_n$ ；若 $x_n\geqslant y_n$ ，则 $y_{n-1}\leqslant y_n$.

2) 证明 $\overline{\lim}_{n\to+\infty} y_n\in\mathbb{R}$, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} y_n\in\mathbb{R}$.

3) 证明 $\overline{\lim}_{n\to+\infty} y_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} y_n$ 并由此推出结论.

证明： 1) 证明从略.

2) 用反证法. 假设 $\overline{\lim}_{n\to+\infty} y_n = +\infty$. 根据上极限性质，对 $M=1, \exists k_1\in\mathbb{N}$ 使得 $y_{k_1}>1$. 若 $x_{k_1}\geqslant y_{k_1}$ ：则 $z_{k_1}=\alpha x_{k_1}+(1-\alpha)y_{k_1}\geqslant\alpha y_{k_1}+(1-\alpha)y_{k_1}=y_{k_1}>1$. 若 $x_{k_1}<y_{k_1}$ ：则 $y_{k_1-1}\geqslant y_{k_1}$. 如果 $x_{k_1-1}\geqslant y_{k_1-1}$ ，则

$$z_{k_1-1}=\alpha x_{k_1-1}+(1-\alpha)y_{k_1-1}\geqslant\alpha y_{k_1-1}+(1-\alpha)y_{k_1-1}=y_{k_1-1}\geqslant y_{k_1}>1.$$

如果 $x_{k_1-1} < y_{k_1-1}$，可以考虑 y_{k_1-2} 等等. 由于 $x_1 = y_1$，故必存在 $l_1 \in 1, k_1$ 使得 $x_i < y_i\ (\forall i = l_1+1, \cdots, k_1)$ 而 $x_{l_1} \geqslant y_{l_1}$. 因此由 1) 知,

$$y_{l_1} \geqslant y_{l_1+1} \geqslant \cdots \geqslant y_{k_1} > 1 \Rightarrow z_{l_1} > 1$$

同理对 $M = 2, \exists k_2 \in \mathbb{N}$ 使得 $y_{k_2} > 2$. 重复上述步骤, 可断定存在 $l_2 \in 1, k_2]$ 使得 $x_i < y_i\ (\forall i = l_2+1, \cdots, k_2)$ 而 $x_{l_2} \geqslant y_{l_2}$. 因此

$$y_{l_2} \geqslant y_{l_2+1} \geqslant \cdots \geqslant y_{k_2} > 2 \Rightarrow z_{l_2} > 2$$

将上述过程无限继续下去, 可得到一自然数序列 $\langle l_n \rangle$ 使得

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{l_n} > n.$$

显然集合 $\{l_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是无限集, 否则存在一子序列 $\langle l_{s_n} \rangle$ 及 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n \in \mathbb{N}, l_n = n_0$，从而 $z_{l_n} = z_{n_0} > s_n \to +\infty$. 这是矛盾的. 因此通过选取一个子序列, 可以假定序列 $\langle l_n \rangle$ 是严格单调上升的, 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_{l_n} = +\infty$. 这又与假设 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$ 矛盾. 因此 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, y_n = +\infty$ 不可能.
假设 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, y_n = -\infty$：那么 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = -\infty$，类似可证, 将得到 $\langle z_n \rangle$ 的一个子序列 $\langle z_{s_n} \rangle$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} z s_n = -\infty$.
因此必有 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, y_n \in \mathbb{R}$. 由于 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, y_n = -\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\,(-y_n)$，故 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, y_n \in \mathbb{R}$.
3) 由于 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, y_n \in \mathbb{R}, \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, y_n \in \mathbb{R}$，故序列 $\langle y_n \rangle$ 是有界的.
i) 若 $\exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n \geqslant N, x_n \leqslant y_n$. 那么 $y_{n-1} \geqslant y_n$. 从而序列 $\langle y_n \rangle\ (n \geqslant N)$ 是单调下降有下界的. 故 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lambda \in \mathbb{R}$. 由表达式 $z_n = \alpha x_n + (1-\alpha) y_n$ 知序列 $\langle x_n \rangle$ 收玫. 根据 Cesaro 平均 (见习题 2 − 12), $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
由于 $z_n \to 0 (n \to +\infty)$，故 $\lambda = 0$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.
若 $\exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n \geqslant N, x_n \geqslant y_n$. 则同理可证也有 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.
ii) 若不存在这样一个 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n \geqslant N, x_n \leqslant y_n$ 或 $\forall n \geqslant N, x_n \geqslant y_n$. 那么不妨假设存在这样一个严格单调上升的自然数序列 $\langle k_n \rangle$ 使得：

$$\forall n \in 1, k_1 - 1, x_n \leqslant y_n, \forall n \in k_1, k_2 - 1, x_n \geqslant y_n$$

$$\forall n \in k_2, k_3 - 1, x_n \leqslant y_n, \forall n \in k_3, k_4 - 1, x_n \geqslant y_n$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$. 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_0 \Rightarrow -\varepsilon < z_n < \varepsilon$. 取 $N \in \mathbb{N}$ 充分大使得 $k_N \geqslant N_0 + 1$，由此推得 $\forall i \geqslant N, -\varepsilon < z_{k_i} < \varepsilon$. 现在根据 $(\star)$ 式, 有：

$$x_{k_{2N}-1} \geqslant y_{k_{2N}-1} \Rightarrow z_{k_{2N}-1} = \alpha x_{k_{2N}-1} + (1-\alpha) y_{k_{2N}-1} \geqslant y_{k_{2N}-1} \Rightarrow y_{k_{2N}-1} < \varepsilon.$$

$$\forall n \in k_{2N}, k_{2N+1} - 1, x_n \leqslant y_n \Rightarrow y_{n-1} \geqslant y_n$$

$$\Rightarrow y_{k_{2N}-1} \geqslant y_{k_{2N}} \geqslant y_{k_{2N}+1} \geqslant \cdots \geqslant y_{k_{2N+1}-1}.$$

因此

$$\Rightarrow y_{k_{2N}-1} \geqslant y_{k_{2N}} \geqslant y_{k_{2N}+1} \geqslant \cdots \geqslant y_{k_{2N+1}-1}.$$

$$x_{k_{2N+1}-1} \leqslant y_{k_{2N+1}-1} \Rightarrow z_{k_{2N+1}-1} = \alpha x_{k_{2N+1}-1} + (1-\alpha) y_{k_{2N+1}-1} \leqslant y_{k_{2N+1}-1}.$$

因此

$$-\varepsilon < z_{k_{2N+1}-1} \leqslant y_{k_{2N+1}-1} \leqslant \cdots \leqslant y_{k_{2N}+1} \leqslant y_{k_{2N}} \leqslant y_{k_{2N}-1} < \varepsilon.$$

$$\forall n \in k_{2N+1}, k_{2(N+1)} - 1, x_n \geqslant y_n \Rightarrow y_{n-1} \leqslant y_n$$

$$\Rightarrow y_{k_{2N+1}-1} \leqslant y_{k_{2N+1}} \leqslant \cdots \leqslant y_{k_{2(N+1)}}{}^{-1}.$$

$$\geqslant y_{k_{2(N+1)}-1} \Rightarrow z_{k_{2(N+1)}-1} = \alpha x_{k_{2(N+1)}-1} + (1-\alpha) y_{k_{2(N+1)}-1} \geqslant y_{k_{2(N+1)}-1}.$$

$$-\varepsilon < y_{k_{2N+1}} \leqslant y_{k_{2N+1}+1} \leqslant \cdots \leqslant y_{k_{2(N+1)}-1} \leqslant z_{k_{2(N+1)}-1} < \varepsilon.$$

由归纳法，可证：$\forall i \geqslant N$，

$$-\varepsilon < y_{k_{2i+1}-1} \leqslant y_{k_{2i+1}-2} \leqslant \cdots \leqslant y_{k_{2i}} < \varepsilon.$$

$$-\varepsilon < y_{k_{2j+1}} \leqslant y_{k_{2i+1}+1} \leqslant \cdots \leqslant y_{k_{2i+1)}^{-1}} < \varepsilon.$$

此即表明 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.