数学分析

课程手稿 (第二册)

作者：迷途小书童

组织：Institute of Mathematics

时间：October 24, 2025

版本：第五次修正

Marie Curie：Life is not easy for any of us. But what of that?

We must have perseverance and above all confidence in ourselves.

We must believe that we are gifted for something and that this thing must be attained.

ElegantLATEX Program

作者联系方式：learnweierstrass@gmail.com

目录

第十一章 数项级数 . . . **1**
11.1 一般数项级数 . . . 1
第十一章 练习 . . . 9
11.2 正项级数 . . . 10
第十一章 练习 . . . 28
11.3 绝对收敛与条件收敛级数 . . . 32
第十一章 练习 . . . 51
第十二章 函数项序列与函数项级数 . . . **55**
12.1 函数项序列与级数的简单与一致收敛 . . . 55
第十二章 练习 . . . 67
12.2 函数项序列与级数的性质 . . . 69
第十二章 练习 . . . 83
12.3 等度连续函数族 . . . 85
第十二章 练习 . . . 91
12.4 Stone-Weierstrass 定理 . . . 92
第十二章 练习 . . . 95
第十三章 幂级数 . . . **97**
13.1 幂级数的收敛半径 . . . 97
第十三章 练习 . . . 103
13.2 幂级数的基本性质 . . . 104
第十三章 练习 . . . 110
13.3 函数的幂级数展开 . . . 112
第十三章 练习 . . . 115
13.4 常用函数的 Maclaurin 级数展开 . . . 116
第十三章 练习 . . . 121
13.5 复指数函数 . . . 122
第十三章 练习 . . . 127
第十四章 Fourier 级数 . . . **128**
14.1 内积空间 . . . 128
第十四章 练习 . . . 131
14.2 Fourier 级数 . . . 134
第十四章 练习 . . . 146
14.3 Fourier 级数的点态收敛与一致收敛 . . . 148
第十四章 练习 . . . 157

第十五章 偏导数 . . . 160
15.1 一阶偏导数 . . . 160
第十五章 练习 . . . 168
15.2 高阶偏导数 . . . 171
第十五章 练习 . . . 177
15.3 多元函数的极值 . . . 179
第十五章 练习 . . . 185
第十六章 映射的微分 . . . 187
16.1 微分的定义 . . . 187
第十六章 练习 . . . 191
16.2 微分的性质 . . . 193
第十六章 练习 . . . 208
16.3 微分同胚 . . . 210
第十六章 练习 . . . 222
16.4 条件极值 . . . 224
第十六章 练习 . . . 229
第十七章 微分形式 . . . 231
17.1 外代数 . . . 231
第十七章 练习 . . . 241
17.2 微分形式 . . . 243
第十七章 练习 . . . 248
17.3 微分形式的外微分 . . . 249
第十七章 练习 . . . 260
第十八章 含参数的积分 . . . 263
18.1 含参数的正常积分 . . . 263
第十八章 练习 . . . 270
18.2 含参数的广义积分 . . . 271
第十八章 练习 . . . 284
18.3 Euler 积分 . . . 286
第十八章 练习 . . . 293
第十九章 重积分 . . . 295
19.1 $\mathbb{R}^n$ 中的长方体 . . . 295
第十九章 练习 . . . 297
19.2 闭长方体上的可积函数 . . . 298
第十九章 练习 . . . 302
19.3 有界集上的可积函数 . . . 303
第十九章 练习 . . . 322
19.4 Riemann 和 . . . 324

第十九章 练习 327
19.5 重积分的计算 327
第十九章 练习 377
第二十章 函数沿子流形的积分 381
20.1 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维曲面 381
第二十章 练习 387
20.2 平面与空间曲线 390
第二十章 练习 406
20.3 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维子流形 408
第二十章 练习 419
20.4 函数沿 k 维子流形的积分 421
第二十章 练习 442

第十一章 数项级数

这一章我们介绍可数无限项实或复数的和即数项级数的概念，研究了数项级数的若干性质，建立了一系列数项级数收敛与发散的判别准则.

11.1 一般数项级数

我们知道有限多个实或复数是可以求和的，但可数无限个实数或复数如何定义它们的 “和” 呢？例如对于 $1,-1,1,-1,\cdots$

$$\underbrace{1-1+1-1+\cdots+1-1}_{2n\text{个 }1}=0$$

$$\underbrace{1-1+1-1+\cdots+1-1+1}_{2n+1\text{个 }1}=1$$

我们究竟定义这无穷多个 $1,-1,1,-1,\cdots$ 的 “和” 为 0 还是为 1？因此下面我们首先介绍数项级数的定义.

1. 数项级数的定义

以下我们设 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$，并分别在 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上取绝对值或模为各自的范数.

定义 11.1

设 $\langle u_n\rangle$ 是任一 $\mathbb{K}-$序列，令

$$S_1=u_1,S_2=u_1+u_2,\cdots,S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\cdots$$

1) $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 称为以 u_n 为一般项 (通项) 的 $\mathbb{K}-$ 级数或数项级数. 并简记为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$.

2) $\forall n\in\mathbb{N}$, S_n 称为数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 的前 n 项之和或部分和.

3) 若 $\langle S_n\rangle$ 有极限 $S\in\mathbb{K}$ 或 $\pm\infty$，则我们称数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 有和 S，记为 $S=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$.

4) 若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 的和 $S\in\mathbb{K}$，则我们又称 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛. 非收敛的数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 称为发散级数.

♣

例题 11.1 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}$ 的前 n 项之和

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\to 2(n\to+\infty)$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}$ 是收敛的，并且有和 $S=2$.

例题 11.2 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n$ 的前 n 项之和

$$S_n = 1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1) \to +\infty(n \to +\infty)$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n$ 有和 $S=+\infty$，但此级数是发散的.

例题 11.3 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$ 的前 $2n$ 项之和与前 $2n+1$ 项之和

$$S_{2n}=0, \quad S_{2n+1}=1.$$

因此序列 $\langle S_n\rangle$ 当 $n\to+\infty$ 时极限不存在，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$ 没有和，故它是发散的.

由上述数项级数的收敛性定义知，数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的敛散性实质就是它的部分和序列 $\langle S_n\rangle$ 的敛散性问题.

反过来，一个 $\mathbb{K}$ 序列 $\langle u_n\rangle$ 的敛散性问题也可以化为数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 的敛散性问题来研究，这是因为对此级数，它的前 n 项之和

$$\begin{aligned} S_n &= (u_2-u_1)+(u_3-u_2)+\cdots+(u_{n+1}-u_n) \\ &= u_{n+1}-u_1, \end{aligned}$$

从而 $\langle u_n\rangle$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\langle S_n\rangle$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 收敛.

2. 级数收敛的必要条件

定理 11.1

若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

证明 因为数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛，故有

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty}(S_n-S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} \\ &= S-S=0. \end{aligned}$$

此定理表明，若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 有 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 必然发散，但是 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ 还不足以判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛.

例题 11.4 考察数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 的敛散性.

我们有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$，但由于此级数的前 n 项之和

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}(n>1)$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

例题 11.5 考察数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}q^n(q\in\mathbb{K})$ 的敛散性.

1. 若 $|q|\geqslant1$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n\neq0$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}q^n$ 发散.
2. 若 $|q|<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}q^n$ 的前 n 项之和

$$S_n=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}\to\frac{1}{1-q}(n\to+\infty),$$

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}q^n$ 收敛，并且有和 $S=\dfrac{1}{1-q}$.

这个级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}q^n$ 称为几何级数，它在今后的级数收敛性研究中将发挥重要的作用.

定理 11.2

若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛，则

$$r_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots(n\in\mathbb{N})$$

(我们称 r_n 为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 的 n 阶余项) 当 $n\to+\infty$ 时收敛于零.

证明 令收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 的和为 S . 则

$$r_n=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k-S_n=S-S_n\to S-S=0(n\to+\infty)$$

3. 级数的 Cauchy 收敛准则

定理 11.3 (Cauchy 准则)

数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是：

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n,k\in\mathbb{N},n\geqslant N)\Longrightarrow|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+k}|<\varepsilon.$$

证明 令

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,S_{n+k}=u_1+u_2+\cdots+u_{n+k}.$$

则
$$S_{n+k}-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+k}.$$
于是由 $\mathbb{K}$–序列的 Cauchy 收敛准则及级数的收敛定义推知
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\text{ 收敛 }&\iff\langle S_n\rangle\text{ 收敛}\\&\iff(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n,k\in\mathbb{N},n\geqslant N)\\&\iff|S_{n+k}-S_n|<\varepsilon\\&\iff(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n,k\in\mathbb{N},n\geqslant N)\\&\implies|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+k}|<\varepsilon.\end{aligned}$$

推论 11.1

数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛，当且仅当 $\forall k\in\mathbb{N}$，数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_{n+k}$ 收敛.

推论 11.2

任意改变数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 的有限多项后所得新级数与原级数有相同的收敛与发散性.

这两个推论的证明都很简单，我们留给读者作为练习.

下面我们看两个用 Cauchy 准则证明数项级数的敛散性的例子.

例题 11.6 考察数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 的敛散性.

由于 $\forall n,k\in\mathbb{N}$，
$$\begin{aligned}0&<\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+k)^2}\\&<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}<\frac{1}{n}\end{aligned}$$
故
$$\begin{aligned}&(\forall\varepsilon>0)\left(\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1\right)(\forall n,k\in\mathbb{N},n\geqslant N)\\\implies&0<\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+k)^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon.\end{aligned}$$
由定理11.3知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

例题 11.7 证明数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

事实上，$\forall n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

故由 Cauchy 收敛准则知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

4. 收敛级数的一个运算性质

定理 11.4

设数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛，其和分别为 S 与 T，则

1. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$，数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda u_n$ 收敛，其和为 λS.
2. 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n)$ 收敛，其和为 $S + T$.

证明 令

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, T_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

则 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$，$\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = T$，从而

$$\begin{aligned} &(\lambda u_1) + (\lambda u_2) + \cdots + (\lambda u_n) = \lambda S_n \to \lambda S (n \to +\infty), \\ &(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots + (u_n + v_n) = S_n + T_n \to S + T (n \to +\infty). \end{aligned}$$

此即表明数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n)$ 收敛，并且其和分别为 λS 与 $S + T$.

推论 11.3

设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 是任一复数项级数，$u_n = x_n + \mathrm{i} y_n, x_n, y_n \in \mathbb{R}$，$(n \in \mathbb{N})$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是：实数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ 均收敛. 在收敛的情况下，

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \mathrm{i} \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

证明 令

$$\begin{aligned} &S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ &Y_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n. \end{aligned}$$

则

$$S_n = (x_1 + \mathrm{i} y_1) + (x_2 + \mathrm{i} y_2) + \cdots + (x_n + \mathrm{i} y_n) = X_n + \mathrm{i} Y_n.$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ 收敛} &\Longleftrightarrow \langle S_n\rangle \text{ 收敛}\\ &\Longleftrightarrow \langle X_n\rangle \text{ 与 } \langle Y_n\rangle \text{ 收敛}\\ &\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \text{ 与 } \sum_{n=1}^{+\infty} y_n \text{ 收敛.}\end{aligned}$$

并且在 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛的情况下,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + \mathrm{i}y_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{i}y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \mathrm{i}\sum_{i=1}^{+\infty} y_n$$

这个推论的结论表明可以把复数项级数的敛散性研究化为实数项级数的敛散性研究.

例题 11.8 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 是任意两个数项级数. 试在下面两种情形下:

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n - b_n|$ 均收敛,
2. $a_n \geqslant 0, b_n \geqslant 0 (\forall n \in N)$ 并且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 均发散, 研究数项级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \max(a_n, b_n) \text{ 与 } \sum_{n=1}^{+\infty} \min(a_n, b_n)$$

的收敛与发散性.

在情形 1) 下, 由于

$$\max(a_n, b_n) = \frac{a_n + b_n + |a_n - b_n|}{2},$$

$$\min(a_n, b_n) = \frac{a_n + b_n - |a_n - b_n|}{2},$$

故由已知条件及定理11.4知数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \max(a_n, b_n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \min(a_n, b_n)$ 均收敛.

在情形 2) 下, 由于 $a_n \geqslant 0, b_n \geqslant 0$, 故 $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \max(a_k, b_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

从而由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的发散性推知 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \max(a_k, b_k) = +\infty$. 因此数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \max(a_n, b_n)$ 发散.

对于数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \min(a_n, b_n)$, 则可能收敛, 也可能发散. 例如, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + 2 + \frac{1}{2^4} + 3 + \cdots + n + \frac{1}{2^{2n}} + \cdots$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2^3} + 4 + \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}} + 2n + \cdots,$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 均发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \min(a_n, b_n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛.

又例如

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + \cdots + n + \frac{1}{n+1} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = 1 + 2 + \frac{1}{3} + 4 + \cdots + \frac{1}{n} + n + 1 + \cdots$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \min(a_n, b_n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 也发散.

5. 收敛级数的结合性质

定理 11.5

设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 是任一数项级数，$k_0 = 0, \langle k_n \rangle$ 是任一严格单调上升的自然数序列，令

$$v_n = u_{k_n+1} + u_{k_n+2} + \cdots + u_{k_{n+1}}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ 也收敛，并且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

2) 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ 收敛，并且实数序列 $\langle a_n \rangle$：

$$a_n = \left|u_{k_n+1}\right| + \left|u_{k_n+2}\right| + \cdots + \left|u_{k_{n+1}}\right| (n \in \mathbb{N})$$

收敛于 0，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 也收敛，并且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

证明 1)$\forall n \in \mathbb{N}$，令

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, V_{n+1} = v_0 + v_1 + \cdots + v_n.$$

于是

$$V_{n+1} = (u_1 + \cdots + u_{k_1}) + (u_{k_1+1} + \cdots + u_{k_2}) + \cdots + (u_{k_n+1} + \cdots + u_{k_{n+1}}) = S_{k_{n+1}}.$$

此即表明 $\langle V_{n+1} \rangle = \langle S_{k_{n+1}} \rangle$ 是 $\langle S_n \rangle$ 的一个子序列. 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛，故序列 $\langle S_n \rangle$ 收敛，从而序列 $\langle V_n \rangle$ 收敛，并且

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

因此数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ 收敛，并且 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

2) 首先，由于 $\langle k_n \rangle$ 是严格单调上升的自然数序列，故 $\forall n \in \mathbb{N}$，存在唯一的 $\overline{m} = m(n) \in \mathbb{N}$ 使得

$$k_{\overline{m}} < n \leqslant k_{\overline{m}+1}.$$

于是

$$\begin{aligned}S_n =&u_1+u_2+\cdots+u_n\\=&\left(u_1+\cdots+u_{k_1}\right)+\left(u_{k_1+1}+\cdots+u_{k_2}\right)\\&+\cdots+\left(u_{k_{\overline{m}-1}}+\cdots+u_{k_{\overline{m}}}\right)+\left(u_{k_{\overline{m}}+1}+\cdots+u_n\right)\\=&v_0+v_1+\cdots+v_{\overline{m}-1}+\left(u_{k_{\overline{m}}+1}+\cdots+u_n\right)\\=&V_{m(n)}+\left(u_{k_{\overline{m}}+1}+\cdots+u_n\right),\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\left|S_n-V_{m(n)}\right| &\leqslant \left|u_{k_{\overline{m}}+1}\right|+\cdots+\left|u_n\right|\\&\leqslant \left|u_{k_{\overline{m}}+1}\right|+\cdots+\left|u_{k_{\overline{m}+1}}\right|=a_{\overline{m}}\end{aligned}$$

另一方面，由假设 $\lim\limits_{m\to+\infty} a_m=0$ 及 $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} v_m$ 收敛，若令 $V=\lim\limits_{m\to+\infty} V_m=\sum\limits_{m=0}^{+\infty} v_m$，则

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists m_0\in\mathbb{N})\,(\forall m\geqslant m_0)\Rightarrow 0\leqslant a_m<\frac{\varepsilon}{2},\left|V_m-V\right|<\varepsilon/2.$$

现在我们令 $N\in\mathbb{N}$ 充分大使得 $m(N)-1\geqslant m_0$，由于 $\forall n\geqslant N$，$m(n)\geqslant m(N)$，故

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N\Longrightarrow \left|S_n-V\right| &\leqslant \left|S_n-V_{m(n)-1}\right|+\left|V_{m(n)-1}-V\right|\\&<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon\end{aligned}$$

此即表明 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=V$，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛并且与级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ 有相同的和 V.

推论 11.4

设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 是任一数项级数，$k\in\mathbb{N}$，令

$$v_n=u_{(n-1)k+1}+u_{(n-1)k+2}+\cdots+u_{nk}(n\in\mathbb{N})$$

假设

1) 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛， 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$,

那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛，并且与级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 有相同的和.

证明 根据上述定理，我们只需证明

$$a_n=\left|u_{(n-1)k+1}\right|+\left|u_{(n-1)k+2}\right|+\cdots+\left|u_{nk}\right|\to 0(n\to+\infty).$$

事实上，由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$，故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|u_n\right|=0$，从而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} a_n &=\lim_{n\to+\infty}\left|u_{(n-1)k+1}\right|+\lim_{n\to+\infty}\left|u_{(n-1)k+2}\right|+\cdots+\lim_{n\to+\infty}\left|u_{nk}\right|\\&=0\end{aligned}$$

例题 11.9 考虑数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$：

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\cdots$$

证明：此级数收敛，并且其和 $S=\frac{1}{2}\log 2$，若我们承认 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\log 2$(见 §2 例 14).

事实上，我们先考虑上述级数每 3 项为一组所得的新级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$：

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)+\cdots$$

由于

$$\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}=\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$

故

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)\\
=&\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\right]\\
=&\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right).
\end{aligned}$$

由假设 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\log 2$，因此

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)\to\frac{1}{2}\log 2(n\to+\infty)$$

又因为 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4n-2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4n}=0$，所以由定理11.5的推论11.4知，原级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛，并且有和 $\frac{1}{2}\log 2$.

习 题 11.1

1. 设数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛，令 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\sigma_n=\frac{1}{n}(S_1+S_2+\cdots+S_n)(\forall n\in\mathbb{N})$. 证明：$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\sigma_n$.

2. 设数列满足 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n(\forall n\in\mathbb{N})$，并且数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 均收敛. 证明：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ 也收敛.

3. 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 是任一实数项级数. 试利用 Cauchy 收敛准则证明下列结论：

   1) 若 $\lim_{n\to+\infty} nu_n=\lambda\neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散.

2) 若 $\{u_n\}$ 单调递减且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

4. 设数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛，令 $v_n = \dfrac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n(n+1)}$. 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛，并且与级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 有相同的的和.

5. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n} = \log 2, \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}, \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!} = \mathrm{e}$. 试计算下列各项级数的和：

1) $1 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{11} - \dfrac{1}{6} + \cdots$

2) $1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{7^2} + \cdots$

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!}$

6. 设 $p, q \in \mathbb{N}$ 且 $q > p$，令 $V_{p,q} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p+1} + \cdots + \dfrac{1}{q}$. 定义 u_n 和 ω_n 如下：

$$u_n = \begin{cases} 0, & \text{若 } 0 \leqslant n \leqslant 5, \\ -V_{2^{p-1}+2,\,2^p-1}, & \text{若 } n = 2^p + 1,\ p \geqslant 3, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{否则}, \end{cases}$$

$$\omega_n = \begin{cases} 0, & \text{若 } p \leqslant 2, \\ u_{2^{p-1}+2} + u_{2^{p-1}+3} + \cdots + u_{2^p} + u_{2^p+1}, & \text{若 } p \geqslant 3. \end{cases}$$

证明：数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \omega_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ 发散. 将此结果与定理 11.5比较.

11.2 正项级数

一个数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 若满足 $x_n \geqslant 0 (\forall n \in \mathbb{N})$，则我们称它为正项级数

下面我们来研究判别正项级数的收敛性问题.

1. 正项级数的可求和性

定理 11.6

任何一个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 总是可求和的，这个和是有限实数 (即级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛) 当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 的前 n 项之和的序列 $\langle S_n \rangle$ 是有界的.

证明 因为 $x_n \geqslant 0 (\forall n \in \mathbb{N})$，故 $S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geqslant 0$. 从而 $\langle S_n \rangle$ 是单调上升序列. 因此极限

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ 存在 (有限或 $+\infty$), 即正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 有和 S . 显然和 S 是有限实数当且仅当部分和序列 $\langle S_n\rangle$ 是有界的.

例题 11.10 证明数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \arctan\dfrac{1}{n^2+n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

事实上, 我们有

$$\begin{aligned} x_n = \arctan\frac{1}{n^2+n+1} &= \arctan\frac{n+1-n}{1+n(n+1)} \\ &= \arctan(n+1) - \arctan n \end{aligned}$$

由此得到此级数的前 $n+1$ 项之和

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} x_k = \arctan(n+1) - \arctan 0 = \arctan(n+1).$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$, 故级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \arctan\dfrac{1}{n^2+n+\lambda}$ 收敛, 其和 $S = \dfrac{\pi}{2}$.

例题 11.11 试计算以下述

$$x_n = \frac{n^2+9n+5}{(n+1)(n+4)(2n+3)(2n+5)}$$

为通项的正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ 的和 S .

为此我们考虑相应的有理分式

$$R(x) = \frac{x^2+9x+5}{(x+1)(x+4)(2x+3)(2x+5)}$$

通过简单分式的分解, 我们得到

$$R(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+1}\right) + \frac{5}{4}\left(\frac{1}{x+\frac{3}{2}} - \frac{1}{x+\frac{5}{2}}\right).$$

若令 $f(x) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x}, g(x) = \dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}$, 则

$$R(x) = f(x+4) - f(x+1) + g(x+1) - g(x+2).$$

从而

$$\begin{aligned} S_{n+1} =& x_0 + x_1 + \cdots + x_n = R(0) + R(1) + \cdots + R(n) \\ =& f(n+2) + f(n+3) + f(n+4) - f(1) - f(2) - f(3) + g(1) - g(n+2) \\ =& -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+5}\right). \end{aligned}$$

由此推得

$$\lim_{n\to+\infty} S_{n+1} = -\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \frac{5}{6} = \frac{2}{9}.$$

因此正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ 收敛, 其和 $S = \dfrac{2}{9}$.

2. 正项级数的敛散性判别法

基本比较判别准则

定理 11.7

设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ 满足条件 $x_n \leqslant y_n (\forall n \in \mathbb{N})$，则

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$.
2. 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛.
3. 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ 发散.

证明 令

$$X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, Y_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

由于 $x_k \leqslant y_n (\forall k \in \mathbb{N})$，故 $X_n \leqslant Y_n .(\forall n \in \mathbb{N})$.

1. 令 $n \to +\infty$，得到 $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} Y_n$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$.
2. 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ 收敛，则序列 $\langle Y_n \rangle$ 有界，从而序列 $\langle X_n \rangle$ 有界，由定理11.6知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛.
3. 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 发散，则序列 $\langle X_n \rangle$ 无界，从而序列 $\langle Y_n \rangle$ 也无界，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ 发散.

例题 11.12 考虑正项级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^\alpha} (\alpha \in \mathbb{R})$.

若 $\alpha \leqslant 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(\log n)^\alpha} \neq 0$，故 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^\alpha}$ 发散.

若 $\alpha > 0$，则由于 $\frac{(\log n)^\alpha}{n} \to 0 (n \to +\infty)$ 知存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N, \frac{1}{(\log n)^\alpha} > \frac{1}{n}$$

而正项级数 $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^\alpha}$ 发散，从而原级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^\alpha}$ 发散.

例题 11.13 证明：正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)!}$ 收敛.

事实上，$\forall n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\frac{n!}{(2n)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots 2n} < \frac{1}{2 \cdot 2 \cdots 2} = \frac{1}{2^n}.$$

而正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)!}$ 收敛.

推论 11.5

若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ 满足条件

$$\forall n \geqslant N, \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \frac{y_{n+1}}{y_n},$$

那么

1. 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛；
2. 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ 发散.

证明 由已知不等式得到：$\forall k \in \mathbb{N}$，

$$\frac{x_{N+1}}{x_N} \leqslant \frac{y_{N+1}}{y_N}, \frac{x_{N+2}}{x_{N+1}} \leqslant \frac{y_{N+2}}{y_{N+1}}, \cdots, \frac{x_{N+k}}{x_{N+k-1}} \leqslant \frac{y_{N+k}}{y_{N+k-1}}.$$

将这些不等式相乘即为

$$\frac{x_{N+k}}{x_N} \leqslant \frac{y_{N+k}}{y_N} \quad \text{或} \quad x_{N+k} \leqslant \frac{x_N}{y_N} y_{N+k}.$$

由此不等式及定理11.7知推论的结论成立.

例题 11.14 证明：正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\left[\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+1\right]}$ 发散.

这是因为

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)\left[\log\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)+1\right]}}{\dfrac{1}{n\left[\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+1\right]}} = \frac{n}{n+1} \frac{\left[\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+1\right]}{\left[\log\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)+1\right]} \geqslant \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}}.$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\left[\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+1\right]}$ 发散.

注 由推论11.5的证明过程可知，由不等式 “$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \dfrac{y_{n+1}}{y_n}$” 推得存在 $\lambda > 0$ 使得 “$x_n \leqslant \lambda y_n$”. 但反过来，由不等式 “$x_n \leqslant \lambda y_n$” 不一定有 “$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \dfrac{y_{n+1}}{y_n}$”. 这是因为我们可以减小某些 x_n 使得 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 变得越来越大. 因此，从某一收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ 出发利用比较法 “$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \dfrac{y_{n+1}}{y_n}$” 所判断的收敛级数范围要比利用比较法 “$x_n \leqslant \lambda y_n$” 所判断的收敛级数范围窄. 但前一个比较判别法应用起来更为方便.

推论 11.6

设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ 满足条件:

$$x_n \sim y_n(n \to +\infty),$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ 有相同的收敛与发散性.

证明 因为 $x_n \sim y_n(n \to +\infty)$，所以存在序列 $\langle a_n \rangle$ 使得

$$x_n = a_n y_n (n \in \mathbb{N}), \lim_{n\to+\infty} a_n = 1$$

于是存在常数 $m, M > 0$ 使得 $m \leqslant a_n \leqslant M (\forall n \in \mathbb{N})$，从而

$$m y_n \leqslant x_n \leqslant M y_n (\forall n \in \mathbb{N}).$$

现在推论的结论即可由定理11.7推出.

例题 11.15 证明：数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$ 收敛.

对 $\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 进行 2 阶限定展开得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} - \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) (n \to +\infty)\end{aligned}$$

于是 $\frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}(n \to +\infty)$. 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n^2}$ 收敛，故原级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$ 收敛.

注 推论11.6的结论对非正项级数不成立. 例如，对非正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)$ ，在 §3 中我们将证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 收敛，因此它是发散的，然而

$$\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \sim \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}(n \to +\infty).$$

作为定理11.7的两个重要应用，我们介绍以几何级数为比较级数而导出的两个常用判别法.

D'Alembert 判别法

定理 11.8

设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 是任一严格正项级数. 并且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda \ (\text{有限或} \ +\infty).$$

1. 若 $\lambda < 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛.

2. 若 $\lambda > 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 发散.
3. 若 $\lambda = 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 没有敛散性的一般结论.

证明

1. 若 $\lambda < 1$. 取 $q \in \mathbb{R}$ 使得 $\lambda < q < 1$. 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda < q$, 故

$$\begin{aligned}\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} &\Longrightarrow \frac{x_{N+k}}{x_{N+k-1}} < q \\ &\Longrightarrow \frac{x_{N+k}}{x_{N+k-1}} \cdot \frac{x_{N+k-1}}{x_{N+k-2}} \cdots \frac{x_{N+1}}{x_N} < q^k \\ &\Longrightarrow x_{N+k} < x_N q^k\end{aligned}$$

因为几何级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_N q^k$ 收敛, 所以级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{N+k}$ 收敛, 从而原级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 牧敛.

2. 若 $\lambda > 1$. 取 q 使 $\lambda > q > 1$. 由 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda > q > 1$ 知

$$\begin{aligned}\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} &\Longrightarrow \frac{x_{N+k}}{x_{N+k-1}} > q \\ &\Longrightarrow x_{N+k} > x_N q^k.\end{aligned}$$

由于几何级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_N q^k$ 发散, 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 发散.

3. 若 $\lambda = 1$, 则有例子表明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 可以收敛, 也可以发散. 例如 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ 就是如此.

注 当 $\lambda = 1$ 时, 但序列 $\left\langle \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \right\rangle$ 满足 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant 1 (\forall n \geqslant N)$, 则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 必然发散, 因为这时 $x_{n+1} \geqslant x_n (\forall n \geqslant N)$, 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \neq 0$.

例题 11.16 研究正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!a^n}{n^n} (a > 0)$ 的敛散性.

由于

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{n!a^n}{n^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} a\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{a}{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

故

1. $a < \mathrm{e}$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!a^n}{n^n}$ 收敛.
2. $a > \mathrm{e}$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!a^n}{n^n}$ 发散.
3. $a = \mathrm{e}$ 时, 由于 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^n > 1$, 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!a^n}{n!}$ 发散.

Cauchy 判别法

定理 11.9

设正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 满足

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lambda.$$

1. 若 $\lambda < 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛.
2. 若 $\lambda > 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 发散.
3. 若 $\lambda = 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 的敛散性没有一般结论.

证明

1. 若 $\lambda < 1$. 取 $q \in \mathbb{R}$ 使 $\lambda < q < 1$. 由于 $\varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lambda < q$，故由上极限性质可知
$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N &\implies \sqrt[n]{x_n} < q \\ &\implies x_n < q^n. \end{aligned}$$
由此可知，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛.
2. 若 $\lambda > 1$. 由 $\varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lambda$ 知，存在子序列 $\langle x_{k_n} \rangle$ 使得 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[k_n]{x_{k_n}} = \lambda > 1$，从而
$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N &\implies \sqrt[k_n]{x_{k_n}} > 1 \\ &\implies x_{k_n} > 1 \end{aligned}$$
于是 $\lim_{n\to+\infty} x_n \neq 0$，故级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 发散.
3. 当 $\lambda = 1$ 时，有例子表明 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 可以收敛，也可以发散，例如级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 就是如此.

注 若 $\lambda = 1$，但序列 $\langle \sqrt[n]{x_n} \rangle$ 满足 $\sqrt[n]{x_n} \geqslant 1 (\forall n \geqslant N)$，则正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 必然发散. 因为这时，$x_n \geqslant 1 (\forall n \geqslant N)$，从而 $\lim_{n\to+\infty} x_n \neq 0$.

例题 11.17 研究正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a + \frac{1}{n}\right)^n (a \geqslant 0)$ 的敛散性.

由于 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(a + \frac{1}{n}\right)^n} = a$，故

1. $0 \leqslant a < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$ 收敛.

2. $a>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(a+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 发散.

3. $a=1$ 时，由于 $\sqrt[n]{\left(a+\dfrac{1}{n}\right)^n}=1+\dfrac{1}{n}>1(\forall n\in\mathbb{N})$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 发散.

例题 11.18 考虑正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[1+(-1)^n\right]^n\beta^{2n}(\beta\in\mathbb{R})$ 的敛散性.

由于

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{[1+(-1)^n]^n\beta^{2n}}=\beta^2\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left[1+(-1)^n\right]=2\beta^2,$$

故

1. $|\beta|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[1+(-1)^n\right]^n\beta^{2n}$ 收敛.
2. $|\beta|>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[1+(-1)^n\right]^n\beta^{2n}$ 发散.
3. $|\beta|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，由 $x_{2n}=\left[1+(-1)^{2n}\right]^{2n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}=1$ 知，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\neq 0$，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[1+(-1)^n\right]^n\beta^{2n}$ 发散.

注 读者学到这里，很自然会产生下面几个问题：
1. 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 与 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{x_n}$ 之间有何关系？
2. D'Alembert 判别法与 Cauchy 判别法是否等效？
3. 不能用 D'Alembert 判别法与 Cauchy 判别法去判断正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ 的收敛性的原因何在？

下面我们对这三个问题作如下的解释.

1) 对任一严格正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$，下述不等式成立：

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}\leqslant\underline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{x_n}\leqslant\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{x_n}\leqslant\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}.\tag{11.1}$$

为此我们只需证明

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}\leqslant\underline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{x_n}\text{ 与 }\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{x_n}\leqslant\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

若 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=-\infty$，则第一个不等式显然成立. 故不妨设 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lambda\in\mathbb{R}$. 取 $q\in\mathbb{R}$ 使得 $\lambda>q$. 由下极限的性质知

$$\begin{aligned}\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geqslant N\Longrightarrow&\frac{x_n}{x_{n-1}}>q\\\Longrightarrow&x_n>x_Nq^{n-N}\\\Longrightarrow&\sqrt[n]{x_n}>q\sqrt[n]{x_Nq^{-N}}.\end{aligned}$$

由此推得

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{x_n}\geqslant\underline{\lim_{n\to+\infty}}q\sqrt[n]{x_Nq^{-N}}=\lim_{n\to+\infty}q\sqrt[n]{x_Nq^{-N}}=q$$

由 $q<\lambda$ 的任意性知 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{x_n}\geqslant\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

同理可证 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}\leqslant\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

由不等式(11.1)可以看出，若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lambda$ 存在 (有限或 $+\infty$)，则极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lambda$.

因此若我们用 D'Alembert 判别法求得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$ ，则不能指望能用 Cauchy 判别法去判断正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ 的敛散性.

2) 上述不等式(11.1)还告诉我们：能用 D'Alembert 判别法判断的级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ (即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lambda\neq1\Big)$，则一定能用 Cauchy 判别法去判断. 但不能用 D'Alembert 判别法判断的级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ (即出现无穷个 $x_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 不存在)，有时却可以用 Cauchy 判别法去判断它的敛散性.

比如，考虑正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ ，这里

$$x_{2n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n, x_{2n+1}=2\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

由于

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{2n+1}}{x_{2n}}=2,\ \lim_{n\to+\infty}\frac{x_{2n}}{x_{2n-1}}=\frac{1}{3},$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 不存在，因此 D'Alembert 判别法不能应用. 然而由于

$$\sqrt[2n]{x_{2n}}=\sqrt{\frac{2}{3}},\quad \sqrt[2n+1]{x_{2n+1}}=\sqrt[2n+1]{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2n+1}},$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[2n]{x_{2n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[2n+1]{x_{2n+1}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}<1$，因此由 Cauchy 判别法知，此级数收敛.

上述分析表明 D'Alembert 判别法与 Cauchy 判别法不完全等效，Cauchy 判别法略优于 D'Alembert 判别法.

3) 为什么 D'Alembert 判别法与 Cauchy 判别法连一些最普通的正项级数 $\sum\limits_{z=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ 都不能判断它们的敛散性呢？原因是这两个判别法都是以形如 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}aq^n$ 的收敛的几何级数或发散的几何级数为比较级数而导出的判别准则，因此它们只能用来判断比该几何级数收敛快或发散快的正项级数的敛散性，这里所谓的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ 比 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}y_n$ 收敛快 (或发散快) 是指：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=0\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=+\infty\right)$.

因此，要扩大比较判别法判断范用，我们必须寻求比几何级数收敛慢或发散慢的其它类型正项级数作为新的比较级数.

首先我们选择的是以 α 为参数的 Riemann 级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots$$

此级数当 $\alpha>1$ 时收敛，当 $\alpha\leqslant1$ 时发散.

事实上，

当 $\alpha \leqslant 0$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \neq$，故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ 发散；

当 $0 < \alpha \leqslant 1$ 时，$\frac{1}{n^{\alpha}} \geqslant \frac{1}{n}$，故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ 也发散；

当 $\alpha > 1$ 时，令 $\alpha = 1+\beta$，则 $\beta > 0$. 由于

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^{\beta}} - \frac{1}{(n+1)^{\beta}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^{\beta}}\right) = 1,$$

并且

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{\beta}} - \frac{1}{(n+1)^{\beta}} &= \frac{1}{(n+1)^{\beta}}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\beta} - 1\right] \\
&= \frac{1}{(n+1)^{\beta}}\left(1 + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \\
&= \frac{\beta}{n(n+1)^{\beta}} + \frac{1}{(n+1)^{\beta}} o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&\sim \frac{\beta}{n^{1+\beta}} = \frac{\beta}{n^{\alpha}} (n \to +\infty),
\end{aligned}$$

故这时级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛.

对这个 Riemann 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$，直接计算 (化 n 为连续变量 x) 可知

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = \begin{cases} 0, & \text{若 } 0 < q < 1; \\ +\infty, & \text{若 } q > 1. \end{cases}$$

因此，当 $\alpha > 1, 0 < q < 1$ 时，几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n$ 比 Riemann 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛快，而当 $\alpha \leqslant 1$，$q > 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n$ 比 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ 发散快.

下面我们就来研究以 Riemann 级数为比较级数而导出的两个判别法.

Riemann 判别法

定理 11.10

设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 满足

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} x_n = \lambda \geqslant 0.$$

1. 若 $\alpha > 1$ 且 $\lambda < +\infty$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛；
2. 若 $\alpha \leqslant 1$ 且 $\lambda \neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 发散.

证明 1) 设 $\alpha > 1$ 且 $\lambda < +\infty$. 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha} x_n = \lambda$，故

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N \Longrightarrow n^{\alpha} x_n < \lambda + 1.$$

而级数 $\sum\limits_{n=N}^{+\infty}\frac{\lambda+1}{n^{\alpha}}$ 收敛，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ 收敛.

2) 设 $\alpha\leqslant 1$ 且 $\lambda\neq 0$. 这时

若 $\lambda<+\infty$, 则

$$\begin{aligned}\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geqslant N&\Longrightarrow n^{\alpha}x_n>\frac{\lambda}{2}\\&\Longrightarrow x_n>\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{1}{n^{\alpha}}.\end{aligned}$$

而级数 $\sum\limits_{n=N}^{+\infty}\frac{\lambda}{2n^{\alpha}}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ 发散.

若 $\lambda=+\infty$, 则

$$\begin{aligned}\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geqslant N&\Longrightarrow n^{\alpha}x_n>1\\&\Longrightarrow x_n>\frac{1}{n^{\alpha}}\end{aligned}$$

从而原级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ 也发散.

例题 11.19 考虑正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$.

由于

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)^3+1}\Big/\frac{\sqrt{n}}{n^3+1}=\sqrt{\frac{n+1}{n}}\cdot\frac{n^3+1}{(n+1)^3+1}\to 1(n\to+\infty)$$

故 D'Alembert 判别法 (从而 Cauchy 判别法) 不能应用，但因为

$$n^{\frac{5}{2}}x_n=\frac{n^{\frac{5}{2}}\cdot n^{\frac{1}{2}}}{n^3+1}=\frac{n^3}{n^3+1}\to 1(n\to+\infty)$$

所以由 Riemann 判别法知，此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$ 收敛.

例题 11.20 研究正项级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(\log n)^{\beta}}{n^{\alpha}}(\alpha>0,\beta\geqslant 0)$ 的敛散性.

1) $\alpha>1$ ：取 $1<\delta<\alpha$, 则 $\alpha-\delta>0$, 由于

$$\lim_{n\to+\infty}n^{\delta}x_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{(\log n)^{\beta}}{n^{\alpha-\delta}}=0(\forall\beta\geqslant 0),$$

故由 Riemann 判别法知，此级数收敛.

2) $0<\alpha<1$ ：取 $\alpha<\delta<1$. 因为 $\delta-\alpha>0$, 所以

$$\lim_{n\to+\infty}n^{\delta}x_n=\lim_{n\to+\infty}n^{\delta-\alpha}(\log n)^{\beta}=+\infty(\forall\beta\geqslant 0)$$

从而由 Riemann 判别法知此级数发散.

3) $\alpha=1$ ：这时 $x_n=\frac{(\log n)^{\beta}}{n}$.

若 $\beta=0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

若 $\beta>0$, 则由

$$\lim_{n\to+\infty}nx_n=\lim_{n\to+\infty}(\log n)^{\beta}=+\infty$$

及 Riemann 判别法知，级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\log n)^\beta}{n}$ 发散.

综合上述讨论我们得到下述结论：

1) 若 $\alpha > 1$，则 $\forall \beta \geqslant 0$，级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\log n)^\beta}{n^\alpha}$ 收敛.

2) 若 $0 < \alpha \leqslant 1$，则 $\forall \beta \geqslant 0$，级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\log n)^\beta}{n^\alpha}$ 发散.

Raabe 判别法

定理 11.11

设严格正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 满足

$$\lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$$

1) 若 $\lambda > 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛；

2) 若 $\lambda < 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 发散.

证明 1) 设 $\lambda > 1$. 取 α 及 $\varepsilon > 0$ 使得 $\lambda > \alpha > \alpha - \varepsilon > 1$. 令 $y_n = \frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}$. 则

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha-\varepsilon} = 1 + \frac{\alpha - \varepsilon}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

由于 $\lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lambda > \alpha$，故存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\forall n \geqslant N \Longrightarrow \begin{cases} \frac{y_n}{y_{n+1}} < 1 + \frac{\alpha}{n} \\ \frac{x_n}{x_{n+1}} > 1 + \frac{\alpha}{n} \end{cases} \Longrightarrow \frac{x_n}{x_{n+1}} > \frac{y_n}{y_{n+1}} \text{ 或 } \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{y_{n+1}}{y_n}.$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}$ 收敛，故由定理11.7 的推论11.6 知，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛.

2) 设 $\lambda < 1$. 则取 α 及 $\varepsilon > 0$ 使得 $\lambda < \alpha < \alpha + \varepsilon < 1$. 令 $y_n = \frac{1}{n^{\alpha+\varepsilon}}$，则与 1) 类似地可证，

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N \Longrightarrow \frac{x_n}{x_{n+1}} < \frac{y_n}{y_{n+1}} \text{ 或 } \frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{y_{n+1}}{y_n}.$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\varepsilon}}$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 发散.

例题 11.21 考虑正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$.

由于

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(2n+1)!!}{(2(n+1))!!} \cdot \frac{1}{2n+3} \Big/ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \to 1 (n \to +\infty) \end{aligned}$$

故 D'Alembert 判别法 (从而 Cauchy 判别法) 不能应用. 但是

$$
\begin{aligned}
n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)&=n\left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}-1\right)\\
&=\frac{n(6n+5)}{(2n+1)^2}\to\frac{3}{2}(n\to+\infty),
\end{aligned}
$$

故由 Raabe 判别法知, 此级数收敛.

例题 11.22 研究下述超几何级数

$$
\sum_{n=1}^{+\infty}x_n=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)}+\cdots
$$

的敛散性, 这里 $\alpha\neq 0,\alpha-\beta\notin\{0\}\cup\mathbb{N}$.

因为

$$
\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\alpha+n+1}{\beta+n+1}\to 1(n\to+\infty),
$$

所以 D'Alembert 判别法 (从而 Cauch 判别法) 失效, 但由于

$$
n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{\beta+n+1}{\alpha+n+1}-1\right)=\frac{(\beta-\alpha)n}{a+n+1}\to\beta-\alpha(n\to+\infty)
$$

故

1. 当 $\beta-\alpha>1$ 时, 超几何级数收敛;
2. 当 $\beta-\alpha<1$ 时, 超几何级数发散;
3. 当 $\beta-\alpha=1$ 时, Raabe 判别法不能应用. 然而这时原级数化为

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}x_n&=\frac{\alpha}{\alpha+1}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n+1)}+\cdots\\
&=\frac{\alpha}{\alpha+1}+\frac{\alpha}{\alpha+2}+\cdots+\frac{\alpha}{\alpha+n+1}+\cdots
\end{aligned}
$$

它显然是发散的.

注 由例11.21,11.22可知, Raabe 判别法可以判断 D'Alembert 判别法在 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$ 情况下的某些正项级数的收敛性.

另一方面, 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lambda<1(\lambda>1)$, 则

$$
\lim_{n\to+\infty}n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=+\infty(-\infty)
$$

因此能用 D'Alembert 判别法判断的正项级数也一定能用 Raabe 判别法判断它的敛散性. 这就说明 Raabe 判别法优于 D'Alembert 判别法.

Raabe 判别法虽然比 D'Alembert 判别法应用范围更广, 但当 $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ 的敛散性又没有一般性结论.

下面我们来寻找比 Riemann 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 敛散更慢的另一类比较级数, 以导出应用范围更广的敛散性判别法.

为此我们先证明一个有独立应用价值的判别法, 即积分判别法.

积分判别法

定理 11.12

设 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 是任一正项级数，若存在单调下降的连续正函数 $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}_*^+$ 使得

$$x_n = f(n)(\forall n\in\mathbb{N}),$$

则正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 有相同的收敛与发散性.

证明 因为 $x_n = f(n)$，所以

$$S_n = x_1+x_2+\cdots+x_n = f(1)+f(2)+\cdots+f(n).$$

由 f 的单调下降性知，$\forall k\in\mathbb{N}$，我们有

$$f(k+1)\leqslant f(x)\leqslant f(k), \forall x\in[k,k+1].$$

对此不等式从 k 到 $k+1$ 积分，得

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}x$$

或

$$f(k+1)\leqslant \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(k)$$

再对 k 从 1 到 n 求和得到

$$S_{n+1}-x_1 \leqslant \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant S_n \tag{11.2}$$

1. 若广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则由式11.2得

$$0\leqslant S_{n+1}-x_1\leqslant \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x < \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty$$

   此即表明部分和序列 $\langle S_n\rangle$ 有界. 因此正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛.

2. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛，则 $\forall b\geqslant 1$，

$$\int_1^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_1^{[b]+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant S_{[b]} < +\infty$$

   因此单调上升函数 $b\longmapsto \int_1^b f(x)\mathrm{d}x, b\in[1,+\infty)$ 有界，从而极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b f(x)\mathrm{d}x$ 有在并且有限，故广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

由 1) 与 2) 可知，正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 有相同的收敛与发散性.

注 保持上述定理的假设条件，令

$$a_n = x_1+x_2+\cdots+x_n-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x(\forall n\in\mathbb{N}),$$

则由上述不等式11.2知，$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant 0$，并且

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x - x_{n+1} \\ &= \int_n^{n+1} [f(x) - f(n+1)]\mathrm{d}x \geqslant 0 \end{aligned}$$

因此 $\langle a_n \rangle$ 是正的单调下降序列，从而极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在，并且

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} x_k - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x\right] \geqslant 0$$

特别地，若取 $f(x) = \dfrac{1}{x}$，则我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) = C \geqslant 0.$$

极限 C 称为 Euler 常数. C 的 11 位近似值为

$$C \approx 0.57721566490.$$

例题 11.23 证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n} = \log 2$.

事实上，我们有

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

由于 $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log n \to C(n \to +\infty)$，故若令

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - -\log n = C + r_n,$$

则 $r_n \to 0(n \to +\infty)$，从而

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \log 2n + C + r_{2n} - (\log n + C + r_n) \\ &= \log 2 + r_{2n} - r_n. \end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \log 2$. 于是

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} + \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1} = \log 2.$$

由此推得 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \log 2$，也即 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n} = \log 2$.

下面我们用积分判别法来判断 Riemann 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ 的收敛与发散性.

我们只需考虑 $\alpha > 0$ 的情形. $\forall x \in [1, +\infty)$，令 $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$，则 $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}_*^+$ 是单调下降的连续函数，并且 $\dfrac{1}{n^\alpha} = f(n)(\forall n \in \mathbb{N})$，故由积分判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ 与广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 有相同的敛散性，而由第 9 章 § 1 的命题 9.1 知，广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $\alpha > 1$，因此 Riemann

级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 当 $\alpha>1$ 时收敛，当 $a\leqslant 1$ 时发散.

当 $\alpha=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 也称为调和级数. 这是因为若令 $x_n=\frac{1}{n}$，则

$$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_{n+2}}}{2}(\forall n\in\mathbb{N}).$$

现在我们再看一个用积分判别法判断收敛性的正项级数

例题 11.24 $\forall k\in\mathbb{N}$，我们归纳地定义：

$$\log^{(1)}n=\log n,\log^{(2)}n=\log(\log n),\cdots\log^{(k)}n=\log\left(\log^{(k-1)}n\right)$$

证明：以 $\alpha\in\mathbb{R}$ 为参数的 k 级 Bertrand 级数

$$\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{1}{n\log^{(1)}n\log^{(2)}n\cdots\log^{(k-1)}n\left(\log^{(k)}n\right)^\alpha}$$

当 $\alpha>1$ 时收敛，当 $\alpha\leqslant 1$ 时发散.

为此，我们令

$$f(x)=\frac{1}{x\log^{(1)}x\log^{(2)}x\cdots\log^{(k-1)}x\left(\log^{(k)}x\right)^\alpha}$$

容易验证，对固定的 $k\in\mathbb{N}$ 及 $\alpha\in\mathbb{R}$，当 x 充分大以后，$f(x)>0$，并且 f 关于 x 是单调下降的连续函数，函数 f 有原函数 F 存在：

$$F(x)=\begin{cases}\log^{(k+1)}x,\ 若\ \alpha=1;\\ \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\log^{(k)}x\right)^{1-\alpha},\ 若\ \alpha\neq 1.\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_N^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x&=\lim_{x\to+\infty}F(x)-F(N)\\&=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\log^{(k+1)}x-\log^{(k+1)}N,\ 若\ \alpha=1,\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1-\alpha}\left(\log^{(k)}x\right)^{1-\alpha}-\dfrac{1}{1-\alpha}\left(\log^{(k)}N\right)^{1-\alpha},\ 若\ \alpha\neq 1,\end{cases}\\&=\begin{cases}+\infty,\ 若\ \alpha\leqslant 1;\\ \dfrac{1}{\alpha-1}\left(\log^{(k)}N\right)^{1-\alpha},\ 若\ \alpha>1.\end{cases}\end{aligned}$$

根据积分判别法知，k 级 Bertrand 级数当 $\alpha>1$ 时收敛，而当 $\alpha\leqslant 1$ 时发散.

对这个 Bertrand 级数序列，直接计算知

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n\log^{(1)}n\cdots\log^{(k-1)}n\left(\log^{(k)}n\right)^\alpha}}{\frac{1}{n\log^{(1)}n\cdots\log^{(k)}n\left(\log^{(k+1)}n\right)^\alpha}}\\=&\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\log^{(k+1)}n\right)^\alpha}{\left(\log^{(k)}n\right)^{\alpha-1}}\\=&\lim_{y\to+\infty}\frac{(\log y)^\alpha}{y^{\alpha-1}}=\begin{cases}0,&若\ \alpha>1;\\+\infty,&若\ \alpha\leqslant 1.\end{cases}\end{aligned}$$

此即表明当 $\alpha > 1$ $(\alpha \leqslant 1)$ 时，k 级 Bertrand 级数比 $k+1$ 级 Bertrand 级数收敛快 (发散快)，并且对每一个 $k \in \mathbb{N}$，从某一项开始成立下述不等式序列：

$$\alpha > 1: \frac{1}{n^{\alpha}} < \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}, \quad \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}} < \frac{1}{n\log^{(1)} n\left(\log^{(2)} n\right)^{\alpha}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n\log^{(1)} n \cdots \log^{(k-1)} n\left(\log^{(k)} n\right)^{\alpha}} < \frac{1}{n\log^{(1)} n \cdots \log^{(k)} n\left(\log^{(k+1)} n\right)^{\alpha}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha \leqslant 1: \frac{1}{n^{\alpha}} > \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}, \quad \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}} > \frac{1}{n\log^{(1)} n\left(\log^{(2)} n\right)^{\alpha}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n\log^{(1)} n \cdots \log^{(k-1)} n\left(\log^{(k)} n\right)^{\alpha}} > \frac{1}{n\log^{(1)} n \cdots \log^{(k)} n\left(\log^{(k+1)} n\right)^{\alpha}}$$

由此可知，以 $k+1$ 级 Bertrand 级数为比较级数导出的判别法比以 k 级 Bertrand 级数为比较级数导出的判别法适用范围更广.

下面就是以 k 级 Bertrand 级数为比较级数而导出的判别法.

Bertrand 判别法

定理 11.13

设严格正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 满足条件

$$\lim_{n\to+\infty} n\log^{(1)} n \cdots \log^{(k)} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n\log n} - \cdots - \frac{1}{n\log^{(1)} n \cdots \log^{(k-1)} n}\right) = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}.$$

1) 若 $\lambda > 1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛；

2) 若 $\lambda < 1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 发散.

证明 为简单起见，我们只对 $k=1$ 的情形进行证明. $k>1$ 的情形证明完全类似.

证明的方法与 Raabe 判别法证明类似.

若 $\lambda>1$，则取 α 及 $\varepsilon>0$，使得 $\lambda>\alpha>\alpha-\varepsilon>1$，令 $y_n=\dfrac{1}{n(\log n)^{\alpha-\varepsilon}}$，于是

$$\begin{aligned}
\frac{y_n}{y_{n+1}} &= \frac{(n+1)[\log(n+1)]^{\alpha-\varepsilon}}{n(\log n)^{\alpha-\varepsilon}} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left[\frac{\log n+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right]^{\alpha-\varepsilon} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{1}{n\log n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^{\alpha-\varepsilon} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{\alpha-\varepsilon}{n\log n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= 1+\frac{1}{n}+\frac{\alpha-\varepsilon}{n\log n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\ (n\to+\infty)
\end{aligned}$$

又因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\log n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1-\dfrac{1}{n}\right)=\lambda>\alpha$，故存在 $N\in\mathbb{N}$，使得

$$\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant N \Longrightarrow &\begin{cases} \dfrac{y_n}{y_{n+1}}<1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{\alpha}{n\log n} \\ \dfrac{x_n}{x_{n+1}}>1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{\alpha}{n\log n} \end{cases} \\
\Longrightarrow &\frac{x_n}{x_{n+1}}>\frac{y_n}{y_{n+1}} \text{ 或 } \frac{x_{n+1}}{x_n}<\frac{y_{n+1}}{y_n}.
\end{aligned}$$

由于级数 $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} y_n=\sum\limits_{n=N}^{+\infty}\dfrac{1}{n(\log n)^{\alpha+\varepsilon}}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} x_n$ 收敛，从而原级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛.

若 $\lambda<1$，则取 α 及 $\varepsilon>0$ 使得 $\lambda<\alpha<\alpha+\varepsilon<1$，并令 $y_n=\sum\limits_{n=N}^{+\infty}\dfrac{1}{n(\log n)^{\alpha+\varepsilon}}$，仿照 $\lambda>1$ 的证明过程可证，

$$\begin{aligned}
&\exists N\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant N \\
\Longrightarrow &\frac{x_n}{x_{n+1}}<1+\frac{1}{n}+\frac{\alpha}{n\log n}<\frac{y_n}{y_{n+1}} \\
\Longrightarrow &\frac{x_{n+1}}{x_n}>\frac{y_{n+1}}{y_n}.
\end{aligned}$$

而级数 $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} y_n=\sum\limits_{n=N}^{+\infty}\dfrac{1}{n(\log n)^{\alpha-\varepsilon}}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} x_n$ 发散，从而原级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 发散.

例题 11.25 重新考虑例11.22的超几何级数.

由于 $\dfrac{x_n}{x_{n+1}}=\dfrac{\beta+n+1}{\alpha+n+1}$，故

$$\begin{aligned}
n\log n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1-\frac{1}{n}\right) &= n\log n\left(\frac{\beta+n+1}{\alpha+n+1}-1-\frac{1}{n}\right) \\
&= \log n\left(\frac{n(\beta-\alpha-1)-\alpha-1}{\alpha+n+1}\right)
\end{aligned}$$

因此,

若 $\beta-\alpha>1$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\log n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1-\dfrac{1}{n}\right)=+\infty$，超几何级数收敛. 它与 Raabe 判别法一致.

若 $\beta-\alpha<1$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\log n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1-\dfrac{1}{n}\right)=-\infty$，超几何级数发散，它与 Raabe 判别法一

致.

若 $\beta-\alpha=1$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\log n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1-\dfrac{1}{n}\right)=0$，超几何级数发散. 它判断了 Raabe 判别法中 $\lambda=1$ 的情形.

注 由前面的 Bertrand 级数的不等式 $\dfrac{1}{n^\alpha}<\dfrac{1}{n(\log n)^\alpha}(\alpha>1)$ 及上述例11.25表明 Bertrand 判别法的确优于 Raabe 判别法. 但是 Bertrand 判别法中 $\lambda=1$ 的情形又使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 的敛散性没有一般性结论，这时可以从以下三个方面着想：其一是对级数本身作具体分析；其一是选择更大 k 的 k 级 Bertrand 级数，其三是寻找比 Bertrand 级数敛敬速度更慢的正项级数作为比较级数以导出适用范围更广更精细的判别法.

但有一点需要提醒读者注意：不论怎样改进比较级数的敛散速度，可以证明 (见习题 20) 不存在 “收敛最慢” 或 “发散最慢” 的正项级数，使得以它作为比较级数导出的判别法能适合于一切正项级数敛散性的判断.

✍ 习 题 11.2

1. 试计算如下定义的各正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 的和.

$$1)\ x_n=\frac{\sin\dfrac{1}{n(n+1)}}{\cos\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n+1}}\qquad 2)\ x_n=\log\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$$

$$3)\ x_n=\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\qquad 4)\ x_n=\log\left(2\cos\frac{\alpha}{2^n}-1\right)$$

2. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 是一正项级数，令 $y_n=\dfrac{\sqrt{x_n}}{n}$. 证明：若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ 也收敛.

3. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是任一正项级数，并且 $\langle a_n\rangle$ 单调下降. 证明：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$ 收敛. 试利用此结论判断下列各级数的敛散性.

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}\qquad 2)\ \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\log n}$$

$$3)\ \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n\log n\cdot\log(\log n)}\qquad 4)\ \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log n}}$$

4. 设 $a,b,c\in\mathbb{R}$. 试问 a,b,c 应满足何种关系才能使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a\log n+b\log(n+1)+c\log(n+2))$ 收敛？在收敛的情况下，计算此级数的和.

5. 试用基本比较判别准则研究下列各级数的敛散性.

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+a^n}\quad (a>0),$$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{a^n}}\quad (a>0)$,

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n}$,

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+\alpha n^2+\beta n+\gamma}\right)$,

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{1-\frac{1}{n^a}}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}\,\mathrm{d}x\quad (a>0)$,

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x$.

6. 设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ 是任一正项级数，满足条件：

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n\log n}\right)\quad (n\to+\infty).$$

试证明：$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ 发散.

7. 设正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ 满足条件：

$$\sqrt[n]{x_n}<1-\frac{1}{n^\alpha},\quad 0<\alpha<1,\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

证明：级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ 收敛.

8. 试用 D'Alembert 判别法与 Cauchy 判别法判断下列各级数的敛散性.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n n^n}{n^\alpha n!}\quad (\alpha\in\mathbb{R},\ a>0)$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{1+b^n}\quad (a>0,\ b>0)$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{\mathrm{e}^{n^2}}$

6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a^n+b^n)\sin\frac{b}{2^n}\quad (a>0,\ b>0)$

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{n}\right)^n+\left|\sin\frac{2n\pi}{3}\right|^n\right]$

9. 研究下列两个正项级数的敛散性，它们可以用 D'Alembert 判别法或 Cauchy 判别法判断吗？

1) $\displaystyle\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n)^3}+\cdots$,

2) $a^2+a+a^4+a^3+\cdots+a^{2n}+a^{2n-1}+\cdots\quad (0<a<1)$.

10. 试用 Riemann 判别法判断下列各级数的敛散性.

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p+\sqrt[3]{n+1}}\quad(p\in\mathbb{R})\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+\log n}$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^\beta}\quad(\beta\in\mathbb{R})\qquad 4)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\sin\frac{\pi\sqrt{n}}{n^\alpha}\right|\quad(\alpha\in\mathbb{R})$$

11. 试用 Raabe 判别法或 Bertrand 判别法判断下列级数的敛散性.

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}\right)^p\quad(p\in\mathbb{R}),$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)\cdot b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!\cdot c(c+1)\cdots(c+n-1)}\quad(a,b,c\in\mathbb{R}).$$

12. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ 是任一严格正项级数，证明下述对数判别法：

1) 若 $\exists N\in\mathbb{N}$，$\forall n\geqslant N$，$\dfrac{\log\frac{1}{x_n}}{\log n}\geqslant\lambda>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ 收敛；

2) 若 $\exists N\in\mathbb{N}$，$\forall n\geqslant N$，$\dfrac{\log\frac{1}{x_n}}{\log n}\leqslant 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ 发散.

以 Bertrand 级数为比较级数，试推广上述对数判别法.

13. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ 是任一严格正项级数，证明下述 Kummer 判别法.

1) 若存在正数序列 $\langle b_n\rangle$ 及 $N\in\mathbb{N}$，$\gamma>0$，使得

$$\forall n\geqslant N,\quad b_n\frac{x_n}{x_{n+1}}-b_{n+1}\geqslant\gamma,$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ 收敛.

2) 若存在正数序列 $\langle b_n\rangle$ 使得 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{b_n}$ 发散，并存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\forall n\geqslant N,\quad b_n\frac{x_n}{x_{n+1}}-b_{n+1}<0,$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ 发散.

试利用 Kummer 判别法证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{((2n)!)^3}{2^{6n}(n!)^6}$ 收敛，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 发散.

14. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ 满足条件：

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$,

2) $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{1+\alpha_n}\quad(n\in\mathbb{N})$.

证明：若 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = l$，那么

1) $l > 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛；

2) $l < 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 发散.

15. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 是任一正项级数，并且存在 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 使得

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \quad (\beta > 1), \quad (n \to +\infty).$$

试证明：存在 $k > 0$ 使得 $x_n \sim \dfrac{k}{n^\alpha}$，因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛当且仅当 $\alpha > 1$.

1) 利用此结论研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ 的收敛性.

2) 利用此结论及 Wallis 公式 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t$ 证明 Stirling 公式：

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n} \quad (n \to +\infty).$$

（提示：令 $x_n = n!\,n^{-n}\mathrm{e}^n$，由此得到 $n! \sim k\sqrt{n}\,n^n\mathrm{e}^{-n}$，然后利用 Wallis 公式确定常数 k.）

16. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是任一收敛的正项级数. 试研究下列各级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n a_{2n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!a_1a_2\cdots a_n}}{n+1}.$$

17. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是任一发散的正项级数，试研究下列各级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+na_n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+n^2a_n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}}.$$

18. 设 $\{a_n\}$ 是任一单调下降趋于 0 的序列. 令

$$b_n = n(a_{n-1} - a_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

证明：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 有相同的收敛与发散性. 在收敛的情况下比较它们的和.

19. 确定 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 使得

$$\int_0^\pi (\alpha x + \beta x^2)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

由此导出 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

20. 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 是任一严格正项级数.

1) 假设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，$S = \lim_{n\to+\infty} S_n$，$b_0 = S$，$b_n = \sqrt{S - S_{n-1}} - \sqrt{S - S_n}$ ($\forall n \geqslant 1$). 证明：$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 比 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛慢.

2) 假设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散. 令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，$b_1 = \sqrt{S_1}$，$b_n = \sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}$ ($n \geqslant 2$). 证明：$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 比 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散慢.

11.3 绝对收敛与条件收敛级数

在 § 1 中我们介绍了一般数项级数的一些简单性质，它还有更多的性质有待于我们去研究. 首先我们介绍两个定义.

1. 绝对收敛与条件收敛定义

定义 11.2

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是任一数项级数.

1. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 收敛，则我们称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 是绝对收敛的.
2. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 发散，但 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛，则我们称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是条件收敛的.

♣

由于 $\forall n, k \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+k}| \leqslant |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+k}|.$$

故由级数的 Cauchy 收敛准则知，绝对收敛级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 一定是收敛的.

下面是绝对收敛与条件收敛级数的两个例子.

例题 11.26 考虑级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$.

由于 $\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$，故级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|$ 发散，从而级数 $\sum_{n=1}^{+m} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 是非绝对收敛的，但在 §2 例11.23中我们已经证明了此级数收敛，因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 是条件收敛的.

例题 11.27 考虑级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^{n-1}} (\alpha \geqslant 1)$.

因为

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^{n-1}}\right| = \frac{1}{n^\alpha + (-1)^{n-1}} \sim \frac{1}{n^\alpha} (n \to +\infty),$$

故当 $\alpha > 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^{n-1}}$ 是绝对收敛的，而当 $\alpha = 1$ 时此级数是非绝对收敛的.

另一方面，由于

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n + (-1)^{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \frac{1}{n\left[n + (-1)^{n-1}\right]}$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\left[n + (-1)^{n-1}\right]}$ 均收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n + (-1)^{n-1}}$ 收敛. 因此当 $\alpha = 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n + (-1)^{n-1}}$ 是条件收敛的.

关于一般数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的绝对收敛与条件收敛性判断问题，由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 是正项的，故我们可以用 §2 所给出的各种判别法来判断正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 的收敛与发散性，如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 当然就是绝对收敛，如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 发散，则一般说来还不能就此断定原级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散. 但如果我们用的是 D'Alembert 判别法或 Cauchy 判别法，那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 发散，原级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 也一定发散，因为这时 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$.

由此可知，当已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+} |u_n|$ 发散时，存在如何进一步判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 本身的敛散性问题，下面我们介绍三个判别法.

2. 三个收敛性判别法

Leibniz 判别法

它主要判断所谓交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n \ (a_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N})$ 的收敛性.

定理 11.14

设交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 满足条件:

i) $\langle a_n \rangle$ 单调下降,

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$,

则

1. 级数 $\sum\limits_{n=1} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛;
2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 的前 n 项之和 S_n 与此级数之和 S 的绝对误差

$$|S_n - S| \leqslant a_{n+1} (\forall n \in \mathbb{N}).$$

证明 1)$\forall n \in \mathbb{N}$，令

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n,$$

则

$$S_{2n}=S_{2(n-1)}+(a_{2n-1}-a_{2n})\,, S_{2n+1}=S_{2n-1}-(a_{2n}-a_{2n+1})\,,$$

由于 $a_{2n-1}\geqslant a_{2n}\geqslant a_{2n+1}$，故

$$S_{2(n-1)}\leqslant S_{2n}, S_{2n+1}\leqslant S_{2n-1}(\forall n\in\mathbb{N}).$$

另一方面，由于 $S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n-1}\geqslant S_{2n}$，故

$$S_{2(n-1)}\leqslant S_{2n}\leqslant S_{2n+1}\leqslant S_{2n-1}(\forall n\in\mathbb{N}).$$

由此我们得到一闭区间套 $\{[S_{2n},S_{2n+1}]\}_{n\in\mathbb{N}}$．因为

$$\lim_{n\to+\infty}(S_{2n+1}-S_{2n})=\lim_{n\to+\infty}a_{2n+1}=0$$

故由区间套定理知，存在唯一的 $S\in\mathbb{R}$ 使得

$$S=\lim_{n\to+\infty}S_{2n}=\lim_{n\to+\infty}S_{2n+1}$$

因此 $S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$．即交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

2) 为了估计绝对误差 $|S_n-S|$，我们有

$$|S-S_{2n}|\leqslant S_{2n+1}-S_{2n}=a_{2n+1}$$

$$|S-S_{2n+1}|\leqslant S_{2n+1}-S_{2n+2}=a_{2n+2}$$

因此

$$|S-S_n|\leqslant a_{n+1}(\forall n\in\mathbb{N})$$

根据这个 Leibniz 判别法，立即知道，形如 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 的交错级数都是收敛的，并且它们都是条件收敛的.

利用 Leibniz 判别法可以构造许多条件收敛级数.

例题 11.28 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ 是条件收敛的.

事实上，因为

$$\left|(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\right|=\frac{2n+1}{n(n+1)}\sim\frac{2}{n}(n\to+\infty),$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\right|$ 发散.

但由于序列 $\left\{\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\right\}$ 单调下降收敛于 0，故由 Leibniz 判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ 是条件收敛的.

下面两个判别法主要是用来判断形如 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 的级数的收敛性.

首先我们介绍级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 的部分和

$$S_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

的所谓 Abel 变换.

$\forall n \in \mathbb{N}$, 令 $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, 则

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + \cdots + a_n (B_n - B_{n-1}) \\ &= (a_1 - a_2) B_1 + (a_2 - a_3) B_2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n) B_{n-1} + a_n B_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n. \end{aligned} \tag{11.3}$$

像这种将和式 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$ 化为与 B_k 有关的上述和式11.3的变换称为 Abel 变换.

由关系式11.3即可导出级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛性的 Abel 判别法与 Dirichlet 判别法.

Abel 判别法

定理 11.15

若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 满足条件:

1. 序列 $\langle a_n \rangle$ 单调下降有下界,
2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛,

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明 由上述关系式11.3知, 只需证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n B_n$ 与 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$ 存在并且有限即可.

首先由假设 $\langle a_n \rangle$ 单调下降有下界及 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛知, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 及 $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n$ 存在并且有限, 因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n B_n$ 存在并且有限.

下面证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$ 存在且有限.

因为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛, 故存在 $M > 0$ 使得 $|B_n| \leqslant M (\forall n \in \mathbb{N})$, 从而由 $\{a_n\}$ 的单调下降性, $\forall n, m \in \mathbb{N}$,

有

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k-\sum_{k=1}^{n+m-1}(a_k-a_{k+1})B_k\right| \\
=&\left|\sum_{k=n}^{n+m-1}(a_k-a_{k+1})B_k\right| \\
\leqslant&\sum_{k=n}^{n+m-1}|a_k-a_{k+1}||B_k| \\
\leqslant&M\sum_{k=n}^{n+m-1}(a_k-a_{k+1})=M(a_n-a_{n+m}).
\end{aligned}$$

由于 $\langle a_n\rangle$ 收敛，故由 Cauchy 收敛准则知，

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n,m\in\mathbb{N},\forall n\geqslant N)\Longrightarrow 0\leqslant a_n-a_{n+m}<\varepsilon/M.$$

从而

$$\begin{aligned}
\forall n,m\in\mathbb{N},n\geqslant N\Longrightarrow&\left|\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k-\sum_{k=1}^{n+m-1}(a_k-a_{k+1})B_k\right| \\
&\leqslant M(a_n-a_{n+m})<M\cdot\varepsilon/M=\varepsilon
\end{aligned}$$

此即表明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k$ 存在并且有限.

例题 11.29 考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n2^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}}$.

令 $a_n=2^{\frac{1}{n}},b_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(\forall n\in\mathbb{N})$，则 $\langle a_n\rangle$ 单调下降有下界，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，根据 Abel 判别法知级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n2^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}}\text{ 收敛.}$$

Dirichlet 判别法

定理 11.16

设数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 满足条件：

1. 序列 $\langle a_n\rangle$ 单调下降趋于 0，
2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 的部分和序列 $\langle B_n\rangle$ 有界，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 收敛.

证明 仍然利用上面的关系式11.3，由于 $\langle B_n\rangle$ 有界，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$，故 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_nB_n=0$.

另一方面，完全重复 Abel 判别法中关于极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k$ 的存在证明过程可知此极限存在并且有限，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ 存在. 从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ 收敛.

由此定理可以看出，Leibniz 判别法是 Dirichlet 判别法的特例. 这是因为，交错级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 中的序列 $\langle a_n\rangle$ 单调下降趋于 0，而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$ 的部分和 $\langle B_n\rangle$ 以 1 为界. 故由 Dirichlet 判别法知，交错级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛. 从而 Leibniz 判别法成立.

下面我们再看两个应用 Dirichlet 判别法的例子.

例题 11.30 证明：$\forall x\neq k\pi$，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 是条件收敛的.

为此令 $a_n=\frac{1}{n}, b_n=\sin nx (n\in\mathbb{N})$，则 $\langle a_n\rangle$ 单调收敛于 0. 现在证明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin nx$ 的部分和 $\langle B_n\rangle$ 有界. 事实上，$\forall x\neq k\pi$，

$$\begin{aligned}
B_n &=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx\\
&=\frac{2\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}(\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx)\\
&=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}+\cdots\right.\\
&\quad\left.+\cos\frac{2n-1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)\\
&=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

因此

$$|B_n|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}(\forall n\in\mathbb{N}).$$

此即表明对固定的 $x\in\mathbb{R}$ 且 $x\neq k\pi,\langle B_n\rangle$ 有界，故由 Dirichlet 判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 收敛.

下面我们来证明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\sin nx}{n}\right|$ 发散.

首先我们有

$$\left|\frac{\sin nx}{n}\right|\geqslant\frac{\sin^2 nx}{n}=\frac{1}{2n}(1-\cos 2nx),$$

故

$$\frac{1}{2n}\leqslant\frac{\cos 2nx}{2n}+\left|\frac{\sin nx}{n}\right|.$$

如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\sin nx}{n}\right|$ 收敛，则由于级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx}{2n}$ 也是收敛的 (Dirichlel 判别法)，故由上述不等式推知级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}$ 收敛，这显然矛盾. 因此级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\sin nx}{n}\right|$ 发散. 从而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 是条件收敛的.

例题 11.31 设 $z\in\mathbb{C}$，并且 $|z|=1$，试研究复数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$ 的敛散性.

首先 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{z^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 为调和级数，它是发散的，从而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$ 非绝对收敛.

现在讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$ 本身的收敛性.

若 $z=1$，则此级数显然发散.

若 $z\neq 1$，则序列 $\left\langle\frac{1}{n}\right\rangle$ 单调下降趋于 0，而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}z^n$ 的部分和

$$B_n=z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

于是

$$|B_n|\leqslant\frac{2}{|1-z|}(\forall n\in\mathbb{N}).$$

此即表明 $\langle B_n\rangle$ 有界. 从而由 Dirichlet 判别法知级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$ 收敛.

因此级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$ 当 $z=1$ 时发散，当 $|z|=1$ 且 $z\neq 1$ 时是条件收敛的.

Abel 判别法与 Dirichlet 判别法的两个条件各有侧重，但 Dirichlet 判别法使用比较方便.

下面我们来研究绝对收敛级数的性质.

3. 绝对收敛级数的性质

绝对收敛级数的运算性质

定理 11.17

设 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 是两个绝对收敛的数项级数，则 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$，数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha u_n+\beta v_n)$ 也是绝对收敛的，并且

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha u_n+\beta v_n)\right|\leqslant|\alpha|\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|+|\beta|\sum_{n=1}^{+\infty}|v_n|.$$

证明 因为 $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty}|v_n|$ 收敛，所以由 Cauchy 收敛准则知

$$\begin{aligned}&(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})\,(\forall n,k\in\mathbb{N},n\geqslant N)\\&\quad\Longrightarrow|u_{n+1}|+\cdots+|u_{n+k}|<\varepsilon,|v_{n+1}|+\cdots+|v_{n+k}|<\varepsilon\\&\quad\Longrightarrow|a u_{n+1}+\beta v_{n+1}|+\cdots+|\alpha u_{n+k}+\beta v_{n+k}|\\&\qquad\leqslant|a|\left(|u_{n+1}|+\cdots+|u_{n+k}|\right)+|\beta|\left(|v_{n+1}|+\cdots+|v_{n+k}|\right)<(|\alpha|+|\beta|)\varepsilon.\end{aligned}$$

从而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(|\alpha|\,|u_n|+|\beta|\,|v_n|)$ 收敛，因此级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha u_n+\beta v_n)$ 绝对收敛.

其次，$\forall n\in\mathbb{N}$，我们有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(\alpha u_k+\beta v_k)\right|\leqslant|\alpha|\sum_{k=1}^{n}|u_k|+|\beta|\sum_{k=1}^{n}|v_k|.$$

两边令 $n \to +\infty$ 即得到

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha u_k + \beta v_k)\right| \leqslant |\alpha|\sum_{k=1}^{+\infty}|u_k| + |\beta|\sum_{k=1}^{+\infty}|v_k|.$$

为了研究两个级数的乘积的收敛性，我们首先给出下述定义.

定义 11.3

设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 是任意两个数项级数，$\forall n \in \mathbb{N}$，令

$$w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1.$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n$ 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 的乘积级数或 Cauchy 积.

关于乘积级数的收敛性，我们有下面的两个定理.

定理 11.18

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 都是绝对收敛的，则它们的乘积级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n$ 也是绝对收敛的，并且

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n\right). \tag{11.4}$$

证明 首先，$\forall n \in \mathbb{N}$ 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|w_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{i+j=k+1}|u_i||v_j| &= \sum_{2\leqslant i+j\leqslant n+1}|u_i||v_j| \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|u_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|v_j|\right).\end{aligned}$$

由于 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}|u_i|$ 与 $\sum\limits_{j=1}^{+\infty}|v_j|$ 收敛，故

$$\sum_{k=1}^{n}|w_k| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{+\infty}|u_i|\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{+\infty}|v_j|\right).$$

此即表明 $\left\langle\sum\limits_{k=1}^{n}|w_k|\right\rangle$ 有界，从而级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|w_k|$ 收敛，因此乘积级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n$ 绝对收敛.

为了证明等式(11.4)，我们定义下述两个集合

$$A_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n\},$$

$$B_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid 2 \leqslant i + j \leqslant n+1\}.$$

显然有 $A_n \subset B_{2n} \subset A_{2n}$，因此，$\forall n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
&\left|w_1 + w_2 + \cdots + w_{2n} - (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)(v_1 + v_2 + \cdots + v_n)\right| \\
=&\left|\sum_{i+j=2} u_i v_j + \sum_{i+j=3} u_i v_j + \cdots + \sum_{i+j=2n+1} u_i v_j - \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} v_j\right)\right| \\
=&\left|\sum_{(i,j)\in B_{2n}} u_i v_j - \sum_{(i,j)\in A_n} u_i v_j\right| \\
=&\left|\sum_{(i,j)\in B_{2n}-A_n} u_i v_j\right| \\
\leqslant&\sum_{(i,j)\in B_{2n}-A_n} |u_i|\,|v_j| \\
\leqslant&\left(\sum_{i=1}^{2n}|u_i|\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{2n}|v_j|\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}|u_j|\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|v_j|\right).
\end{aligned}
$$

令 $n \to +\infty$ 我们得到

$$
\left|\sum_{n=1}^{+\infty} w_n - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n\right)\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{+\infty}|u_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{+\infty}|v_j|\right) - \left(\sum_{i=1}^{+\infty}|u_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{+\infty}|v_j|\right) = 0
$$

于是

$$
\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n\right).
$$

例题 11.32 考虑复数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}(z \in \mathbb{C})$.

当 $z = 0$ 时，它显然收敛. 当 $z \neq 0$ 时，由于

$$
\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\dfrac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\dfrac{z^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0
$$

故此级数是绝对收敛的. 令它的和为 $f(z)$，即

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \forall z \in \mathbb{C}.
$$

下面我们证明如此定义的映射 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是从复数加法群 $(\mathbb{C}, +)$ 到复数乘法群 $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ 的同态，即

$$
\forall z, w \in \mathbb{C}, f(z+w) = f(z)\cdot f(w).
$$

事实上，由 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ 的绝对收敛性得到，$\forall z,w\in\mathbb{C}$，

$$
\begin{aligned}
f(z)\cdot f(w) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{w^n}{n!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\cdot\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}z^k w^{n-k}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k z^k w^{n-k}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+w)^n}{n!}\\
&= f(z+w)
\end{aligned}
$$

上述映射 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 称为复指数映射，常记为 $\exp$. 因此

$$\forall z,w\in\mathbb{C}, \exp(z+w)=\exp z\cdot\exp w.$$

特别地复指数映射 $\exp$ 在 $\mathbb{R}$ 上的限制，仍记为 $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，称为实指数映射. 在第 13 章将会证明这里所定义的实指数映射与我们在第 5 章 §4 中所定义的以 e 为底的指数函数是一致的. 因此,

$$\forall x\in\mathbb{R}, \mathrm{e}^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots.$$

注 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ 不是绝对收敛的，例如是两个条件收敛级数，则它们的乘积级数可能不再收敛了.

例题 11.33 考虑 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 与其自身的乘积级数.

由于 $\left|(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\right|=\frac{1}{\sqrt{n}}$，故级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\right|$ 发散，我们知道级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是收敛的，因此级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是条件收敛的.

下面证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的乘积级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}w_n$ 发散，事实上，这时

$$
\begin{aligned}
|w_n| &= \left|(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{1\cdot n}}+\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n\cdot 1}}\right)\right|\\
&= \frac{1}{\sqrt{1\cdot n}}+\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n\cdot 1}}\\
&> \frac{1}{\sqrt{n\cdot n}}+\frac{1}{\sqrt{n\cdot n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n\cdot n}}\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n \neq 0$，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n$ 发散.

下面我们来研究 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 中一个绝对收敛而另一个条件收敛时它们的乘积级数的收敛性.

定理 11.19 (Mertens)

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 绝对收敛，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 条件收敛，则它们的乘积级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n$ 收敛，并且

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n\right).$$

证明 $\forall n\in\mathbb{N}$，令

$$U_n = u_1+u_2+\cdots+u_n, U = \lim_{n\to+\infty} U_n,$$

$$V_n = v_1+v_2+\cdots+v_n, V = \lim_{n\to+\infty} V_n, r_n = V - V_n,$$

$$W_n = w_1+w_2+\cdots+w_n,$$

则

$$\begin{aligned}
W_n =& u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+\cdots+(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_nv_1)\\
=& u_1(v_1+v_2+\cdots+v_n)+u_2(v_1+v_2+\cdots+v_{n-1})+\cdots+u_nv_1\\
=& u_1V_n+u_2V_{n-1}+\cdots+u_nV_1\\
=& u_1(V-r_n)+u_2(V-r_{n-1})+\cdots+u_n(V-r_1)\\
=& (u_1+u_2+\cdots+u_n)V-(u_1r_n+u_2r_{n-1}+\cdots+u_nr_1)\\
=& U_nV-\beta_n.
\end{aligned}$$

这里 $\beta_n = u_1r_n+u_2r_{n-1}+\cdots+u_nr_1$.

由此可知，乘积级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n$ 收敛并且其和等于 UV 当且仅当 $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n = 0$.

下面我们就来证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n = 0$.

首先由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 收敛，故存在 $M>0$，使得

$$\forall n\in\mathbb{N}, |r_n|\leqslant M, |u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|\leqslant M.$$

其次，$\forall\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant N$ 有

$$|r_n|<\varepsilon, |u_{N+1}|+|u_{N+2}|+\cdots+|u_n|<\varepsilon.$$

于是 $\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2N$,

$$\begin{aligned}
|\beta_n| &\leqslant (|u_1r_n+u_2r_{n-1}+\cdots+u_Nr_{n-N+1}|)+(|u_{N+1}r_{n-N}+u_{N+2}r_{n-N-1}+\cdots+u_nr_1|)\\
&\leqslant (|u_1||r_n|+|u_2||r_{n-1}|+\cdots+|u_N||r_{n-N+1}|)\\
&\quad+(|u_{N+1}||r_{n-N}|+|u_{N+2}||r_{n-N-1}|+\cdots+|u_n||r_1|)\\
&\leqslant (|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_N|)\varepsilon+(|u_{N+1}|+|u_{N+2}|+\cdots+|u_n|)M < M\varepsilon+M\varepsilon = 2M\varepsilon.
\end{aligned}$$

此即表明 $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$. 因此乘积级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ 收敛，并且有和 UV .

注 定理11.19只是保证乘积级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ 的收敛性，它的绝对收敛性一般不再成立.

例如，我们考虑下述两个级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} \text{ 与 } \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n^2}.$$

第一个级数是条件收敛的，第二个级数是绝对收敛的，因此根据上述定理，它们的乘积级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{1\cdot n^2}+\frac{1}{2\cdot(n-1)^2}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 1^2}\right]$$

收敛，然而它不是绝对收敛的，因为

$$\forall n>1, |w_n| = \frac{1}{1\cdot n^2}+\frac{1}{2\cdot(n-1)^2}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 1^2} > \frac{1}{n}.$$

定理11.19的进一步推广是：

若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与它们的乘积级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ 都收敛，则

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n\right)$$

它的证明见习题第 7 题.

绝对收敛级数的可交换性

定理 11.20

设 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 是任一绝对收敛级数，$\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是一一映射，则

1. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$ 也是绝对收敛的，
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$.

证明 1)$\forall n\in\mathbb{N}$，令

$$U'_n = |u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|$$
$$T'_n = \left|u_{\varphi(1)}\right|+\left|u_{\varphi(2)}\right|+\cdots+\left|u_{\varphi(n)}\right|$$

记 $m(n)=\max(\varphi(1),\varphi(2),\cdots,\varphi(n))$，则

$$T'_n \leqslant U'_{m(n)}$$

由假设 $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ 收敛，故 $\forall n\in\mathbb{N}, U'_{m(n)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}|u_n| < +\infty$，从而

$$T'_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|u_n| < +\infty(\forall n\in\mathbb{N})$$

此即表明单调上升序列 $\langle T_n' \rangle$ 上有界，因此正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|u_{\varphi(n)}\right|$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$ 绝对收敛.

2)$\forall n \in \mathbb{N}$，令

$$U_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, U = \lim_{n\to+\infty} U_n,$$

$$T_n = u_{\varphi(1)} + u_{\varphi(2)} + \cdots + u_{\varphi(n)}, T = \lim_{n\to+\infty} T_n.$$

于是 $U = T$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, |U - T| < \varepsilon$. 为此我们证明

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Longrightarrow |U_n - T_n| < \varepsilon. \tag{11.5}$$

首先由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 收敛，故由 Cauchy 收敛准则

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists P \in \mathbb{N})(\forall n, k \in \mathbb{N}, n \geqslant P) \Rightarrow |u_{n+1}| + \cdots + |U_{n+k}| < \varepsilon.$$

其次由于 $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是一一映射，必存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \{1, 2, \cdots, P\} \subset \{\varphi(1), \varphi(2), \cdots, \varphi(n)\}.$$

从而 $\forall n \geqslant N$，差式 $|U_n - T_n|$ 是由有限多个 u_{k_i} 组成，其中 $k_i > P$ $(i = 1, 2, \cdots, l_n)$，于是

$$|U_n - T_n| \leqslant \left|u_{k_1}\right| + \left|u_{k_2}\right| + \cdots + \left|u_{k_{l_n}}\right| < \varepsilon,$$

此即表明式(11.5)成立.

现在在式(11.5)中令 $n \to +\infty$，注意到 $U_n \to U, T_n \to T(n \to +\infty)$，即得到

$$|U - T| \leqslant \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性，推得 $U = T$.

注 此定理实际上告诉我们，对于一个绝对收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 来说，我们可以随意打乱 u_n 的排列顺序所得新级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$ 仍然绝对收敛，并且与原级数有相同的和，若我们再利用绝对收敛级数的结合性质，那么绝对收敛级数的交换性与结合性将为我们计算它的和提供方便.

对于条件收敛级数来说，项的交换性一般不再成立.

例如 §1 例11.9 的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \cdots$$

就是从条件收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 出发在一个正项后面放上两个负项所得到的，因此它是级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 的一个重排，然而级数 $\sum\limits_{n=1}^{1\infty} u_n$ 的和 S 并不与原级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 的和 $\log 2$ 相同，而是 $S = \frac{1}{2} \log 2$.

因此下面我们就转入条件收敛级数的研究.

4. 条件收敛级数的性质

定理 11.21

设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 是任一实的条件收敛级数. 则

1. $\langle x_n \rangle$ 包含有一个正项序列 $\langle a_n \rangle$ 与一个负项序列 $\langle b_n \rangle$(这里 $\langle a_n \rangle$ 与 $\langle b_n \rangle$ 不改变它们原来的先后顺序)
2. 与 $\langle a_n \rangle$ 及 $\langle b_n \rangle$ 对应的级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 都是发散的.

证明 因为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 是条件收敛的, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛, 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ 发散.

1) 如果 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 只有有限个正项或只有有限个负项, 那么从 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 中删去这有限个正项或有限个负项后所得新级数就是负项级数或正项级数. 从而由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 的收敛性推知此新级数收敛, 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ 也将收敛, 这是矛盾的. 因此结论 1) 成立.

2) 我们用 S_n, S_n', A_n 与 B_n 分别记级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |x_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 的前 n 项之和. 由 1) 所证知, $\forall n \in \mathbb{N}$, 存在 $m(n)$, $k(n) \in \mathbb{N}$ 使得

i)$S_n = A_{m(n)} + B_{k(n)}, S_n' = A_{m(n)} - B_{k(n)}$;

ii)$m(n) \to +\infty, k(n) \to +\infty (n \to +\infty)$.

若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 则由 i) 中的等一个等式知, $\lim\limits_{n\to+\infty} B_{k(n)}$ 存在并且有限, 从而由 i) 的第二个等式推知, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n'$ 存在且有限. 于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ 收敛. 这是矛盾的. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

同理可证, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 也必然发散.

定理 11.22

设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 是任一复的条件收敛级数, $u_n = x_n + \mathrm{i} y_n (n \in \mathbb{N})$. 则两个实级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ 中至少有一个是条件收敛的.

证明 因为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 是条件收敛的, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ 均收敛. 现在结论由下述不等式推出

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant |x_n| + |y_n|.$$

条件收敛级数的非交换性

定理 11.23 (Riemann)

设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 是任一实的条件收敛级数，那么 $\forall M \in \overline{\mathbb{R}}$，存在一一映射 $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_{\varphi(n)}$ 的和为 M .

证明 1) 设 $M \in \mathbb{R}$. 根据定理11.23，存在最小自然数 k_1 和 m_1 使得

$$T_1' = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1} > M,$$
$$T_1'' = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1} + b_1 + b_2 + \cdots + b_{m_1} < M.$$

同理，存在最小自然数 k_2 和 m_2 使得

$$\begin{aligned} T_2' =& a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1} + b_1 + b_2 + \cdots + b_{m_1} + a_{k_1+1} \\ & + a_{k_1+2} + \cdots + a_{k_2} > M, \\ T_2'' =& a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1} + b_1 + b_2 + \cdots + b_{m_1} + a_{k_1+1} \\ & + a_{k_1+2} + \cdots + a_{k_2} + b_{m_1+1} + b_{m_1+2} + \cdots + b_{m_2} < M. \end{aligned}$$

此过程可无限地继续下去，一般地我们有

$$T_s' = \sum_{j=0}^{s-2} \left(a_{k_j+1} + a_{k_j+2} + \cdots + a_{k_{j+1}} + b_{m_j+1} + b_{m_j+2} + \cdots + b_{m_{j+1}}\right) + a_{k_{s-1}+1} + a_{k_{s-1}+2} + \cdots + a_{k_s} > M,$$

$$T_s'' = \sum_{j=0}^{s-1} \left(a_{k_j+1} + a_{k_j+2} + \cdots + a_{k_{j+1}} + b_{m_j+1} + b_{m_j+2} + \cdots + b_{m_{j+1}}\right) < M$$

这里 $k_0 = m_0 = 0, s \in \mathbb{N}$.

由上述 $\langle T_s' \rangle$ 及 $\langle T_s'' \rangle$ 的构造过程可知，以下两点事实成立：

i)$\forall s \in \mathbb{N}, \left|T_s' - M\right| < a_{k_s}, \left|T_s'' - M\right| < |b_{m_s}|$.

ii) 原级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 的每一项 x_n 在上述 $\langle T_s' \rangle$ 或 $\langle T_s'' \rangle$ 中出现一次并且只出现一次，因此我们得到一个一一映射 $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 及与之对应的数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_{\varphi(n)}$，它是由上述和式 T_s' 及 T_s'' 扩展而成的，我们形式地记为：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_{\varphi(n)} \triangleq \lim_{s\to+\infty} T_s' \triangleq \lim_{s\to+\infty} T_s''.$$

下面我们证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$ 收敛并且有和 M .

首先注意到序列 $\langle k_s \rangle$ 与 $\langle m_s \rangle$ 都是严格单调上升的，因此 $k_s \to +\infty, m_s \to +\infty (s \to +\infty)$，从而

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \overline{N} \in \mathbb{N})(\forall s \in \mathbb{N}, s \geqslant \overline{N}) \Longrightarrow a_{k_{s-1}} < \varepsilon, |b_{m_{s-1}}| < \varepsilon.$$

现在记 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_{\varphi(n)}$ 的前 n 项之和为 T_n，即

$$T_n = x_{\varphi(1)} + x_{\varphi(2)} + \cdots + x_{\varphi(n)}.$$

取 $N \in \mathbb{N}$ 充分大使得 $N \geqslant k_{\overline{N}} + m_{\overline{N}}$. 假设 $n \geqslant N$.

若存在 s 使得 $x_{\varphi(n)}=a_{k_s}$ 或 $x_{\varphi(n)}=b_{m_s}$，则

$$T_n=T_s' \text{ 或 } T_n=T_s''.$$

从而

$$|T_n-M|=\left|T_s'-M\right|<a_{k_s}<\varepsilon$$

或

$$|T_n-M|=\left|T_s''-M\right|<|b_{m_s}|<\varepsilon.$$

若存在 s 使得 $x_{\varphi(n)}=a_{k_{s-1}+i}$ 或 $x_{\varphi(n)}=b_{m_{s-1}+j}$，其中 $k_{s-1}+i<k_s$，$m_{s-1}+j<m_s$，则

$$T_{s-1}''<T_n<T_s',\text{ 或 } T_s''<T_n<T_{s-1}'.$$

从而

$$-\varepsilon<-|b_{m_{s-1}}|<T_{s-1}''-M<T_n-M<T_s'-M<a_{k_s}<\varepsilon,$$

或

$$-\varepsilon<-|b_{m_s}|<T_s''-M<T_n-M<T_{s-1}'-M<a_{k_{s-1}}<\varepsilon.$$

由此我们得到

$$|T_n-M|<\varepsilon.$$

总之我们证明了：$\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N,|T_n-M|<\varepsilon$，此即表明 $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=M$．因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_{\varphi(n)}$ 收敛并且有和 M．

2) 设 $M=+\infty$，于是存在最小自然数 k_1 使得

$$T_1'=a_1+a_2+\cdots+a_{k_1}+b_1>1,$$

存在最小自然数 k_2 使得

$$T_2'=a_1+a_2+\cdots+a_{k_1}+b_1+a_{k_1+1}+a_{k_1+2}+\cdots+a_{k_2}+b_2>2.$$

此过程可无限继续下去，于是我们得到一一映射 $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得与之对应的级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_{\varphi(n)}$ 是原级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ 的一个重排，并且它是由形如

$$T_n'=\sum_{j=0}^{n-1}\left(a_{k_j+1}+a_{k_j+2}+\cdots+a_{k_{j+1}}+b_{j+1}\right)(k_0=0)$$

的和式扩展而成的，记为

$$\sum_{n=1}^{+\infty}x_{\varphi(n)}\xlongequal{\triangle}\lim_{n\to+\infty}T_n'.$$

与 1) 一样地可证，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_{\varphi(n)}$ 的和为 $+\infty$．

当 $M=-\infty$ 时，类似可证：也存在一一映射 $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_{\varphi(n)}$ 的和为 $-\infty$．

此定理表明，对实的条件收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$，适当改变它的项的排列顺序，可以使新级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_{\varphi(n)}$ 具有预先给定的和 M.

对于复的条件收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (x_n + \mathrm{i} y_n)$，由定理11.22知，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ 中至少有一个是条件收敛的. 因此根据定理 11.23，适当改变 u_n 的排列顺序我们将得到一个发散的复数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$.

最后，作为这一章的结束，我们介绍级数的一个重要应用，即实数的 p 进制展开.

5. 实数的 p 进制展开

在介绍实数的 p 进制展开之前，我们先证明一个引理.

引理 11.1

设 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ 是任一实的绝对收敛级数，那么 $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ 当且仅当

$$u_n \geqslant 0 (\forall n \geqslant 0) \text{ 或者 } u_n \leqslant 0 (\forall n \geqslant 0).$$

证明 由于 $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|\right) - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (|u_n| - u_n)$, $|u_n| - u_n \geqslant 0 (\forall n \geqslant 0)$，故 $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|\right) - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \geqslant 0$. 而从 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ 当且仅当 $u_n = |u_n| (\forall n \geqslant 0)$ 或者 $u_n \geqslant 0 (\forall n \geqslant 0)$.

同样，$\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|\right) + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n_n \geqslant 0$，故 $-\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ 当且仅当 $-u_n = |u_n| (\forall n \geqslant 0)$，也即 $u_n \leqslant 0 (\forall n \geqslant 0)$.

现在我们设 $p \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ 是任一固定实数. $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，由 $x = \dfrac{p^n x}{p^n}$ 得到

$$\frac{[p^n x]}{p^n} \leqslant x < \frac{[p^n x]}{p^n} + \frac{1}{p^n}.$$

记

$$x_n = \frac{[p^n x]}{p^n}, y_n = \frac{[p^n x]}{p^n} + \frac{1}{p^n}. \tag{11.6}$$

我们分别称 x_n y_n 为 x 的误差不超过 $\dfrac{1}{p^n}$ 的亏、盈近似值.

由式(11.6)立即得到下述不等式：

$$x_n \leqslant x < x_n + \frac{1}{p^n}, x - \frac{1}{p^n} < x_n \leqslant x. \tag{11.7}$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{p^n} = 0 (p > 1)$. 故必有

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x, \lim_{n\to+\infty} y_n = x.$$

下面我们记 $\mathbb{Z}\left(\dfrac{1}{p}\right)$ 为所有形如 $\dfrac{k}{p^m} (k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ 的有理数的集合，下面就是关于实数的 p 进制展开的定理.

定理 11.24

设 $x\in\mathbb{R}$.

i) 若 $x\notin\mathbb{Z}\left(\frac{1}{p}\right)$, 则存在唯一的整数序列 $\langle a_n\rangle$ 使得 $a_0\triangleq x_0=[x],0\leqslant a_n\leqslant p-1(\forall n\in\mathbb{N})$ 且 $x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{p^n}$. ($x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{p^n}$ 或 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 称为实数 x 的 p 进制正常展开式);

ii) 若 $x\in\mathbb{Z}\left(\frac{1}{p}\right)$, 则恰好存在两个整数序列 $\langle a_n\rangle$ 与 $\langle b_n\rangle$ 及自然数 N 使得

$$a_n=0(\forall n\geqslant N+1),$$

$$b_n=p-1(\forall n\geqslant N+1),b_N=a_N-1,b_n=a_n(n=1,2,\cdots,N-1),$$

$$x=\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{p^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{p^n}.$$

$x=\sum_{n=0}^{N}\frac{a_n}{p^n}$ 或 $x=a_0,a_1a_2\cdots a_N$ 称为有理数 x 的 p 进制正常展开式, 而 $x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{p^n}$ 或 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_{N-1}\left(a_N-1\right)(p-1)(p-1)\cdots$ 称为有理数 x 的 p 进制非正常展开式.

证明 i) 设 $x\notin\mathbb{Z}\left(\frac{1}{p}\right)$. 利用(11.6)中的 x_n 定义整数序列 $\langle a_n\rangle$ 如下:

$$a_0\triangleq x_0=[x],a_n=p^n\left(x_n-x_{n-1}\right)(\forall n\in\mathbb{N}).$$

由式(11.7)容易推得下述不等式:

$$p^{n-1}x_{n-1}\leqslant p^{n-1}x<p^{n-1}x_{n-1}+1,$$

$$p^{n-1}x_n\leqslant p^{n-1}x<p^{n-1}x_n+\frac{1}{p}.(\forall n\in\mathbb{N}),$$

从而

$$p^{n-1}x_n-1<p^{n-1}x_{n-1}<p^{n-1}x_n+\frac{1}{p}$$

或

$$-1<p^n\left(x_n-x_{n-1}\right)<p(\forall n\in\mathbb{N}).$$

由于 $a_n(n\geqslant 1)$ 为整数, 故 $0\leqslant a_n\leqslant p-1(\forall n\in\mathbb{N})$, $a_0=x_0=[x]\in\mathbb{Z}$. 直接验算得

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{p^k}=a_0+\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-x_{k-1}\right)=x_n,$$

因此,

$$x=\lim_{n\to+\infty}x_n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{p^n}.$$

为了证明 $\{a_n\}$ 的唯一性, 假设 $\langle a_n'\rangle$ 是另一整数序列使得

$$a_0'=x_0,0\leqslant a_n'\leqslant p-1(\forall n\in\mathbb{N})\text{ 且 }x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n'}{p^n}$$

如果 $\langle a_n'\rangle \neq \langle a_n\rangle$，则 $N=\min\left\{n\in\mathbb{N} \mid a_n'\neq a_n\right\}$ 在在. 于是有 $a_N-a_N'\geqslant 1$. 现在

$$0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n-a_n'}{p^n}=\frac{a_N-a_N'}{p^N}+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{a_n-a_n'}{p^n}.$$

由于 $\left|a_n-a_n'\right|\leqslant p-1(\forall n\in\mathbb{N})$，故

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{a_n-a_n'}{p^n}\right|\leqslant\sum_{n=N++1}^{+\infty}\frac{|a_n-a_n'|}{p^n}\leqslant(p-1)\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{p^n}=\frac{1}{p^N}$$

若 $\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{a_n-a_n'}{p^n}\right|<\frac{1}{p^N}$，则 $0=\frac{a_N-a_N'}{p^N}+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{a_n-a_n'}{p^n}>\frac{a_N-a_N'}{p^N}-\frac{1}{p^N}\geqslant 0$ 矛盾.

若 $\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{a_n-a_n'}{p^n}\right|=\frac{1}{p^N}$，则我们得到下述等式：

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{a_n-a_n'}{p^n}\right|=\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{|a_n-a_n'|}{p^n}=\frac{1}{p^N}\tag{11.8}$$

根据上述引理知,

$$a_n-a_n'\geqslant 0(\forall n\geqslant N+1)\text{ 或 }a_n-a_n'\leqslant 0(\forall n\geqslant N+1).$$

当 $a_n-a_n'\geqslant 0(\forall n\geqslant N+1)$ 时，由 $0\leqslant a_n-a_n'\leqslant p-1(\forall n\geqslant N+1)$ 及等式(11.8)推知，$a_n-a_n'=p-1(\forall n\geqslant N+1)$. 然而这种情形不可能出现，因为这时我们有

$$0=\frac{a_N-a_N'}{p^N}+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{a_n-a_n'}{p^n}=\frac{a_N-a_N'}{p^N}+\frac{1}{p^N}>0\text{ 矛盾.}$$

当 $a_n-a_n'\leqslant 0(\forall n\geqslant N+1)$ 时，由 $\left|a_n-a_n'\right|\leqslant p-1$ 知 $-(p-1)\leqslant a_n-a_n'\leqslant 0(\forall n\geqslant N+1)$. 从而由式(11.8)又推知，$a_n-a_n'=-(p-1)(\forall n\geqslant N+1)$ 或 $a_n'=a_n+(p-1)(\forall n\geqslant N+1)$. 因此必然有 $a_n=0(\forall n\geqslant N+1)$. 于是 $x=\sum_{n=0}^{N}\frac{a_n}{p^n}\in\mathbb{Z}\left(\frac{1}{p}\right)$，这与假设 $x\notin\mathbb{Z}\left(\frac{1}{p}\right)$ 矛盾.

上述论证表明必有 $\langle a_n'\rangle=\langle a_n\rangle$，即结论 i) 成立.

ii) 设 $x\in\mathbb{Z}\left(\frac{1}{p}\right)$，则当 n 充分大以后有 $\left[p^n x\right]=p^n x$，从而

$$x_n=\frac{[p^n x]}{p^n}=x,a_n=p^n\left(x_n-x_{n-1}\right)=0.$$

令 $N=\max\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\neq 0\}$，则 $x=\sum_{n=0}^{N}\frac{a_n}{p^n}$.

现在我们定义整数序列 $\langle b_n\rangle$ 如下：

$$b_n=p-1(\forall n\geqslant N+1),b_N=a_N-1,$$

$$b_n=a_n(n=0,1,2,\cdots,N-1).$$

那么

$$\begin{aligned} x=\sum_{n=0}^{N}\frac{a_n}{p^n}&=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{a_n}{p^n}+\frac{a_N-1}{p^N}+\frac{1}{p^N}\\ &=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{a_n}{p^n}+\frac{a_N-1}{p^N}+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{p-1}{p^n}\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{p^n}. \end{aligned}$$

为了证明 x 展开式的唯二性，我们设 $\langle c_n\rangle$ 是另一整数序列使得

$$c_0=x_0, 0\leqslant c_n\leqslant p-1(\forall n\in\mathbb{N}),\ 且\ \ x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_n}{p^n}.$$

若 $c_n=a_n(n=1,2,\cdots,N)$，则必然有 $c_n=0(\forall n\geqslant N+1)$.

若 $c_n=a_n(n=1,2,\cdots,N)$ 不成立，令 $N_0=\min\{n\in\mathbb{N}\mid c_n\neq a_n\}$，则 $N_0\geqslant 1$. 用类似于结论 i) 中唯一性证明方法可证明 $N_0=N$，并 $c_n=p-1(\forall n\geqslant N+1), c_N=a_N-1\rightarrow, c_n=a_n(n=0,1,2,\cdots,N-1)$. 此即表明整数序列 $\langle c_n\rangle$ 只能是 $\langle a_n\rangle$ 或 $\langle b_n\rangle$ 两种情形，因此结论 ii) 成立.

当 $p=2,10,16$ 时，我们特别得到实数 x 的 2 进制，10 进制，16 进制展开式.

例题 11.34 求 $\dfrac{1}{12}$ 的 2 进制、7 进制与 10 进制展开式.

直接按 $a_0=x_0, a_n=p^n(x_n-x_{n-1})$ 的公式计算得

$\dfrac{1}{12}$ 的 2 进制展开式为：

$$\frac{1}{12}=0.000101010\cdots=0.00\dot{1}\dot{0};$$

$\dfrac{1}{12}$ 的 7 进制展开式为：

$$\frac{1}{12}=0.04040\cdots=0.0\dot{4}\dot{0}$$

$\dfrac{1}{12}$ 的 10 进制展开式为：

$$\frac{1}{12}=0.0833\cdots=0.08\dot{3}.$$

这里 $\dot{1}\dot{0}, \dot{4}\dot{0}, \dot{3}$ 分别表示 10, 40, 3 的循环节.

例题 11.35 求 $\dfrac{3}{100}$ 的 10 进制的正常与非正常展开式.

$\dfrac{3}{100}$ 的 10 进制正常展开式为：$\dfrac{3}{100}=0.03$；

$\dfrac{3}{100}$ 的 10 进制非正常展开式为：$\dfrac{3}{100}=0.02\dot{9}$.

✍ 习题 11.3

1. 研究下列各级数的绝对收敛性与条件收敛性.

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{a+\frac{1}{n}}} \quad (a \in \mathbb{R})$

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!\,n^q} \quad (p, q \in \mathbb{R})$

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin\frac{1}{n}$ 4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \log n \cdot \log\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ 5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$

6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ 7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\pi n^2 \log\frac{n}{n+1}\right)$ 8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}+\cos n}$

2. 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 是任一绝对收敛级数. 证明下列各级数也绝对收敛：

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{1+u_n} \quad (u_n \neq -1)$ 3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n^2}{1+u_n^2}$

3. 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 是任一实数项级数. 证明：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1+x_n)$ 绝对收敛当且仅当级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 绝对收敛.

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})$ 绝对收敛. 证明：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛.

5. 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的部分和序列有界，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})$ 绝对收敛，且 $b_n \to 0 (n \to +\infty)$. 证明：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ 收敛.

6. 证明：对条件收敛级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的各项进行适当的分组结合, 但不改变它们原先的顺序，所得级数可以是绝对收敛的.

7. 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 是两个条件收敛级数，其 Cauchy 乘积级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ 收敛. 令 U_n, V_n, W_n 分别为前 n 项部分和，U, V, W 为这三个级数之和.

1) 证明：

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_n = U_1 V_n + U_2 V_{n-1} + \cdots + U_n V_1$$

2) 证明：

$$W = \lim_{n\to+\infty} \frac{W_1 + W_2 + \cdots + W_n}{n} = UV$$

8. 设 P 与 Q 分别为 p 次与 q 次实系数多项式. 研究级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}$ 的绝对收敛与条件收敛性.

9. 计算下列级数的乘积级数：

1) $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$

2) $\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}\right)$

3) $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}q^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}q^n\right)$ $(|q|<1)$

4) $\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\right)$

10. 详细研究级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nt}{n^\alpha}$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nt}{n^\alpha}(\alpha\in\mathbb{R})$ 的收敛与发散性.

11. 设 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 是任一实或复级数，我们称它是交换收敛级数，如果它是收敛的，并且对任意一一映射 $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_{\varphi(n)}$ 收敛并且与 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 有相同的和.

    1) 证明：任一实的交换级数是绝对收敛的.

    2) 证明：任一复的交换级数是绝对收敛的.

12. 设复数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}z_n$ 定义如下：

$$z_n=\frac{\mathrm{i}^n}{n}(n\geqslant 1).$$

    1) 证明：$\sum_{n=1}^{+\infty}z_n$ 是条件收敛的.

    2) 设 $z\in\mathbb{C}$. 证明：存在一一映射 $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 使得级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}z_{\varphi(n)}$ 收敛并且和为 z.

13. 设 $\sum_{n=1}^{+\infty}z_n$ 是一复的条件收敛级数，令 $z_n=x_n+\mathrm{i}y_n,x_n,y_n\in\mathbb{R}$. E 表示由级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ 及级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda x_n+y_n)\,(\lambda\in\mathbb{R})$ 组成的集合.

    1) 证明：在 E 中最多存在一个绝对收敛级数.

    2) 假设在 E 中存在一个绝对收敛级数. 令 $\Phi=\{\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\mid\varphi$ 是一一映射使得 $\sum_{n=1}^{+\infty}z_{\varphi(n)}$ 收敛$\}$ 及

$$L=\left\{\sum_{n=1}^{+\infty}z_{\varphi(n)}\mid\varphi\in\Phi\right\}.$$

    证明：L 是复平面上的一直线.

14. 这个题目是介绍无穷乘积的概念及其有关结论的.

    设 $\langle a_n\rangle$ 是任一实数序列. 令

$$p_n=\prod_{k=1}^{n}a_k\triangleq a_1a_2\cdots a_n$$

序列对 $\{\langle a_n\rangle, \langle p_n\rangle\}$ 称为 $\langle a_n\rangle$ 的无穷乘积.

若序列 $\langle p_n\rangle$ 收敛并且其极限不等于 0，则我们称此无穷乘积收敛，它的极限记为 $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$，即

$$\prod_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} p_n.$$

若无穷乘积不收敛，则我们称它是发散的.

1) 研究下列一般列的无穷乘积：

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}, b_n = 1 - \frac{1}{n}\ (n \geqslant 2), c_1 = 1,\ c_n = 1 + \frac{1}{n}\ (n \geqslant 2)$$

2) 证明：若 $\langle a_n\rangle$ 的无穷乘积收敛，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

3) 设 $\langle a_n\rangle$ 是任一严格正的实数序列.

   a) 证明：$\langle a_n\rangle$ 的无穷乘积与无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \log a_n$ 有相同的收敛与发散性；

   b) 证明：$\langle a_n\rangle$ 的无穷乘积与 $\langle 1 + a_n\rangle$ 的无穷乘积有相同的收敛与发散性；

   c) 证明：若 $0 < a_n < 1$，则 $\langle a_n\rangle$ 的无穷乘积与 $\langle 1 - a_n\rangle$ 的无穷乘积有相同的收敛与发散性.

4) 设 $\langle a_n\rangle$ 是任一非零实数序列. 证明：$\langle a_n\rangle$ 的无穷乘积收敛，当且仅当 $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > N) \Longrightarrow |a_N a_{N+1} \cdots a_n - 1| < \varepsilon$.

5) 证明：若 $\langle 1 + |a_n|\rangle$ 的无穷乘积收敛，则 $\langle 1 + a_n\rangle$ 的无穷乘积也收敛.

6) 证明：$\langle 1 + a_n\rangle$ 的无穷乘积与数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \log(1 + a_n)$ 有相同的收敛与发散性.

7) 证明：若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，则 $\langle 1 + a_n\rangle$ 的无穷乘积与数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 有相同的收敛与发散性.

15. 设 $x \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{Z}\left(\frac{1}{p}\right)$. 证明 x 是有理数的充分必要条件是：x 的 p 进制正常展开式是右向周期的，即存在 $d \in \mathbb{N}$ 及 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $a_n = a_{n+d} (\forall n \geqslant N)$.

16. 设 $E = [0, 1)$，试利用 E 中的实数的 p 进制正常展开式证明集合 E 是不可数集.

第十二章 函数项序列与函数项级数

这一章我们介绍函数项序列与级数的简单收敛与一致收敛性概念. 研究函数项序列的极限函数与函数项级数的和函数的若干性质, 此外我们还介绍了等度连续函数族及连续函数空间的 Stone-Weierstrass 定理.

12.1 函数项序列与级数的简单与一致收敛

首先我们介绍函数项序列与级数的定义.

1. 函数项序列与级数的定义

以下设 (X,d) 是任一度量空间, $B\subset X$ 是任一非空集合. $K=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 我们用 $\mathscr{F}(B,K)$ 表示所有从 B 到 K 上的 K 值函数组成的集合.

定义 12.1

从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathscr{F}(B,K)$ 的任一映射 $f:\mathbb{N}\to\mathscr{F}(B,K)$ 称为一个函数项序列, 简记为 $\langle f_n\rangle$. $f_n(n\in\mathbb{N})$ 称为此函数项序列的第 n 项或通项. ♣

例如, 当 $B=I\subset\mathbb{R}$ 是一区间时, 映射 $f:\mathbb{N}\to C^k(I,\mathbb{R})$ 就是一个定义在 I 上的 C^k 类实值函数序列 $\langle f_n\rangle$.

定义 12.2

设 $\langle f_n\rangle$ 是 $\mathscr{F}(B,K)$ 的任一函数序列, 作下述和式:

$$S_1=f_1,S_2=f_1+f_2,\cdots,S_n=f_1+f_2+\cdots+f_n$$

1. $f_1+f_2+\cdots+f_n+\cdots$ 称为以 f_n 为通项为函数项级数, 并简记为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n(x),x\in B$.
2. $\forall n\in\mathbb{N}, S_n$ 称为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n$ 的前 n 项之和或部分和, 而 $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}f_k$ 称为此函数项级数的 n 阶余项. ♣

例如, 下述两个函数项级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots(z\in\mathbb{C}),$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\cdots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\cdots$$

分别称为幂级数与三角级数.

2. 函数项序列与级数的简单与一致收敛

定义 12.3

设 $\langle f_n\rangle$ 是 $\mathscr{F}(B,K)$ 的任一函数序列.

1. 我们称 $\langle f_n \rangle$ 在 B 上简单收敛于函数 $f \in \mathscr{F}(B, K)$(f 称为 $\langle f_n \rangle$ 的极限函数), 如果

$$\forall x \in B, \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x).$$

2. 我们称 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ 在 B 上简单收敛于函数 $S \in \mathscr{F}(B, K)$, (S 称为 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ 的和函数), 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ 的部分和序列 $\langle S_n \rangle$ 在 B 上简单收敛于 S, 即

$$\forall x \in B, \lim_{n \to +\infty} [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)] = S(x),$$

这时, 记为

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = S(x)(\forall x \in B).$$

用 "$\varepsilon - N$" 语言来描述上述简单收敛性定义就是:

$$\langle f_n \rangle \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \right) \text{ 在 } B \text{ 上简单收敛于 } f : B \to K(S : B \to K)$$

$$\iff (\forall x \in B)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N)$$

$$\implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \left(|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \right).$$

这里我们不用 N 而用 $N(x, \varepsilon)$ 记所指性质的自然数, 是因为一般说来, 它既与 ε 有关又与 x 有关.

例题 12.1 考虑函数序列 $\langle f_n \rangle$, 这里

$$f_n(x) = x^n, x \in [0, 1], (\forall n \in \mathbb{N}).$$

证明: $\langle f_n \rangle$ 在 $[0, 1]$ 上简单收敛. 为此定义 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

则我们有

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} |x|^n, & \text{若 } x \in [0, 1), \\ 0, & \text{若 } x = 1. \end{cases}$$

于是 $\forall 0 < \varepsilon < 1$

$$\forall x \in [0, 1], |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff \forall x \in [0, 1), |x|^n < \varepsilon$$

$$\iff \forall x \in (0, 1), n > \frac{\log \varepsilon}{\log |x|}.$$

由此可知, 若取 $N(x, \varepsilon) = \left[\frac{\log \varepsilon}{\log |x|} \right] + 1$, 则

$$(\forall x \in (0, 1))(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N(x, \varepsilon)) \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

由于对 $x = 0, 1$, $|f_n(0) - f(0)| = |f_n(1) - f(1)| = 0$, 故上述分析表明 $\langle f_n \rangle$ 在 $[0, 1]$ 上简单收敛于 f.

显然, 这里

$$\sup_{x \in [0,1]} N(x, \varepsilon) = \sup_{x \in [0,1]} \left(1 + \left[\frac{\log \varepsilon}{\log |x|} \right] \right) = +\infty.$$

故我们找不到一个只与 ε 有关而与 $x \in [0,1]$ 无关的自然数 N 使得

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N)(\forall x \in [0,1]) \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

这从图12.1中 $\langle f_n \rangle$ 的图形也可以明了这一事实. 因 n 越大, f_n 的曲线 Γ_n 在 $x = 1$ 的附近越陡.

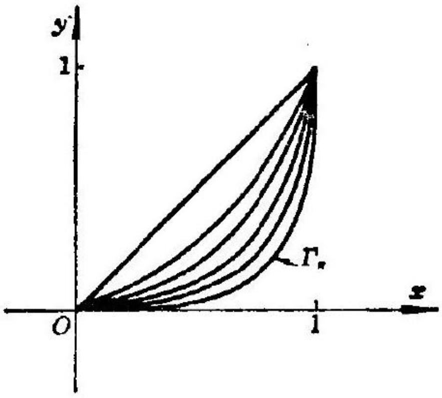


图 12.1

例题 12.2 考虑定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$, 这里

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+x)^n}, \forall x \in [0,+\infty).$$

证明: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ 在 $[0,+\infty)$ 上简单收敛.

事实上, 由于

$$\begin{aligned} & x = 0, S_n(0) = 0. \\ & x > 0, S_n(x) = x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \cdots + \frac{x}{(1+x)^{n-1}} \\ & \qquad = \frac{x(1+x)}{x}\left(1 - \frac{1}{(1+x)^n}\right) \\ & \qquad = (1+x) - \frac{1}{(1+x)^{n-1}}. \end{aligned}$$

若定义函数 $S : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 为

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1+x, & x > 0, \end{cases}$$

则 $\forall x \in (0,+\infty), |S_n(x) - S(x)| \leqslant \frac{1}{(1+x)^{n-1}}$, 从而 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon & \Longleftrightarrow \frac{1}{(1+x)^{n-1}} < \varepsilon \\ & \Longleftrightarrow n > 1 + \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log(1+x)}. \end{aligned}$$

由此可知, 若令 $N(x,\varepsilon) = 1 + \left[\frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log(1+x)}\right]$, 则

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N(x,\varepsilon) \Longrightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon (\forall x \in [0,+\infty).$$

此即表明此函数项级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ 在 $[0,+\infty)$ 上简单收敛于 S .

像例12.1一样，这里

$$\sup_{x\in[0,\infty)} N(x,\varepsilon)=\sup_{x\in[0,+\infty)}\left(1+\left[\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log(1+x)}\right]\right)=+\infty$$

因此同样不存在与 x 无关的自然数 N 使得

$$\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant N, \forall x\in[0,+\infty), \Rightarrow |\, S_n(x)-S(x)<\varepsilon.$$

当然也有这样的函数项序列与函数项级数它们简单收敛，并且与之相应的自然数 $N(x,\varepsilon)$ 实际上与 x 无关.

例如，对例12.1的函数项序列 $\langle f_n\rangle$, 这里 $x\in[0,a](0<a<1)$；与例12.2的函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, 这里 $x\in[a,+\infty)(a>0)$.

由于

$$\forall x\in[0,a], |\, f_n(x)-f(x)|\leqslant |x|^n<a^n,$$

故 $\forall\varepsilon>0$, 由 $a^n<\varepsilon$ 得到 $n>\dfrac{\log\varepsilon}{\log a}$. 因此若令 $N=\left[\dfrac{\log\varepsilon}{\log a}\right]+1$, 则 N 与 x 无关，并且

$$(\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant N)(\forall x\in[0,a])\Rightarrow |\, f_n(x)-f(x)|<a^n<\varepsilon.$$

对于例12.2的函数项级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, 我们有：

$$\begin{aligned}\forall x\in[a,+\infty), |S_n(x)-S(x)| &\leqslant \frac{1}{(1+x)^{n-1}}\\ &<\frac{1}{(1+a)^{n-1}}\end{aligned}$$

故 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\dfrac{1}{(1+a)^{n-1}}<\varepsilon$ 得到 $n>1+\dfrac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log(1+a)}$, 因此若令 $N=1+\left[\dfrac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log(1+a)}\right]$, 则 N 与 x 无关，并且

$$(\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant N)(\forall x\in[a,+\infty))\Longrightarrow |S_n(x)-S(x)|<\varepsilon.$$

像这种型式的简单收敛，属于下面我们介绍的一致收敛性概念.

定义 12.4

设 $\langle f_n\rangle$ 是 $\mathscr{F}(B,K)$ 的一函数项序列

1. 我们称 $\langle f_n\rangle$ 在子集 $A\subset B$ 上一致收敛于 $f:A\to K$, 若
$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant N)(\forall x\in A)\Longrightarrow |\, f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$
2. 我们称 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ 在 A 上一致收敛于函数 $S:A\to K$, 若
$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant N)(\forall x\in A)\Longrightarrow |S_n(x)-S(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right|<\varepsilon.$$

♣

根据这个定义，例12.1的函数项序列 $\langle f_n\rangle$ 在 $[0,a](0<a<1)$ 上一致收敛于 f. 例12.2的函数项级

数 $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ 在 $[a,+\infty)(a>0)$ 上一致收敛于 S.

从几何图形上来看，函数项序列 $\langle f_n\rangle$ 在 A 上一致收敛于函数 $f:A\to\mathbb{R}$(这里取 $K=\mathbb{R}$)，就是对每一个 $\varepsilon>0$, 存在一个只与 ε 有关而与 $x\in A$ 无关的自然数 N, 使得从第 N 个函数 f_N 起，所有 f_n 的图形 Γ_n 完全位于函数 f 的图形 Γ 的 ε-带形区域内.

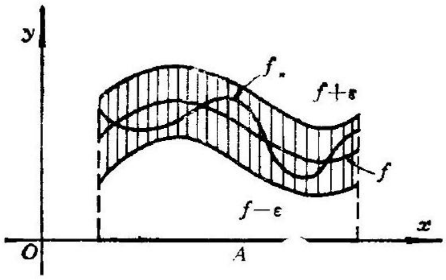


图 12.2

由于函数项级数的简单或一致收敛就是它的部分和的函数项序列的简单或一致收敛，因此，下而在介绍函数项序列与级数的一致收敛性判别法时，我们将两者相应的判别法表述在同一定理内，以便于加深对两者的共性的认识.

3. 函数项序列与级数的一致收敛性判别法

1) 一致收敛的等价定义

命题 12.1

函数项序列 $\langle f_n\rangle$ $\left(\text{函数项级数} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right)$ 在 B 上一致收敛于 $f:B\to K(S:B\to K)$ 的充分必要条件是：

$$\sup_{x\in B}|f_n(x)-f(x)|\to 0(n\to+\infty)$$

$$\left(\sup_{x\in B}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in B}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right|\to 0(n\to+\infty)\right).$$

证明 显然我们只需对函数项序列进行证明.

(必要性) 设 $\langle f_n\rangle$ 在 B 上一致收敛于 $f:B\to K$, 于是由定义有：

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N)(\forall x\in B)\Longrightarrow|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

由此得到

$$\sup_{x\in B}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon(\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N).$$

此即表明 $\sup_{x\in B}|f_n(x)-f(x)|\to 0(n\to+\infty)$.

(充分性) 假设 $\sup_{x\in B}|f_n(x)-f(x)|\to 0(n\to+\infty)$. 那么

$$\begin{aligned}&(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N)\\ \Longrightarrow&\sup_{x\in B}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\\ \Longrightarrow&|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon(\forall x\in B).\end{aligned}$$

因此 $\langle f_n \rangle$ 在 B 上一致收敛于 f.

注 如果我们考虑连续函数空间 $C^0([a,b],\mathbb{R})$ 并在其上取范数 $\|\cdot\|_\infty$：

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|, \forall f \in C^0([a,b],\mathbb{R}),$$

则根据上述命题知，$C^0([a,b],\mathbb{R})$ 上的函数项序列 $\langle f_n \rangle$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ 等价于

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 (n \to +\infty).$$

由此我们也就明白了为什么在第 10 章 §1 中称如上定义的范数 $\|\cdot\|_\infty$ 为 $C^0([a,b],\mathbb{R})$ 上的一致收敛范数.

现在我们看几个用上述命题判断函数项序列一致收敛性的例子.

例题 12.3 考虑函数项序列 $\langle f_n \rangle$, 这里

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x}{(1+x^2)^n}, \forall x \in [0,1], n \in \mathbb{N}.$$

证明：$\langle f_n \rangle$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f = 0$.

事实上，当 $x = 0$ 时，$f_n(0) = 0$, 当 $x \neq 0$ 时，由于 $1+x^2 > 1$, 故 $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{x}{(1+x^2)^n} = 0$, 因此 $\langle f_n \rangle$ 在 $[0,1]$ 上简单收敛于 $f = 0$.

为了证明它的一致收敛性，考虑差式

$$|f_n(x) - 0| = \frac{x}{(1+x^2)^n}, \forall x \in [0,1].$$

不难证明此差式在 $x = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ 处取最大值. 因此

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| &= \sup_{x\in[0,1]} \frac{x}{(1+x^2)^n} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \to 0 (n \to +\infty)\end{aligned}$$

故 $\langle f_n \rangle$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f = 0$.

例题 12.4 考虑函数项序列 $\langle f_n \rangle$, 这里

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+nx}, x \in [0,+\infty), \forall n \in \mathbb{N}.$$

证明：$\langle f_n \rangle$ 在 $[0,+\infty)$ 上简单收敛，但不一致收敛，并指出其一致收敛区间.

因为 $\forall x \in [0,+\infty)$,

$$|f_n(x) - 0| = \left|\frac{\sin nx}{1+nx}\right| \leqslant \frac{1}{1+nx} \quad 且 \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+nx} = 0.$$

所以 $\langle f_n \rangle$ 在 $[0,+\infty)$ 上简单收敛于 $f = 0$.

由于 $\frac{1}{n} \in [0,+\infty)$, 并且

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \left|\frac{\sin n \cdot \frac{1}{n}}{1+n\cdot\frac{1}{n}}\right| = \frac{|\sin 1|}{2} (\forall n \in \mathbb{N})$$

故 $\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| \geqslant \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{|\sin 1|}{2}$, 从而由上述命题知，$\langle f_n \rangle$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致收敛于 $f = 0$.

但是 $\forall a > 0$, 由于

$$|f_n(x) - f(0)| = \left|\frac{\sin nx}{1+nx}\right| \leqslant \frac{1}{1+na}, \forall x \in [a,+\infty)$$

故 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\dfrac{1}{1+na}<\varepsilon$ 得到 $n>\dfrac{1-\varepsilon}{a\varepsilon}$. 若令 $N=1+\left[\dfrac{1-\varepsilon}{a\varepsilon}\right]$, 则

$$(\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N)(\forall x\in[a,+\infty))\Longrightarrow|f_n(x)-f(0)|<\frac{1}{1+na}<\varepsilon$$

因此 $\langle f_n\rangle$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛于 $f=0$.

2) Cauchy 一致收敛准则

定理 12.1 (Cauchy 准则)

函数项序列 $\langle f_n\rangle$ $\left(\text{函数项级}\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n\right)$ 在 B 上一致收敛的充分必要条件是:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n,k\in\mathbb{N},n\geqslant N)(\forall x\in B)$$
$$\Longrightarrow|f_{n+k}(x)-f_n(x)|<\varepsilon\,(|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+k}(x)|<\varepsilon).$$

证明 由于对函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n,\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n$ 在 B 上一致收敛于 $S:B\to K$, 当且仅当它的部分和函数序列 $\langle S_n\rangle$ 在 B 上一致收敛于 S, 而

$$|S_{n+k}(x)-S_n(x)|=|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+k}(x)|(\forall x\in B)$$

故我们只需对函数项序列 $\langle f_n\rangle$ 证明定理即可.

(必要性) 设 $\langle f_n\rangle$ 在 B 上一致收敛于 f. 那么由定义有:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N)(\forall x\in B)\Longrightarrow|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2.$$

于是

$$\begin{aligned}(\forall n,k\in\mathbb{N},n\geqslant N)(\forall x\in B)\Longrightarrow|f_{n+k}(x)-f_n(x)|&\leqslant|f_{n+k}(x)-f(x)|+|f_n(x)-f(x)|\\&<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

(充分性) 设定理的条件成立, 即

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n,k\in\mathbb{N},n\geqslant N)(\forall x\in B)\Rightarrow|f_{n+k}(x)-f_n(x)|<\varepsilon. \tag{12.1}$$

那么 $\forall x\in B$, K –值序列 $\langle f_n(x)\rangle$ 是 K 中的 Cauchy 序列. 由 K 的完备性知, $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)$ 存在.

现在我们定义函数 $f:B\to K$ 如下:

$$\forall x\in B,\ f(x)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x),$$

并在式(12.1)中令 $k\to+\infty$ 得

$$(\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N)(\forall x\in B)\Longrightarrow|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon.$$

此即表明 $\langle f_n\rangle$ 在 B 上一致收敛于 f.

例题 12.5 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n$ 在 B 上一致收敛. 证明：存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得

1. $\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N$, 函数 f_n 在 B 上有界.
2. 函数序列 $\langle f_n\rangle$ 在 B 上一致收敛于 $f=0$

事实上，由于 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ 在 B 上一致收敛，故由上述 Cauchy 收敛准则知 (取 $k=1$)

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant N)(\forall x\in B)\Longrightarrow |f_{n+1}(x)|<\varepsilon.$$

此即表明上述结论 1)、2) 成立.

下面有几个一致收敛性判别法是对函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ 的.

3) 比较判别法

定理 12.2

设 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ 是 $\mathscr{F}(B,K)$ 的两个函数项级数，并且满足不等式：

$$|f_n(x)|\leqslant g_n(x), \forall x\in B, \forall n\in\mathbb{N}.$$

若 $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ 在 B 上一致收敛 (简单收敛)，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ 在 B 上也一致收敛 (简单收敛).

证明 由于 $\forall n,k\in\mathbb{N}, \forall x\in B$,

$$\begin{aligned}&|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+k}(x)|\\ \leqslant&|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+k}(x)|\\ \leqslant&g_{n+1}(x)+g_{n+2}(x)+\cdots+g_{n+k}(x),\end{aligned}$$

故定理的结论由上述函数项级数的 Cauchy 一致收敛准则或者数序列的 Cauchy 收敛准则推出.

推论 12.1 (Weierstrass 判别法)

设函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ 与正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 满足条件：

1. $|f_n(x)|\leqslant a_n, \forall x\in B, \forall n\in\mathbb{N}$,
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

则 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ 在 B 上一致收敛.

证明 在上述定理中取 $g_n=a_n$ 即可.

例题 12.6 考虑类似于例12.2的函数项级数

$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x}{(1+|x|)^n}$. 这里 $x\in B=\{x\in\mathbb{C}|\alpha\leqslant|x|\leqslant\beta\}(\alpha>0)$. 由于

$$\left|\frac{x}{(1+|x|)^n}\right|\leqslant\frac{|x|}{(1+|x|)^n}\leqslant\frac{\beta}{(1+\alpha)^n}, \forall x\in B, \forall n\in\mathbb{N},$$

而正项级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\beta}{(1+\alpha)^n}$ 收敛，故由 Weierstrass 判别法知，函数项级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x}{(1+|x|)^n}$ 在 B 上一致收敛.

与数项级数相似，对形如 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)v_n(x)$ 的函数项级数也有一致收敛性的 Abel 与 Dirichlet 两判别法.

4)Abel 判别法

定理 12.3 (Abel 判别法)

设 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$ 是 $\mathscr{F}(B,K)$ 的任一函数项级数，满足下述条件：

1. $\langle u_n\rangle$ 在 B 上一致有界 (即 $\exists M>0, \forall x\in B, \forall n\in\mathbb{N}, |u_n(x)|\leqslant M$)，并且 $\forall x\in B$，数序列 $\langle u_n(x)\rangle$ 是单调的.
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 在 B 上一致收敛，则函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$ 在 B 上一致收敛.

证明 证明的思想方法与数项级数的 Abel 判别法类似. 由于 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 在 B 上一致收敛，故

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n,k\in\mathbb{N}, n\geqslant N)(\forall x\in B)$$
$$\Longrightarrow |V_{n+k}(x)| = |v_{n+1}(x)+v_{n+2}(x)+\cdots+v_{n+k}(x)|<\varepsilon.$$

由此并根据 $\langle u_n(x)\rangle$ 的单调性推得：$\forall n,k\in\mathbb{N}, n\geqslant N, \forall x\in B$,

$$\begin{aligned}
&|u_{n+1}(x)v_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)v_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+k}(x)v_{n+k}(x)|\\
=&\,|\,u_{n+1}(x)V_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)\left(V_{n+2}(x)-V_{n+1}(x)\right)\\
&+\cdots+u_{n+k}(x)\left(V_{n+k}(x)-V_{n+k-1}(x)\right)|\\
=&\left|\sum_{i=1}^{k-1}\left(u_{n+i}(x)-u_{n+i+1}(x)\right)V_{n+i}(x)+u_{n+k}(x)V_{n+k}(x)\right|\\
\leqslant&\sum_{i=1}^{k-1}|u_{n+i}(x)-u_{n+i+1}(x)|\,|V_{n+i}(x)|+|u_{n+k}(x)|\,|V_{n+k}(x)|\\
<&\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{k-1}|u_{n+i}(x)-u_{n+i+1}(x)|+|u_{n+k}(x)|\right)\\
=&\varepsilon\left(|u_{n+1}(x)|+|u_{n+k}(x)|+|u_{n+k}(x)|\right)\\
<&3M\varepsilon.
\end{aligned}$$

由 Cauchy 一致收敛准则知，函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$ 在 B 上一致收敛.

例题 12.7 考虑函数项级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{nx}\right)^{nx}\frac{x^n}{1+x^n}, x\in(0,a], 0<a<1.$$

我们令

$$u_n(x)=\left(1+\frac{1}{nx}\right)^{nx}, v_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}.$$

则 $\langle u_n\rangle$ 在 $(0,a]$ 上以 3 为其一致上界. 并且 $\forall x \in (0,a]$, $\langle u_n(x)\rangle$ 是单调上升序列, 对 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$, 由于

$$|v_n(x)| = \left|\frac{x^n}{1+x^n}\right| \leqslant a^n, \forall x \in (0,a], \forall n \in \mathbb{N}$$

及正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a^n$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法知函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 在 $(0,a]$ 上一致收敛. 因此根据 Abel 判别法, 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)^{nx}\dfrac{x^n}{1+x^n}$ 在 $(0,a]$ 上一致收敛.

5) Dirichlet 判别法

定理 12.4 (Dirichlet 判别法)

设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$ 在 B 上满足下述条件:

1. $\langle u_n\rangle$ 是单调下降序列, 并且在 B 上一致收敛于 0.
2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 的部分和序列 $\langle V_n\rangle$ 在 B 上一致有界. 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$ 在 B 上一致收敛.

证明 证明思想方法也与数项级数的 Dirichlet 判别法类似. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 的部分和序列 $\langle V_n\rangle$ 在 B 上一致有界, 所以

$$(\exists M>0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in B) \Longrightarrow |V_n(x)| \leqslant M.$$

因为 $\langle u_n\rangle$ 在 B 上一致收敛于 0, 所以

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N)(\forall x \in B) \Longrightarrow |u_n(x)|<\varepsilon.$$

从而 $\forall n,k \in \mathbb{N}, n \geqslant N, \forall x \in B$, 我们有

$$\begin{aligned}
&|\, u_{n+1}(x)v_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)v_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+k}(x)v_{n+k}(x)\,| \\
=&\left|\sum_{i=1}^{k-1}\left(u_{n+i}(x)-u_{n+i+1}(x)\right)V_{n+i}(x)+u_{n+k}(x)V_{n+k}(x)\right| \\
\leqslant&\sum_{i=1}^{k-1}\left|u_{n+i}(x)-u_{n+i+1}(x)\right|\left|V_{n+i}(x)\right|+\left|u_{n+k}(x)\right|\left|V_{n+k}(x)\right| \\
<&M\left(\left|u_{n+1}(x)\right|+2\left|u_{n+k}(x)\right|\right)<3M\varepsilon.
\end{aligned}$$

根据 Cauchy 一致收敛准则知, 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$ 在 B 上一致收敛.

例题 12.8 设 $\langle a_n\rangle$ 是任一单调下降收敛于 0 的实数序列. 证明函数项级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, |z| \leqslant 1-\delta (0<\delta<1)$$

在复平面 $\mathbb{C}$ 的闭圆盘 $\bar{B}(0,1-\delta)$ 上是一致收敛的.

事实上，级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ 的前 n 项之和 V_n 的模

$$|V_n(z)| = \left|\frac{1-z^n}{1-z}\right| \leqslant \frac{2}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{\delta}(\forall z \in \bar{B}(0,1-\delta)).$$

从而 $\langle V_n\rangle$ 在 $\bar{B}(0,1-\delta)$ 上一致有界. 根据 Dirichlet 判别法，级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 在 $\bar{B}(0,1-\delta)$ 上一致收敛.

6) 一致收敛的 Dini 定理

定理 12.5 (Dini 定理)

设 B 是度量空间 (X,d) 的一紧集，$\langle f_n\rangle$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n\right)$ 是 $C^0(B,\mathbb{R})$ 的一函数项序列 (函数项级数)，满足下述条件：

1. $\langle f_n\rangle$ 是单调序列 $(g_n \geqslant 0. \forall n \in \mathbb{N})$,
2. $\langle f_n\rangle$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n\right)$ 在 B 上简单收敛于 $f \in C^0(B,\mathbb{R})$ $\left(g \in C^0(B,\mathbb{R})\right)$.

则函数项序列 $\langle f_n\rangle$(函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n$) 在 B 上一致收敛于 $f(g)$.

证明 由于对函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n, g_n \geqslant 0$, 故它的部分和序列 $\langle G_n\rangle$ 是单调上升序列，$G_n \in C^0(B,\mathbb{R}), \langle G_n\rangle$ 在 B 上简单收敛于 $g \in C^0(B,\mathbb{R})$. 而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n$ 在 B 上一致收敛于 g 当且仅当 $\langle G_n\rangle$ 在 B 上一致收敛于 g. 因此，若能证明 Dini 定理对函数项序列 $\langle f_n\rangle$ 成立，则换 f_n 为 G_n, 即表明 Dini 定理对函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n$ 成立.

下面我们就来证明函数序列的情形.

$\forall n \in \mathbb{N}$, 令 $F_n = f_n - f$. 则连续函数序列 $\langle F_n\rangle$ 在 B 上简单收敛于 0 . 因此下面找们只需证明 $\langle F_n\rangle$ 在 B 上一致收敛于 0 .

首先，不失一般性，我们可以假设 $\langle f_n\rangle$ 是单调下降序列 (即 $\forall x \in B, \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$). 由于 $\{f_n\}$ 在 B 上简单收敛于 f, 故

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \geqslant f \text{ 或 } \forall n \in \mathbb{N}, F_n \geqslant 0.$$

我们证明：

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N)(\forall x \in B) \Longrightarrow 0 \leqslant F_n(x) < \varepsilon.$$

为此，$\forall n \in \mathbb{N}$ 令

$$B_n = \{x \in B \mid F_n(x) \geqslant \varepsilon\}.$$

由于 $\langle F_n\rangle$ 是单调下降序列，故 $B_{n+1} \subset B_n(\forall n \in \mathbb{N})$.

另一方面，由于 F_n 在 B 上连续，故 B_n 是 B 的一个闭集. 若 $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \neq \varnothing$, 则根据定理 10.22 知，它们的交集 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \neq \varnothing$.

设 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. 于是 $\lim_{n\to+\infty} F_n(x_0) = 0$, 从而存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $0 \leqslant F_N(x_0) < \varepsilon$. 此即表明 $x_0 \notin B_N$, 这与 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ 相矛盾. 因此必然存在某一个 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $B_{n_0} = \varnothing$, 从而 $\forall n \geqslant n_0, B_n = \varnothing$. 此即等价于:

$$(\forall n \geqslant n_0)(\forall x \in B) \Longrightarrow 0 \leqslant F_n(x) < \varepsilon.$$

因此 $\langle F_n \rangle$ 在 B 上一致收敛于 0 .

例题 12.9 考虑在 $B = [-1, 1]$ 上由下述递推关系式所定义的函数序列 $\langle f_n \rangle$:

$$f_0 = 0, f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\left[x^2 - f_n^2(x)\right], \forall x \in B, n \geqslant 0.$$

证明: $\langle f_n \rangle$ 在 $[-1, 1]$ 上一致收敛.

首先由归纳法可证, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n 是关于 x^2 的多项式. 因此 f_n 是 $[-1, 1]$ 上的连续函数, 并且是偶函数. 于是我们可以只限于在 $[0, 1]$ 区间上讨论.

下面我们来证明 $\langle f_n \rangle$ 是单调上升序列.

因为 $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{2}[x^2 - f_n^2(x)](\forall n \geqslant 0)$, 所以我们只需证明:

$$\forall n \geqslant 0, \forall x \in [0, 1], 0 \leqslant f_n(x) \leqslant x. \tag{12.2}$$

用归纳法证明. 当 $n = 0$, 式(12.2)显然成立. 假设当 $n = k$ 时式(12.2)成立. 我们证明当 $n = k + 1$ 时式(12.2)仍然成立.

由假设 $0 \leqslant f_k(x) \leqslant x, \forall x \in [0, 1]$, 故

$$f_{k+1}(x) = f_k(x) + \frac{1}{2}\left[x^2 - f_k^2(x)\right] \geqslant 0, \forall x \in [0, 1],$$

并且

$$\begin{aligned} x - f_{k+1}(x) &= x - f_k(x) - \frac{1}{2}\left[x^2 - f_k^2(x)\right] \\ &= [x - f_k(x)]\left[1 - \frac{1}{2}(x + f_k(x))\right] \\ &\geqslant [x - f_k(x)](1 - x) \geqslant 0, \forall x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

所以 $0 \leqslant f_{k+1}(x) \leqslant x, \forall x \in [0, 1]$. 由归纳法知, $\forall n \geqslant 0$, 不等式(12.2)成立.

既然 $\forall x \in [0, 1], \langle f_n(x) \rangle$ 是单调上升有界实数序列, 故 $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ 存在, 定义函数 $\bar{f} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ 如下:

$$\forall x \in [0, 1], \bar{f}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

现在我们在等式 $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\left[x^2 - f_n^2(x)\right]$ 中令 $n \to +\infty$ 得到 $\bar{f}^2(x) = x^2$. 由于 $f_n(x) \geqslant 0$, 故 $\bar{f}(x) \geqslant 0$. 从而 $\bar{f}(x) = x, \forall x \in [0, 1]$.

由 f_n 的偶性知, $\forall x \in [-1, 0], \langle f_n(x) \rangle$ 收敛于 $|x|$. 因此函数序列 $\langle f_n \rangle$ 在 $[-1, 1]$ 上简单收敛于函数 $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. 这里

$$f(x) = \begin{cases} \bar{f}(x) = x, & \text{若 } x \in [0, 1]; \\ -x, & \text{若 } x \in [-1, 0]. \end{cases}$$

显然 $\langle f_n \rangle$ 的极限函数 f 在 $[-1, 1]$ 上连续. 根据上述 Dini 定理知, $\langle f_n \rangle$ 在 $[-1, 1]$ 上一致收敛于 f.

注 Dini 定理中集合 B 的紧性是十分重要的. 否则结论可以不成立.

为此我们考虑函数 $\langle f_n\rangle$, 这里

$$f_n(x)=x^n, x\in B=\big(0,1\big), n\in\mathbb{N}.$$

显然 $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n 在 $(0,1)$ 上连续, 它的极限函数 $f=0$ 也在 $(0,1)$ 上连续, 并且 $\langle f_n\rangle$ 是单调下降序列, 然而 $\langle f_n\rangle$ 在 $(0,1)$ 上并不一致收敛于 f, 其原因是集合 $B=(0,1)$ 不是紧集.

✍ 习 题 12.1

1. 设 $\langle f_n\rangle$ 是 $\mathscr{F}(B,K)$ 的任一函数项序列, $f\in\mathscr{F}(B,K), B_0\subset B$. 证明: $\langle f_n\rangle$ 在 B_0 上不一致收敛于 $f|_{B_0}$, 当且仅当

$$(\exists\varepsilon_0>0)\,(\forall n\in\mathbb{N})\,(\exists k_n\in\mathbb{N})\,\big(\exists x_{k_n}\in B_0\big)\Longrightarrow\big|f_{k_n}(x_{k_n})-f(x_{k_n})\big|\geqslant\varepsilon_0.$$

并利用此结论证明下述各函数项序列的不一致收敛性.

1) $f_n(x)=\dfrac{x^2+nx}{n}$, 则 $\langle f_n\rangle$ 在 $\mathbb{R}$ 上简单收敛于函数 $x\mapsto f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$, 但在 $\mathbb{R}$ 上不一致收敛于 f.

2) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x}$, 则 $\langle f_n\rangle$ 在 $\mathbb{R}$ 上简单收敛于 $f=0$; 在 $\mathbb{R}$ 上不一致收敛于 $f=0$; 但在 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上一致收敛于 0.

3) $f_n(x)=n^2x^2\mathrm{e}^{-nx}$, 则 $\langle f_n\rangle$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上简单收敛于 $f=0$; 在 $\mathbb{R}^+$ 上不一致收敛于 $f=0$; 但在 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上一致收敛于 $f=0$.

4) 设

$$f_n(x)=\begin{cases}n^2x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{n},\\ -n^2\left(x-\dfrac{2}{n}\right), & \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{n},\\ 0, & \dfrac{2}{n}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

则 $\langle f_n\rangle$ 在 $[0,1]$ 上简单收敛于 $f=0$, 但在 $[0,1]$ 上不一致收敛于 $f=0$.

2. 设 $f_n(x)=n^a x\mathrm{e}^{-nx}$, $x\in\mathbb{R}^+$, $a>0$.

1) 证明: $\langle f_n\rangle$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上简单收敛于 $f=0$.

2) 证明: $\langle f_n\rangle$ 在 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上一致收敛于 $f=0$.

3) 证明: $\langle f_n\rangle$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上一致收敛于 $f=0$ 当且仅当 $0\leqslant a<1$.

3. 设 $f\in C^n(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, 满足条件: $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 并且 $f\not\equiv 0$. 定义 $f_n, g_n:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 如下:

$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\quad f_n(x)=f(nx),\quad g_n(x)=f\left(\frac{x}{n}\right).$$

1) 证明: $\langle f_n\rangle,\langle g_n\rangle$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上简单收敛于 $h=0$; 但在 $\mathbb{R}^+$ 上不一致收敛于 $h=0$.

2) 证明: f 在 $\mathbb{R}^+$ 上有界.

3) 证明: $\forall a>0$, $\langle f_n\rangle$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛于 $h=0$, $\langle g_n\rangle$ 在 $[0,a]$ 上一致收敛于 $h=0$.

4) 由此推出 $\langle f_ng_n\rangle$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上一致收敛于 $h=0$.

4. 设 $a>0$, $f\in C^0([-a,a],\mathbb{R})$ 并且 $f(0)=0$, $|f(x)|<|x|$, $\forall x\neq 0$. 令 $f_1=f$, 并归纳地定义 $\langle f_n\rangle$ 为:

$$f_{n+1}=f\circ f_n=f_n\circ f.$$

试用反证法证明: $\langle f_n\rangle$ 在 $[-a,a]$ 上一致收敛于 0.

5. 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ 是 $\mathscr{F}(B,K)$ 的任一函数项级数. 证明：若 $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|$ 在 B 上一致收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ 在 B 上也一致收敛，反之结论不成立. 试考虑级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^n(1-x)$，$x \in [0,1]$.

6. 证明：函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{\sin\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\sqrt{n}}$ 在每一个有限闭区间 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 上一致收敛.

7. 证明：函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{n^\lambda(1+nx^2)} (\lambda > \dfrac{1}{2})$ 在任一有限区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上一致收敛，它在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛吗？

8. 考虑级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n(1-|z|)$，$z \in \mathbb{C}$. 设

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}, \quad B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}.$$

 1) 证明：级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n(1-|z|)$ 在 A 上简单收敛，在 B 上发散.
 2) 证明：级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n(1-|z|)$ 在 A 上不一致收敛.
 3) 证明：级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n(1-|z|)$ 在 $A_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r\}\ (0 < r < 1)$ 上一致收敛.

9. 设 $\langle a_n \rangle$ 是任一实数序列, 证明:
 1) 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx$，$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.
 2) 若 $\langle a_n \rangle$ 是正的下降序列，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛的充分必要条件是

$$na_n \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

10. 定义两个多项式函数序列 $\langle Q_n \rangle$ 与 $\langle P_n \rangle$ 如下：

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q_n(x) = \int_0^x (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t, P_n(x) = \int_0^x \frac{Q_n(t)}{Q_n(1)} \,\mathrm{d}t$$

 1) 证明：$Q_n(1) = \dfrac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \cdot \dfrac{1}{2n+1}$.
 2) 证明：$\displaystyle\int_0^1 [Q_n(1) - Q_n(t)] \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2(n+1)}$.
 3) 令 $a_n = 1 - P_n(1)\ (n \in \mathbb{N})$. 证明：$\langle a_n \rangle$ 收敛于 0.
 4) 证明：函数项序列 $\langle P_n \rangle$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于函数 $x \mapsto x$，$x \in [0,1]$，而在 $[-1,1]$ 上一致收敛于函数 $x \mapsto |x|$，$x \in [-1,1]$.

11. 设 $x_0, x_1, \ldots, x_m$ 是 $m+1$ 个实数，记 E 为次数不超过 m 的实系数多项式集合.
 1) $\forall i = 0,1,\ldots,m$，定义 $f_i : E \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\forall P \in E, f_i(P) = P^{(i)}(x_i)$$

证明：$\{f_0, f_1, \ldots, f_m\}$ 是 E 的一个对偶基.

2) 设 $\langle P_n \rangle$ 是 E 的元素的一序列，使得 $\forall i = 0, 1, \ldots, m$，$\left\langle P_n^{(i)}(x_i) \right\rangle$ 收敛. 证明：$\langle P_n \rangle$ 在 $\mathbb{R}$ 上简单收敛于 $\mathbb{Q} \in E$；在 $\mathbb{R}$ 的任一紧区间 $[a, b]$ 上是一致收敛的.

12.2 函数项序列与级数的性质

一个函数项序列或函数项级数一致收敛时，它的极限函数或和函数有许多重要的性质. 由于函数项级数的和函数就是它的部分和序列的极限函数，因此函数项序列的极限函数的性质与函数项级数的和函数的性质是完全对应的. 像 §1 一样，我们也把它们的相应性质表述在同一定理内，以便进行对比学习.

1. 极限 (和) 函数的取极限

定理 12.6

设 $\langle f_n \rangle$ 是 $\mathscr{F}(B, K)$ 的任一函数项序列. a 是 B 的一有限聚点，假设

1. $\langle f_n \rangle \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n \right)$ 在 B 上一致收敛于 $f : B \to K (S : B \to K)$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = a_n \in K$.

则 $\lim\limits_{x \to a} f(x) \left(\lim\limits_{x \to a} S(x) \right)$ 存在，并且

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} a_n.$$
$$\left(\lim_{x \to a} S(x) = \lim_{x \to a} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right).$$

证明 我们对函数项序列进行证明.

首先证明 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 存在.

因为 $\langle f_n \rangle$ 在 B 上一致收敛，所以

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N)(\forall x \in B) \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3. \tag{12.3}$$

又因为 $\lim\limits_{x \to a} f_N(x) = a_N$ 存在，故由 Cauchy 收敛准则知

$$(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in B, d(x, a) < \delta, d(y, a) < \delta) \Longrightarrow |f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon/3.$$

从而

$$\begin{aligned} &\forall x, y \in B, d(x, a) < \delta, d(y, a) < \delta \\ \Rightarrow &|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

于是由 Cauchy 收敛准则知，$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 存在，令其极限为 A

下面证明 $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = A$.

为此在式(12.3)中令 $x \to a$ 取极限，得到

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow |a_n - A| \leqslant \varepsilon/3 < \varepsilon.$$

此即表明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 或

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

对函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$, 由假设, 它的部分和

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), x \in B$$

在 B 上一致收敛, 并且 $\lim\limits_{x\to a} S_n(x)$ 存在, 从而由刚才所证之结论得到

$$\lim_{x\to a} S(x) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} S_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} S_n(x)\right),$$

或

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

这个定理告诉我们, 对函数项序列 $\langle f_n\rangle$, 当它一致收敛时, $x\to a$ 与 $n\to+\infty$ 这两个极限过程可交换; 对函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ 来说, 当它一致收敛时, 可以将 $x\to a$ 的极限过程移到求和符号 $\sum$ 的里面, 简称为可逐项求极限.

例题 12.10 考虑如下定义的函数序列 $\langle f_n\rangle$:

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n, & 0\leqslant x\leqslant \sqrt{n} \\ 0, & x\geqslant \sqrt{n} \end{cases}$$

试利用此序列 $\langle f_n\rangle$ 证明:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

为此, 我们定义函数 $F_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 如下:

$$\forall x\in[0,+\infty), F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$$

由此得到一新的函数序列 $\langle F_n\rangle$.

1) 证明: $\langle F_n\rangle$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

首先我们有

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-x^2}, \mathrm{e}^{-x^2} - \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \geqslant 0, \forall x\in[0,+\infty)$$

于是, $\forall a>0$,

若 $x\in[0,a]$: 则 $\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant a^2$, 有

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_0^x \left[\mathrm{e}^{-t^2} - f_n(t)\right]\mathrm{d}t &= \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\left[1-\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{e}^{t^2}\right]\mathrm{d}t \\ &\leqslant a\left[1-\left(1-\frac{a^2}{n}\right)^n \mathrm{e}^{a^2}\right] \\ &\triangleq \mu_n(a) \end{aligned}$$

若 $x\geqslant a$: 则我们有

$$0\leqslant \int_0^x \left[\mathrm{e}^{-t^2} - f_n(t)\right]\mathrm{d}t \leqslant \mu_n(a) + \int_a^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

总之，我们证明了：$\forall a>0, \forall x \in[0,+\infty), \forall n \geqslant a^{2}$,

$$0 \leqslant \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-t^{2}} \mathrm{d} t-F_{n}(x) \leqslant \mu_{n}(a)+\int_{a}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^{2}} \mathrm{d} t$$

另一方面，由于积分 $\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^{2}} \mathrm{d} t$ 收敛，故 $\forall \varepsilon>0$, 存在 $a_{0}>0$, 使得 $\int_{a_{0}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^{2}} \mathrm{d} t<\varepsilon / 2$. 而 $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} \mu_{n}\left(a_{0}\right)=0$, 故

$$\begin{aligned}
(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Longrightarrow & \mu_{n}\left(a_{0}\right)<\varepsilon / 2 \\
\Longrightarrow & 0 \leqslant \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-t^{2}} \mathrm{d} t-F_{n}(x) \\
& \leqslant \mu_{n}\left(a_{0}\right)+\int_{a_{0}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^{2}} \mathrm{d} t \\
& <\varepsilon / 2+\varepsilon / 2=\varepsilon(\forall x \in[0,+\infty)).
\end{aligned}$$

此即表明 $\langle F_{n}\rangle$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛并且

$$\lim _{n \rightarrow+\infty} F_{n}(x)=\int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-t^{2}} \mathrm{d} t$$

2) 证明：$\lim\limits_{x \rightarrow+\infty} F_{n}(x)=a_{n}$ 且 $\lim\limits_{n \rightarrow+\infty} a_{n}=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

事实上，由 f_{n} 的定义

$$\begin{aligned}
\lim _{x \rightarrow+\infty} F_{n}(x) &=\lim _{x \rightarrow+\infty} \int_{0}^{x} f_{n}(t) \mathrm{d} t \\
&=\int_{0}^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^{2}}{n}\right)^{n} \mathrm{d} t=a_{n}
\end{aligned}$$

作变换 $t=\sqrt{n} \sin \theta, \theta \in\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, 则

$$a_{n}=\sqrt{n} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos ^{2 n+1} \theta \mathrm{d} \theta(\forall n \in \mathbb{N})$$

由 Wallis 公式得到

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos ^{2 n+1} \theta \mathrm{d} \theta \sim \sqrt{\frac{\pi}{4 n}}(n \rightarrow+\infty)$$

或

$$\lim _{n \rightarrow+\infty} a_{n}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

最后由定理12.6推得

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^{2}} \mathrm{d} t=\lim _{x \rightarrow+\infty} \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-t^{2}} \mathrm{d} t &=\lim _{x \rightarrow+\infty}\left(\lim _{n \rightarrow+\infty} F_{n}(x)\right) \\
&=\lim _{n \rightarrow+\infty} a_{n}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.
\end{aligned}$$

2. 极限 (和) 函数的连续性

定理 12.7

设 $\langle f_{n}\rangle$ 是 $C^{0}(B, K)$ 的任一函数序列. 若 $\langle f_{n}\rangle\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_{n}\right)$ 在 B 上一致收敛于 $f: B \rightarrow K(S: B \rightarrow K)$, 则 $f(S) \in C^{0}(B,\ K)$.

证明 显然，我们也只需对函数序列的情形进行证明即可. 首先，由于 $\langle f_n \rangle$ 在 B 上一致收敛于 f, 故

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N)(\forall x \in B) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3.$$

现任取一点 $x_0 \in B$. 由于 f_N 在 B 上连续，故 f_N 在 x_0 处连续，从而

$$(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in B \cap B\,(x_0, \delta)) \Longrightarrow |f_N(x) - f_N\,(x_0)| < \varepsilon/3.$$

由此推得

$$\begin{aligned}\forall x \in B \cap B\,(x_0, \delta) \Longrightarrow |f(x) - f\,(x_0)| &\leqslant |f(x) - f_N(x)| + |\,f_N(x) - f_N\,(x_0)\,| + |f_N\,(x_0) - f\,(x_0)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon\end{aligned}$$

此即表明 f 在 x_0 处连续，再由 $x_0 \in B$ 的任意性知，f 在 B 上连续.

例题 12.11 考虑下述函数项级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}, x \in \mathbb{R}_*^+.$$

令 $f_n(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}, x \in \mathbb{R}_*^+$，则 $f_n \in C^0\left(\mathbb{R}_*^+, \mathbb{R}\right)$.

此函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ 在 $\mathbb{R}_*^+$ 上是简单收敛的. 因为

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < f_n(x) < \frac{1}{x n!},$$

而函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{x n!}$ 在 $\mathbb{R}_*^+$ 上简单收敛，所以由定理12.2的结论推知，$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ 在 $\mathbb{R}_*^+$ 上简单收敛. 记它的和函数为 f.

但是，由于 $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}f_{n-1}\left(\frac{1}{n!}\right) &= \frac{n!}{\left(\frac{1}{n!}+1\right)\left(\frac{1}{n!}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{n!}+n-1\right)} \\ &\geqslant \frac{n!}{(1+1)(1+2)\cdots(1+n-1)} = 1,\end{aligned}$$

故由 Cauchy 一致收敛准则知 ($f_n(x)$ 不一致收敛于 0)，级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ 在 $\mathbb{R}_*^+$ 上不一致收敛.

因此我们不能在 $\mathbb{R}_*^+$ 上运用定理12.7来判断和函数 f 在 $\mathbb{R}_*^+$ 上的连续性. 但是由于连续性是一个局部概念，我们可以先任取一点 $x_0 \in \mathbb{R}_*^+$ 及 $a > 0$, 使得 $x_0 \in (a, +\infty)$. 由于这时

$$\forall x \in [a, +\infty), 0 < f_n(x) < \frac{1}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)},$$

故由 D'Alembert 判别法推知正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{a(a+1)\cdots(a+n)}$ 收敛，从而由 Weierstrass 判别法知，函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致收敛. 于是由定理12.7，和函数 f 在 $[a, +\infty)$ 上连续. 特别 f 在 x_0 处连续. 再由 $x_0 \in \mathbb{R}_*^+$ 的任意性，即证得 f 在 $\mathbb{R}_*^+$ 上连续.

注 定理12.7不仅可以用来证明极限 (和) 函数在 B 上的连续性，而且它还有另一个功能：用连续函数序列 (级数) 的极限 (和) 函数在 B 上的不连续性推断函数序列 (级数) 在 B 上的不一致收敛性.

例题 12.12 在 §1 中我们考虑过的函数序列 $\langle f_n \rangle$：

$$f_n(x) = x^n, x \in [0,1](n \in \mathbb{N}).$$

这里每一个 $f_n \in C^0([0,1],\mathbb{R}), \langle f_n \rangle$ 的极限函数 $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ 为:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

由于 f 在 $x=1$ 处不连续，故由定理12.7知，$\langle f_n \rangle$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛于 f.

3. 极限 (和) 函数的可积性

定理 12.8

设 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 是一有限闭区间，$f_n \in C^0([a,b],K)(n \in \mathbb{N})$. 若 $\langle f_n \rangle \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $f:[a,b] \to K(S:[a,b] \to K)$, 则

1) 函数 $f(S)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

2)$\forall x \in [a,b]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^x \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \int_a^x S(t)\mathrm{d}t\right)$$

证明 先考虑函数项序列 $\langle f_n \rangle$.

首先由 f_n 在 $[a,b]$ 上连续，$\langle f_n \rangle$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f 知 f 在 $[a,b]$ 上连续. 因此 f 在 $[a,b]$ 上可积.

$\forall x \in [a,b]$, 令

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t, F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

则 F_n, F 在 $[a,b]$ 上完全有定义，并且

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F(x)| &= \left|\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_a^b \sup_{t \in [a,b]} |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

从而

$$|F_n(x) - F(x)| \leqslant (b-a) \sup_{t \in [a,b]} |f_n(t) - f(t)|. \tag{12.4}$$

由于 $\langle f_n \rangle$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f, 故 $\sup\limits_{t \in [a,b]} |f_n(t) - f(t)| \to 0(n \to +\infty)$, 因此

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = F(x), \forall x \in [a,b],$$

或

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_a^x \lim_{n \to +\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$$

现在对函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$. 令它的部分和

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \forall x \in [a,b].$$

于是 $S_n(\forall n \in \mathbb{N})$ 在 $[a,b]$ 上连续. 从而

$$\int_a^x S_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^x [f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t)]\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_a^x f_k(t)\mathrm{d}t \tag{12.5}$$

另一方面, 由于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S:[a,b] \to K$, 故 $\langle S_n \rangle$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 S. 从而由刚才对函数序列所证之结论, S 在 $[a,b]$ 上可积, 并且

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x S_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^x \lim_{n\to+\infty} S_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^x S(t)\mathrm{d}t$$

注意到等式(12.5), 并令 $n \to +\infty$, 即推得

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t = \int_a^x S(t)\mathrm{d}t$$

此定理表明, 对一致收敛的连续函数序列 $\langle f_n \rangle$ 可在积分号下取极限; 对一致收敛的连续函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ 来说就是可逐项求积分.

注 由定理12.8的证明过程中的不等式(12.4)可知, 函数项序列 $\langle F_n \rangle$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 F.

对函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ 也有类似的结论, 即

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^x S_n(t)\mathrm{d}t \xlongequal{\text{一致地}} \int_a^x S(t)\mathrm{d}t.$$

例题 12.13 证明如下定义的函数序列 $\langle f_n \rangle$:

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}, x \in [0,1]$$

在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

首先, 由于对 $x = 0$, $f_n(0) = 0, \forall x \in (0,1]$,

$$0 < f_n(x) < \frac{1}{nx}.$$

故 $\langle f_n \rangle$ 在 $[0,1]$ 上简单收敛于 $f = 0$. 于是

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$$

另一方面, 因为 f_n 在 $[0,1]$ 上连续, 所以在 $[0,1]$ 上可积, 直接计算得到

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2n} \left[\log\left(1 + n2^n x^2\right)\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{2n} \log\left(1 + n2^n\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} \log\left(1 + n2^n\right) = \frac{\log 2}{2}$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$$

根据定理12.8知, 序列 $\langle f_n \rangle$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

4. 极限 (和) 函数的可导性

定理 12.9

设 $[a,b]\subset\mathbb{R}$, $f_n\in C^1([a,b],\mathbb{R})$, $(\forall n\in\mathbb{N})$, 并且满足下述条件:

1. 存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0)=y_0\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)=y_0\right)$,
2. $\langle f_n'\rangle\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n'\right)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $g:[a,b]\to\mathbb{R}(h:[a,b]\to\mathbb{R})$,

则

1. $\langle f_n\rangle\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n\right)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数

$$x\longmapsto f(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b]$$

$$\left(x\longmapsto S(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} h(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b]\right).$$

2. $f(S)$ 在 $[a,b]$ 上是 C^1 类的, 并且 $f'=g\ (S'=h)$, 即

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)'=\lim_{n\to+\infty} f_n'(x),\ \forall x\in[a,b].$$

$$\left(\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x),\ \forall x\in[a,b]\right).$$

证明 首先对函数项序列进行证明.

因为 f_n' 在 $[a,b]$ 上连续, 所以 f_n' 在 $[a,b]$ 上可积, $\forall x\in[a,b]$, 令

$$g_n(x)=\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\mathrm{d}t$$

由此得一函数序列 $\langle g_n\rangle$. 由假设 $\langle f_n'\rangle$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 g 及定理12.8的附注知, $\langle g_n\rangle$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数

$$x\longmapsto\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b].$$

另一方面, 由于 $\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\mathrm{d}t=f_n(x)-f_n(x_0)$, 故

$$f_n(x)=f_n(x_0)+g_n(x),\ \forall x\in[a,b].$$

两边令 $n\to+\infty$, 由 $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0)=y_0$ 即知 $\langle f_n\rangle$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $x\longmapsto f(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b]$.

最后, 由于 g 连续, 故 f 在 $[a,b]$ 上是 C^1 类的, 并且

$$\forall x\in[a,b],\ f'(x)=g(x)\ 或\ \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)'=\lim_{n\to+\infty} f_n'(x).$$

现在对函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$, 令

$$S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)$$
$$h_n(x)=\int_{x_0}^{x} S_n'(t)\mathrm{d}t$$

则

$$S_n'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+\cdots+f_n'(x),$$
$$S_n(x)=S_n\left(x_0\right)+h_n(x).$$

由于 $\langle S_n\left(x_0\right)\rangle$ 收敛于 y_0, $\langle S_n'\rangle$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 h, 故由刚才对函数序列所证之结论知, $\langle S_n\rangle$ 也即 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数

$$x\longmapsto S(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} h(t)\mathrm{d}t,$$

并且 $S'(x)=h(x), \forall x\in[a,b]$. 此即表明 S 在 $[a,b]$ 上是 C^1 类的, 并且

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x), \forall x\in[a,b].$$

这个定理简单地说就是对函数项序列 $\langle f_n\rangle$ 求导运算与 $n\to+\infty$ 的极限运算可交换；而对函数项级数可逐项求导.

例题 12.14 考虑函数项序列 $\langle f_n\rangle$, 这里

$$f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}, x\in[-1,1].$$

显然 $f_n\in C^1([-1,1],\mathbb{R}), (\forall n\in\mathbb{N})$, 并月 $\langle f_n\rangle$ 在 $[-1,1]$ 上简单收敛于函数 $x\longmapsto f(x)=|x|, x\in[-1,1]$. 然而 f 在 $x=0$ 处不可导. 之所以出现这种情形, 是因为导函数序列 $\langle f_n'\rangle$ 在 $[-1,1]$ 上不一致收敛. 事实上, 直接计算 f_n' 得到

$$\forall x\in[-1,1], f_n'(x)=\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right)'=\frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}},$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x)=g(x)=\begin{cases}-1, & -1\leqslant x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

由于 g 在 $x=0$ 处不连续, 故由定理12.7知, $\langle f_n'\rangle$ 在 $[-1,1]$ 上不一致收敛.

由此可知, 定理12.9中导函数序列 $\langle f_n'\rangle$ 的一致收敛性对保证 $\langle f_n\rangle$ 的极限函数的可导性是十分重要的. 当然 $\langle f_n'\rangle$ 的一致收敛性只是定理 12.9的充分条件而不是必要条件.

例题 12.15 考虑如下的函数项级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}, x\in[-a,a](0<a<1).$$

令 $f_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \forall x\in[-a,a]$, 则 f_n 在 $[-a,a]$ 上是 C^1 类的, 并且

$$\left|f'(x)\right|=|x|^n\leqslant a^n.$$

由于级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n$ 收敛，故由 Weierstrass 判别法知，函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'$ 在 $[-a,a]$ 上一致收敛．因为 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(0)=0$, 所以根据定理12.9知，函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ 的和函数 S 在 $[-a,a]$ 上是 C^1 类的，并且

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$

从而

$$S(x)=\int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\log(1-x), \forall x\in[-a,a].$$

作为函数项序列与级数理论的一个重要应用，我们给出一个例子.

5. 处处连续处处不可导函数的例子

最早构造处处连续而又处处不可导的函数的是德国数学家 Weierstrass，这个函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是用函数项级数如下定义的：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cdot\cos(b^n\pi x)$$

其中 $0<a<1, b$ 为正的奇数, 使得: $ab>1+\frac{3}{2}\pi$. 我们来证明: $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 但在任一点不可导.

证明 由于 $|a^n\cdot\cos(b^n\pi x)|<a^n$, 且 $0<a<1$ 时级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法, 函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n\cdot\cos(b^n\pi x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛. 由于 $f(x)$ 中的每一项 $a^n\cos(b^n\pi x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

下面证明: 对 $\forall x_0\in R$, 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 不存在. 首先, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\frac{\cos[b^n\pi(x+h)]-\cos[b^n\pi x]}{h}\\&=\left(\sum_{n=0}^{m-1}+\sum_{n=m}^{\infty}\right)\triangleq S_m+R_m.\end{aligned}$$

因为

$$|\cos[b^n\pi(x+h)]-\cos[b^n\pi x]|=|b^n\pi h\cdot\sin[b^n\pi(x+\theta h)]|\leqslant b^n\pi|h|,$$

其中 $0<\theta<1$. 所以

$$|S_m|\leqslant\sum_{n=0}^{m-1}\pi a^n\cdot b^n=\pi\frac{1-a^mb^m}{1-ab}<\pi\cdot\frac{a^mb^m}{ab-1}.$$

其次, 我们来求 R_m 的一个下限. 为此, 记 $b^mx=\alpha_m+\zeta_m$, 其中 α_m 为整数, 而 $-\frac{1}{2}\leqslant\zeta_m<\frac{1}{2}$. 令 $h=\frac{1-\zeta_m}{b^m}$, 则 $0<h\leqslant\frac{3}{2b^m}$ 及 $b^n\pi(x+h)=b^{n-m}\cdot b^m\pi(x+h)=b^{n-m}\pi(\alpha_m+1)$. 由于 b 是奇数, 所以

$$\cos[b^n\pi(x+h)]=\cos[b^{n-m}\pi(\alpha_m+1)]=(-1)^{\alpha_m+1}$$

又因为

$$\begin{aligned}\cos\left(b^{n}\pi x\right)&=\cos\left(b^{n-m}\pi\left(\alpha_{m}+\zeta_{m}\right)\right)=\cos\left(b^{n-m}\pi\alpha_{m}\right)\cos\left(b^{n-m}\pi\zeta_{m}\right)\\&=(-1)^{\alpha_{m}}\cdot\cos\left(b^{n-m}\pi\zeta_{m}\right),\end{aligned}$$

所以

$$R_{m}=\frac{(-1)^{\alpha_{m}+1}}{h}\sum_{n=m}^{\infty}a^{n}(1+\cos(b^{n-m}\pi\zeta_{m})).$$

由于上式右端的级数的每一项都是正的, 故若只取第一项, 便

$$|R_{m}|>\frac{a^{m}}{|h|}>\frac{2}{3}a^{m}b^{m}$$

若 $ab>1+\dfrac{3}{2}\pi$, 则上式括号为正数； 故当 $m\to+\infty,h\to0$ 时, 上述不等式右方趋于无穷. 所以 f 在 x 处不可导.

另一个例子是由 Vande Warden(荷兰数学家) 构造的, 即

$$\forall x\in\mathbb{R},v(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{10^{n}}g\left(10^{n}x\right),$$

这里 $g(y)$ 表示 y 与最接近 y 的整数之间的距离.

这两个用函数项级数构造的例子的一个共同不足之处, 就是函数 f 与 v 的几何图形不直观. 这对认识它的处处不可导性缺乏形象思维.

下面我们介绍发表在《美国数学月刊》Vol. 98. No5, May 1991 上由 Katsuura 用函数项序列 $\langle f_{n}\rangle$ 的极限函数 f 构造的处处连续处处不可导的函数的例子. 由于这里每一个函数 f_{n} 的几何图形十分清楚, 故它的极限函数 f 的图形也就非常好理解. 这对我们认识 f 的处处不可导性有很大的帮助. 当然这个例子本身还有其他的一些有趣的性质.

在 $\mathbb{R}^{2}$ 上任取一个基本度量 d_{i}, 令 $X=[0,1]\times[0,1]$. 在 X 上定义三个映射 $w_{1},w_{2},w_{3}:X\to X$ 如下：

$$\begin{aligned}\forall(x,y)\in X,w_{1}(x,y)&=\left(\frac{x}{3},\frac{2y}{3}\right),\\w_{2}(x,y)&=\left(\frac{2-x}{3},\frac{1+y}{3}\right),\\w_{3}(x,y)&=\left(\frac{2+x}{3},\frac{1+2y}{3}\right).\end{aligned}$$

显然这三个映射都是压缩映射, 它们的象集 $w_{1}(X),w_{2}(X),w_{3}(X)$ 如下图所示.

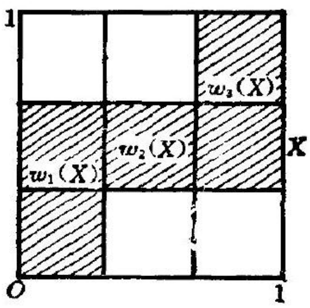


图 12.3

我们用 $\mathscr{F}$ 表示 X 中所有非空紧集的集合，并定义映射 $w:\mathscr{F}\to\mathscr{F}$ 如下：

$$\forall A\in\mathscr{F}, w(A)=w_1(A)\bigcup w_2(A)\bigcup w_3(A)$$

(这个定义是有意义的，因为 w_i 连续，故 $w_i(A)\subset X$ 是紧的，从而 $w(A)=w_1(A)\cup w_2(A)\cup w_3(A)$ 为紧集).

令

$$\Delta_0=\{(x,x)\in X\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}, \Delta_n=w\left(\Delta_{n-1}\right)(n\in\mathbb{N}).$$

下面我们来研究 $\Delta_n(n=0,1,2,\cdots)$. Δ_0 可以看作恒等映射 $x\longmapsto f_0(x)=x, x\in[0,1]$ 的图形，

$\Delta_1=w\left(\Delta_0\right)=w_1\left(\Delta_0\right)\cup w_2\left(\Delta_0\right)\cup w_3\left(\Delta_0\right), \forall(x,x)\in\Delta_0,$

$$w_1(x,x)\triangleq(\tilde{x},\tilde{y})=\left(\frac{x}{3},\frac{2x}{3}\right)\Longrightarrow 2\tilde{x}-\tilde{y}=0$$

$$w_2(x,x)\triangleq(\tilde{x},\tilde{y})=\left(\frac{2-x}{3},\frac{1+x}{3}\right)\Longrightarrow \tilde{x}+\tilde{y}-1=0$$

$$w_3(x,x)\triangleq(\tilde{x},\tilde{y})=\left(\frac{2+x}{3},\frac{1+2x}{3}\right)\Longrightarrow 2\tilde{x}-\tilde{y}-1=0$$

因此 Δ_1 是如下定义的函数 $f_1:[0,1]\to[0,1]$ 的图形：

$$f_1(x)=\begin{cases}2x, & 若\ x\in\left[0,\dfrac{1}{3}\right],\\ -x+1, & 若\ x\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right],\\ 2x-1, & 若\ x\in\left[\dfrac{2}{3},1\right].\end{cases}$$

显然 $\Delta_1=\mathrm{Gr}\left(f_1\right)$ 是由三条直线段组成的一条折线 (如图12.4所示)，f_1 是逐段线性的连续函数.

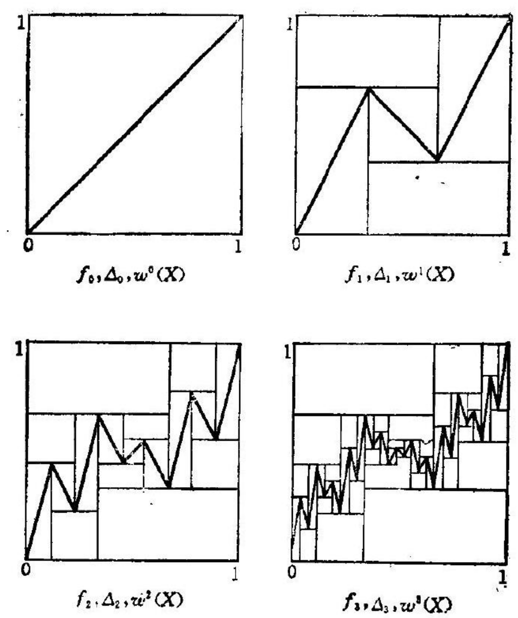


图 12.4

不难用归纳法证明，Δ_n 是由 3^n 条直线段组成的一条折线. 因此，它是 3^n 个线性函数构成的逐段

线性的连续函数 $f_n : [0,1] \to [0,1]$ 的图形.

由此我们得到定义在 $[0,1]$ 上的一连续函数序列 $\langle f_n \rangle$.

图12.4中画出的是函数 f_0, f_1, f_2, f_3 的图形. 由此不难看出任意 f_n 的大致形状.

由于 $\forall n \in \mathbb{N}, w^n(X)$ 是 3^n 个高度 $\leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 的长方形的并, 并且. $\forall k \in \mathbb{N}, \Delta_{n+k} \subset w^{n+k}(X) \subset w^n(X)$, 故

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

此即表明连续函数序列 $\langle f_n \rangle$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. 令其极限函数为 $f : [0,1] \to [0,1]$, 则 f 在 $[0,1]$ 上连续.

下面我们来证明 f 在 $[0,1]$ 上处处不可导.

为此证明三个引理. 首先令

$$T_n = \left\{ \frac{k}{3^n} \,\middle|\, 0 \leqslant k \leqslant 3^n, k \in \mathbb{Z} \right\}, T = \bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n.$$

引理 12.1

设 $\langle x_n \rangle$ 与 $\langle x_n' \rangle$ 是 T 中的两个点序列, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$,
1) $x_n, x_n' \in T_n$, 2) $x_n' - x_n = \dfrac{1}{3^n}$, 3) 或 $x_n = x_{n+1}$ 或 $x_n' = x_{n+1}'$, 则

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{f(x_n') - f(x_n)}{x_n' - x_n} \right| = +\infty.$$

证明 我们证明

$$\left| \frac{f(x_n') - f(x_n)}{x_n' - x_n} \right| \geqslant 2^{n-1} (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{12.6}$$

对 n 用数学归纳法证明. 首先我们注意到, 若 $x \in T_n$, 则 $f(x) = f_n(x)$.

设 $n = 1$, 则

$$\frac{f(x_1') - f(x_1)}{x_1' - x_1} = \begin{cases} \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2 & \text{若 } (x_1, x_1') = \left(0, \dfrac{1}{3}\right) \text{ 或 } (x_1, x_1') = \left(\dfrac{2}{3}, 1\right), \\ \dfrac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = -1, & \text{若 } (x_1, x_1') = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right), \end{cases}$$

$$\left| \frac{f(x_1') - f(x_1)}{x_1' - x_1} \right| \geqslant 1, \text{结论 (12.6) 成立.}$$

现假设 $n = k > 1$ 时式(12.6)成立, 即 $\left|f(x_k') - f(x_k)\right| \geqslant 2^{k-1} \left|x'_k - x_k\right|$, 则当 $x_k = x_{k+1}$ 时 (如图12.5所示, 这意味着从第 k 级到 $k+1$ 级时, 左端点不变, 右端点变化. 这对应在构造中取第一个三份区间, 即 w_1 作用的那一段))

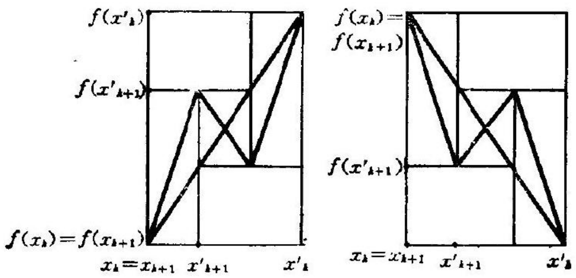


图 12.5

$$\left|\frac{f\left(x'_{k+1}\right)-f\left(x_{k+1}\right)}{x'_{k+1}-x_{k+1}}\right|=\frac{\frac{2}{3}\left|f\left(x'_k\right)-f\left(x_k\right)\right|}{\frac{1}{3}\left|x'_k-x_k\right|}$$
$$\geqslant 2\cdot 2^{k-1}\frac{\left|x'_k-x_k\right|}{\left|x'_k-x_k\right|}=2^{(k+1)-1}.$$

同理可证当 $x'_k=x'_{k+1}$ 时式(12.6)成立.

因此式(12.6)对 $n=k+1$ 时成立，从而式(12.6)对任意的 $n\in\mathbb{N}$ 成立，根据式(12.6)立即推得

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{f\left(x'_n\right)-f\left(x_n\right)}{x'_n-x_n}\right|=+\infty.$$

引理 12.2

设 $\langle x_n\rangle$ 与 $\langle x'_n\rangle$ 是 T 中的两个点序列，使得

1. $x_n,x'_n\in T_n,(\forall n\in\mathbb{N})$,
2. $x'_n-x_n=\dfrac{1}{3^n}(\forall n\in\mathbb{N})$
3. 对无限多个 $n,x_n\neq x_{n+1},x'_n\neq x'_{n+1}$.

则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f\left(x'_n\right)-f\left(x_n\right)}{x'_n-x_n}\text{ 不存在.}$$

证明 首先我们证明

$$\left|\frac{f\left(x'_n\right)-f\left(x_n\right)}{x'_n-x_n}\right|\geqslant 1(\forall n\in\mathbb{N}).\tag{12.7}$$

仍然对 n 用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时，由引理12.1知，式(12.7)成立.

现假设式(12.7)对 $n=k$ 时成立. 那么对 $n=k+1$ 时，

若 $x_k=x_{k+1}$ 或 $x'_k=x'_{k+1}$，则重复引理12.1的证明，

$$\left|\frac{f\left(x'_{k+1}\right)-f\left(x_{k+1}\right)}{x'_{k+1}-x_{k+1}}\right|=\frac{\frac{2}{3}\left|f\left(x'_k\right)-f\left(x_k\right)\right|}{\frac{1}{3}\left|x'_k-x_k\right|}\geqslant 2\cdot 1>1$$

若 $x_k\neq x_{k+1},x'_k\neq x'_{k+1}$，则如图12.6所示，我们有

$$\left|\frac{f\left(x'_{k+1}\right)-f\left(x_{k+1}\right)}{x'_{k+1}-x_{k+1}}\right|=\frac{\frac{1}{3}\left|f\left(x'_k\right)-f\left(x_k\right)\right|}{\frac{1}{3}\left|x'_k-x_k\right|}\geqslant 1$$

因此式(12.7)对 $n=k+1$ 时成立. 从而式(12.7)对任意的 $n\in\mathbb{N}$ 成立.

由假设, 存在无限多个 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $x_n\neq x_{n+1}$ 且 $x_n'\neq x_{n+1}'$(如图12.6所示). 则对这些 n, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{f\left(x_{n+1}'\right)-f\left(x_{n+1}\right)}{x_{n+1}'-x_{n+1}}&=\frac{-\frac{1}{3}[f\left(x_n'\right)-f\left(x_n\right)]}{\frac{1}{3}\left(x_n'-x_n\right)}\\&=-\frac{f\left(x_n'\right)-f\left(x_n\right)}{x_n'-x_n}.\end{aligned}$$

如果极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f\left(x_n'\right)-f\left(x_n\right)}{x_n'-x_n}=A\in\mathbb{R}$, 则在上述等式中令 $n\to+\infty$ 得到

$$A=-A\Rightarrow A=0.$$

这与式(12.7)矛盾, 故引理结论成立.

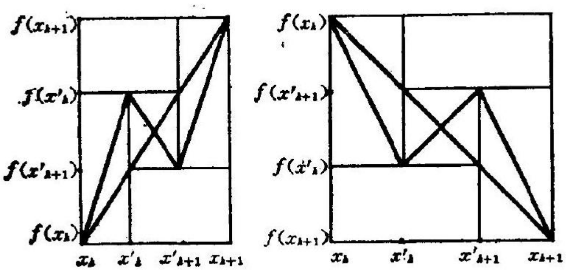


图 12.6

引理 12.3

设函数 $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ 在 $x_0\in(0,1)$ 处可导, $x_n,x_n'\in[0,1]$, 并且 $0<x_n<x_0<x_n'<1(n\in\mathbb{N})$ 使得 $x_n\to x_0,x_n'\to x_0(n\to+\infty)$, 则

$$h'\left(x_0\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{h\left(x_n'\right)-h\left(x_n\right)}{x_n'-x_n}.$$

证明 因为 h 在 x_0 处可导, 故存在函数 $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ 使得 φ 在 x_0 处连续, 并且

$$h(x)-h\left(x_0\right)=\varphi(x)\left(x-x_0\right),\forall x\in[0,1],$$

$$\varphi\left(x_0\right)=h'\left(x_0\right).$$

令 $\varphi(x)=h'\left(x_0\right)+\varepsilon(x)$, 则 $\varepsilon(x)\to0\left(x\to x_0\right)$. 于是

$$\begin{aligned}h\left(x_n\right)-h\left(x_0\right)&=\varphi\left(x_n\right)\left(x_n-x_0\right)\\&=\left[h'\left(x_0\right)+\varepsilon\left(x_n\right)\right]\left(x_n-x_0\right),\\h\left(x_n'\right)-h\left(x_0\right)&=\varphi\left(x_n'\right)\left(x_n'-x_0\right)\\&=\left[h'\left(x_0\right)+\varepsilon\left(x_n'\right)\right]\left(x_n'-x_0\right),\end{aligned}$$

两式相减并除以 $x_n'-x_n$ 得

$$\frac{h\left(x_n'\right)-h\left(x_n\right)}{x_n'-x_n}=h'\left(x_0\right)+\varepsilon\left(x_n'\right)\frac{x_n'-x_0}{x_n'-x_n}-\varepsilon\left(x_n\right)\frac{x_n-x_0}{x_n'-x_n}.$$

由于 $\left|\dfrac{x_n'-x_0}{x_n'-x_n}\right|\leqslant1,\left|\dfrac{x_n-x_0}{x_n'-x_n}\right|\leqslant1$, 及 $\varepsilon\left(x_n'\right)\to0,\varepsilon\left(x_n\right)\to0(n\to+\infty)$, 故

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{h\left(x_n'\right)-h\left(x_n\right)}{x_n'-x_n}=h'\left(x_0\right).$$

现在我们来证明 f 的处处不可导性.

任取一点 $x \in [0,1]$. 若 $x \in T_k$, 则 $\forall n \in \mathbb{N}$, 令

$$x_{n+k} = x, x'_{n+k} = x + \frac{1}{3^{n+k}}.$$

于是 $x_{n+k} = x_{n+1+k}, x'_{n+k} - x_{n+k} = \dfrac{1}{3^{n+k}} (\forall n \in \mathbb{N})$. 根据引理12.1, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left| \dfrac{f\left(x'_{n+k}\right) - f\left(x_{n+k}\right)}{x'_{n+k} - x_{n+k}} \right| = +\infty$, 从而由引理12.3知 f 在 x 处不可导.

若 $\forall k \in \mathbb{N}, x \notin T_k$. 则存在 T 中的两个点序列 $\langle x_n \rangle$ 与 $\langle x'_n \rangle$ 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$ 有

1) $x_n, x'_n \in T_n$,2) $x'_n - x_n = \dfrac{1}{3^n}$,3) $x_n < x < x'_n$.

于是由引理12.1、12.2知, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f\left(x'_n\right) - f\left(x_n\right)}{x'_n - x_n}$ 不存在. 从而由引理12.3知, f 在 x 处不可导.

习题 12.2

1. 设 $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, $x \in [0,2]$, 试问 $\langle f_n \rangle$ 在 $[0,2]$ 上一致收敛吗?
2. 构造一个定义在 $[0,1]$ 上的函数序列 $\langle f_n \rangle$ 使得
   1) f_n 在 $[0,1]$ 上处处不连续,
   2) $\langle f_n \rangle$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于一连续函数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
3. 考虑函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$, $x \in \mathbb{R}^+$.
   1) 证明：此级数在 $\mathbb{R}^+$ 上一致收敛.
   2) 利用 Wallis 公式计算数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 的和.
   3) 证明：$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right) = \log\frac{2}{\pi}$.
4. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是一区间, $f_n \in C^0(I, \mathbb{R})$. 假设
   1) $\langle f_n \rangle$ 在 I 上一致收敛于 $f : I \to \mathbb{R}$,
   2) 存在 I 的一点序列 $\langle x_n \rangle$ 使得 $x_n \to x_0 \in I$. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x_0)$.
5. 考虑函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$, $x \in [0,1]$.
   1) 证明：此级数在 $[0,1]$ 上不一致收敛.
   2) $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right) \mathrm{d}x$.
6. 设 $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$.
   1) 证明：$\langle f_n \rangle$ 在 $[0,1]$ 上简单收敛于 $f = 0$.
   2) $\langle f_n \rangle$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 f 吗?
   3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ 吗?
7. 证明可积性定理12.8的下述推广：

   设函数 $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上可积 $(\forall n \in \mathbb{N})$, 并且 $\langle f_n \rangle$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. 证明：f 在 $[a,b]$ 上可积, 并且

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

8. 设 $f_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$，$x\in[0,1]$.
   1) 证明：$\langle f_n\rangle$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 f.
   2) 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)\neq f'(x)\ (x\in[0,1])$，为什么？
9. 设 $f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx^2}$，$x\in\mathbb{R}$，$n\in\mathbb{N}$.
   1) 确定 $\langle f_n\rangle$ 与 $\langle f_n'\rangle$ 的极限函数 f 与 g.
   2) 证明：$\forall x\in\mathbb{R}$，$f'(x)$ 存在，$f'(0)\neq g(0)$，找出满足 $f'(x)=g(x)$ 的点 x.
   3) $\langle f_n\rangle$ 在怎样的区间 I 上一致收敛于 f，$\langle f_n'\rangle$ 又在怎样的区间 J 上一致收敛于 g.
10. 令 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^x}$，$x\in(1,+\infty)$.
    1) 证明：ζ 在 $(1,+\infty)$ 有定义，ζ 称为 Riemann-ζ 函数.
    2) 证明：ζ 函数在 $(1,+\infty)$ 上连续并且可导,
$$\zeta'(x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log n}{n^x},\forall x\in(1,+\infty).$$
11. 证明：函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2n}\cosh(nx)$ 在 $[0,1]$ 上是一致收敛的，其和函数在 $[0,1]$ 上是 C^∞ 类的.
12. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+x}$，$x\in\mathbb{R}_*^+$.
    1) 研究 f 的可定义性、连续性及可导性.
    2) 找出 $f(x)$ 与 $f(x+1)$ 之间的关系.
    3) 证明：$\forall x\in\mathbb{R}_*^+$，$f(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$.
13. 考虑函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n$，这里
$$f_n(x)=\arctan(n+x)-\arctan n,x\in\mathbb{R}.$$
    1) 证明：$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n'$ 在 $\mathbb{R}$ 上简单收敛，在 $\mathbb{R}$ 的任一有界区间 I 上一致收敛.
    2) 设 $f=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n$，证明：
$$f(x+1)=f(x)+\frac{\pi}{2}-\arctan x,x\in\mathbb{R}.$$
14. 设 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n$ 是定义在 $[0,1]$ 上的一函数项级数，满足下述条件：
$$\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)=1,\sum_{n=0}^{+\infty}|f_n(x)|=A>0,\forall x\in[0,1].$$
    1) 证明：对任一有界实或复数序列 $\langle a_n\rangle$，函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nf_n$ 在 $[0,1]$ 上简单且绝对收敛.
    2) 证明下述两个结论等价：
       a) $\forall n\in\mathbb{N}$，$\lim\limits_{x\to1^-}f_n(x)=0$,

b) 对任一收敛序列 $\langle a_n\rangle$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

15. 设函数 $f:[-a,a]\to\mathbb{R}\ (a>0)$ 连续, 并且存在常数 $M>0$ 使得 $|f(x)|\leqslant M|x|$, $\forall x\in[-a,a]$.

1) 证明：函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ 在 $[-a,a]$ 上一致收敛, 令其和函数为 g.

2) 证明：g 满足下述函数方程

$$g(x)-g\left(\frac{x}{2}\right)=f(x), \forall x\in[-a,a].$$

3) 证明：不存在别的函数 h, 它满足 2) 的方程, 在 0 处连续, 并且 $h(0)=0$.

4) 证明：若 f 在 $[-a,a]$ 上有有界导数, 则和函数 g 在 $[-a,a]$ 上可导.

16. 证明：

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^n\sin(\pi x)\mathrm{d}x.$$

17. $\forall a\in\mathbb{R}$, 记 a 与 $\mathbb{N}$ 的距离为 $\langle a\rangle$. 设 $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[0,1],\ f_n(t)=10^{-n}\langle 10^n t\rangle.$$

1) 证明：函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 并且其和函数 (称为 Van der Waerden 函数) f 在 $[0,1]$ 上连续.

2) 证明：和函数 f 在 $[0,1]$ 上处处不可导.

12.3 等度连续函数族

1. 问题的提出

我们知道, 如果 $\langle a_n\rangle$ 是一有界实数序列, 那么由 Bolzano-Weierstrass 定理可知, $\langle a_n\rangle$ 一定有一个收敛的子序列 $\langle a_{k_n}\rangle$ 存在. 现在假设 $\langle f_n\rangle$ 是定义在 B 上的任一函数序列 (B 为度量空间 (X,d) 的一子集), 我们提出以下两个问题：

1. 若 $\forall x\in B$, 数序列 $\langle f_n(x)\rangle$ 都是有界的, 函数序列 $\{f_n\}$ 是否有简单收敛的子序列 $\langle f_{k_n}\rangle$?
2. 若函数序列 $\langle f_n\rangle$ 简单收敛, $\langle f_n\rangle$ 是否有在 B 上一致收敛的子序列 $\langle f_{k_n}\rangle$?

这两个问题没有非常一般的肯定回答. 为此让我们来看两个例子. 第一个例子需要用到如下的特殊情形的 Lebesgue 控制收敛定理.

定理 12.10 (Lebesgue 控制收敛定理)

设 $[a,b]$ 是一个有限区间, $\{h_n\}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的一列函数. 如果满足：

1. 简单收敛：

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x)=0,\quad \forall x\in[a,b]$$

2. 一致有界：存在常数 $M>0$, 使得对所有 n 和所有 $x\in[a,b]$, 有

$$|h_n(x)|\leqslant M$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x=0.$$

证明 用反证法. 假设 $\lim_{n\to\infty}\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x=0$ 不成立. 那么, 存在某个 $\varepsilon_0>0$, 以及一个子列 $\{h_{n_k}\}$(为简便起见, 我们仍记作 $\{h_n\}$), 使得

$$\left|\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x\right|\geqslant\varepsilon_0,\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

由于 h_n 简单趋于 0, 我们可以通过考虑 $-h_n$ 如果需要的话, 不妨假设对无穷多个 n 有

$$\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x\geqslant\varepsilon_0.$$

(否则, 如果积分总是 $\leqslant-\varepsilon_0$, 可类似处理.) 因此, 我们假设存在子列（仍记作 $\{h_n\}$）满足:

$$\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x\geqslant\varepsilon_0>0,\tag{12.8}$$

因为 $h_n(x)\to 0$ 对每个 x 成立, 由极限定义, 对任意固定的 $m\in\mathbb{N}$, 对每个 x, 存在 $N_x\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geqslant N_x$ 时, $|h_n(x)|<\dfrac{1}{m}$.

我们定义集合:

$$E_{n,m}=\left\{x\in[a,b]\mid |h_k(x)|<\frac{1}{m}\text{ 对所有 }k\geqslant n\right\}.$$

即 $E_{n,m}$ 是那些从第 n 项开始函数值一直小于 $1/m$ 的点的集合. 显然 $E_{n,m}\subset E_{n+1,m}$, 并且因为简单收敛, 对每个固定的 m, 有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{n,m}=[a,b]$$

对每个固定的 m,

$$\lim_{n\to\infty}|E_{n,m}|=b-a$$

其中 $|E|$ 表示集合 E 的长度. 因此, 对任意 $\delta>0$, 存在 N_m 使得当 $n\geqslant N_m$ 时,

$$|E_{n,m}|>b-a-\delta$$

现在取 $\delta=\dfrac{\varepsilon_0}{4M}$, 并取 m 足够大使得 $\dfrac{b-a}{m}<\dfrac{\varepsilon_0}{4}$. 取 $n\geqslant N_m$, 将积分区间分成两部分:

$$\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x=\int_{E_{n,m}}h_n(x)dx+\int_{[a,b]\setminus E_{n,m}}h_n(x)\mathrm{d}x$$

在 $E_{n,m}$ 上, 由定义有 $|h_n(x)|<\dfrac{1}{m}$, 所以

$$\left|\int_{E_{n,m}}h_n(x)dx\right|\leqslant\frac{1}{m}\cdot|E_{n,m}|\leqslant\frac{1}{m}\cdot(b-a)<\frac{\varepsilon_0}{4}.$$

在 $[a,b]\setminus E_{n,m}$ 上, 这个余集的长度 $<\delta=\dfrac{\varepsilon_0}{4M}$, 并且 $|h_n(x)|\leqslant M$, 所以

$$\left|\int_{[a,b]\setminus E_{n,m}}h_n(x)dx\right|\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon_0}{4M}=\frac{\varepsilon_0}{4}.$$

因此,

$$\left|\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{4}+\frac{\varepsilon_0}{4}=\frac{\varepsilon_0}{2}$$

但这与(12.8) 式 $\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \varepsilon_0$ 矛盾.

例题 12.16 考虑如下定义的函数序列 $\langle f_n \rangle$：

$$f_n(x) = \sin nx, \forall x \in [0, 2\pi], n \in \mathbb{N}.$$

证明：$\langle f_n \rangle$ 不存在任何的简单收敛的子序列.

事实上，如果 $\langle f_n \rangle$ 存在某一个在 $[0, 2\pi]$ 上简单收敛的子序列 $\langle f_{k_n} \rangle$, 那么

$$\lim_{n\to+\infty} (\sin k_n x - \sin k_{n+1} x) = 0, \forall x \in [0, 2\pi].$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty} (\sin k_n x - \sin k_{n+1} x)^2 = 0.$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理，下述等式成立：

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} (\sin k_n x - \sin k_{n+1} x)^2 \,\mathrm{d}x \\ =& \int_0^{2\pi} \lim_{n\to+\infty} (\sin k_n x - \sin k_{n+1} x)^2 \,\mathrm{d}x = 0 \end{aligned}$$

但是直接计算积分 $\int_0^{2\pi} (\sin k_n x - \sin k_{n+1} x)^2 \,\mathrm{d}x$ 得到

$$\int_0^{2\pi} (\sin k_n x - \sin k_{n+1} x)^2 \,\mathrm{d}x = 2\pi$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} (\sin k_n x - \sin k_{n+1} x)^2 \,\mathrm{d}x = 2\pi$$

这与上述等式相矛盾. 因此 $\langle f_n \rangle$ 不存在任何在 $[0, 2\pi]$ 上简单收敛的子序列 $\langle f_{k_n} \rangle$.

例题 12.17 考虑函数序列 $\langle f_n \rangle$, 这里

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}, \forall x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}.$$

$\langle f_n \rangle$ 在 $[0, 1]$ 上简单收敛于 $f = 0$. 由于

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2},$$

所以任何子列 f_{n_k} 在 $x_k = \dfrac{1}{n_k}$ 处都有

$$f_{n_k}(x_k) = \frac{1}{2}$$

而极限函数 $f(x) \equiv 0$, 所以

$$\left|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)\right| = \frac{1}{2}$$

因此

$$\left\| f_{n_k} - f \right\|_\infty \geqslant \frac{1}{2}$$

所以没有任何子列能一致收敛到 f. 故 $\langle f_n \rangle$ 不存在任何在 $[0, 1]$ 上一致收敛的子序列.

下面我们就来研究使上述两个问题有肯定回答的充分条件.

2. 简单收敛子序列的存在性

定理 12.11

设定义在 B 上的函数序列 $\langle f_n\rangle$ 满足下述条件：

1. B 是一可数集.
2. $\forall x \in B$, 数序列 $\langle f_n(x)\rangle$ 有界. 则 $\langle f_n\rangle$ 一定有一个在 B 上简单收敛的子序列存在.

证明 设 $B=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$.

对 x_1, 序列 $\langle f_n(x_1)\rangle$ 有界，由 Bolzano-Weierstrass 定理知，存在 $\langle n\rangle$ 的一个子序列 $\left\langle k_n^{(1)}\right\rangle$ 使得子序列 $\left\langle f_{k_n^{(1)}}(x_1)\right\rangle$ 收敛.

对 x_2, 由于序列 $\left\langle f_{k_n^{(1)}}(x_2)\right\rangle$ 也是有界的，故由 Bolzano-Weierstrass 定理知，从 $\left\langle k_n^{(1)}\right\rangle$ 中又可以选出一个子序列 $\left\langle k_n^{(2)}\right\rangle$ 使得

i)$\left\langle f_{k_n^{(2)}}(x_2)\right\rangle$ 收敛.

ii)$\left\langle f_{k_n^{(2)}}(x_1)\right\rangle$ 是 $\left\langle f_{k_n^{(1)}}(x_1)\right\rangle$ 的子序列，因而也收敛.

如此无限地继续下去，我们得到 $\langle n\rangle$ 的一列子序列 $\left\langle k_n^{(i)}\right\rangle(i=1,2,\cdots\cdots)$ 使得

i)$\forall i\in\mathbb{N}$, $\left\langle k_n^{(i+1)}\right\rangle$ 是 $\left\langle k_n^{(i)}\right\rangle$ 的子序列.

ii)$\forall i\in\mathbb{N}$, $\left\langle f_{k_n^{(i)}}(x_i)\right\rangle$ 收敛，并且序列 $\left\langle f_{k_n^{(i)}}(x_1)\right\rangle, \left\langle f_{k_n^{(i)}}(x_2)\right\rangle,\cdots\cdots,\left\langle f_{k_n^{(i)}}(x_{i-1})\right\rangle$ 都是收敛的.

现在我们从下列序列族

$$
\begin{aligned}
&f_{k_1^{(1)}}(x_1), f_{k_2^{(1)}}(x_1), f_{k_3^{(1)}}(x_1),\cdots, f_{k_n^{(1)}}(x_1),\cdots\\
&f_{k_1^{(2)}}(x_2), f_{k_2^{(2)}}(x_2), f_{k_3^{(2)}}(x_2),\cdots, f_{k_n^{(2)}}(x_2),\cdots\\
&f_{k_1^{(3)}}(x_3), f_{k_2^{(3)}}(x_3), f_{k_3^{(3)}}(x_3),\cdots, f_{k_n^{(3)}}(x_3),\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_{k_1^{(n)}}(x_n), f_{k_2^{(n)}}(x_n), f_{k_3^{(n)}}(x_n),\cdots, f_{k_n^{(n)}}(x_n),\cdots
\end{aligned}
$$

中按主对角线选出 $\langle f_n\rangle$ 的一个子序列 $\left\langle f_{k_n^{(n)}}\right\rangle$ 来. 固定 x_i, 我们来看序列 $f_{k_1^{(1)}}(x_i), f_{k_2^{(2)}}(x_i), f_{k_3^{(3)}}(x_i),\cdots$, 它的前 $i-1$ 项我们不管. 但对于 $n\geqslant i$ 项 $f_{k_n^{(n)}}(x_i)$ 实际上是来自第 i 层序列 $k_1^{(i)},k_2^{(i)},\cdots$, 并且是严格递增的索引, 所以从第 i 项以后序列就是第 i 层中某个收敛序列的子序列, 从而必然收敛. 由于这对每个 $x_i\in B$ 都成立，子序列 $\left\langle f_{k_n^{(n)}}\right\rangle$ 在 B 上简单收敛.

3. 等度连续函数族

定义 12.5

设 B 是度量空间 (X,d) 的任一非空集合. $\mathscr{F}(B,\mathbb{C})$ 表示从 B 到 $\mathbb{C}$ 上的 $\mathbb{C}$ 值函数组成的集合, $\mathscr{B}\subset\mathscr{F}(B,\mathbb{C})$ 是任一非空子集.

1. 我们称 $\mathscr{B}$ 在 B 上是一致有界的，如果
$$(\exists M>0)(\forall f\in\mathscr{B})(\forall x\in B)\Longrightarrow |f(x)|\leqslant M.$$
2. 我们称 $\mathscr{B}$ 在 B 上是等度连续的，如果
$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x,y\in B, d(x,y)<\delta)(\forall f\in\mathscr{B})\Longrightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

从等度连续族的定义可知，若 $\mathscr{B}$ 是一个等度连续族，则 $\forall f\in\mathscr{B}$, f 在 B 上是一致连续的，但反之

不然.

例题 12.18 考虑函数族

$$\mathscr{B}=\left\{f_n\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\,\middle|\,f_n(x)=\frac{1}{n}\sin nx\ ,x\in\mathbb{R}\right\}.$$

$\forall f_n\in\mathscr{B}$, 由于

$$|f_n(x)|=\left|\frac{1}{n}\sin nx\right|\leqslant 1,\forall x\in\mathbb{R}.$$

故 $\mathscr{B}$ 是在 $\mathbb{R}$ 上一致有界的.

其次, $\forall x,y\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_n(y)|&=\left|\frac{1}{n}\sin nx-\frac{1}{n}\sin ny\right|\\&=\frac{2}{n}\left|\cos\frac{n(x+y)}{2}\sin\frac{n(x-y)}{2}\right|\\&\leqslant|x-y|\end{aligned}$$

故 $\mathscr{B}$ 在 $\mathbb{R}$ 上又是等度连续的.

例题 12.19 考虑函数族

$$\mathscr{B}=\{f_n\in\mathscr{F}([0,2\pi],\mathbb{R})\mid f_n(x)=\sin nx,x\in[0,2\pi]\}.$$

因为 $\forall f_n\in\mathscr{B}$,

$$|f_n(x)|=|\sin nx|\leqslant 1,\forall x\in[0,2\pi],$$

所以 $\mathscr{B}$ 在 $[0,2\pi]$ 上是一致有界的.

现设 $x,y\in[0,2\pi]$. 对每个固定的 n 由

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_n(y)|&=|\sin nx-\sin ny|\\&=\left|2\cos\frac{n(x+y)}{2}\sin\frac{n(x-y)}{2}\right|\\&\leqslant n|x-y|\end{aligned}$$

知, f_n 在 $[0,2\pi]$ 上是一致连续的. 注意即使 $|x-y|$ 很小, $n|x-y|$ 也可能很大, 等度连续是指

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall n,\forall x,y\in[0,2\pi],|x-y|<\delta\Longrightarrow|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon.$$

在例12.20 中我们将证明 $\mathscr{B}$ 在 $[0,2\pi]$ 上不是等度连续的.

定理 12.12

设 B 是度量空间 (X,d) 的任一紧集, $\langle f_n\rangle$ 是定义在 B 上的任一连续函数序列, 若 $\langle f_n\rangle$ 在 B 上一致收敛, 则 $\langle f_n\rangle$ 在 B 上一致有界并且等度连续.

证明 设 $\langle f_n\rangle$ 的极限函数为 f. 根据定理 12.7知, f 在 B 上连续. 由于 B 是紧集, 故存在常数 $M_1>0$, 使得

$$|f(x)|\leqslant M_1,\forall x\in B.$$

另一方面, 又因为 $\langle f_n\rangle$ 在 B 上一致收敛于 f, 所以

$$\sup_{x\in B}|f_n(x)-f(x)|\to 0(n\to+\infty).$$

从而存在 $M_2>0$ 使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{x\in B}|f_n(x)-f(x)|\leqslant M_2.$$

因此 $\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in B$, 我们有

$$|f_n(x)|\leqslant|f_n(x)-f(x)|+|f(x)|\leqslant M_2+M_1,$$

此即表明 $\langle f_n\rangle$ 在 B 上一致有界.

下面证明 $\langle f_n\rangle$ 的等度连续性. 我们由 $\langle f_n\rangle$ 的一致收敛性得到

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N)(\forall x\in B)\Longrightarrow|f_n(x)-f_N(x)|<\varepsilon/3$$

对于函数 $f_1,f_2,\cdots,f_N$, 由它们在 B 上的连续性知, 它们在 B 上一致连续, 从而

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x,y\in B,d(x,y)<\delta)\Longrightarrow|f_i(x)-f_i(y)|<\varepsilon/3,$$

这里 $i=1,2,\cdots,N$.

现在 $\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N,\forall x,y\in B$ 且 $d(x,y)<\delta$, 我们有

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_n(y)|\leqslant&|f_n(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|\\&+|f_N(y)-f_n(y)|<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon.\end{aligned}$$

综合上述讨论知, $\langle f_n\rangle$ 在 B 上是等度连续的.

下面我们来回答本节开头提出的第二个问题.

4. 一致收敛子序列的存在性

定理 12.13 (Ascoli-Arzela 定理)

设 B 是度量空间 (X,d) 的任一紧集, $\langle f_n\rangle$ 是定义在 B 上的任一连续函数序列, 并且满足下述条件:

1. $\forall x\in B,\langle f_n(x)\rangle$ 是有界序列.
2. $\langle f_n\rangle$ 在 B 上是等度连续的.

则 $\langle f_n\rangle$ 在 B 上一致有界, 并且从 $\langle f_n\rangle$ 中可以选出一个一致收敛的子序列:

证明 1) 证明 $\langle f_n\rangle$ 在 B 上一致有界.

事实上, 由于 $\langle f_n\rangle$ 在 B 上等度连续, 故由定义知,

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x,y\in B,d(x,y)<\delta)(\forall n\in\mathbb{N})\Longrightarrow|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon/3.$$

此即等价于

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in B,\forall y\in B\cap B(x,\delta)\Longrightarrow|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon/3\tag{12.9}$$

由于 B 是紧集, 并且 $B\subset\bigcup\limits_{x\in B}B(x,\delta)$, 故存在有限个点 $x_1,x_2,\cdots,x_m\in B$ 使得 $B\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m}B\left(x_i,\delta\right)$. 于是 $\forall x\in B$, 存在 x_p 使得 $x\in B\left(x_p,\delta\right)$. 从而由式(12.9)得

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},|f_n(x)|\leqslant&\left|f_n(x)-f_n\left(x_p\right)\right|+\left|f_n\left(x_p\right)\right|\\<&\varepsilon/3+\left|f_n\left(x_p\right)\right|.\end{aligned}$$

另一方面, 由假设 $\langle f_n\left(x_i\right)\rangle\ (i=1,2,\cdots,m)$ 都是有界序列, 故存在常数 $M>0$, 使得

$$\left|f_n\left(x_i\right)\right|\leqslant M,\forall n\in\mathbb{N},\forall i=1,2,\cdots,m.$$

因此最后我们得到

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in B, |f_n(x)| < \varepsilon/3 + M.$$

此即表明 $\langle f_n \rangle$ 在 B 上一致有界.

2) 证明 $\langle f_n \rangle$ 存在一个一致收敛的子序列.

事实上, 由定理 10.18 知, 紧集 B 有可数稠密子集 F. 于是根据定理12.11 $\langle f_n \rangle$ 在 F 上有简单收敛的子序列 $\langle f_{k_n} \rangle$.

另一方面, 由 1) 中所证式(12.9)得到

$$B = \bigcup_{i=1}^{m} B \cap B(x_i, \delta), \text{且 } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in B \cap B(x_i, \delta)$$
$$\Longrightarrow \left| f_{k_n}(x) - f_{k_n}(x_i) \right| < \varepsilon/3.$$

现在对 $i = 1, 2, \cdots, m$, 由子序列 $\langle f_{k_n}(x_i) \rangle$ 的收敛性知, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$(\forall n, l \in \mathbb{N}, n, l \geqslant N)(\forall i = 1, 2, \cdots, m) \Longrightarrow \left| f_{k_n}(x_i) - f_{k_l}(x_i) \right| < \varepsilon/3.$$

因此

$$\forall n, l \geqslant N, \forall x \in B \Longrightarrow \left| f_{k_n}(x) - f_{k_l}(x) \right| \leqslant \left| f_{k_n}(x) - f_{k_n}(x_i) \right| + \left| f_{k_n}(x_i) - f_{k_l}(x_i) \right| + \left| f_{k_l}(x_i) - f_{k_l}(x) \right|$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

此即表明 $\langle f_{k_n} \rangle$ 在 B 上一致收敛.

例题 12.20 在上面的例 12.19中我们曾指出函数族

$$\mathscr{B} = \{f_n \in \mathscr{F}([0, 2\pi], \mathbb{R}) \mid f_n(x) = \sin nx, x \in \mathbb{R}\}$$

在 $[0, 2\pi]$ 上不是等度连续的, 现在我们可以来证明这个结论了.

用反证法, 如果 $\mathscr{B}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上是等度连续的, 则由 $\mathscr{B}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的一致有界性及定理12.13知 $\mathscr{B} = \langle f_n \rangle$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有一致收敛的子序列 $\langle f_{k_n} \rangle$. 这与我们在例12.16中证明的 $\langle f_n \rangle$ 不存在任何简单收敛的子序列的结论相矛盾. 因此 $\mathscr{B}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上不是等度连续的.

习 题 12.3

1. 设 I 是任一指标集, $\mathscr{F} = \{f_\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}\}_{\alpha \in I}$ 是由可导函数组成的函数族. 假设 $\{f'_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 一致有界. 证明: $\mathscr{F}$ 在 $[a, b]$ 上是等度连续的.
2. 设 $\langle f_n \rangle$ 是定义在 $[a, b]$ 上的一列连续函数, f_n 在 (a, b) 上可导, 并且存在 $M > 0$ 使得

$$\forall x \in (a, b), \ \forall n \in \mathbb{N}, |f'_n(x)| \leqslant M.$$

证明: 若 $\langle f_n \rangle$ 简单收敛, 则 $\langle f_n \rangle$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

3. 设 E 是 $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ 的一有限维向量子空间,

$$\forall f \in E, \text{令 } \|f\| = \left(\int_0^1 f^2(x) \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}},$$

设 $f_n \in E$, 并且 $\|f_n\| \leqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1) 证明: (f_n) 有在 $[0, 1]$ 上一致收敛的子序列.

2) 证明: 若 E 是无限维时, 1) 的结论可以不成立. 考虑 $g_n(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

4. 设 (X, d) 是任一紧度量空间, 在 $C^0(X, \mathbb{R})$ 上取一致收敛度量 ρ:

$$\forall f, g \in C^0(X, \mathbb{R}), \rho(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

令 $\mathscr{F} \subset C^0(X,\mathbb{R})$ 是任一非空集合.

1) 证明：若 $\mathscr{F}$ 是等度连续的，则 $\overline{\mathscr{F}}$ 也是等度连续的.
2) 证明：$\overline{\mathscr{F}}$ 是紧的充分必要条件是：$\mathscr{F}$ 是等度连续的，并且 $\forall x \in X$，$\{f(x) \mid f \in \mathscr{F}\}$ 是有界集.

12.4 Stone-Weierstrass 定理

设 (X,d) 是任一紧度量空间. 令 $K=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. $C^0(X,K)$ 表示所有定义在 X 上的连续函数的集合.

$$\forall f \in C^0(X,K), \text{记 } \|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

我们完全可以仿照对 $C^0([a,b],\mathbb{R})$ 的证明方法，证明：

i) 如上定义的 $\|\cdot\|$ 是向量空间 $C^0(X,K)$ 的一范数，
ii) $\left(C^0(X,K),\|\cdot\|\right)$ 是一完备的赋范向量空间.

这一节我们研究的内容就是寻求判断空间 $\left(C^0(X,K),\|\cdot\|\right)$ 的子集为稠密子集的判别准则.

以下为书写简单起见，我们简记 $\left(C^0(X,K),\|\cdot\|\right)$ 为 $C^0(X,K)$. 首先我们介绍下面的定理.

1. 实 Stone-Weierstrass 定理

引理 12.4

设 $\mathscr{B} \subset C^0(X,\mathbb{R})$. 它具有下述性质：

1. 若 $u,v\in\mathscr{B}$，则 $\max(u,v),\min(u,v)\in\mathscr{B}$.
2. 若 $x,y\in X,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$(若 $x=y$，则 $\alpha=\beta$) 则存在 $h\in\mathscr{B}$ 使得

$$h(x)=\alpha, h(y)=\beta.$$

那么 $\mathscr{B}$ 是 $C^0(X,\mathbb{R})$ 的稠密子集.

证明 为了证明 $\mathscr{B}$ 在 $C^0(X,\mathbb{R})$ 中的稠密性，我们只需证明：

$$\left(\forall f\in C^0(X,\mathbb{R})\right)(\forall\varepsilon>0)(\exists g\in\mathscr{B}) \Longrightarrow \|f-g\|<\varepsilon. \tag{12.10}$$

首先我们证明：

$$(\forall x_0\in X)(\exists v\in\mathscr{B}) \Longrightarrow v(x_0)=f(x_0), f-\frac{\varepsilon}{2}<v.$$

为此设 $y\in X$. 令 $\alpha=f(x_0),\beta=f(y)$. 由假设知，存在 $u_y\in\mathscr{B}$ 使得

$$u_y(x_0)=f(x_0), u_y(y)=f(y).$$

令

$$V_y=\left\{x\in X \mid u_y(x)>f(x)-\varepsilon/2\right\},$$

因为 $y\in V_y$, 所以 $V_y\neq\varnothing$, 并且 V_y 是开集. 于是 $X=\bigcup_{y\in X}V_y$. 由于 (X,d) 是紧空间，故存在有限多个 $y_1,y_2,\cdots,y_m\in X$ 使得 $X=\bigcup_{i=1}^{m}V_{y_i}$.

设 $v=\max\left(u_{y_1},u_{y_2},\cdots,u_{y_m}\right)$. 由性质 1) 知，$v\in\mathscr{B}$.

由于 $\forall i=1,2,\cdots,m, u_{y_i}(x_0)=f(x_0)$, 故 $v(x_0)=f(x_0)$. 现设 $x\in X$, 于是存在 i 使得 $x\in V_{y_i}$, 并且

$$v(x)\geqslant u_{y_i}(x)>f(x)-\varepsilon/2.$$

下面我们来证明结论(12.10).

$\forall x \in X$, 根据上述构造，我们得到一个 $v_x \in \mathscr{B}$ 使得

$$v_x(x) = f(x), v_x > f - \varepsilon/2.$$

令

$$U_x = \{z \in X \mid v_x(z) < f(z) + \varepsilon/2\}.$$

因为 $x \in U_x$, 所以 $U_x \neq \varnothing$, 并且 U_x 是 X 的开集. 由 $X = \bigcup\limits_{x \in X} U_x$ 及 (X,d) 的紧性知，存在有限个 $x_1, x_2, \cdots, x_k \in X$ 使得

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}.$$

令 $g = \min\left(v_{x_1}, v_{x_2}, \cdots, v_{x_k}\right)$. 则 $g \in \mathscr{B}$, 并且由于 $u_{x_i} > f - \varepsilon/2$ 知 $g \geqslant f - \varepsilon/2$.

现在设 $x \in X$. 于是存在 j 使得 $x \in U_{x_j}$, 从而 $g(x) \leqslant v_{x_j}(x) < f(x) + \varepsilon/2$, 故 $g < f + \varepsilon/2$.

因此 $f - \varepsilon/2 \leqslant g \leqslant f + \varepsilon/2$, 从而 $\|f - g\| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$.

定理 12.14 (Stone-Weierstrass 定理)

设 $\mathscr{B} \subset C^0(X,\mathbb{R})$. 它具有下述性质:

1. 所有常值函数属于 $\mathscr{B}$.
2. 若 $u, v \in \mathscr{B}$, 则 $u + v \in \mathscr{B}, uv \in \mathscr{B}$.
3. 若 $x, y \in X, x \neq y$, 则存在 $u \in \mathscr{B}$ 使得 $u(x) \neq u(y)$.

则 $\mathscr{B}$ 是 $C^0(X,\mathbb{R})$ 的稠密子集.

证明 我们证明 $\mathscr{B}$ 在 $C^0(X,\mathbb{R})$ 中的闭包 $\overline{\mathscr{B}}$ 具有上述引理所指的性质. 从而 $\mathscr{B} = C^0(X,\mathbb{R})$, 此即表明 $\mathscr{B}$ 是 $C^0(X,\mathbb{R})$ 的稠密子集.

我们分三步证明:

1) 证明: $\forall u, v \in \overline{\mathscr{B}}, u + v \in \overline{\mathscr{B}}, uv \in \overline{\mathscr{B}}$.

设 $u_n, v_n \in \mathscr{B}(n \in \mathbb{N})$ 使得 $\|u_n - u\| \to 0, \|v_n - v\| \to 0(n \to +\infty)$, 由

$$\|(u_n + v_n) - (u + v)\| \leqslant \|u_n - u\| + \|v_n - v\|$$

$$\begin{aligned}\|u_n v_n - uv\| &\leqslant \|u_n v_n - u_n v\| + \|u_n v - uv\| \\ &= \|u_n\| \, \|v_n - v\| + \|v\| \, \|u_n - u\| \\ &\leqslant (\|u\| + \|u_n - u\|) \, \|v_n - v\| + \|v\| \, \|u_n - u\|\end{aligned}$$

推知 $\|(u_n + v_n) - (u + v)\| \to 0, \|u_n v_n - uv\| \to 0(n \to +\infty)$, 从而 $u + v \in \overline{\mathscr{B}}, uv \in \overline{\mathscr{B}}$.

由所证之结论我们推出: $\forall C_0, C_1, \cdots, C_n \in \mathbb{R}, \forall u \in \overline{\mathscr{B}}$, 关于 u 的多项式 $P_n(u)$

$$P_n(u) = C_0 + C_1 u + C_2 u^2 + \cdots + C_n u^n \in \overline{\mathscr{B}}.$$

2) 证明: $\forall x, y \in X, x \neq y, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \exists h \in \mathscr{B}$ 使得 $h(x) = \alpha, h(y) = \beta$.

根据定理的假设，存在 $u \in \mathscr{B}$ 使得 $u(x) \neq u(y)$. 若令

$$h(z) = \beta + (\alpha - \beta)\frac{u(z) - u(y)}{u(x) - u(y)}, \forall z \in X,$$

则

$$h \in \mathscr{B}, \text{并且 } h(x) = \alpha, h(y) = \beta.$$

3) 证明：$\forall u, v \in \overline{\mathscr{B}}, \max(u,v) \in \overline{\mathscr{B}}, \min(u,v) \in \overline{\mathscr{B}}$.

因为

$$\max(u,v) = \frac{1}{2}(u+v+|u-v|),$$
$$\min(u,v) = \frac{1}{2}(u+v-|u-v|).$$

所以我们只需证明：$\forall u \in \overline{\mathscr{B}}, |u| \in \overline{\mathscr{B}}$.

由于 $u \in \overline{\mathscr{B}} \subset C^n(X,\mathbb{R})$, 故 u 在紧集 X 上有界，不失一般性，我们可以假设 $-1 \leqslant u(x) \leqslant 1, \forall x \in X$.

现在我们考虑由下述递推关系式定义的函数序列 $\langle f_n \rangle$：

$$f_0 = 0,\ f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{1}{2}\left[t^2 - f_n^2(t)\right], t \in [-1,1], n \in \mathbb{N}.$$

在 § 1 例 12.9 中我们证明了 $\{f_n\}$ 是关于 t^2 的多项式序列，它在 $[-1,1]$ 上一致收敛于函数 $t \longmapsto f(t) = |t|, t \in [-1,1]$. 这就是说：

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N) \Longrightarrow |f_n(t) - |t|| < \varepsilon, \forall t \in [-1,1].$$

因此

$$|f_n(u(x)) - |u(x)|| < \varepsilon, \forall x \in X,$$

或

$$\|f_n \circ u - |u|\| \leqslant \varepsilon.$$

若令 $f_n(t) = c_1 t^2 + c_2 t^4 + \cdots + c_{2n} t^{2^n}$, 则

$$f_n \circ u = c_1 u^2 + c_2 u^4 + \cdots + c_{2n} u^{2^n} \in \overline{\mathscr{B}},$$

此即表明 $|u| \in \overline{\mathscr{B}}$.

上述 2)、3) 的结论表明象具有引理中所指的性质. 因此定理证毕.

2. 复 Stone-Weierstrass 定理

若我们考虑复值连续函数空间 $C^0(X,\mathbb{C})$, 则上述实 Stone-Weierstrass 定理不成立. 这时必须对 $\mathscr{B}$ 附加新的条件，这就是下面的定理.

定理 12.15 (复 Stone-Weierstrass 定理)

设 $\mathscr{B} \subset C^0(X,\mathbb{C})$, 它具有下述性质：

1. 所有复值常函数属于 $\mathscr{B}$.
2. 若 $u, v \in \mathscr{B}$, 则 $u+v \in \mathscr{B}, uv \in \mathscr{B}, \bar{u} \in \mathscr{B}$.
3. 若 $x, y \in X, x \neq y$, 则存在 $u \in \mathscr{B}$ 使得 $u(x) \neq u(y)$. 则 $\mathscr{B}$ 是 $C^0(X,\mathbb{C})$ 的稠密子集.

证明 记 $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ 为 $\mathscr{B}$ 中全体实值函数的集合. 那么 $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ 满足实 Stone-Weierstrass 定理的条件 1) 与 2). 为了证明 $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ 也满足它的条件 3). 我们设 $x, y \in X$ 并且 $x \neq y$.

根据假设，存在 $u \in \mathscr{B}$ 使得 $u(x) \neq u(y)$. 于是

$$\operatorname{Re} u(x) \neq \operatorname{Re} u(y) \text{ 或 } \operatorname{Im} u(x) \neq \operatorname{Im} u(y).$$

由于

$$\operatorname{Re} u = \frac{1}{2}(u + \bar{u}) \in \mathscr{B},$$
$$\operatorname{Im} u = \frac{1}{2\mathrm{i}}(u - \bar{u}) \in \mathscr{B},$$

故 $\operatorname{Re} u$ 与 $\operatorname{Im} u$ 中至少有一个满足定理 12.14的条件 3).

$\forall f \in \mathscr{B}$, 令 $f = f_1 + \mathrm{i} f_2$, 这里 $f_1, f_2 \in C^0(X, \mathbb{R})$. 根据实 Stone-Weierstrass 定理, 存在 $u_n, v_n \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ 使得 $\|u_n - f_1\| \to 0, \|v_n - f_2\| \to 0 (n \to +\infty)$, 因此由

$$\|(u_n + \mathrm{i} v_n) - (f_1 + \mathrm{i} f_2)\| \leqslant \|u_n - f_1\| + \|v_n - f_2\|$$

推知 $\|(u_n + \mathrm{i} v_n) - (f_1 + \mathrm{i} f_2)\| \to 0 (n \to +\infty)$. 而 $u_n + \mathrm{i} v_n \in \mathscr{B} (n \in \mathbb{N})$, 故 $\mathscr{B}$ 是 $C^0(X, \mathbb{C})$ 的稠密子集.

推论 12.2

设 $B \subset \mathbb{R}^n$ 是任一紧集, $\mathscr{B}$ 是所有定义在 B 上的几个变元的复 (或实) 系数多项式的集合. 则 $\mathscr{B}$ 在 $C^0(B, \mathbb{C})$(或 $C^0(B, \mathbb{R})$) 中稠密.

证明 定理中的条件 1)、2) 明显满足. 为了验证条件 3), 设 $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$, $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n)$ 且 $\bar{x} \neq \bar{y}$. 那么至少存在一个 i_0 使得 $\bar{x}_{i_0} \neq \bar{y}_{i_0}$.$\forall x \in B$, 令 $u(x) = x_{i_0}$, 则 $u \in \mathscr{B}$, 并且 $u(\bar{x}) \neq u(\bar{y})$. 因此 $\mathscr{B}$ 在 $C^0(B, \mathbb{C})$(或 $C^0(B, \mathbb{R})$) 中稠密.

推论 12.3

设 $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. $\mathscr{B}$ 表示所有定义在 T 上的形如

$$P_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} C_k z^k, C_k \in \mathbb{C}, z \in T$$

的多项式的全体. 则 $\mathscr{B}$ 是 $C^0(T, \mathbb{C})$ 的稠密子集.

证明 我们用 $\mathscr{A}$ 表示下述形式

$$P(z) = \sum_{\substack{0 \leqslant m \leqslant k \\ 0 \leqslant n \leqslant s}} a_{mn} z^n \bar{z}^m, z \in T, a_{mn} \in \mathbb{C}$$

的多项式的全体. 容易验证 $\mathscr{A}$ 在 T 上满足复 Stone-Weierstrass 定理的条件, 所以 $\mathscr{A}$ 在 $C^0(T, \mathbb{C})$ 中稠密.

又因为 $z \in T$, 所以 $\bar{z} = z^{-1}$. 从而 $P(z) = \sum a_{mn} z^n z^{-m} = \sum a_{mn} z^{n-m}$. 此即表明 $\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

习题 12.4

1. 设 $\mathscr{A}$ 是 $C^0([a, b], \mathbb{R})$ 中所有实系数多项式的集合. 证明：$\mathscr{A}$ 是 $C^0([a, b], \mathbb{R})$ 中的稠密子集.
2. 设 $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ 满足条件：

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^n f(x) \mathrm{d}x = 0.$$

试用上一题的结论证明 $\int_0^1 f^2(x) \mathrm{d}x = 0$, 由此推得 $f = 0$.

3. 设 $\mathscr{A}$ 是所有定义在 $[-1,1]$ 上的偶次多项式的集合. 证明：$\mathscr{A}$ 不能分离 $[-1,1]$ 的点, 即

$$\exists x, y \in [-1,1],\ x \neq y,\ \text{使得}\ \forall f \in \mathscr{A},\ f(x) = f(y).$$

4. 设 $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. 设 $\mathscr{B}$ 是所有形如

$$f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \sum_{n=0}^{N} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \theta \in \mathbb{R}$$

的函数所组成的集合 (这里我们定义 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta,\ \forall \theta \in \mathbb{R}$).

1) 证明：$\mathscr{B}$ 构成一个代数, 即

$$\forall f, g \in \mathscr{B},\ \forall C \in \mathbb{C},\ f + g \in \mathscr{B},\ fg \in \mathscr{B},\ Cf \in \mathscr{B}.$$

2) 证明：$\forall z_1, z_2 \in T$ 且 $z_1 \neq z_2$, $\exists f \in \mathscr{B}$ 使得 $f(z_1) \neq f(z_2)$.

3) 证明：$\forall z \in T$, $\exists f \in \mathscr{B}$ 使得 $f(z) \neq 0$.

4) 证明：$\forall f \in \mathscr{B}, \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = 0$, 由此推得 $\forall f \in \overline{\mathscr{B}}, \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = 0$.

5) 证明：存在定义在 T 上的连续函数 f 使得 $f \notin \overline{\mathscr{B}}$, 由此推出 $\mathscr{B}$ 不是 $C^0(T,\mathbb{C})$ 的稠密子集.

第十三章 幂级数

这一章我们研究一类特殊的函数项级数——幂级数. 首先介绍幂级数的收敛半径概念, 幂级数的基本性质, 然后研究函数的幂级数展开问题, 最后介绍复指数函数的定义.

13.1 幂级数的收敛半径

1. 幂级数定义

定义 13.1

设 $K=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. $a_n\in K(n\in\mathbb{N}), z_0\in K$. 形如

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left(z-z_0\right)^n\ (z\in K)$$

的函数项级数称为幂级数. $a_n(n\in\mathbb{N})$ 称为此幂级数的系数. 若 $K=\mathbb{R}$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\left(z-z_0\right)^n$ 称为实幂级数, 若 $K=\mathbb{C}$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\left(z-z_0\right)^n$ 称为复幂级数.

如果我们作变换 $\omega=z-z_0$, 则

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left(z-z_0\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\omega^n.$$

故今后若未特别指明, 我们只考虑 $z_0=0$ 的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

例题 13.1 下述各函数项级数都是幂级数:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \sum_{n=0}^{+\infty} n!z^n (z\in K).$$

2. 幂级数的收敛半径

定理 13.1 (Abel 引理)

设 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n (z\in K)$ 是任一幂级数. 若存在 $z_0\in K-\{0\}$, 使得级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ 收敛, 则 $\forall z\in K$ 且 $|z|<|z_0|$, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 是绝对收敛的.

证明 因为级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ 收敛, 所以存在 $M>0$ 使得 $\forall n\in\mathbb{N}, |a_n z_0^n|\leqslant M$.

设 $z\in K$, 并且. $|z|<|z_0|$. 那么

$$|a_n z^n|=|a_n z_0^n|\left|\frac{z}{z_0}\right|^n\leqslant M\left|\frac{z}{z_0}\right|^n\ (\forall n\in\mathbb{N}).$$

由于 $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, 故级数 $\sum\limits_{n=0} M\left|\frac{z}{z_0}\right|$ 收敛，从而由定理11.7可知，级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|a_nz^n|$ 收敛. 即级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 绝对收敛.

定理 13.2

设 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^2$ 是任一幂级数，则存在唯一的 $R \in [0, +\infty]$, 它具有下述性质：

1. $\forall z \in K$ 且 $|z| < R$, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 绝对收敛.
2. $\forall z \in K$ 且 $|z| > R$, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 发散.

证明 1) 证明 R 的存在性. 考虑下述集合.

$$E = \left\{|z| \in \mathbb{R} \mid z \in K \text{ 且级数 } \sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n \text{ 收敛}\right\}.$$

显然 $E \neq \varnothing$, 因为 $0 \in E$. 令

$$R = \sup E.$$

我们来证明 R 满足定理所指的性质.

若 $R = 0$, 则由 E 的定义知，除了 $z = 0$ 外，$\forall z \in K$, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 都是发散的. 因此 $R = 0$ 就是所求的数.

若 $0 < R < +\infty$. 设 $z \in K$ 且 $|z| < R$. 由上确界性质知，存在 $z_0 \in K, |z_0| \in E$ 且 $|z| < |z_0|$. 由于级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz_0^n$ 收敛，故由 Abel 引理知，级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 绝对收敛.

现设 $z \in K$ 且 $|z| > R$. 若 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 收敛，则 $|z| \in E$. 这与 R 的定义相矛盾，故级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 发散.

若 $R = +\infty$. 则 $\forall z \in K, |z| < +\infty$, 并且存在 $z_0 \in K$ 使得 $|z_0| \in E, |z| < |z_0|$. 由于级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz_0^n$ 收敛，故由 Abel 引理知，级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 绝对收敛.

由上述分析可知，$R = \sup E$ 具有定理所指性质.

2) 证明 R 的唯一性. 假设存在两个 R_1 与 R_2 它们都具有定理所指的性质.

不妨设 $R_1 < R_2$. 取 $z \in K$ 使得 $R_1 < |z| < R_2$, 于是由 R_1 的性质知，级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 发散，而由 R_2 的性质知，级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 又是绝对收敛的，此矛盾说明 $R_1 = R_2$, 从而 R 的唯一性得证.

根据上述定理，现在我们可以给出幂级数收敛半径的下述定义.

定义 13.2

设 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 是任一幂级数，定理13.2所确定的数 R 称为此幂级数的收敛半径.

注 如果我们考虑的是复幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, 即 $a_n, z \in \mathbb{C}$, 则由收敛半径的定义可知，在复平面上以原点为中心以 R 为半径的圆盘 $B(0, R)$ 内的每一点 z 处，级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 绝对收敛，而对此圆盘外的每一点 z, 级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 发散. 在此圆盘的边界上的点 z 处，幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 的收敛性不能确定，我们称此圆盘 $B(0, R)$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 的收敛圆盘.

若我们考虑的是实幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, 即 $a_n, z \in \mathbb{R}$. 则幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 在 $\mathbb{R}$ 的，以原点为中心的开区间 $(-R, R)$ 的每一点 z 处绝对收敛，而在此开区间外的任一点 z 处，幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 发散. 在 $z = \pm R$ 两点处，级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 的收敛性不能确定，我们称开区间 $(-R, R)$ 为此实幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 的收敛区间，有时也称为收敛圆盘.

3. 幂级数收敛半径的计算

实际计算幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 的收敛半径通常对正项级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\,|z|^n$ 采用 D'Alembert 判别法和 Cauchy 判别法进行确定.

1) 若 $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda \in [0, +\infty]$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 R 为：

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \lambda \in (0, +\infty) \\ +\infty, & \lambda = 0 \\ 0, & \lambda = +\infty \end{cases}$$

事实上，$\forall z \in K - \{0\}$, 考虑正项级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\,|z|^n$. 若 $\lambda \in (0, +\infty)$, 则

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|\,|z|^{n+1}}{|a_n|\,|z|^n} = |z|\lambda.$$

由 D'Alembert 判别法知，当 $|z|\lambda < 1$ 或 $|z| < \frac{1}{\lambda}$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\,|z|^n$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 绝对收敛；当 $|z|\lambda > 1$ 或 $|z| > \frac{1}{\lambda}$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\,|z|^n$ 发散，从而级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 发散. 根据定理13.2知，幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R = \frac{1}{\lambda}$.

若 $\lambda = 0$, 则

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|\,|z|^{n+1}}{|a_n|\,|z|^n} = 0,$$

从而由 D'Alembert 判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|\,|z|^n$ 收敛, 因此级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 绝对收敛. 由 z 的任意性知, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R = +\infty$.

若 $\lambda = +\infty$, 则

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|\,|z|^{n+1}}{|a_n|\,|z|^n} = +\infty$$

于是由 D'Alembert 判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|\,|z|^n$ 发散, 从而级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 也发散. 再由 $z \in K - \{0\}$ 的任意性知, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R = 0$.

由 Cauchy 判别法类似可证:

2) 若 $\prod\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 R 为:

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}, & \lambda \in (0, +\infty) \\ +\infty, & \lambda = 0 \\ 0, & \lambda = +\infty \end{cases}$$

例题 13.2 试计算例13.1中的各幂级数收敛半径.

1) 对于 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$: 由于 $a_n = 1 (n \in \mathbb{N})$, 故其收敛半径 $R = 1$. 在 $|z| = 1$ 的 z 处, 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} z^n \neq 0$, 所以此幂级数在收敛圆盘的边界 $S(0,1)$ 上发散.

2) 对于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n}$: 由于 $a_n = \dfrac{1}{n} (n \in \mathbb{N})$ 并且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$, 故其收敛半径 $R = 1$. 在收敛圆盘 $B(0,1)$ 的边界上, 对 $z = 1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散; 对 $z \neq 1$, 由 Dirichlet 判别法知, 复级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n}$ 收敛.

3) 对于 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$: 由于 $a_n = \dfrac{1}{n!} (n \in \mathbb{N})$, 并且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0$, 故其收敛半径 $R = +\infty$.

4) 对于 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n! z^n$: 由于 $a_n = n! (n \in \mathbb{N})$, 并且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = +\infty$, 故其收敛半径 $R = 0$.

例题 13.3 考虑幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n^n} (z \in \mathbb{C})$.

由于 $a_n = \dfrac{1}{n^n} (n \in \mathbb{N})$, 并且

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

故它的收敛半径 $R = +\infty$.

例题 13.4 考虑幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[1+(-1)^n\right]^n z^{2n}(z\in\mathbb{C})$.

这里 $a_{2n}=\left[1+(-1)^n\right]^n\ (n\in\mathbb{N})$, 并且

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[2n]{|1+(-1)^n|^n}=\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt{|1+(-1)^n|}=\sqrt{2}.$$

故它的收敛半径 $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$. 在收敛圆盘 $B\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 的边界上, 由于

$$\left|\left[1+(-1)^{2n}\right]^{2n}z^{4n}\right|=2^{2n}\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^{4n}=2^{2n}\cdot\frac{1}{2^{2n}}=1,(n\in\mathbb{N})$$

通项不趋于零, 故此级数也是发散的.

4. 幂级数的运算与收敛半径

定理 13.3

设 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 与 $\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n$ 是任意两个实或复幂级数. 它们的收敛半径分别为 R_1 与 R_2, 则

1. $\forall\alpha\in K-\{0\}$, 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha a_nz^n$ 的收敛半径 $R=R_1$.
2. $\forall\alpha,\beta\in K-\{0\}$, 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)z^n$ 的收敛半径 $R\geqslant\min(R_1,R_2)$. 于是 $\forall z\in K$, 且 $|z|<\min(R_1,R_2)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)z^n=\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n+\beta\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n.$$

证明 1) 由于用非零数乘任一数项级数不改变它的收敛与发散性, 故 $\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha a_nz^n$ 与 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 有相同的收敛半径.

2) 设 $z\in K$, 且 $|z|<\min(R_1,R_2)$. 那么 $|z|<R_1,|z|<R_2$. 从而级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 与 $\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n$ 都绝对收敛, 因此级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)z^n$ 也绝对收敛, 故幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)z^n$ 的收敛半径 $R\geqslant\min(R_1,R_2)$. 于是 $\forall z\in K$, 且 $|z|<\min(R_1,R_2)$, 我们有

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)z^n=\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n+\beta\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n.$$

例题 13.5 考虑幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(1+2^n)z^n$ 与 $\sum_{n=0}^{+\infty}(1-2^n)z^n$ 的和.

由于

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(1+2^{n+1})}{1+2^n}=2,\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1-2^{n+1}}{1-2^n}=2,$$

故这两个幂级数的收敛半径 $R_1=R_2=\frac{1}{2}$.

因此这两个幂级数的和的收敛半径 $R \geqslant \frac{1}{2}$. 实际上, $R = 1$. 因为

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(1+2^n\right)+\left(1-2^n\right)\right]z^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

因此对这两个幂级数来说, 我们有严格不等式 $R > \min\left(R_1, R_2\right)$.

例题 13.6 考虑幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(1+2^n\right)z^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ 的和.

它们的和为

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+2^n+1\right)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(2+2^n\right)z^n.$$

由于

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2+2^{n+1}}{2+2^n} = 2,$$

故幂级数和的收敛半径 $R = \frac{1}{2}$. 由例13.5知, 我们有 $R = \min\left(R_1, R_2\right) = \frac{1}{2}$.

定理 13.4

设 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$ 是任意两个实或复幂级数. 它们的收敛半径分别为 R_1 与 R_2, 则这两个幂级数的乘积 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0\right)z^n$ 的收敛半径 $R \geqslant \min\left(R_1, R_2\right)$. 于是 $\forall z \in K$, 且 $|z| < \min\left(R_1, R_2\right)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0\right)z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

证明 设 $z \in K$, 且 $|z| < \min\left(R_1, R_2\right)$. 于是级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ 绝对收敛, 从而由定理11.18知, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0\right)z^n$ 也绝对收敛. 因此 $R \geqslant \min\left(R_1, R_2\right)$.

例题 13.7 考虑幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)z^n$ 的乘积.

这两个幂级数的收敛半径 $R_1 = R_2 = 1$. 它们的乘积幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} -(n+1)z^n$ 的收敛半径 $R = 1$. 故这时我们有 $R = \min\left(R_1, R_2\right)$.

例题 13.8 考虑幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ $\left(b_0 = 1, b_1 = -1, \forall n \geqslant 2,\ b_n = 0\right)$ 的乘积.

由于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ 的收敛半径 $R_1 = 1$, 而幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = 1 - z$ 的收敛半径 $R_2 = +\infty$, 它们的乘积幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0\right)z^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 0 \cdot z^n$ 的收敛半径 $R = +\infty$, 因此这时 $R > \min\left(R_1, R_2\right)$.

习题 13.1

1. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 $R(a_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N})$.

   1) 证明：$\varliminf\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| \leqslant R \leqslant \varlimsup\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

   2) 由此推知，若 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 存在，则 $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

2. 设 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 是任一实或复幂级数，R 是它的收敛半径. 证明：

   1) $R = \sup\left\{|z| \mid z \in \mathbb{C},\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n||z|^n \text{ 收敛}\right\}$.

   2) $R = \sup\{|z| \mid z \in \mathbb{C},\ \text{序列 } \{a_n z^n\} \text{ 有界}\}$.

   3) $R = \sup\left\{|z| \mid z \in \mathbb{C},\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0\right\}$.

   试利用 3) 确定幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin n}{n} z^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ 的收敛半径，这里 a_n 是自然数 n 的因子个数.

3. 计算下列各幂级数的收敛半径.

   1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

   2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n^{3n}}$

   3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2} z^n$

   4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} z^n$

   5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} z^n$

   6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sinh n}{\cosh n} z^n$

   7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\log \dfrac{a^2+n^2}{n^2}\right) z^n$

   8) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-xn} z^n$

   9) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \tan\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) z^n$

   10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a^{n \ln\left(\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)} z^n \quad (a > 1)$

4. 设 $a_n = \prod\limits_{k=2}^{n} (2 - \sqrt[k]{2})$.

   1) 证明：级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$ 发散.

   2) 确定幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 R.

   3) 研究此幂级数在收敛圆盘的边界上的收敛性.

5. 设 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 是任一幂级数（$a_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$）.

   1) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3n]{|a_{3n}|} = l_1$，$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3n+1]{|a_{3n+1}|} = l_2$，$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3n+2]{|a_{3n+2}|} = l_3$，试求 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 的收敛半径.

2) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|a_{3n+1}|}{|a_{3n}|}=l_1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|a_{3n+2}|}{|a_{3n+1}|}=l_2$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|a_{3n+3}|}{|a_{3n+2}|}=l_3$, 试求 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 的收敛半径 (这里 $l_1l_2l_3\neq 0$).

6. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 的收敛半径 $R>0$, 证明：幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n!}z^n$ 的收敛半径为 $+\infty$.

7. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 的收敛半径 $R\in\mathbb{R}_*^+$, 试计算下列各幂级数的收敛半径：

1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n^kz^n$ $(k\in\mathbb{N})$, 2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^{kn}$ $(k\in\mathbb{N})$, 3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^{n^2}$.

8. 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$. 试计算幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_{2n}x^{2n}$ 的收敛半径 R. 研究此幂级数在收敛区间端点 $x=\pm R$ 处的收敛性.

9. 设实幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R, $P_m(x)$ 是任一 m 次多项式, 试求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}P_m(n)a_nx^n$ 的收敛半径.

10. 设 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 是任一实或复幂级数, 它的收敛半径为 R. $\forall n\in\mathbb{N}$, 令 $s_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$, 试研究幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}s_nz^n$ 的收敛半径.

13.2 幂级数的基本性质

1. 幂级数的一致收敛性

定理 13.5

设 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 是任一实或复幂级数, 它的收敛半径 $R>0$. A 是收敛圆盘 $B(0,R)$ 中的任一紧集, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 在 A 上一致收敛.

证明 由于映射 $z\longmapsto|z|, z\in A$, 在紧集 A 上连续, 故存在 $z_0\in A$, 使得

$$|z_0|=\sup_{z\in A}|z|.$$

于是 $\forall z\in A$, 我们有

$$|a_nz^n|=|a_n|\,|z|^n\leqslant|a_n|\,|z_0|^n\ (\forall n\in\mathbb{N}).$$

由于 $z_0\in B(0,R)$, 故级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|a_n|\,|z_0|^n$ 收敛, 从而由 Weisrstrass 判别法知, 幂级数 $\sum\limits_{n=n}a_nz^n$ 在 A 上一致收敛.

注 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 在整个收敛圆盘 $B(0,R)$ 上不一定一致收敛.

例如，我们来考虑实幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

它的收敛半径 $R=1$, 并且

$$\forall x \in (-1,1),\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} x^n=\frac{1}{1-x}.$$

若令 $f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k$, 则

$$\forall x \in (-1,1), |f(x)-f_n(x)|=\frac{|x|^n}{1-x}.$$

由此得到

$$\sup_{x\in(-1,1)} |f(x)-f_n(x)|=\sup_{x\in(-1,1)}\frac{|x|^n}{1-x}=+\infty$$

因此幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 在它的整个收敛区间 $(-1,1)$ 上不一致收敛.

但是如果对幂级数在其收敛圆盘边界上的收敛性附加适当的条件，则仍可以保证幂级数在整个收敛圆盘上的一致收敛性.

首先我们考虑复幂级数的情形.

定理 13.6

设 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 是任一复幂级数，其收敛半径 $R>0$. 若存在 $z_0 \in S(0,R)$ 使得级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ 绝对收敛，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 在闭圆盘 $\bar{B}(0,R)$ 上一致收敛.

证明 由于 $\forall z \in \bar{B}(0,R), \forall n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n z^n|=|a_n|\,|z|^n \leqslant |a_n|\,R^n=|a_n|\,|z_0|^n=|a_n z_0^n|,$$

而级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n z_0^n|$ 收敛，故由 Weierstrass 判别法知，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+0} a_n z^n$ 在 $\bar{B}(0,R)$ 上一致收敛.

对于实幂级数，我们可以放宽幂级数在收敛区间端点处的绝对收敛性要求，即有下面的定理.

定理 13.7

设 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 是任一实幂级数，其收敛半径 $R>0$. 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$(或 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n$) 收敛，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0,R]$(或 $[-R,0]$) 上一致收敛.

证明 我们只对 $\sum\limits_{t=0}^{n} a_n R^n$ 收敛的情形证明.

由于 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{R}\right)^n a_n R^n$. 若令

$$u_n(x) = \left(\frac{x}{R}\right)^n, v_n(x) = a_n R^n, x \in [0, R]$$

则序列 $\langle u_n \rangle$ 在 $[0, R]$ 上一致有界，并且是单调下降序列. 而级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 在 $[0, R]$ 上一致收敛. 根据 Abel 判别法 (定理13.3) 知，幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $[0, R]$ 上一致收敛.

由这个定理可以知道，对于实幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 来说，只要它在收敛区间的两个端点处收敛，则它在整个收敛区间上就是一致收敛的.

2. 幂级数的连续性

定理 13.8

设 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 是任一实或复幂级数，其收敛半径 $R > 0$, 则此幂级数的和函数 f 在整个收敛圆盘 $B(0, R)$ 上连续.

证明 任取 $z_0 \in B(0, R)$. 于是存在 $r \in \mathbb{R}_*^+$ 使得 $|z_0| < r < R$. 根据定理13.5, 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 在紧集 $\bar{B}(0, r) (\subset B(0, R))$ 上一致收敛.

另一方面，幂级数 $\sum_{n=n}^{+\infty} a_n z^n$ 的每一个函数 $f_n \left(f_n(z) = a_n z^n, z \in B(0, R), n \in \mathbb{N}\right)$ 在 $\bar{B}(0, r)$ 上连续，故由定理13.6知，f 在 $\bar{B}(0, r)$ 上连续，从而 f 在 z_0 处连续. 由 $z_0 \in B(0, R)$ 的任意性推知 f 在 $B(0, R)$ 上连续.

注 1) 一般说来，一个幂级数的和函数在它的整个收敛圆盘上不一定一致连续.

例如对幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n (x \in (-1, 1))$, 我们知道它的和函数为 $x \mapsto f(x) = \frac{1}{1-x}, x \in (-1, 1)$, 它在 $(-1, 1)$ 上就不一致连续.

2) 定理13.8表明的是幂级数的和函数在其收敛圆盘内的连续性. 如果幂级数在收敛圆盘边界上的某一点收敛，我们自然要问：此和函数在该边界点上连续吗？回答是这样的：

若幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 在收敛圆盘 $B(0, R)$ 的边界点 z_0 处绝对收敛，则由定理13.6知，此幂级数在 $\bar{B}(0, R)$ 上一致收敛. 当然在 z_0 处也就连续.

若幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 在收敛圆盘 $B(0, R)$ 的边界点 z_0 处是条件收敛的，则对复幂级数来说，其和函数在 z_0 处的连续性一般不成立，但对实幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 来说，结论是成立的，即有下面的定理.

定理 13.9 (Abel 第二定理)

设 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 是任一实幂级数，其收敛半径 $R>0$. 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$(或 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(-R)^n$) 收敛，则此幂级数在 $x=R$(或 $x=-R$) 处连续.

证明 这是定理13.7的直接推论.

例题 13.9 考虑实幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin na}{n}x^n(a\in\mathbb{R}-\pi\mathbb{Z})$.

由于 $\forall x\in\mathbb{R}$ 且 $|x|<1$,

$$\left|\frac{\sin na}{n}x^n\right|\leqslant\frac{|x|^n}{n},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{|x|^n}{n}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\sin na}{n}x^n\right|$ 收敛.

$\forall x\in\mathbb{R}$ 且 $|x|>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{x^n}{n}\right|=+\infty$, 而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin na\neq 0(a\in\mathbb{R}-\pi\mathbb{Z}$,, 因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin na}{n}x^n\neq 0$. 从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin na}{n}x^n$ 发散.

根据定理13.2知，实幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin na}{n}x^n$ 的收敛半径 $R=1$.

另一方面，对收敛区间 $(-1,1)$ 的边界点 $x=\pm 1$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin na}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin na}{n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n(\pi+a)}{n}$, 根据 Dirichlet 判别法知，都是收敛的，因此上述幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin na}{n}x^n$ 在 $[-1,1]$ 上连续.

下面我们研究实幂级数的可积性与可导性.

3. 实幂级数的可积性

定理 13.10

设 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 是任一实幂级数. 其收敛半径 $R\geqslant 0$.

1. 若 $R=0$, 则对 $x=0$; 若 $R>0$, 则对 $\forall x\in(-R,R)$ 成立:

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n t^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x a_n t^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}-x^{n+1}$$

2. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 与由它通过逐项求积分所得到的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 有相同的收敛半径.

证明 1) 若 $R=0$, 则上述等式显然成立. 若 $R>0$, 则由于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ 在 $[-|x|,|x|]$ 上一致收敛，故由定理12.8 知，对级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ 可从 0 到 x 逐项求积分. 即上述等式成立.

2) 设 R_1 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛半径.

若 $R=0$, 则显然有 $R_1\geqslant R$.

若 $R>0$, 则由 1) 的等式推知, $\forall x\in(-R,R)$, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 收敛, 从而 $R_1\geqslant R$.

现在假设 $R_1>R$. 于是存在 $r',r\in\mathbb{R}_*^+$ 使得 $R<r'<r<R_1$. 由于级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ 收敛, 故存在 $M>0$ 使得

$$\forall n\in\mathbb{N},\left|\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}\right|\leqslant M.$$

从而 $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\left|a_nr'^n\right|=\frac{|a_n|}{n+1}r^{n+1}\cdot\frac{n+1}{r'}\left(\frac{r'}{r}\right)^{n+1}\leqslant\frac{M}{r'}(n+1)\left(\frac{r'}{r}\right)^{n+1}$$

由 D'Alembert 判别法可知级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(\frac{r'}{r}\right)^{n+1}$ 收敛. 因此级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left|a_nr'^n\right|$ 收敛. 这与 $r'>R$ 相矛盾. 故必有 $R_1=R$.

注 虽然两个幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 有相同的收敛半径, 但在收敛区间的端点处可能有不同的收敛与发散性.

例如, 对幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, 它们有相同的收敛半径 $R=1$. 但在 $R=1$ 处, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛; 在 $R=-1$ 处, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ 都是收敛的.

例题 13.10 证明:

$$\forall x\in(-1,1],\log(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

我们考虑幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n$. 它的收敛半径 $R=1$, 因此由上述定理13.10知, $\forall x\in(-1,1)$,

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nt^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

另一方面, $\forall x\in(-1,1)$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n=\frac{1}{1+x}$, 所以

$$\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nt^n\right)\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t=\log(1+x)$$

因此

$$\forall x\in(-1,1),\log(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

最后对 $x=1$, 由于级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛, 故由 Abel 第二定理知, 幂级数

$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ 在 $x=1$ 处连续，从而

$$\forall x\in(-1,1],\log(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

特别地，我们得到

$$\log 2=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

4. 幂级数的可求导性

定义 13.3

设 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 是任一实幂级数.

1. $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的 1 阶导级数就是：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

2. $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的 2 阶导级数就是：

$$\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

3. $\forall k\in\mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的 k 阶导级数就是 $\sum_{n=k}^{+\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)a_{n+k}x^n$.

♣

定理 13.11

设 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 是任一实幂级数，其收敛半径 $R\geqslant 0$. 则

1. 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 与它的任一 k 阶导级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)a_{n+k}x^n$ 有相同的收敛半径.
2. 若 $R>0$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的和函数 f 在 $(-R,R)$ 上是 C^∞ 类的，并且

$$\forall k\in\mathbb{N},\forall x\in(-R,R),\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)^{(k)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_nx^n)^{(k)}.$$

♡

证明 1)$\forall k\in\mathbb{N}$, 由于 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的 k 阶导级数通过逐项求积分所得幂级数就是 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的 $k-1$ 阶导

级数，所以由定理13.10知，它们有相同的收敛半径，而当 $k=1$ 时，$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的 0 阶导级数就是此幂级数本身，因此 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径与它的 1 阶导级数的收敛半径相同，从而与它的任意 k 阶导级数的收敛半径相同.

2）若 $R>0$, 则 $\forall x_0 \in (-R, R)$, 存在 $r>0$ 使得 $|x_0|<r<R$．根据定理13.5, 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 与它的 1 阶导级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ 在紧集 $[-r, r]$ 上是一致收敛的，从而由定理12.9知，$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $[-r, r]$ 上可逐项求导，并且

$$f'(x)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

特别地，对 $x=x_0$ 有

$$f'(x_0)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x_0^{n-1}$$

由 x_0 的任意性知，幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的和函数 f 在 $(-R, R)$ 上是可导的，并且它的导函数 f' 就是 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的 1 阶导级数的和函数.

由归纳法可证，幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的和函数 f 在 $(-R, R)$ 上是 C^{∞} 类的，并且 $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in (-R, R)$,

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n x^n\right)^{(k)}=\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

推论 13.1

若实幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R>0$, 它的和函数为 f, 则

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

证明 因为 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R>0$, 所以由上述定理知，它的和函数 f 在 $(-R, R)$ 上是 C^{∞} 类的，并且

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in (-R, R), f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

特别地对 $x=0$ 得到

$$f^{(k)}(0)=k!a_k \quad \text{或} \quad a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

习题 13.2

1. 考虑实幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$.
   1) 计算它的收敛半径 R.
   2) 证明：此幂级数在收敛区间 $(-R,R)$ 上不一致收敛.
   3) 证明：此幂级数的和函数在 $(-R,R)$ 上一致连续.
2. 用例子说明定理13.9(Abel 定理) 的逆不成立，即若实幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 $R=1$，并且
$$\lim_{\substack{x\in(0,1)\\ x\to 1^-}}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n=S,$$
则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n=S$ 不一定成立. 为此考虑幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$.
3. 设数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$ 收敛. 证明：幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. 由此推出定理13.9(Abel 定理).
4. 证明下述 Tauber 定理：
   设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$，$|x|<1$，并且假设 $\lim\limits_{n\to+\infty}na_n=0$. 若 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=s$，则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n=s$.
5. 设数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$ 发散，并且 $a_n\geqslant 0$. 证明：$\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^n=+\infty$.
6. 设 $a_n\geqslant 0\ (n\in\mathbb{N})$，并且假设 $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^n=A$，其中 $A\in\mathbb{R}$. 证明：$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n=A$.
7. 试利用幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}=\dfrac{1}{1+x^2}$，$x\in(-1,1)$ 证明：$\forall x\in[-1,1]$，$\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
8. 设 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$ 是任一收敛的实级数，令 $A=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$.
   1) 令 $b_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$. 证明：幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n!}x^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{b_n}{n!}x^n$ 都有收敛半径 $R=+\infty$.
   2) 令 f,g 分别为 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n!}x^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{b_n}{n!}x^n$ 的和函数，证明：$f'=g'-g$，$\quad\forall x\in\mathbb{R}$，且 $\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=[g(x)-f(x)]\,\mathrm{e}^{-x}$.
   3) 由此推出：$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=A$.
9. 试利用 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$ 计算积分
$$I=\int_0^1\frac{\log(1+x+x^2+\cdots+x^n)}{x}\mathrm{d}x.$$

13.3 函数的幂级数展开

1. 问题的提出

由上一节的研究我们知道，如果一个实幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$，则它的和函数 $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ 在 $(-R, R)$ 上是 C^∞ 类的，并且

$$\forall x \in (-R, R),\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

现在我们反过来要问：假设给定了一个包含 0 的开区间 $I \subset \mathbb{R}$，及一实函数 $f : I \to \mathbb{R}$，

1) f 应该具备什么条件才能 “展开” 为一个幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$，即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ \forall x \in I.$$

2) 如果 f 能够展开为一个幂级数，这个幂级数是否唯一？

3) 有哪些方法可以将一个函数展开为幂级数？

下面我们就来研究这些问题.

2. 函数的幂级数展开的定义

定义 13.4

设 I 是包含 0 的任一区间，$f : I \to \mathbb{R}$ 是任一实值函数. 我们称函数 f 在 $x = 0$ 处可展开为幂级数，如果存在一个收敛半径 $R > 0$ 的实幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 及 $x = 0$ 的一个邻域 $U \subset I$，使得

$$\forall x \in U,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

如果 $U = I$，则我们称 f 在 I 上可展开为幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. (这时必有 $I \subset (-R, R)$)

♣

定义 13.5

设 I 是任一开区间，$x_0 \in I$，$f : I \to \mathbb{R}$ 是任一实值函数，我们称函数 f 在 x_0 处可展开为幂级数，如果函数 $x \mapsto f(x_0 + x)$，$x_0 + x \in I$ 在 $x = 0$ 处可展开为幂级数. 也即存在一个收敛半径 $R > 0$ 的幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 及 x_0 的一个邻域 U 使得

$$\forall x \in U,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n .$$

如果 $U = I$，则我们称 f 在 I 上可展开为幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$. (这时必有 $I \subset (x_0 - R, x_0 + R)$).

♣

由上述定义可知，函数 $f : I \to \mathbb{R}$ 在 $x_0 (\neq 0)$ 处的幂级数展开实际上化为函数 $g\ (x \longmapsto g(x) = f(x_0 + x), x_0$ - 在 $x = 0$ 处的幂级数的展开. 因此，今后如无特别指明，我们只限于讨论函数在 $x = 0$ 处的幂级数的展开问题.

由 § 2 知，函数 $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}, x \longmapsto \log(1+x), x \in (-1,1)$ 都在 $(-1,1)$ 上可按幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 展开.

3. 函数可展开为幂级数的必要条件

定理 13.12

若函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 在 $x=0$ 处可展开为幂级数，则 f 在 0 的一个邻域 U 内是 C^∞ 类的，并且这个幂级数就是

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

证明 根据假设，存在收敛半径 $R>0$ 的一个幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 及 0 的一个邻域 $U \subset I$ 使得

$$\forall x \in U, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

由于 $U \subset I$，故由定理13.11及其推论知，f 在 U 上是 C^∞ 类的. 并且 $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

定义 13.6

设 $f: I \to \mathbb{R}$ 是任一 C^∞ 类函数. $x_0 \in I$.

1. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 称为 f 在 x_0 处的 Taylor 级数.
2. 若 $x_0 = 0$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ 称为 f 的 Maclaurin 级数.

注 由上述定理可知，只有函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 在 0 或 x_0 的邻域内是 C^∞ 类函数时才有可能展开为幂级数，并且如果 f 能够展开为幂级数，则这个幂级数就是唯一的，它就是 f 的 Maclaurin 级数或在 x_0 处的 Taylor 级数.

但必须注意，不是任何一个 C^∞ 类函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 都可在 0 处展开为 Maclaurin 级数 (或在 x_0 处的 Taylor 级数) 的. 因为这里有两个问题：

1) f 的 Maclaurin 级数或在 x_0 处的 Taylor 级数的收敛半径 R 是否大于零.

2) 如果收敛半径 $R>0$，f 是否可以展开为 Maclaurin 级数 (或在 x_0 处的 Taylor 级数)，即是否存在 0 (或 x_0) 的一个邻域 U，使得

$$\forall x \in U, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\left(\text{或 } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right).$$

例如我们考虑函数

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

在第 6 章 §2 的例 8 中我们已经证明了 f 在 $\mathbb{R}$ 上是 C^{∞} 类的，并且

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0.$$

如果此函数 f 可以展开为 Maclaurin 级数，则存在 0 的一个邻域 U 使得

$$\forall x \in U, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0.$$

这显然是矛盾的，因为由 f 的定义知，$\forall x \neq 0, f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \neq 0$. 因此，虽然 f 是 C^{∞} 类的，它的 Maclaurin 级数的收敛半径 $R = +\infty$, 但 f 并不能展开为 Maclaurin 级数.

下面我们来研究函数可展开为幂级数的充分条件.

4. 函数展开为幂级数的充分条件

设 $f: I \to \mathbb{R}$ 是任一 C^{∞} 类函数. 令

$$S_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, r_n(x) = f(x) - S_n(x).$$

定理 13.13

设 $f: I \to \mathbb{R}$ 是任一 C^{∞} 类函数. $0 \in I$. f 在 I 上可展开为 Maclaurin 级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ 的充分必要条件是：

$$\forall x \in I, r_n(x) \to 0 (n \to +\infty).$$

这里 $r_n(x)$ 称为 f 的 n 阶 Maclaurin 余项

证明 (必要性) 假设 $\forall x \in I, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. 那么 $\forall x \in I$,

$$r_n(x) = f(x) - S_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}x^{n+2} + \cdots.$$

由于级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ 收敛，所以它的 n 阶余项

$$r_n(x) \to 0 (n \to +\infty).$$

(充分性) 设 $\forall x \in I, r_n(x) \to 0 (n \to +\infty)$, 那么

$$|f(x) - S_n(x)| = |r_n(x)| \to 0 (n \to +\infty).$$

因此 $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n (\forall x \in I)$.

定理 13.13是一个普遍原则，实际上经常用的是下述定理.

定理 13.14

设函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 是 C^{∞} 类的，并且 $0 \in I$. 若存在 $M > 0$ 使得

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \left| f^{(n)}(x) \right| \leqslant M,$$

则 f 在 I 上可展开为 Maclaurin 级数，即

$$\forall x \in I, f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^{n}.$$

证明 因为 $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N},\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M$, 所以

$$\left|r_{n}(x)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}(\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}).$$

因 $\lim\limits_{n \rightarrow+\infty} \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}=0$, 从而 $r_{n}(x) \rightarrow 0(n \rightarrow+\infty)$. 根据定理13.13知，$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^{n}(\forall x \in I)$.

注 $\forall x_{0} \subseteq I$, 具需作变换 $x=y+x_{0}$ 即可证 f 在 I 上可展开为在 x_{0} 处的 Taylor 级数，即

$$\forall x \in I, f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}\left(x_{0}\right)}{n!}\left(x-x_{0}\right)^{n}$$

5. 幂级数展开的运算

定理 13.15

没 $I, J \subset \mathbb{R}$ 是任意两个开区间，$0 \in I \cap J$. 若函数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 与函数 $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ 在 0 处可展开为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{n} x^{n}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_{n} x^{n}$, 则

1)$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha f+\beta g: I \cap J \rightarrow \mathbb{R}$ 在 0 处可展开为幂级数，并且存在 0 的一个邻域 U 使得

$$(\alpha f+\beta g)(x)=\sum_{z=1}^{\infty}\left(\alpha a_{n}+\beta b_{n}\right) x^{n}, \forall x \in U.$$

2) 函数 $f g: I \cap J \rightarrow \mathbb{R}$ 在 0 处可展开为幂级数并且存在 0 的一个邻域 V 使得

$$(f g)(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_{0} b_{n}+a_{1} b_{n-1}+\cdots+a_{n} b_{0}\right) x^{n}, \forall x \in V.$$

证明 是定理13.3与定理13.4的直接推论.

习 题 13.3

1. 设 $X \subset \mathbb{R}$, 函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x)=\log \left(1+2 x+2 \sqrt{x(x+1)}\right), \forall x \in X.$$

   1) 确定 f 的定义域 X.
   2) f 可展开为 Maclaurin 级数吗？

2. 构造一个函数 $f:(-\infty,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, 使得：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^{n}, \forall x \geqslant 0, f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^{n}, \quad \forall x<0.$$

3. 考虑微分方程 $x^{3} y^{\prime}+2 y-x^{3}=0$.
   1) 证明：此微分方程存在唯一解 (在适当意义下).

2) 这个解能展开为 Maclaurin 级数吗?

13.4 常用函数的 Maclaurin 级数展开

现在我们来研究一些常用函数的 Maclaurin 级数的展开.

1. $x \longmapsto \sin x, x \in \mathbb{R}$ 的 Maclaurin 级数展开

i) 函数 $x \longmapsto \sin x, x \in \mathbb{R}$, 在 $\mathbb{R}$ 上是 C^{∞} 类的.

ii) 此函数的 Maclaurin 级数为

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

其收敛半径 $R = +\infty$.

iii) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \left|\sin^{(n)}(x)\right| = \left|\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1$.

因此根据定理13.14知, 此正弦函数 $x \longmapsto \sin x, x \in \mathbb{R}$, 在 $\mathbb{R}$ 上可展开为 Maclaurin 级数, 即

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. $x \longmapsto \cos x, x \in \mathbb{R}$ 的 Maclaurin 级数展开

i) 函数 $x \longmapsto \cos x, x \in \mathbb{R}$, 在 $\mathbb{R}$ 上是 C^{∞} 类的.

ii) 此函数的 Maclaurin 级数为

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

其收敛半径 $R = +\infty$.

iii) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \left|\cos^{(n)} x\right| = \left|\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1$.

因此根据定理13.14知, 余弦函数 $x \longmapsto \cos x, x \in \mathbb{R}$, 在 $\mathbb{R}$ 上可展开为 Maclaurin 级数, 即

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. $x \longmapsto \mathrm{e}^x, x \in \mathbb{R}$ 的 Maclaurin 级数展开

i) 指数函数 $x \longmapsto \mathrm{e}^x, x \in \mathbb{R}$, 在 $\mathbb{R}$ 上是 C^{∞} 类的.

ii) 此函数的 Maclaur in 级数为 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, 其收敛半径 $R = +\infty$.

iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, 其 n 阶 Maclaurin 余项 $r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\theta x}$, 这里 $0 < \theta < 1$, 因此

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{|x|} (\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}).$$

而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{|x|}$ 收敛, 故 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{|x|} = 0$, 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n(x) = 0$.

根据定理13.13知, 指数函数 $x \longmapsto \mathrm{e}^x, x \in \mathbb{R}$, 在 $\mathbb{R}$ 上可展开为 Maclaurin 级数, 即.

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. $x \longmapsto a^x, x \in \mathbb{R} (0 < a \neq 1)$ 的 Maclaurin 级数展开

因为 $a^x = \mathrm{e}^{x \log a}, \forall x \in \mathbb{R}$. 所以由 e^x 的展开式知, 指数函数 $x \to a^x, x \in \mathbb{R}$, 在 $\mathbb{R}$ 上可展开为

Maclaurin 级数，并且

$$a^x=\mathrm{e}^{x\log a}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x\log a)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\log^n a}{n!}x^n.$$

因此

$$a^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\log^n a}{n!}x^n,\forall x\in\mathbb{R}$$

5. $x\longmapsto(1+x)^\alpha, x>-1$ 的 Maclaurin 级数展开

i) 函数 $x\to(1+x)^\alpha, x>-1$, 在 $(-1,+\infty)$ 上是 C^∞ 类的.

ii) 此函数的 Maclaurin 级数为

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,$$

其收敛半径 $R=1$.

iii) 在开区间 $(-1,1)$ 上考虑此函数的 n 阶积分型 Maclaurin 余项

$$\begin{aligned}r_n(x)&=\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+t)^{\alpha-n-1}\mathrm{d}t\\&=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n(1+t)^{\alpha-1}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由于 $\forall x\in(-1,1)$, 函数 $t\to g(t)=\dfrac{x-t}{1+t}, t>-1$, 是单调下降的，并且 $g(0)=x, g(x)=0$, 所以 $\forall t\in[0,x]$ 或 $t\in[x,0]$, $|g(t)|\leqslant|x|$, 从而 $\forall x\in[0,1)$(对 $x\in(-1,0]$ 证明类似),

$$\begin{aligned}|r_n(x)|&\leqslant\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x\left|\frac{x-t}{1+t}\right|^n(1+t)^{\alpha-1}\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n\int_0^x(1+t)^{\alpha-1}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

因为级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n$ 在 $(-1,1)$ 上收敛 (D'Alembert 判别法), 所以 $\forall x\in(-1,1)$, $\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n$ $0(n\to+\infty)$, 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}r_n(x)=0$. 根据定理13.13 知，函数 $x\to(1+x)^\alpha, x>-1$, 在 $(-1,1)$ 上可展开为 Maclaurin 级数，即

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,\forall x\in(-1,1).$$

以下几个常用函数的 Maclaurin 级数展开可从已知幂级数通过逐项求积分来得到.

6. $x\longmapsto\log(1+x), x>-1$ 的 Maclaurin 级数展开

在 §2 的例13.10中，我们通过对幂级数

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$$

从 0 到 x 逐项求积分得到了函数 $x\to\log(1+x), x>-1$, 在 $(-1,\ 1]$ 上的 Maclaurin 级数，即

$$\log(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}, x\in(-1,1]$$

7. $x\longmapsto\arcsin x, x\in(-1,1)$ 与 $x\to\arccos x, x\in(\ 1,1)$ 的 Maclaurin 级数展开

首先由函数 $x \longmapsto (1+x)^{\alpha}, x > -1$ 的 Maclaurin 级数得到 $\forall x \in (-1,1)$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \cdots \cdot 2n} x^n.$$

由此推得

$$\forall x \in (-1,1), \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$$

另一方面，由于 $\forall x \in (-1,1), \arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t$, 故由定理13.10并对上述幂级数逐项求积分得

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^r \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

因为 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in (-1,1)$, 所以我们得到反正弦与反余弦函数的 Maclaurin 级数：

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \forall x \in (-1,1) \\ \arccos x &= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \forall x \in (-1,1)\end{aligned}$$

8. $x \longmapsto \arctan x, x \in [-1,1]$ 与 $x \longmapsto \operatorname{arccot} x, x \in [-1,1]$ 的 Maclaurin 级数展开

由于 $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t$, 并且由于

$$\forall t \in (-1,1), \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n},$$

故由定理13.10知，$\forall x \in (-1,1)$ 上可对此幂级数从 0 到 x 逐项求积分得到

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.\end{aligned}$$

再利用恒等式 $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} (\forall x \in \mathbb{R})$, 最后由 § 2 Abel 第二定理，我们得到反正切与反余切函数的 Maclaurin 级数：

$$\begin{aligned}\arctan x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \forall x \in [-1,1] \\ \operatorname{arccot} x &= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \forall x \in [-1,1]\end{aligned}$$

利用熟知函数的线性组合也可以得到一些常用函数的 Maclaurin 级数.

9. $x \longmapsto \sinh x, x \in \mathbb{R}$ 与 $x \longmapsto \cosh x, x \in \mathbb{R}$ 的 Maclaurin 级数展开

由于 $\sinh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right), \cosh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right), \forall x \in \mathbb{R}$, 并且

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ 及 } \mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!},$$

故由定理13.15知, 双曲正弦与双曲余弦函数在 $\mathbb{R}$ 上可以展开为 Maclaurin 级数. 并且

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

最后作为这一节的结束, 我们应用上述常用函数的 Maclaurin 级数计算一般函数的 Maclaurin 级数.

例题 13.11 将函数 $x \longmapsto \sin^2 x \cos x, x \in \mathbb{R}$ 展开成 Maclaurin 级数.

因为

$$\begin{aligned}\sin^2 x \cos x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \cos x \\ &= \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{4}\cos 3x - \frac{1}{4}\cos x \\ &= \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\cos 3x\end{aligned}$$

而 $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \forall x \in \mathbb{R}$, 所以

$$\cos 3x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^{2n} x^{2n}}{(2n)!}, \forall x \in \mathbb{R},$$

从而

$$\sin^2 x \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\left(1 - 3^{2n}\right)}{4(2n)!} x^{2n}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

例题 13.12 将函数 $x \longmapsto f(x) = \log(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}), x \in (1, 1)$ 展开成 Maclaurin 级数.

由于

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{-\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x^2}(-\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= -\frac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} - 1}{2x}, \forall x \neq 0,\end{aligned}$$

故 $f'(x) \to 0(x \to 0)$. 而对 $x = 0$, 直接由定义计算得

$$\begin{aligned}f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\log(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - \log 2}{x} = 0.\end{aligned}$$

因此 f' 在 $(-1, 1)$ 上有定义并且连续.

另一方面，由于 $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$，故

$$f'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} x^{2n-1}$$

由定理13.10, 对此幂级数从 0 到 x 逐项求积分得到

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t + \log 2 \\ &= \log 2 - \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} t^{2n-1}\mathrm{d}t \\ &= \log 2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2(n+1)}(n!)^2} \frac{x^{2n}}{n} \end{aligned}$$

或

$$\log(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) = \log 2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2(n+1)}(n!)^2} \frac{x^{2n}}{n}.$$

例题 13.13 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, 将函数 $x \mapsto f(x) = \cos(\alpha \arcsin x), x \in (-1,1)$ 展开为 Maclaurin 级数.

直接计算得到：$\forall x \in (-1,1)$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}} \sin(\alpha \arcsin x) \\ f''(x) &= -\frac{\alpha x}{(1-x^2)^{3/2}} \sin(\alpha \arcsin x) - \frac{\alpha^2}{1-x^2} \cos(\alpha \arcsin x) \end{aligned}$$

由此可知，f, f', f'' 满足下述等式：$\forall x \in (-1,1)$,

$$\sqrt{1-x^2} f''(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} f'(x) + \frac{\alpha^2}{\sqrt{1-x^2}} f(x) = 0,$$

或

$$(1-x^2) f''(x) - x f'(x) + \alpha^2 f(x) = 0, \forall x \in (-1,1). \tag{13.1}$$

由于 $f(x) = \cos(\alpha \arcsin x)$ 是 x 的偶函数，故 $f(x)$ 的 Maclaurin 级数中不含 x 的奇次幂的项，于是我们可以令 $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$. 由此得到

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_{2n} x^{2n-1} \\ f''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1) a_{2n} x^{2(n-1)} \end{aligned}$$

将它们代入等式(13.1)中得到

$$(1-x^2) \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1) a_{2n} x^{2(n-1)} - x \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_{2n} x^{2n-1} + \alpha^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n} = 0$$

或

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1)a_{2n}x^{2n-2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left[2n(2n-1)+2n-\alpha^2\right] a_{2n}x^{2n} + \alpha^2 a_0 = 0,$$

$$\alpha^2 a_0 + 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[2(n+1)(2n+1)a_{2n+2} - \left(4n^2-\alpha^2\right) a_{2n}\right] x^{2n} = 0.$$

将 $x=0$ 代人上式得到

$$2a_2 + \alpha^2 a_0 = 0$$

从而

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[2(n+1)(2n+1)a_{2n+2} - \left(4n^2-\alpha^2\right) a_{2n}\right] x^{2n} = 0$$

再用 x^2 除之，仿上我们可归纳地得到下述递推公式：

$$2(n+1)(2n+1)a_{2n+2} = \left(4n^2-\alpha^2\right) a_{2n}, n = 0, 1, 2, \cdots$$

由于 $f(0)=1$, 故 $a_0=1$, 从而

$$a_{2n} = \frac{(-4)^n}{(2n)!} \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{2}-n+1\right) \left(\frac{\alpha}{2}-n+2\right) \cdots \left(\frac{\alpha}{2}+n-1\right)$$

因此

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!} \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{2}-n+1\right) \left(\frac{\alpha}{2}-n+2\right) \cdots \left(\frac{\alpha}{2}+n-1\right) x^{2n}$$

不难证明上式右边的幂级数的收敛半径 $R=1$. 故最后我们得到函数

$$x \longmapsto \cos(\alpha \arcsin x), x \in (-1, 1)$$

的 Maclaurin 级数为：

$$\cos(\alpha \arcsin x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!} \frac{\alpha}{2} (\frac{\alpha}{2}-n+1) \times (\frac{\alpha}{2}-n+2) \cdots (\frac{\alpha}{2}+n-1) x^{2n}, \forall x \in (-1, 1)$$

✍ 习题 13.4

1. 直接利用常用函数的 Maclaurin 级数，将下列各函数 f 展开成 Maclaurin 级数.

   1) $f(x) = \cos^3 x$　　2) $f(x) = \log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

   3) $f(x) = (1+x^2)\cosh x$　　4) $f(x) = x \arcsin x - \sqrt{1+x^2}$

2. 利用逐项求积分方法，将下列各函数 f 展开成 Maclaurin 级数.

   1) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$　　2) $f(x) = \arcsin(1-2x^2)$

   3) $f(x) = \log\left(\dfrac{1}{2+2x+x^2}\right)$　　4) $f(x) = \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

3. 用例 13.13 的方法将下列各函数 f 展开成 Maclaurin 级数：

   1) $f(x) = (\arcsin x)^2$　　2) $f(x) = (\arctan x)^2$

4. 利用常用函数的 Maclaurin 级数，计算下列各幂级数或数项级数的和.

1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2n+1} x^{2n+1}$ 2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n}{(2n+1)!} x^{n}$

3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{4n+1}$ 4) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(6n+2)(6n+5)}$

5. 设 $a \in \mathbb{R}$, $|k| < 1$. 考虑第一类椭圆积分

$$F(a,k) = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} \mathrm{d}x.$$

证明：

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}\right)^2 k^{2n}\right).$$

13.5 复指数函数

1. 复指数函数的定义

在上一节里，我们证明了指数函数 $x \longmapsto \mathrm{e}^x, x \in \mathbb{R}$, 在 $\mathbb{R}$ 上可展开为 Maclaurin 级数：

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \forall x \in \mathbb{R}.$$

由于 $\forall z \in \mathbb{C}$, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ 收敛，故很自然地我们可以引进下述定义.

定义 13.7

$\forall z \in \mathbb{C}$, 令

$$\mathrm{e}^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

则我们称如此定义的函数 $z \mapsto \mathrm{e}^z, z \in \mathbb{C}$, 为复指数函数.

♣

2. 复指数函数的基本性质

定理 13.16

$\forall z, z' \in \mathbb{C}$, 我们有

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ 是绝对收敛的，并且 $|\mathrm{e}^z| \leqslant \mathrm{e}^{|z|}$.
2. $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{z'}$.
3. $\mathrm{e}^z \neq 0$.
4. $\mathrm{e}^{z-z'} = \dfrac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^{z'}}$.
5. $\forall n \in \mathbb{Z}, \left(\mathrm{e}^z\right)^n = \mathrm{e}^{nz}$.

♡

证明 1) 由于 $\left|\dfrac{z^n}{n!}\right| = \dfrac{|z|^n}{n!}$, 而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{|z|^n}{n!} = \mathrm{e}^{|z|}$, 故级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\dfrac{z^n}{n!}\right|$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ 绝对收敛.

其次，我们有

$$|\mathrm{e}^z| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \mathrm{e}^{|z|}$$

2) 由于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 绝对收敛，故我们有

$$
\begin{aligned}
e^z \cdot e^{z'} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z'^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{z'}{1!} + \frac{z^{n-1}}{(n-2)!} \cdot \frac{z'^2}{2!} + \cdots + \frac{z \cdot z'^{n-1}}{1 \cdot (n-1)!} + \frac{z'^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(z^n + \frac{n!}{1!(n-1)!} z^{n-1} z' + \frac{n!}{2!(n-2)!} z^{n-2} z'^2 + \cdots + z'^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z + z')^n \\
&= e^{z+z'}
\end{aligned}
$$

3) 由 2) 我们有 $e^z \cdot e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$, 故 $e^z \neq 0$.

4) 由 $e^z \cdot e^{-z} = 1$ 得到 $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$. 所以

$$
\frac{e^x}{e^{z'}} = e^z \cdot e^{-z'} = e^{z-z'}
$$

5)$\forall n \in \mathbb{N}, (e^z)^n = e^z \cdot e^z \cdots \cdot e^z = e^{z+z+\cdots+z} = e^{xz}$. 若 $n \in$ -N，则令 $m = -n$, 则 $m \in \mathbb{N}$, 从而

$$
(e^z)^n = (e^z)^{-m} = \frac{1}{(e^z)^m} = \frac{1}{e^{mz}} = e^{-mz} = e^{nz}
$$

若 $n = 0$, 则 $(e^z)^0 = 1 = e^{0z}$.

因此 $\forall n \in Z, (e^z)^n = e^{nz}$.

3. 三角函数的分析定义

下面我们利用复指数函数严格定义在中学里借助于几何角的概念定义的三角函数.

1) 正弦函数 sin 与余弦函数 cos 的定义

在 e^z 中，取 $z = ix, x \in \mathbb{R}$. 则我们得到

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= \sum_{n=0}^{+\infty y} \frac{(ix)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{in+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

等式右边两个幂级数的收敛半径 $R = +\infty$. 令

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (x \in \mathbb{R})
\end{aligned}
$$

定义 13.8

如上定义的函数 $x \longmapsto \cos x, x \in \mathbb{R}$ 与 $x \longmapsto \sin x, x \in \mathbb{R}$, 分别称为余弦函数与正弦函数. ♣

2) cos 与 sin 的基本性质

定理 13.17

对于余弦函数 cos 与正弦函数 sin 下述性质成立:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$. (Euler 公式)
2. cos 是偶函数, sin 是奇函数, 且在 $\mathbb{R}$ 上连续.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, |\cos x| \leqslant 1, |\sin x| \leqslant 1, \cos 0 = 1, \sin 0 = 0.$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos' x = -\sin x, \sin' x = \cos x.$
5. 存在最小正数 $x^* > 0$, 使得 $\cos x^* = 0$.

证明 1),2) 由 cos, sin 的定义直接推出.

3) $\cos 0 = 1, \sin 0 = 0$ 显然. 为了证明 $|\cos x| \leqslant 1, |\sin x| \leqslant 1$, 我们首先注意到

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \cos(-x) + \mathrm{i}\sin(-x) = \cos x - \mathrm{i}\sin x = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}},$$

因此 $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right|^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \cdot \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

而 $|\mathrm{e}^x|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$, 故 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, 从而

$$|\cos x| \leqslant 1, |\sin x| \leqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

4) 因为 $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ 及

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

的收敛半径都是 $+\infty$, 所以可逐项求导, 从而

$$\begin{aligned}
\cos' x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)' \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin x, \\
\sin' x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x.
\end{aligned}$$

5) 首先我们证明存在 $x > 0$ 使得 $\cos x = 0$.

用反证法. 假设 $\forall x > 0, \cos x \neq 0$. 由于 $\cos 0 = 1$ 知, $\cos x > 0 (\forall x > 0)$, 从而 $\forall x > 0, \sin' x > 0$. 于是函数 sin 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调上升, 而 $\sin 0 = 0$, 所以 $\forall x > 0, \sin x > 0$.

另一方面, 由于 $\cos' x = -\sin x (\forall x \in \mathbb{R})$, 故 $\forall x > 0, \cos' x < 0$, 从而函数 cos 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调下降, 于是 $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x = y_0 \geqslant 0$ 存在并且有限.

若 $y_0 > 0$, 则 $\sin x = \sin 0 + \displaystyle\int_0^x \sin' t \mathrm{d}t = \int_0^x \cos t \mathrm{d}t > y_0 x$. 于是 $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x = +\infty$. 达与 $|\sin x| \leqslant 1 (\forall x \in \mathbb{R})$ 矛盾.

若 $y_0 = 0$, 则由 $\cos' x = -\sin x$ 得到:

$$\forall x > 1, 1 - \cos x = \int_0^x -\cos' t \mathrm{d}t = \int_0^x \sin t \mathrm{d}t > \int_1^x \sin t \mathrm{d}t > (x-1)\sin 1$$

两边令 $x \to +\infty$ 即得到 $1 \geqslant +\infty$, 比矛盾兑明 $y_0 \neq 0$.

因此必存在 $x > 0$ 使得 $\cos x = 0$.

现在令 $E = \{x \in \mathbb{R}_*^+ \mid \cos x = 0\}$. 由于 cos 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 故 $E \subset \mathbb{R}$ 是闭集. 记 $x^* = \inf E$, 则 $x^* \in E$. 从而 $\cos x^* = 0$. 而 $\cos 0 = 1$, 故 $x^* > 0$.

定义 13.9

找们定义数 $\pi \in \mathbb{R}$ 为

$$\pi = 2x^*.$$

下面是 cos, sin 与 π 有关的性质.

定理 13.18

对于如上定义的数 π,

1. $\cos \frac{\pi}{2} = 0, \sin \frac{\pi}{2} = 1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$.
2. 复指数函数 $z \longmapsto \mathrm{e}^z, z \in \mathbb{C}$, 以 $2\pi\mathrm{i}$ 为周期.
3. 正弦函数与余弦函数 sin, cos 以 2π 为周期.

证明 1) 由 π 的定义知 $\cos \frac{\pi}{2} = \cos x^* = 0$. 又因为

$$1 = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right|^2 = \cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{2},$$

而在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内 $\cos x > 0$, 故由 $\sin' x = \cos x$ 知 sin 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上严格单调上升. 而 $\sin 0 = 0$, 故必有 $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

现在 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi}{2} = \mathrm{i}$, 所以

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}^2 = -1.$$

2) 因为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi + \mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = (-1)^2 = 1$, 所以

$$\forall z \in \mathbb{C}, \mathrm{e}^{z + \mathrm{i}2\pi} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{i2\pi} = \mathrm{e}^z,$$

因此函数 $z \longmapsto \mathrm{e}^z$ 以 $2\pi\mathrm{i}$ 为周期.

3) 因为 $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x + i2\pi} = \mathrm{e}^{i(x+2\pi)} = \cos(x + 2\pi) + \mathrm{i}\sin(x + 2\pi),$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x + i2\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x,$$

所以

$$\cos(x + 2\pi) + \mathrm{i}\sin(x + 2\pi) = \cos x + \mathrm{i}\sin x.$$

从而

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \sin(x + 2\pi) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

故 $\cos,\sin$ 都以 2π 为周期.

现在我们列出 $\cos,\sin$ 的两个运算性质.

定理 13.19

$\forall x,y\in\mathbb{R}$,

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

证明 根据 Euler 公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\cos y+\mathrm{i}\sin y,$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)}=\cos(x+y)+\mathrm{i}\sin(x+y),$$

而 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$, 所以

$$\begin{aligned}\cos(x+y)+\mathrm{i}\sin(x+y)=&(\cos x+\mathrm{i}\sin x)(\cos y+\mathrm{i}\sin y)\\=&\cos x\cos y-\sin x\sin y+\mathrm{i}(\sin x\cos y+\cos x\sin y).\end{aligned}$$

由此得到

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,$$

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

注 类似地我们还可以写出 $\cos,\sin$ 的其他运算公式. 根据上面对 $\cos,\sin$ 的讨论可知, 从分析的角度用级数定义的余素与正弦函数跟中学里从几何角度用角来定义的余弦与正弦函数的性质是完全一致的.

最后我们来研究复指数函数的核.

4. 复指数函数的核

首先介绍 e^z 的实部, 虚部系数, 模与辐角.

$\forall z\in\mathbb{C}$, 令 $z=x+\mathrm{i}y,x,y\in\mathbb{R}$, 则

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y.$$

因此

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^z\right)=\mathrm{e}^x\cos y,\\&\operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^z\right)=\mathrm{e}^x\sin y,\\&\mathrm{e}^z\text{ 的模 }|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^x,\\&\mathrm{e}^z\text{ 的辐角 }\arg\left(\mathrm{e}^z\right)=y(\bmod 2\pi).\end{aligned}$$

定理 13.20

复指数函数 $z\longmapsto\mathrm{e}^z,z\in\mathbb{C}$, 是从加群 $(\mathbb{C},+)$ 到乘法群 $(\mathbb{C}-\{0\},X)$ 上的满同态, 它不是单射, 并且它的核为 $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$.

证明 同态性由定理13.16的性质 2),3) 推出. 为了证明它的满射性, 设 $w\in\mathbb{C}-\{0\}$. 令

$$b=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),z=x+\mathrm{i}y,$$

由 $w=\mathrm{e}^z$ 我们得到

$$\mathrm{e}^x=r,y=\theta(\bmod 2\pi),$$

或

$$x = \log r, y = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

从而方程 $w = \mathrm{e}^z$ 的解 z 为

$$z = \log r + \mathrm{i}\theta + 2k\pi\mathrm{i}(k \in \mathbb{Z}).$$

因此复指数函数 $z \longmapsto \mathrm{e}^z, z \in \mathbb{C}$, 是满射.

因为 $z \longmapsto \mathrm{e}^z, z \in \mathbb{C}$, 以 $2\pi\mathrm{i}$ 为周期, 故它不是单射, 并且此映射的核为

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{e}^z = 1\}$$

取 $w = 1$, 于是 $r = 1, \theta = 0$, 从而

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid z = 2k\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z}\} = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}.$$

习题 13.5

1. 设 $z \in \mathbb{C}$ 且 $|z| = 1$. 证明：存在唯一的 $\theta \in [0, 2\pi]$ 使得 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = z$.
2. 在 $\mathbb{C}$ 上解方程 $\mathrm{e}^z = z$.
3. 设 $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, 且令

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

我们想证明存在 $z_0 \in \mathbb{C}$ 使得 $P_n(z_0) = 0$.

1) 令 $m = \inf\limits_{z \in \mathbb{C}} |P_n(z)| \geqslant 0$, 证明至少存在 $z_0 \in \mathbb{C}$ 使得 $|P_n(z_0)| = m$.

2) 假设 $P_n(z_0) \neq 0$, 令 $Q_n(z) = \dfrac{P_n(z + z_0)}{P_n(z_0)}$. 证明：存在最小整数 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 使得

$$Q_n(z) = b_n z^n + \cdots + b_k z^k + 1, b_k \neq 0.$$

3) 证明：存在 $\theta \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} b_k = -|b_k|$, 由此推出当 $r > 0$ 充分小时有 $|Q_n(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| < 1$.

4) 由此推出 $m = 0$, 从而 $P_n(z_0) = 0$.

4. 设 $a \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, 函数 $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义如下：

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x} \tan\frac{a}{2}\right).$$

1) 证明：$f_a'(x) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\dfrac{1}{x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}} - \dfrac{1}{x - \mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

2) 利用 Maclaurin 级数 $\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n (|z| < 1)$, 证明：

$$f_a'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin(n+1)a.$$

3) 由此导出函数 f_a 的 Maclaurin 级数.

第十四章 Fourier 级数

这一章我们首先介绍了一般内积空间的概念，然后介绍周期函数的 Fourier 级数展开，最后研究了 Fourier 级数的点态收敛与一致收敛性问题.

14.1 内积空间

在介绍内积空间概念之前，让我们从映射的角度来重新认识一下实数空间 $\mathbb{R}$ 中的乘积运算.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \text{令 } \langle x, y\rangle = x \cdot y.$$

于是我们定义了一个映射 $\langle,\rangle : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. 从实数的乘法运算性质可知，此映射 $\langle,\rangle$ 具有下述几个重要性质：

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle$；
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$；
3. $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \langle x, x\rangle > 0$.

我们把这个映射 $\langle,\rangle : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 称为实数空间 $\mathbb{R}$ 的内积. 这个概念是可以推广到一般向量空间中去的. 这就是下面介绍的内积空间概念.

1. 内积空间的概念

设 $K = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. H 是任一 K 向量空间

定义 14.1

一个映射 $\langle,\rangle : H \times H \to K$ 称为 H 上的内积，如果它具有下述性质：

1.)$\forall x, y, z \in H, \forall \lambda, \mu \in K, \langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle$；
2. $\forall x, y \in H, \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$(若 $K = \mathbb{R}$，则 $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$)；
3. $\forall x \in H, x \neq 0, \langle x, x\rangle > 0$.

具有内积 $\langle,\rangle$ 的向量空间 I 称为一个内积空间，简记为 $\langle H, \langle,\rangle\rangle$,

♣

例题 14.1 设 $H = \mathbb{R}^n (n \geqslant 1), \forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1 y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$，令

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

则容易验证如此定义的映射 $\langle,\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个内积 (在几何中也常记 $\langle x, y\rangle = x \cdot y$)，$(\mathbb{R}^n, \langle,\rangle)$ 也称为 Euclid 空间.

例题 14.2 设 $H = \mathbb{C}^n (n \geqslant 1). \forall z = (z_1, z_2, \cdots, z_n), w = (w_1, w_2, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n$, 令

$$\langle z, w\rangle = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + \cdots + z_n\overline{w_n}$$

则映射 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的一个内积，内积空间 $(\mathbb{C}^n, \langle,\rangle)$ 也称为 Hermit 空间.

例题 14.3 设 $H = \mathbb{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R}), \forall f, g \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$, 令

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

则此映射 $\langle,\rangle$ 是 $C^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$ 上的一个内积.

事实上，内积的性质 1)、2) 容易验证. 现设 $f \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$ 并且 $\langle f, f\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} (f(x))^2\mathrm{d}x = 0$.

由 f 的连续性推知，$\forall x \in [0, 2\pi]$, $f(x) = 0$, 即 $f = 0$, 因此内积的性质 3) 也满足.

例题 14.4 ?? 考虑下述双边序列集合

$$l^2 = \left\{ \langle x_n \rangle = \langle \cdots x_{-n}, \cdots, x_{-1}, x_n, x_1, \cdots x_n \cdots \rangle \mid x_n \in K, (n \in \mathbb{Z}), \sum_{-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}.$$

我们在 l^2 上定义加法与数乘运算如下：

$$\forall \langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle \in l^2, \forall \lambda, \mu \in K, \langle x_n \rangle + \langle y_n \rangle \triangleq \langle x_n + y_n \rangle, \lambda \langle x_n \rangle \triangleq \langle \lambda x_n \rangle.$$

显然，这样定义是完全有意义的，因为

$$\begin{aligned} |x_n + y_n|^2 &\leqslant (|x_n| + |y_n|)^2 = |x_n|^2 + |y_n|^2 + 2|x_n||y_n| \\ &< 2\left(|x_n|^2 + |y_n|^2\right) |\lambda x_n|^2 = |\lambda|^2 |x_n|^2. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &\sum_{-\infty}^{+\infty} |x_n + y_n|^2 \leqslant 2\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 + \sum_{-\infty}^{+\infty} |y_n|^2\right) < +\infty \\ &\sum_{-\infty}^{+\infty} |\lambda x_n|^2 = |\lambda|^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty. \end{aligned}$$

因此 $\langle x_a + y_n \rangle, \lambda \langle x_n \rangle \in l^2$.

由上述加法与数乘定义可知，l^2 是一个 K —向量空间.

现在 $\forall x = \langle x_n \rangle, y = \langle y_n \rangle \in l^2$, 令

$$\langle x, y \rangle = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_n \bar{y}_n,$$

由于

$$|x_n y_n| \leqslant |x_n| |y_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(|x_n|^2 + |y_n|^2\right) (\forall n \in \mathbb{Z}),$$

故 $\sum_{-\infty}^{+\infty} |x_n y_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 + \sum_{-\infty}^{+\infty} |y_n|^2\right) < +\infty$, 因此我们定义了映射 $\langle , \rangle : l^2 \times l^2 \to K$.

容易验证此映射 $\langle , \rangle$ 是 l^2 上的一个内积. 因此 $(l^2, \langle \cdot \rangle)$ 是一个内积空间.

定理 14.1

设 H 是任一内积空间，则

$$\forall x, y \in H, |\langle x, y \rangle|^2 \leqslant \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle (\text{Schwarz 不等式})$$

证明 $\forall t \in K$, 我们有

$$0 \leqslant \langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + t\langle y, x \rangle + \bar{t}\langle x, y \rangle + t\bar{t}\langle y, y \rangle. \tag{14.1}$$

两边同乘以 $\langle y, y \rangle \geqslant 0$, 得到

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \langle x, x \rangle\langle y, y \rangle + t\langle y, x \rangle\langle y, y \rangle + \widetilde{t}\langle x, y \rangle\langle y, y \rangle + t\bar{t}\langle y, y \rangle^2 \\ &= \langle x, x \rangle\langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle\langle y, x \rangle + (\bar{t}\langle y, y \rangle + \langle y, x \rangle)(t\langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle). \end{aligned} \tag{14.2}$$

若 $\langle y, y \rangle \neq 0$, 我们将 $t = -\dfrac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ 代入上述不等式(14.2)中得到

$$0 \leqslant \langle x, x \rangle\langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle\langle y, x \rangle,$$

此即为

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

若 $\langle y, y\rangle = 0$, 则由内积性质 3) 知, $y = 0$, 故

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle x, 0\rangle \\ &= \langle x, 0\cdot x\rangle \\ &= 0\langle x, x\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

从而不等式也成立.

因此 Schwarz 不等式得证.

定理 14.2

设 H 是任一内积空间, 定义映射 $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}^+$ 如下:

$$\forall x \in H, \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

则 $\|\cdot\|$ 是 H 上的一个范数, 因此 $(H, \|\cdot\|)$ 是一个赋范向量空间.

证明 由于 $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$, 故 $\|x\| = 0 \iff x = 0$. 其次, $\forall\lambda \in K, \|\lambda x\| = \sqrt{\langle\lambda x, \lambda x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\|x\|$.

现在, $\forall x, y \in H$, 由内积性质及 Schwarz 不等式推得

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|y\| + | y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2,\end{aligned}$$

或

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

因此 $\|\cdot\|$ 是 H 上的一个范数. 从而 $(H, \|\cdot\|)$ 是一个赋范向量空间.

此范数 $\|\cdot\|$ 通常称为由 H 的内积 $\langle,\rangle$ 诱导出来的范数.

2. 内积空间的正规正交系

定义 14.2

设 H 是任一内积空间. $D = \mathbb{N}$ 或 $\mathbb{Z}$.

1. $\forall x, y \in H$, 我们称 x 与 y 是正交的, 记为 $x \perp y$, 若 $\langle x, y\rangle = 0$.
2. 设 $\langle x_n\rangle_{n\in D}$ 是 H 的一点序列, 我们称 $\langle x_n\rangle$ 是 H 的一个正交系, 若

$$\langle x_i, x_j\rangle = 0, \forall i, j \in D, i \neq j.$$

3. 我们称 $\langle x_n\rangle$ 是 H 的一个正规正交系, 若 $\langle x_n\rangle$ 是 H 的正交系, 并且 $\langle x_i, x_i\rangle = 1, \forall i \in D$.

下面是几个常见的正规正交系的例子.

例题 14.5 在 $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot\rangle)$ 中取

$$e_1 = (1,0,\cdots,0), e_2 = (0,1,\cdots,0), \cdots, e_n = (0,\cdots,0,1),$$

则 $\langle e_1, e_2, \cdots, e_n\rangle$ 是 $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot\rangle)$ 中的一个正规正交系, 通常称为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正规正交基.

例题 14.6 在上面例14.3的内积空间 $C^0([0,2\pi],\mathbb{R})$ 中取函数序列 $\langle 1, \cos nx, \sin nx\rangle, n \in Z-\{0\}$.

由于 $\langle 1,1\rangle = 1$, 并且 $\forall n, m \in \mathbb{Z}-\{0\}$,

$$\langle 1, \cos nx\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos nx\mathrm{d}x = 0$$

$$\langle 1, \sin nx\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin nx\mathrm{d}x = 0$$

$$\langle \cos nx, \cos mx\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos nx\cos mx\mathrm{d}x = \begin{cases}0, & m\neq n\\ 1, & m=n\end{cases}$$

$$\langle \sin nx, \sin mx\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin nx\sin mx\mathrm{d}x = \begin{cases}0, & m\neq n\\ 1, & m=n\end{cases}$$

$$\langle \cos nx, \sin mx\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos nx\sin mx\mathrm{d}x = 0$$

故 $\langle 1.\cos nx, \sin nx\rangle, n \in \mathbb{Z}-\{0\}$, 是内积空间 $C^0([0,2\pi],\mathbb{R})$ 的一个正规正交系.

例题 14.7 在例??的内积空间 l^2 中取

$$e_n = \langle \delta_i^n\rangle = \left\langle \cdots 0, \frac{1}{n}, 0, \cdots\right\rangle (n\in\mathbb{Z})$$

则 $\langle e_n\rangle_{n\in z}$ 是 l^2 中的一个正规正交系.

定理 14.3

设 H 是任一内积空间. 则

1. $\forall x, y \in H, \|x+y\|^3 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff \mathrm{Re}\langle x, y\rangle = 0$
2. 若 $x \perp y$, 则 $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. (Pythagore 等式)

证明 $\forall x, y \in H$, 直接计算得到

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 =& \langle x+y, x+y\rangle\\ =& \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle\\ =& \langle x,x\rangle + \overline{\langle y,x\rangle} + \overline{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle\\ =& \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \|y\|^2\\ =& \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2.\end{aligned}$$

由此可知, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ 当且仅当 $\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = 0$.

特别地, 若 x 与 y 正交, 则 $\langle x,y\rangle = 0$, 从而 $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

习题 14.1

1. 设映射 $\langle,\rangle : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 定义如下：

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \langle z, z'\rangle = \frac{1}{2}\left(z\overline{z'} + \overline{z}z'\right).$$

证明：$\langle , \rangle$ 是 $\mathbb{C}$ 上的一个内积.

2. 设 $(H, \langle , \rangle)$ 是任一复内积空间，x, y 是两个非零向量. 证明以下结论 (其中 $\|\cdot\|$ 由 $\langle , \rangle$ 诱导)：
   1) $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \iff \exists \lambda > 0$，使得 $y = \lambda x$.
   2) $\|x - y\| = \big|\|x\| - \|y\|\big| \iff \exists \lambda \geq 0$，使得 $y = \lambda x$.
   3) 对 $z \in H$，有
$$\|x - y\| = \|x - z\| + \|z - y\| \iff \exists \lambda \in [0, 1] \text{ 使得 } z = \lambda x + (1 - \lambda) y.$$

3. 设 H 是任一 K-向量空间，我们称映射 $\langle , \rangle : H \times H \to K$ 是 Hermite 形式，如果：
   1) $\forall x, y, z \in H,\ \forall \lambda, \mu \in K, \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$；
   2) $\forall x, y \in H$，$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

   证明：若 H 是 n 维 K-向量空间，则在 H 上存在 Hermite 形式 $\langle , \rangle$ 的充分必要条件是：存在 n^2 个数 $a_{ij} \in K$，使得
$$a_{ij} = \overline{a_{ji}}, (i, j = 1, 2, \ldots, n.)$$

4. 设 $(H, \langle , \rangle)$ 是任一内积空间. 证明：映射 $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \in H \times H$ 在 $H \times H$ 上连续.

5. 设 $(H, \langle , \rangle)$ 是任一内积空间，$\|\cdot\|$ 是由内积诱导的范数. 证明下述极化等式：
   1) 若 H 是实的，则 $\forall x, y \in H$，
$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right).$$
   2) 若 H 是复的，则 $\forall x, y \in H$，
$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2\right).$$

6. 设 H 是任一 K-向量空间，$\|\cdot\|$ 是 H 上的一范数. 证明此范数由 H 上某个内积导出的充分必要条件是满足平行四边形等式：
$$\forall x, y \in H, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$
(提示：证明充分性时利用上题的极化等式.)

7. 设 $p \neq 2$，$\ell^p = \left\{ x = \{x_n\} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}, x_n \in \mathbb{R}, \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}$，
$$\forall x = \langle x, \rangle \in \ell^p, \text{令 } \|x\| = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$
   1) 证明：$(\ell^p, \|\cdot\|)$ 是一个赋范向量空间.
   2) 证明：ℓ^p 不是内积空间 (即在 ℓ^p 上不存在内积).
   3) 类似证明：$(C^0([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ 不是内积空间.

8. 考虑复向量空间 $C^0([0, 1], \mathbb{C})$，定义映射
$$\langle , \rangle : C^0([0, 1], \mathbb{C}) \times C^0([0, 1], \mathbb{C}) \to \mathbb{C}\text{如下：}$$
$$\forall f, g \in C^0([0, 1], \mathbb{C}), \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, \mathrm{d}x.$$
   1) 证明：$\langle , \rangle$ 是 $C^0([0, 1], \mathbb{C})$ 上的一个内积.
   2) 设 $\|\cdot\|$ 是由内积 $\langle , \rangle$ ， $C^0([0, 1], \mathbb{C})$ 上的函数序列 $\langle f_n \rangle$：
$$f_t(x) = \min\left(n, x^{-\frac{1}{3}}\right), \forall x \in \ulcorner 0, 1 \urcorner, \forall n \in \mathbb{N}.$$

证明：$\langle f_n \rangle$ 是 $\left(C^0([0,1],\mathbb{C}),\|\cdot\|\right)$ 上的 Cauchy 序列.

3) 证明：$\langle f_n \rangle$ 关于 $\|\cdot\|$ 不收敛.

4) 由此推出 $\left(C^0([0,1],C),\|\cdot\|\right)$ 不是完备的.

9. 设 H 是任一内积空间, $A,B\subset H$ 是非空子集. 称 $A\perp B$, 若 $\forall x\in A$, $\forall y\in B$, 有 $\langle x,y\rangle=0$.

1) 证明：若 $A\perp B$, 则 A 的元素的任意有限线性组合正交于 B 的元素的任意有限线性组合.

2) 证明：若 $A\perp B$, 则 $\overline{A}\perp\overline{B}$(这里闭包 $\bar{A}$ 由内积 $\langle,\rangle$ $\quad$ $\|\cdot\|$ 导出).

3) 设 $A^{\perp}=\{x\in H\mid \forall y\in A,\ \langle x,y\rangle=0\}$. 证明：$A^{\perp}$ 是 H 的一个向量子空间.

4) 证明：$H^{\perp}=\{0\}$.

10. 设 H 是任一内积空间, $\langle x_n\rangle_n\in D$ 是 H 的任一正规正交系. 证明：$\langle x_n\rangle$ 是线性无关的, 即对任一有限集合 $I\subset D$, $\langle x_i\rangle_i\in I$ 是线性无关的.

11. 设 H 是任一内积空间, $\langle x_n\rangle_n\in_D$ 是它的任一正规正交系, 我们称它是完全的, 如果 $\forall x\in H$, 可以用 $\langle x_n\rangle$ 的有限线性组合逼近, 即

$$\forall x\in H,\forall\varepsilon>0,\exists\ \text{有限集}\ \boldsymbol{I}\subset D\ \ \text{以及}\ \ a_i\in\mathbb{K}(i\in I)\Longrightarrow x-\sum_{i\in 1}a_ix_i<\varepsilon.$$

1) 证明：若 H 是 K 上的有限 m 维向量空间, 则 $\langle x_n\rangle_n\in D$ 是完全正规正交系当且仅当 $\langle x_n\rangle_{\in}\in D$ 是正规正交基.

2) 取 $H=l^2$, 证明 $\langle e_n\rangle$ 是 l^2 的一个完全正规正交系.

12. 设 X 是任一 K 一向量空间, $M\subset X$ 是 T 一非空集合, 如果 M 的 N 一非空有限子集都是线性无关的, 则称 M 是线性无关的. 否则称 M 是线性相关的.

现设 $M\subset X$ 是一线性无关集, 如果 M 的所有有限元素的线性组合的全体, 记为 span M, 张成 X, 即 span $M=X$, 则我们称 M 是 X 的一个 Hamel 基. 我们承认每一个向量空间 $X\neq\varnothing$, 都有一个 Hamel 基. 试证明：l^2 空间的 Hamel 基是不可数集.

13. 在 $C^0([a,b],\mathbb{R})$ 中定义内积 $\langle,\rangle$

$$\forall f,g\in C^0([a,b],\mathbb{R}),\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

并且设 $\langle\varphi_n\rangle$ 是 $C^0([a,b],\mathbb{R})$ 的任一正规正交系, 证明下述各结论等价：

1) $\forall f,g\in C^n([a,b],\mathbb{R})$, 若 $\langle f,\varphi_n\rangle=\langle g,\varphi_n\rangle\,(\forall n\in\mathbb{N})$, 则 $f=g$.

2) $\forall f\in C^0([a,b],\mathbb{R})$, 若 $(f,\varphi_n\rangle=0(\forall n\in\mathbb{N})$, 则 $f=0$.

3) 设 $S\subset C^0([a,b],\mathbb{R})$ 是任一正规正交集 (即 $\forall f,g\in S,\langle f,f\rangle=1,\langle f,g\rangle=0$, 若 $f\neq g$). 若 $\{\varphi_n\mid n\in\mathbb{N}\}\subset S$, 则 $\{\varphi_n\mid n\in\mathbb{N}\}=S$.

14. 设 $\{\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,\cdots\}$ 是 $C^0([a,b],\mathbb{R})$ 的任一线性无关系, 我们归纳地定义一新函数系 $\{f_0,f_1,\cdots,f_s,\cdots\}$ 如下：

$$f_0=\varphi_0,f_{n+1}=\varphi_{n+1}-\sum_{k=0}^{n}a_kf_k,\ \text{这里}\ \ a_k=\langle\varphi_{n+1},f_k\rangle/\|f_k\|^2,k=0,1,2,\cdots,n.$$

其中 $\|\cdot\|$ 由内积 $\langle,\rangle$ 诱导.

1) 证明：$\forall n\geqslant 0$, f_{n+1} 与 $f_0,f_1,\cdots,f_n$ 的每一个正交, 这种使线性无关系变为正交系的选虽称为 Gram-Schmidt 正交化过程.

2) 应用 Gram-Schmidt 正交化过程求定义在区间 $[-1,1]$ 上的函数系 $\left\{1,x,x^2,\cdots,x^n,\cdots\right\}$ 的正交系.

3) 定义函数系 $\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, \cdots\}$ 如下：

$$\varphi_0(x) \equiv 1, \varphi_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n)} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

φ_n 称为 n 阶 Legendre 多项式. 证明：若 $\{g_n\}$ 为 2) 中所得的正交系，则

$$g_n(x) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}\varphi_n(x), \forall x \in [-1, 1].$$

14.2 Fourier 级数

1. 问题的提出

在第 13 章中我们研究了函数 f 按幂函数序列 $\langle x^n \rangle$ 进行 Maclaurim 级数展开的问题，我们知道，这只有 f 是 C^∞ 类函数才有可能. 因此对于非 C^∞ 类函数来说，寻找新的函数序列 $\langle \varphi_n \rangle$ 使之在某种收敛意义下能按 $\langle \varphi_n \rangle$ 进行展开就成为一个十分重要的研究课题.

最早研究这个问题的是法国数学家 Joseph Fourier，他提出将函数按函数序列 $\langle 1, \cos nx, \sin nx \rangle$ 展开成下述三角 Fourier 级数

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

这种形式的函数级数展开在许多实际问题中，例如在电脉冲波的研究、力学上的波动问题与热力学的热传导问题的研究中有广泛的应用.

Fourier 级数理论的研究至今仍然是数学家和其他自然科学家们十分感兴趣的研究内容. 这里我们只能对 Fourier 级数理论作一点简单介绍

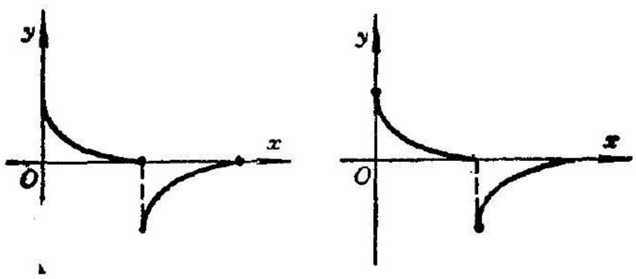


图 14.1

物理学中的电脉冲波都是周期的，并且图14.1中的两个脉冲波被看作同一个波. 这启发我们引进下面的所谓周期波空间的概念.

2. 周期波空间 $H[a, a+T](a \in \mathbb{R})$

我们用 $\mathscr{B}([a, a+T], \mathbb{C})$ 表示所有定义在 R 上以 $T > 0$ 为周期的周期复值函数在 $[a, a+T]$ 上的限制的集合.

$\forall f \in \mathscr{B}([a, a+T], \mathbb{C})$, f 的间断点集记为 D_f.

考虑 $\mathscr{B}([a, a+T], \mathbb{C})$ 的如下子集合：

$$\mathscr{A} = \left\{ f \in \mathscr{B}([a, a+T], \mathbb{C}) \mid f \text{ 有界且 } D_f \text{ 是零测度集} \right\}$$

于是 $\forall f \in \mathscr{A}$, f 在 $[a, a+T]$ 上 Riemann 可积.

现在我们在 $\mathscr{A}$ 上定义关系 “$\sim$” 如下：

$\forall f, g \in \mathscr{A}$, $f \sim g \Leftrightarrow$ 存在一个零测度集 $X \subset [a, a+T]$ 使得 $\forall x \notin X$, $f(x) = g(x)$.

容易验证 "$\sim$" 是 $\mathscr{A}$ 上的一个等价关系. 我们用 $H[a, a+T]$ 表示 $\mathscr{A}$ 关于 "$\sim$" 的商集 $\mathscr{A}/\sim$, 并称 $H[a, a+T]$ 为以 T 为周期的周期波空间. 于是

$\forall \widetilde{f} \in H[a, a+T]$, 若 $f_1, f_2 \in \widetilde{f}$, 则

$$\int_a^{a+T} f_1(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a+T} f_2(x)\mathrm{d}x$$

3.$H[a, a+T]$ 的内积

首先我们在 $H[a, a+T]$ 上定义加法与数乘运算加下 (易证这样定义是合理的):

$$\forall \widetilde{f}, \widetilde{g} \in H[a, a+T], \forall \lambda \in \mathbb{C}, \widetilde{f} + \widetilde{g} = \widetilde{f+g}, \lambda\widetilde{f} = \widetilde{\lambda f}.$$

显然 $H[a, a+T]$ 关于这个加法与数乘运算形成一个 $\mathbb{C}$-向量空间.

在定义 $H[a, a+T]$ 的内积之前, 先证明下述引理.

引理 14.1

设 $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in H[a, a+T]$, 则 $\forall f_i \in \widetilde{f}, \forall g_i \in \widetilde{g} (i = 1, 2)$,

$$\int_a^{a+T} f_1(x)\overline{g_1(x)}\mathrm{d}x = \int_a^{a+T} f_2(x)\overline{g_2(x)}\mathrm{d}x.$$

证明 令 $h = f_2 - f_1, k = g_2 - g_1$. 则存在两个零测度集 $X_1, X_2 \subset [a, a+T]$, 使得

$$h(x) = 0, \forall x \notin X_1; \quad k(x) = 0, \forall x \notin X_2.$$

令 $X = X_1 \cup X_2$, 则 $X \subset [a, a+T]$ 也是零测度集, 并且 $\forall x \notin X, h(x) = 0, k(x) = 0$, 从而

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f_2(x)\overline{g_2(x)}\mathrm{d}x &= \int_a^{a+T} [f_1(x) + h(x)]\,\overline{[g_1(x) + k(x)]}\mathrm{d}x \\ &= \int_a^{a+T} f_1(x)\overline{g_1(x)}\mathrm{d}x + \int_a^{a+T} f_1(x)\overline{k(x)}\mathrm{d}x + \int_a^{a+T} h(x)\overline{g_1(x)}\mathrm{d}x + \int_a^{a+T} h(x)\overline{k(x)}\mathrm{d}x \\ &= \int_a^{a+T} f_1(x)\overline{g_1(x)}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

(因为 $\forall x \in X$, $f_1(x)\overline{k(x)} = 0, h(x)\overline{g_1(x)} = 0, h(x)\overline{k(x)} = 0$)

这个引理说明 $\int_a^{a+T} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$ 是与 $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ 中的代表元选择无关的定值.

因此可定义映射 $\langle , \rangle : H[a, a+T] \times H[a, a+T] \to \mathbb{C}$ 如下:

$$\forall \widetilde{f}, \widetilde{g} \in H[a, a+T], \langle \widetilde{f}, \widetilde{g} \rangle = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x.$$

命题 14.1

如上定义的映射 $\langle , \rangle$: $H[a, a+T] \times H[a, a+T] \to \mathbb{C}$ 是 $H[a, a+T]$ 上的一个内积, 从而 $(H[a, a+T], \langle , \rangle)$ 是一个内积空间.

证明 设 $\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2,\widetilde{g}\in H[a,a+T],\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, 那么

$$\begin{aligned}\left\langle\lambda\widetilde{f}_1+\mu\widetilde{f}_2,\widetilde{g}\right\rangle=&\langle\lambda f_1+\mu f_2,\widetilde{g}\rangle\\=&\frac{1}{T}\int_a^{a+T}[\lambda f_1+\mu f_2](x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x\\=&\lambda\left(\frac{1}{T}\int_a^{a+T}f_1(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x\right)+\mu\left(\frac{1}{T}\int_a^{a+T}f_2(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x\right)\\=&\lambda\langle\widetilde{f},\widetilde{g}\rangle+\mu\left\langle\widetilde{f}_2,\widetilde{g}\right\rangle\\\langle\widetilde{f},\widetilde{g}\rangle=&\overline{\frac{1}{T}\int_a^{a}+\bar{f}f(x)g(x)\mathrm{d}x}\\=&\langle\widetilde{g},\widetilde{f}\rangle\end{aligned}$$

因此内积的性质 1)、2) 满足.

下面证明内积的性质 3), 即

$$\forall\widetilde{f}\in H[a,a+T]\text{ 且 }\widetilde{f}\neq 0,\langle\widetilde{f},\widetilde{f}\rangle>0.$$

假设 $\langle\widetilde{f},\widetilde{f}\rangle=\frac{1}{T}\int_a^{a+T}f(x)\overline{f(x)}\mathrm{d}x=0$. 首先我们注意到, 若 $x\in[a,a+T]$ 是 $f\bar{f}$ 的间断点, 则 x 也是 f 的间断点. 因此函数 ff 的间断点集 Y 包含在 f 的间断点集 D_f 中, 从而 Y 与 $\bar{Y}$ 也是零测度集.

下面我们证明 f 无在 $[a,a+T]-\bar{Y}$ 上为零.

事实上, 若存在 $x_0\in[a,a+T]-\bar{Y}$, 使得 $f(x_0)\bar{f}(x_0)\neq 0$, 则 $f(x_0)\vec{f}(x_0)>0$. 由于 $f\bar{f}$ 在 x_0 处连续, $[a,a+T]-\bar{Y}$ 为开集, 故存在 $\delta>0$ 使得 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset[a,a+T]-\bar{Y}$, 并且

$$\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta), f(x)\bar{f}(x)>\frac{1}{2}f(x_0)\bar{f}(x_0).$$

从而

$$\begin{aligned}\langle\widetilde{f},\widetilde{f}\rangle=\frac{1}{T}\int_a^{a+T}f(x)f(x)\mathrm{d}x\geqslant&\frac{1}{T}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)f(x)\\>&\frac{\delta}{T}f(x_0)\bar{f}(x_0)>0.\end{aligned}$$

这与假设 $\langle\widetilde{f},\widetilde{f}\rangle=0$ 相矛盾.

因此 $f\bar{f}$ 在 $[a,a+T]-\bar{Y}$ 上为零, 换句话说 $f\bar{f}$ 至多在 $\bar{Y}$ 上不为零. 所以 f 至多在 $\bar{Y}$ 上不为零, 故 $\bar{f}=0$.

注 为了书写简单起见, 今后我们记空间 $H[a,a+T]$ 中的元素 f 为 f, 并目就令

$$\langle f,g\rangle=\langle\widetilde{f},\widetilde{g}\rangle(\forall\widetilde{f},\widetilde{g}\in H[a,a+T]).$$

现在我们设 $\|\cdot\|$ 是由 $II[a,a+T]$ 上的内积 $\langle,\rangle$ 诱导出来的范数.

定理 14.4

$\forall f\in H[a,a+T]$.

$$\|f\|\leqslant\|f\|_\infty=\sup_{x\in[a,a+T]}|f(x)|$$

证明 直核由 $\|f\|$ 得到

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)\overline{f(x)}\mathrm{d}x \\ &=\frac{1}{T}\int_a^{a+T}|f(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant \left(\sup_{x\in[a,a+T]}|f(x)|\right)^2 \\ &= \|f\|_\infty^2\end{aligned}$$

注 由这个定理可知，若 $\langle f_n\rangle$ 是 $H[a,a+T]$ 中的一函数序列，并且 $\langle f_n\rangle$ 在 $[a,a+T]$ 上一致收敛于 $f\in H[a,a+T]$, 即

$$\|f_n-f\|_\infty\to 0(n\to+\infty),$$

则也有

$$\|f_n-f\|\to 0(n\to+\infty)$$

函数序列 $\langle f_n\rangle$ 依由内积 $\langle,\rangle$ 诱导出来的范数 $\|\cdot\|$ 收敛于 f 通常称为 $\langle f_n\rangle$ 在 $H[a,a+T]$ 上平均平方收敛于 f.

反过来，$H[a,a+T]$ 上的函数序列 $\langle f_n\rangle$ 平均平方收敛于 $f\in H[a,a+T]$, 不一定 $\langle f_n\rangle$ 在 $[a,a+T]$ 上一致收敛于 f.

例如考虑函数序列 $\langle f_n\rangle$, 这里

$$f_n(x)=n\sqrt{x}\mathrm{e}^{-n^2x},\forall x\in[0,1],\forall n\in\mathbb{N}.$$

则 $f_n\in H[0,1]$, 并且

$$\begin{aligned}\|f_n-0\| &= \int_0^1 f_n^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 n^2x\mathrm{e}^{-2n^2x}\mathrm{d}x \\ &=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2n^2}+\frac{1}{4n^2}\left(1-\mathrm{e}^{-2n^2}\right)\end{aligned}$$

因此 $\|f_n-0\|\to 0(n\to+\infty)$, 即 $\langle f_n\rangle$ 平均平方收敛于 $f=0$. 但是

$$\|f_n-0\|_\infty=\sup_{x\in\{0,1\}}|f_n(x)|=f_n\left(\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2e}},$$

从而 $\langle f_n\rangle$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛于 $f=0$.

4. $H[a,a+T]$ 的正规正交系

$\forall n\in\mathbb{Z}$, 我们定义函数 $e_n:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 如下：

$$\forall x\in\mathbb{R}, e_n(x)=\mathrm{e}^{\frac{2\pi nix}{T}}.$$

则 $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$e_n(x+T)=\mathrm{e}^{\frac{2\pi ni(x+T)}{T}}=\mathrm{e}^{\frac{2\pi nix}{T}}\cdot\mathrm{e}^{2\pi ni}=\mathrm{e}^{\frac{2\pi nix}{T}}=e_n(x),$$

因此 e_n 是以 T 为周期的周期复值函数. 从而它在 $[a,a+T]$ 上的限制 (我们仍记为 e_n)$\in H[a,a+T]$.

命题 14.2

$\langle e_n\rangle$ 是内积空间 $H[a,a+T]$ 的一个正规正交系.

证明 $\forall n, m \in \mathbb{Z}$, 直接计算得到

$$\begin{aligned}
\langle e_n, e_m \rangle =& \frac{1}{T}\int_a^{a+T} e_n(x)\overline{e_m(x)}\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{T}\int_a^{a+T} \mathrm{e}^{\frac{2\pi n \mathrm{i} x}{T}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-2\pi m \mathrm{i} x}{T}}\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{T}\int_a^{a+T} \mathrm{e}^{\frac{2\pi (n-m) \mathrm{i} x}{T}}\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{T}\left(\int_a^{a+T} \cos\frac{2\pi(n-m)x}{T}\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^{a+T} \sin\frac{2\pi(n-m)x}{T}\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

若 $n \neq m$, 则 $\langle e_n, e_m \rangle = 0$;

若 $n = m$, 则 $\langle e_n, e_m \rangle = 1$.

因此 $\langle e_n \rangle$ 是 $H[a, a+T]$ 的一个正规正交系.

定义 14.3

$\forall f \in H[a, a+T]$, 令

$$c_n = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{e}^{\frac{-2\pi n \mathrm{i} t}{T}} dt (n \in Z)$$

1. $\langle c_n \rangle$ 称为 f 关于 $\langle e_n \rangle$ 的 Fourier 系数序列.
2. $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n e_n$ 称为 f 关于 $\langle e_n \rangle$ 的 Fourier 级数.

下面我们要研究两个问题:

其一: $\forall f \in H[a, a+T]$, 是否在平均平方收敛意义下可按 $\langle e_n \rangle$ 展开为一个函数项级数 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} a_n e_n$, 即

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e_n, \text{ 这里 } a_n \in \mathbb{C}(n \in \mathbb{Z}).$$

其二: 如果可以展开, 此函数项级数 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} a_n e_n$ 是否就是 f 的 Fourier 级数, 即是否

$$a_n = c_n (\forall n \in \mathbb{Z}).$$

我们首先研究上述第二个问题.

5. 函数的 Fourier 级数展开的唯一性

定理 14.5

设 $f \in H[a, a+T]$, 若存在复数序列 $\langle a_n \rangle$ 使得在平均平方收敛意义下

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e_n$$

则 $a_n = c_n (\forall n \in \mathbb{Z})$.

证明 $\forall n \in \mathbb{Z}$, 令

$$f_n = \sum_{-n}^{n} a_k e_k$$

由假设，我们有 $\|f-f_n\| \to 0(n\to+\infty)$.

另一方面，由 Schwarz 不等式，$\forall m\in\mathbb{Z}$,

$$|\langle f-f_n, e_m\rangle|^2 \leqslant \|f-f_n\|\cdot\|e_m\| = \|f-f_n\|,$$

故 $\langle f-f_n, e_m\rangle \to 0(n\to+\infty)$.

现在取 $N\in\mathbb{N}$ 充分大，使得 $N>m$, 那么

$$\begin{aligned}
\langle f, e_m\rangle &= \langle f-f_N, e_m\rangle + \langle f_N, e_m\rangle\\
&= \langle f-f_N, e_m\rangle + \left\langle \sum_{-N}^{N} a_k e_k, e_m\right\rangle\\
&= \langle f-f_N, e_m\rangle + \sum_{-N}^{N} a_k \langle e_k, e_m\rangle\\
&= \langle f-f_N, e_m\rangle + a_m.
\end{aligned}$$

两边令 $N\to+\infty$ 取极限得到

$$c_m = \langle f, e_m\rangle = a_m.$$

现在我们来研究前面所提的第一个问题.

6. 函数的 Fourier 级数的可展开性

定理 14.6

$\forall f\in H[a,a+T]$, 在平均平方收敛意义下,

$$f=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e_n.$$

证明 为此我们只需证明

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant N)\Longrightarrow \left\| f-\sum_{-n}^{n} c_k e_k\right\| < \varepsilon.$$

证明分以下两步进行.

第一步：首先证明存在有限集 $I\subset Z$, 及常数 $a_i\in G(i\in I)$ 使得

$$\left| f-\sum_{i\in I} a_i e_i\right| | < \varepsilon/2$$

事实上，由于 f 在 $[a,a+T]$ 上 Riemann 可积，故存在两个阶梯函数 $h,k:[a,a+T]\to\mathbb{C}$ 使得

$$|f(x)-h(x)|\leqslant k(x), \forall x\in[a,a+T];\quad \int_a^{a+T} k(x)\mathrm{d}x < \frac{T\varepsilon^2}{72\,(1+\|f\|_\infty)}$$

于是

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)-h(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon^2}{72\,(1+\|f\|_\infty)}.$$

因此

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)-h(x)|^2 \mathrm{d}x \\ &\leqslant \|f-h\|_\infty \left(\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)-h(x)|\mathrm{d}x\right) \\ &< \frac{\varepsilon^2\|f-h\|_\infty}{72\,(1+\|f\|_\infty)}\end{aligned}$$

由于我们可以假设 $\|h\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$, 故

$$\|f-h\|^2 < \frac{2\varepsilon^2\|f\|_\infty}{72\,(1+\|f\|_\infty)} < \frac{\bar{\varepsilon}^2}{36},$$

或

$$\|f-h\| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

另一方面，由于阶梯函数 h 只有有限个间断点，故存在一个连续函数 $\varphi:[a,a+T]\to\mathbb{C}$ 使得

$$\|h-\varphi\| < \varepsilon/6$$

对连续函数 φ, 由复 Stone-Weierstrass 定理可知，存在有限集 $I\subset\mathbb{Z}$ 及常数 $a_i\in\mathbb{C}(i\in I)$ 使得

$$\left\|\varphi-\sum_{i\in I} a_i e_i\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{6}.$$

由此得到

$$\begin{aligned}\left\|\varphi-\sum_{i\in I} a_i e_i\right\|^2 &= \frac{1}{T}\int_a^{a+T}\left|\varphi(x)-\sum_{i\in I} a_i e_i(x)\right|^2 \mathrm{d}x \\ &< \frac{1}{T}\left\|\varphi-\sum_{i\in I} a_i e_i\right\|_\infty^2 \cdot T \\ &= \left\|\varphi-\sum_{i\in I} a_i e_i\right\|_\infty^2 < \frac{\ddot{\varepsilon}^2}{36},\end{aligned}$$

或

$$\left\|\varphi-\sum_{i\in I} a_i e_i\right\| < \frac{\bar{\varepsilon}}{6}.$$

因此最后我们得到

$$\|f-\sum_{i\in I} a_i e_i\| \leqslant \|f-h\|+\|h-\varphi\|+\left\|\varphi-\sum_{i\in I} a_i e_i\right\| < \varepsilon/6+\varepsilon/6+\varepsilon/6=\bar{\varepsilon}/2 \tag{14.3}$$

第二步：令 $g=\sum\limits_{i\in I} a_i e_i, d_n=\langle g,e_n\rangle\,(n\in\mathbb{Z})$, 我们来证明：

$$\left\|\sum_{-n}^{n}(c_k-d_k)\,e_k\right\| < \varepsilon/2.$$

事实上，由于 g 是 $\langle e_n\rangle$ 的元素的有限线性组合，故存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant N \implies \|g-\sum_{-n}^{n} d_k e_k\| = 0.$$

令 $h=f-g-\sum_{-n}^{n}(c_k-d_k)e_k$, 则

$$\begin{aligned}&\left\langle h,\sum_{-n}^{n}(c_k-d_k)e_k\right\rangle\\=&\left\langle f-g-\sum_{-n}^{n}(c_k-d_k)e_k,\sum_{-n}^{n}(c_k-d_k)e_k\right\rangle\\=&\left\langle f-g,\sum_{-n}^{n}(c_k-d_k)e_k\right\rangle-\left\langle\sum_{-n}^{n}(c_k-d_k)e_k,\sum_{-n}^{n}(c_k-d_k)e_k\right\rangle\\=&\sum_{-n}^{n}\overline{(c_k-d_k)}(c_k-d_k)-\sum_{-n}^{n}(c_k-d_k)\overline{(c_k-d_k)}\\=&0\end{aligned}$$

此即表明 h 与 $\sum_{-n}^{n}(c_k-d_k)e_k$ 正交, 从而由 Pythagore 等式得到

$$\|f-g\|^2=\|h\|^2+\left\|\sum_{-n}^{n}(c_k-d_k)e_k\right\|^2,$$

从而

$$\left\|\sum_{-n}^{n}(c_k-d_k)e_k\right\|<\|f-g\|<\bar{\varepsilon}/2 \tag{14.4}$$

现在综合上述不等式(14.3)与(14.4)得到: $\forall n\geqslant N$,

$$\begin{aligned}\left\|f-\sum_{-n}^{n}c_ke_k\right\|&\leqslant\|f-g\|+\left\|g-\sum_{-n}^{n}c_ke_k\right\|\\&<\varepsilon/2+\left\|\sum_{-n}^{n}(c_k-d_k)e_k\right\|\\&<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

推论 14.1

1. $\forall f\in H[a,a+T]$, f 的 Fourier 系数序列 $\langle c_n\rangle\in l^2$.
2. 映射 $TF: H[a,a+T]\to l^2$

$$\forall f\in H[a,a+T], TF(f)=\langle c_n\rangle$$

是等距映射.

证明 事实上, 由于映射 $f\longmapsto\|f\|$, $f\in H[a,a+T]$ 连续, 并且 $f=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{-n}^{n}c_ke_k$(在范数 $\|\cdot\|$ 意义下), 所以

$$\|f\|^2=\lim_{n\to+\infty}\left\|\sum_{-n}^{n}c_ke_k\right\|^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{-n}^{n}|c_k|^2=\sum_{-\infty}^{+\infty}|c_k|^2.$$

此即表明 $\langle c_n\rangle\in l^2$, 并且映射 TF 是等距映射.

推论 14.2 (Riemann 引理)

$\forall f \in H[a,a+T]$,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^{a+T} f(t)\cos\frac{2\pi n}{T}t\,\mathrm{d}t=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^{a+T} f(t)\sin\frac{2\pi n}{T}t\,\mathrm{d}t=0$$

证明 因为 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}|c_n|^2<+\infty$, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=0$, 而

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{e}^{-\frac{2\pi n\mathrm{i}}{T}t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos\frac{2\pi n}{T}t\,\mathrm{d}t-\frac{\mathrm{i}}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin\frac{2\pi n}{T}t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

故由此立即推得

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^{a+T} f(t)\cos\frac{2\pi n}{T}t\,\mathrm{d}t=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^{a+T} f(t)\sin\frac{2\pi n}{T}t\,\mathrm{d}t=0$$

7. 三角 Fourier 级数

我们用 $\widetilde{H}[a,a+T]$ 表示 $H[a,a+T]$ 中的全体实值函数组成的子空间, 下面研究 $\widetilde{H}[a,a+T]$ 中函数的 Fourier 级数展开问题.

1) 三角 Fourier 系数

$\forall f\in\widetilde{H}[a,a+T]$, 由于 $\bar{f}=f$, 故对 f 的 Fourier 系数 c_n 我们有:

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{e}^{-\frac{2\pi n\mathrm{i}t}{T}}\mathrm{d}t=\overline{\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{e}^{\frac{2\pi n\mathrm{i}t}{T}}\mathrm{d}t}\\&=\overline{\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{e}^{-\frac{2\pi(-n)\mathrm{i}t}{T}}\mathrm{d}t}\\&=\overline{c_{-n}}\end{aligned}$$

从而 f 的 Fourier 级数

$$\begin{aligned}\sum_{-\infty}^{+\infty}c_ne_n&=c_0+\sum_{-\infty}^{-1}c_ne_n+\sum_{1}^{+\infty}c_ne_n\\&=c_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(c_ne_n+c_{-n}e_{-n})\\&=c_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(c_ne_n+\bar{c}_n\bar{e}_n)\,.\end{aligned}$$

而

$$
\begin{aligned}
&(c_n e_n + \bar{c}_n \bar{e}_n)(x) \\
=&\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{e}^{\frac{2\pi n\mathrm{i}(x-t)}{T}}\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{e}^{\frac{2\pi n\mathrm{i}(x-t)}{T}}\mathrm{d}t \\
=&\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\left[\mathrm{e}^{\frac{2\pi n\mathrm{i}(x-t)}{T}} + \mathrm{e}^{-\frac{2\pi n\mathrm{i}(x-t)}{T}}\right]\mathrm{d}t \\
=&\frac{2}{T}\int_a^{a-T} f(t)\cos\frac{2\pi n(x-t)}{T}\mathrm{d}t \\
=&\left(\frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\right)\cos\frac{2\pi nt}{T}\mathrm{d}t\Bigg)\cos\frac{2n\pi x}{T} + \left(\frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\mathrm{d}t\right)\sin\frac{2n\pi x}{T}.
\end{aligned}
$$

所以，若我们令

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t, \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\mathrm{d}t, (n \in \mathbb{N}) \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

则 f 的 Fourier 级数 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n e_n$ 就化为下述形式的函数项级数：

$$
a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}\right).
$$

此级数称为 f 的三角 Fourier 级数，$a_0, a_n, b_n (n \in \mathbb{N})$ 称为 f 的三角 Fourier 系数.

2) 三角 Fourier 系数的性质

性质 14.1 设 $f \in \widetilde{H}\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$

1. 若 f 是奇函数，则 $a_n = 0 (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$，并且

$$
f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\frac{2n\pi}{T}x \text{ (在 } \|\cdot\| \text{意义下)}
$$

2. 若 f 是偶函数，则 $b_n = 0 (n \in \mathbb{N})$，并且

$$
f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{2n\pi}{T}x \text{ (在 } \|\cdot\| \text{意义下)}.
$$

.

证明 若 f 是奇函数，则

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{d}t = 0 \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}t\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}t\mathrm{d}t + \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}t\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}t\mathrm{d}t + \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}t\mathrm{d}t \\
&= 0
\end{aligned}
$$

若 f 是偶函数，则

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2n\pi}{T}t\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\sin\frac{2n\pi}{T}t\mathrm{d}t + \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2n\pi}{T}t\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2n\pi}{T}t\mathrm{d}t + \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2n\pi}{T}t\mathrm{d}t \\
&= 0
\end{aligned}
$$

因此当 f 为奇函数时，f 的三角 Fourier 级数中不含余弦项，当 f 为偶函数时，f 的三角 Fourier 级数中不含正弦项.

性质 14.2 [Bessel-Parseval 等式] $\forall f \in \widetilde{H}[a, a+T]$,

$$
a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{T}\int_c^{a+T} f^2(x)\mathrm{d}x.
$$

证明 由 f 的 Fourier 系数 c_n 我们得到

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{e}^{-\frac{2n\pi\mathrm{i}}{T}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}\mathrm{d}t - \mathrm{i}\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}\mathrm{d}t \\
&= \frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2} \\
c_{-n} &= \bar{c}_n = \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2}
\end{aligned}
$$

于是由定理14.6的推论知，$\forall f\in\widetilde{H}[a,a+T]$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_a^{a+T}f^2(x)\mathrm{d}x=\|f\|^2=\sum_{-\infty}^{+\infty}|c_n|^2\\&=c_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2+\sum_{n=1}^{\infty}|c_{-n}|^2\\&=a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n^2+b_n^2}{4}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n^2+b_n^2}{4}\right)\\&=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\end{aligned}$$

利用 Bessel-Parseval 等式可以计算某些数项级数的和.

例题 14.8 考虑如下定义的函数 $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$：

$$\forall x\in(-\pi,\pi),\ f(x)=x,\ f(-\pi)=f(\pi)=0.$$

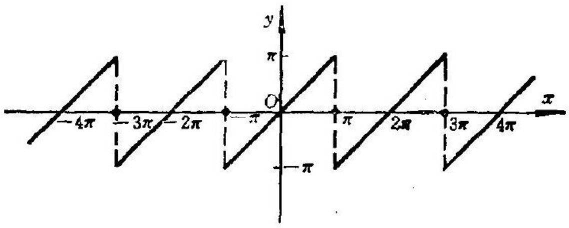


图 14.2

于是 $f\in\widetilde{H}[-\pi,\pi]$. 由于 f 是奇函数，故 $a_n=0,(n\in\mathbb{N}\cup\{0\})$, 直接计算得到

$$b_n=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\sin nt\mathrm{d}t=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}(\forall n\in\mathbb{N}),$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{3}.$$

因此，由 Bessel-Parseval 等式得到

$$\frac{\pi^2}{3}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^{n+1}\frac{2}{n}\right)^2=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2},$$

或

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

此函数 f 的三角 Fourier 级数为：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\sin nx}{n}.$$

由 Dirichlet 判别法可知，此级数在 $[-\pi,\pi]$ 上简单收敛. 但是否简单收敛于函数 f 本身，这有待于下一节进行讨论.

例题 14.9 考虑函数 $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, 这里

$$x\longmapsto f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1)\\0, & x\in[1,2]\cup\{0\}.\end{cases}$$

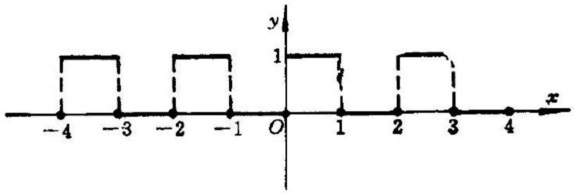


图 14.3

于是 $f \in \widetilde{H}[0,2]$. 直接计算得到

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}t = \frac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\cos n\pi t\mathrm{d}t = \int_1^1 \cos n\pi t\mathrm{d}t = 0$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\sin n\pi t\mathrm{d}t = \int_0^1 \sin n\pi t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1-\cos n\pi}{n\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}.$$

因此

$$b_{2n} = 0, b_{2n+1} = \frac{2}{(2n+1)\pi}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

由 Bessel-Parseval 等式得到

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} b_{2n+1}^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}$$

或

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

此函数 f 的三角 Fourier 级数为

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} b_{2n+1}\sin(2n+1)\pi x = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)\pi}\right).$$

当 $x=1$ 时, $\frac{1}{2}\left(1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)\pi}\right) = \frac{1}{2}$, $f(1)=0$, 因此

$$f(1) \neq \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi}{(2n+1)\pi}\right)$$

这就是说, f 的三角 Fourier 级数虽然平均平方收敛于 f, 但在 $[0,2]$ 上并不简单收敛于 f. 下一节我们将着重研究 Fourier 级数的点态收敛与一致收敛性问题.

习 题 14.2

1. 设 $\langle\varphi_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $H[a,a+T]$ 的任一正规正交系, $f \in H[a,a+T]$. 我们令

$$c_n = \langle f, \varphi_n\rangle \ (\forall n \in \mathbb{N}),$$

并称 $\langle c_n\rangle$ 是 f 关于 $\langle\varphi_n\rangle$ 的 Fourier 系数序列，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n\varphi_n$ 称为 f 关于 $\langle\varphi_n\rangle$ 的 Fourier 级数.

1) 证明：对任一复数序列 $\{a_n\}$，有
$$\left\|f-\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right\| \leqslant \left\|f-\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\right\| \ (\forall n\in\mathbb{N}).$$

2) 证明：$\sum_{n=1}^{+\infty}|c_n|^2$ 收敛，并且 $\sum_{n=1}^{+\infty}|c_n|^2 \leqslant \|f\|^2$(Bessel 不等式) .

3) 证明：$\left\|f-\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right\|$ 关于 n 单调下降，并且 $\left\|f-\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right\| \to 0(n\to+\infty)$ 的充分必要条件是
$$\sum_{n=1}^{+\infty}|c_n|^2=\|f\|^2(\text{Parseval 等式}) .$$

2. 设 $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ 是任一 Riemann 可积函数且满足 $f(-\pi)=f(\pi)$.

1) 证明：$\forall\varepsilon>0$，$\exists g\in C^0([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ 满足 $g(-\pi)=g(\pi)$，使得
$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g(x)]^2\,\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

2) 对此函数 f，类似定义 f 的三角 Fourier 级数 $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$. 证明 Parseval 等式成立：
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

3) 证明：$\forall x\in[-\pi,\pi]$,
$$\int_{-\pi}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{x}a_0\,\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{x}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\,\mathrm{d}t,$$
即可对 f 的 Fourier 级数逐项求积分.

3. 设 $f\in\widetilde{H}[-\pi,\pi]$ 并且 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上是 C^1 类的，$f(-\pi)=f(\pi)$，$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

1) 证明：$\|f\|\leqslant\|f'\|$.

2) 证明：$\|f\|=\|f'\|$ 当且仅当 $\forall x\in[-\pi,\pi]$，$f(x)=a\cos x+b\sin x$.（提示：应用 f 的 Parseval 等式. ）

4. 设 $f\in H[a,a+T]$，$g\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 并且以 T 为周期. 令 f 与 g 的卷积 $f*g$ 为：
$$f*g(x)=\frac{1}{T}\int_a^{a+T}f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t,\forall x\in[a,a+T].$$

1) 证明：$f*g\in H[a,a+T]$，并且 $f*g$ 连续.

2) 若令 $f_n=\langle f,e_n\rangle\ (n\in\mathbb{Z})$，证明 $(f*g)_n=f_n\cdot g_n$.

3) 证明：若 g 是 $\langle e_n\rangle$ 的元素的有限线性组合，则 $f*g$ 也是 $\langle e_n\rangle$ 的元素的有限线性组合.

4) 证明：若 $g\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$，则 $f*g\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

14.3 Fourier 级数的点态收敛与一致收敛

在 §2 中我们研究的是函数 f 的 Fourier 级数平均平方收敛于 f 的问题. 现在我们来讨论 Fourier 级数的点态收敛与一致收敛性.

1. Fourier 级数的点态收敛

设 $f \in H[a, a+T]$.$\forall n \in \mathbb{N}$, 令

$$S_n(f)(x) = \sum_{-n}^{n} c_k e_k(x), \forall x \in [a, a+T]$$

由于 $c_k = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\overline{e_k(t)}\mathrm{d}t$, 故

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{1}{T}\sum_{-n}^{n}\int_a^{a+T} f(t)\overline{e_k(t)}e_k(x)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\left(\sum_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi k i t}{T}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi k i x}{T}}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\left(\sum_{-n}^{n} \mathrm{e}^{\frac{2\pi k i(x-t)}{T}}\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

在简化 $S_n(f)(x)$ 的表达式之前, 我们首先证明下述引理.

引理 14.2

令 $D_n(t) = \displaystyle\sum_{-n}^{n} \mathrm{e}^{\frac{2k\pi t}{T}}$(称为 Dirichlet 核). 则

1. $D_n(t) = \dfrac{\sin\frac{\pi(2n+1)t}{T}}{\sin\frac{\pi t}{T}}$.
2. $1 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} D_n(t)\mathrm{d}t$.

证明 1) 直接计算得到

$$\begin{aligned} D_n(t) &= e_{-n}(t)\left[1 + e_1(t) + e_2(t) + \cdots + e_{2n}(t)\right] \\ &= \frac{e_{-n}(t)\left[1 - e_{2n+1}(t)\right]}{1 - e_1(t)} \\ &= \frac{e_{-n}(t) - e_{n+1}(t)}{1 - e_1(t)} \\ &= \frac{e_{\frac{1}{2}}(t)\left[e_{-n-\frac{1}{2}}(t) - e_{n+\frac{1}{2}}(t)\right]}{e_{\frac{1}{2}}(t)\left[e_{-\frac{1}{2}}(t) - e_{\frac{1}{2}}(t)\right]} \\ &= \frac{e_{-n-\frac{1}{2}}(t) - e_{n+\frac{1}{2}}(t)}{e_{-\frac{1}{2}}(t) - e_{\frac{1}{2}}(t)} \\ &= \frac{\sin\frac{\pi(2n+1)t}{T}}{\sin\frac{\pi t}{T}}. \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_a^{a+T} D_n(t)\mathrm{d}t =&\frac{1}{T}\int_a^{a+T}\sum_{-n}^{n} e_k(t)\mathrm{d}t\\ =&\frac{1}{T}\sum_{-n}^{n}\int_a^{a+T} e_k(t)\mathrm{d}t\\ =&\frac{1}{T}\sum_{-n}^{n}\left[\int_a^{a+T}\cos\frac{2\pi k t}{T}\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_a^{a+T}\sin\frac{2\pi k t}{T}\mathrm{d}t\right]\\ =&1.\end{aligned}$$

现在利用 Dirichlet 核，我们得到 f 的 Fourier 级数 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n e_n$ 的部分和 $S_n(f)$ 的下述简化表达式：

$$\begin{aligned}S_n(f)(x) &= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)D_n(x-t)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\frac{\sin\frac{\pi(2n+1)(x-t)}{T}}{\sin\frac{\pi(x-t)}{T}}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

下面我们来证明关于 Fourier 级数点态收敛的下述定理.

定理 14.7 (Dirichlet 定理)

设 $f\in H[a,a+T], x\in(a,a+T)$ 是一固定点，并且下述条件成立：

1. $f\left(x^{+}\right)$ 与 $f\left(x^{-}\right)$ 存在且有限.
2. 存在 $\eta>0, M>0$ 使得

$$\forall h\in\mathbb{R}, 0<h\leqslant\eta \Longrightarrow \begin{aligned}&\left|\frac{f(x+h)-f\left(x^{+}\right)}{h}\right|\leqslant M,\\ &\left|\frac{f(x-h)-f\left(x^{-}\right)}{-h}\right|\leqslant M.\end{aligned}$$

则 f 的 Fourier 级数 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n e_n$ 在 x 处收敛，并且

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e_n(x)=\frac{f\left(x^{+}\right)+f\left(x^{-}\right)}{2}.$$

证明 令 $A=\frac{1}{2}\left[f\left(x^{+}\right)+f\left(x^{-}\right)\right]$，根据上述引理14.2，我们有：

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) - A &= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)D_n(x-t)\mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_a^{a+T} AD_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} [f(x-t)-A]D_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(x-t)-A]D_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} [f(x-t)-A]D_n(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^{T/2} [f(x-t)-A]D_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} [f(x+t)-A]D_n(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^{T/2} [f(x-t)-A]D_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} [f(x+t)+f(x-t)-2A]D_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} [f(x+t)+f(x-t)-2A]\frac{\sin\frac{\pi(2n+1)t}{T}}{\sin\frac{\pi t}{T}}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

注意这里函数 $t \mapsto \dfrac{\sin\frac{\pi(2n+1)t}{T}}{\sin\frac{\pi t}{T}}, t \in (0, \dfrac{T}{2}]$ 当 $t \to 0$ 时极限为 $(2n+1)$, 因此我们可以将它延拓到 $t = 0$, 从而可以假定此函数在整个 $[0, \dfrac{T}{2}]$ 上有定义.

现在我们令

$$I_1 = \frac{1}{T}\int_0^{\delta} [f(x+t)+f(x-t)-2A]\frac{\sin\frac{\pi(2n+1)t}{T}}{\sin\frac{\pi t}{T}}\mathrm{d}t$$

$$I_2 = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} [f(x+t)+f(x-t)-2A]\frac{\sin\frac{\pi(2n+1)t}{T}}{\sin\frac{\pi t}{T}}\mathrm{d}t$$

对于积分 I_1, 取 $0 < \delta < \eta$, 则由已知条件有

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leqslant \frac{1}{T}\int_0^{3} |f(x+t)+f(x-t)-2A|\left|\frac{\sin\frac{\pi(2n+1)t}{T}}{\sin\frac{\pi t}{T}}\right|\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{T}\int_0^{1} \frac{2Mt}{\sin\frac{\pi t}{T}}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

另一方面, 由于 $\left|\sin^{\pi t}\right| \leqslant \left|\dfrac{\pi t}{T}\right|$ 且 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin\frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}} = 1$, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists < \delta < \min\left(\eta, \dfrac{\pi\varepsilon}{8M}\right)$ 使得

$$\forall t \in [0, \delta], \left|\frac{t}{\sin\frac{\pi t}{T}}\right| < 2\frac{T}{\pi},$$

从而

$$|I_1| \leqslant \frac{1}{T}\int_0^{3} 2M \cdot 2\frac{T}{\pi}\mathrm{d}t = -\frac{4M\delta}{\pi} < \frac{\bar{\varepsilon}}{2}.$$

对于积分 I_2. 我们他它写成下述两个积分和的形式:

$$\begin{aligned}
I_2 = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} & \frac{f(x+t)+f(x-t)-2A}{\sin\frac{\pi t}{T}}\left[\cos\frac{\pi t}{T}\sin\frac{2n\pi t}{T} + \sin\frac{nt}{T}\cos\frac{2n\pi t}{T}\right]\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{\pi/2} [f(x+t)+f(x-t)-2A]\cot\frac{\pi t}{T}\sin\frac{2n\pi t}{T}\mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{1}{T}\int_0^{T/2} [f(x+t)+f(x-t)-2A]\cos\frac{2n\pi t}{T}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

现在定义两个新的函数 $\varphi, \psi : \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \to \mathbb{C}$ 如下：

$$\varphi(t) = \begin{cases} [f(x+t)+f(x-t)-2A]\cot\frac{\pi t}{T}, & t \in [\delta, \frac{T}{2}]; \\ 0, & t \in [-\frac{T}{2}, \delta) \end{cases}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} f(x+t)+f(x-t)-2A, & t \in [\delta, \frac{T}{2}]; \\ 0, & t \in [-\frac{T}{2}, \delta) \end{cases}$$

并且将 φ, ψ 周期延拓到整个 $\mathbb{R}$ 上，则 $\varphi, \psi \in H\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$，并且有

$$I_2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\varphi(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\psi(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}\mathrm{d}t$$

根据定理14.6的推论14.2知，

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N \Longrightarrow & \left|\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\varphi(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}\mathrm{d}t\right| < \frac{\varepsilon}{4}, \left|\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\psi(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}\mathrm{d}t\right| < \frac{\varepsilon}{4} \\ & \Longrightarrow |I_2| < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

综合上述对 I_1 与 I_2 的估计我们最后得到

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow |S_n(f)(x) - A| &< |I_1| + |I_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \widehat{\varepsilon}. \end{aligned}$$

此即表明 f 的 Fourier 级数 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n e_n$ 在 x 处收敛，并且有和

$$A = \frac{1}{2}\left[f\left(x^+\right) + f\left(x^-\right)\right].$$

推论 14.3

若函数 $f \in H[a, a+T]$ 在 $x \in]a, a+T[$ 处连续，并且 $f'\left(x^+\right)$ 与 $f'\left(x^-\right)$ 存在且有限，则

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e_n(x)$$

特别地若 $f \in \widetilde{H}[a, a+T]$，则

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}\right).$$

证明 因为 f 在 x 处连续，所以 $f\left(x^+\right) = f\left(x^-\right) = f(x)$，从而 $A = f(x)$.

又因为 $f'\left(x^+\right)$ 与 $f'\left(x^-\right)$ 存在且有限. 故由定义知 $\exists M > 0, \eta > 0$，使得 $\forall h \in \mathbb{R}$ 且 $0 < h \leqslant \eta$ 有

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'\left(x^+\right)\right| \leqslant M,$$

$$\left|\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} - f'\left(x^-\right)\right| \leqslant M$$

于是

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leqslant \left|f'\left(x^{+}\right)\right|+M,$$
$$\left|\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right| \leqslant \left|f'\left(x^{-}\right)\right|+M$$

因此定理的条件全部满足，从而

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e_n(x)=A=f(x)$$

例题 14.10 对于 § 2 例14.8 的函数

$$x \longmapsto f(x)=\begin{cases}x, & x \in(-\pi, \pi) \\ 0, & x=\pi,-\pi\end{cases}$$

1) 对 $x \in(-\pi, \pi)$：由于 f 在 $(-\pi, \pi)$ 上连续，并且 $f'(x)=1$, 故由上述推论知，f 的 Fourier 级数在 $(-\pi, \pi)$ 的每一点 x 处收敛于 $f(x)$.

2) 对 $x=-\pi$:我们首先对 f 作周期延拓. 并仍记此延拓周期函数为 f. 考虑周期波空间 $\widetilde{H}[-2\pi, 0]$. 于是 $\left.f\right|_{[-2\pi, 0]} \in \widetilde{H}[-2\pi, 0]$. 由于

$$\begin{aligned}
& f\left(-\pi^{+}\right)=\lim_{x \rightarrow-\pi^{+}} f(x)=-\pi, \\
& f\left(-\pi^{-}\right)=\lim_{x \rightarrow \pi^{-}} f(x)=\pi, \\
& \forall 0<h<\pi,\left|\frac{f(-\pi+h)-f\left(-\pi^{+}\right)}{h}\right|=\left|\frac{-\pi+h-(-\pi)}{h}\right|=1, \\
& \left|\frac{f(-\pi-h)-f\left(-\pi^{-}\right)}{-h}\right|=\left|\frac{\pi-h-\pi}{h}\right|=1,
\end{aligned}$$

故由 Dirichlet 定理知，f 的 Fourier 级数在 $x=-\pi$ 处收敛，其和为

$$A=\frac{1}{2}\left[f\left(-\pi^{+}\right)+f\left(-\pi^{-}\right)\right]=0=f(-\pi).$$

3) 对 $x=\pi$ ：由 f 的周期性知，f 的 Fourier 级数在 $x=\pi$ 处也收敛于 $f(\pi)=0$,

因此 f 的 Fourier 级数在 $[-\pi, \pi]$ 上简单收敛于 f 本身.

例题 14.11 对于 §2 例14.9的函数

$$x \longmapsto f(x)=\begin{cases}1, & x \in(0,1) \\ 0, & x \in[1,2] \cup\{0\}.\end{cases}$$

1) 对 $x \in(0,1) \cup(1,2)$：由于 f 在 $(0,1) \cup(1,2)$ 上连续，并且 $f'(x)=0, \forall x \in\big(0,1) \cap(1,2)$, 故由上述推论知，$f$ 的 Fourier 级数在 $(0,1) \cup(1,2)$ 的每一点 x 处收敛于 $f(x)$.

2) 对 $x=1$ ：由于

$$f\left(1^{+}\right)=\lim_{x \rightarrow 1^{+}} f(x)=0, \qquad f\left(1^{-}\right)=\lim_{x \rightarrow 1^{-}} f(x)=1,$$
$$\forall 0<h<1,\left|\frac{f(1+h)-f\left(1^{+}\right)}{h}\right|=0,\left|\frac{f(1-h)-f\left(1^{-}\right)}{-h}\right|=0,$$

故由 Dirichlet 定理知，f 的 Fourier 级数在 $x=1$ 处收敛，其和为 $A=\frac{1}{2}\left[f\left(1^{+}\right)+f\left(1^{-}\right)\right]=\frac{1}{2}$, 但不是 $f(1)=0$.

3) 对 $x=0$：像例14.10一样，作 f 的周期延拓仍记它为 f, 并考虑周期波空间 $\widetilde{H}[-1,1]$. 由于

$$f\left(0^{+}\right)=\lim_{x\to 0^{+}} f(x)=1, f\left(0^{-}\right)=\lim_{x\to 0^{-}} f(x)=0,$$

$$\forall 0<h<1,\left|\frac{f(0+h)-f\left(0^{+}\right)}{h}\right|=0,\left|\frac{f(0-h)-f\left(0^{-}\right)}{-h}\right|=0,$$

故由 Dirichlet 定理知，f 的 Fourier 级数在 $x=0$ 处收敛，其和为 $A=\frac{1}{2}\left[f\left(0^{+}\right)+f\left(0^{-}\right)\right]=\frac{1}{2}$, 但不等于 $f(0)=0$.

4) 对 $x=2$：由 f 的周期性知，f 的 Fourier 级数在 $x=2$ 处也收敛于 $\frac{1}{2}\neq f(2)$.

因此，f 的 Fourier 级数在 $[0,2]$ 上是简单收敛的，但其和函数并不等于函数 f 本身.

2. Fourier 级数的一致收敛

定理 14.8

设 $f\in H[a,a+T]$, 并假设 f 满足条件：

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\left|c_n\right|<+\infty,$$

则 f 的 Fourier 级数 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n e_n$ 在 $[a,a+T]$ 上一致收敛.

证明 事实上，$\forall x\in[a,a+T]$,

$$\left|c_n e_n(x)\right|\leqslant\left|c_n\right|, \forall n\in\mathbb{Z},$$

而级数 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|c_n\right|$ 收敛，故由 Weierstrass 判别法知，f 的 Fourier 级数 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n e_n$ 在 $[a,a+T]$ 上一致收敛.

注意，若我们用 S 表示 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n e_n$ 的和函数. 则 S 不一定就等于 f. 但如果 f 连续，则结论成立，即成立下述定理.

定理 14.9

若函数 $f\in H[a,a+T]$ 满足条件：

1. f 在 $[a,a+T]$ 上连续,
2. $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|c_n\right|<+\infty$,

则 f 的 Fourier 级数 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n e_n$ 在 $[a,a+T]$ 上一致收敛于 f.

证明 因 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|c_n\right|<+\infty$, 故由定理14.8知，$f$ 的 Fourier 级数 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n e_n$ 在 $[a,a+T]$ 上一致收敛于一函数 S. 显然 S 在 $[a,a+T]$ 上连续. 其次由定理14.4的附注及定理 14.6 知，f 的 Fourier 级数 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n e_n$ 分别平均平方收敛于函数 S 与 f, 因此

$$\left\|f-\sum_{-n}^{n} c_k e_k\right\|\to 0,\left\|S-\sum_{-n}^{n} c_k e_k\right\|\to 0(n\to+\infty)$$

从而 $\forall n \in \mathbb{N}$, 由下述不等式

$$\left(\frac{1}{T}\int_a^{a+T}|f(x)-S(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{c}} = \|f-S\|$$
$$\leqslant \left\|f-\sum_{-n}^{n}c_k e_k\right\| + \|S-\sum_{-n}^{n}c_k e_k\|$$

令 $n \to +\infty$ 取极限立即得到 $\|f-S\|=0$ 或

$$\int_a^{a+T}|f(x)-S(x)|^2\mathrm{d}x = 0$$

由于 f, S 在 $[a,a+T]$ 上连续, 故必有 $f=S$. 即 f 的 Fourier 级数 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n e_n$ 在 $[a,a+T]$ 上一致收敛于 f.

推论 14.4

若 $f \in \widetilde{H}[a,a+T]$ 在 $[a,a+T]$ 上连续, 并且 f 的三角 Fourier 系数序列 $\langle a_n\rangle, \langle b_n\rangle$ 满足条件:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n| < +\infty, \sum_{n=1}^{+\infty}|b_n| < +\infty,$$

则 f 的三角 Fourier 级数 $a_0+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}\right)$ 在 $[a,a+T]$ 上一致收敛了 f.

证明 由于 $c_n=\dfrac{a_n-ib_n}{2}, c_{-n}=\bar{c}_n$. 故

$$\begin{aligned}\sum_{-\infty}^{+\infty}|c_n| &= \sum_{-\infty}^{-1}|c_n|+|c_0|+\sum_{n=1}^{+\infty}|c_n| \\ &= |a_0|+\sum_{n=1}^{+\infty}|c_n|+\sum_{n=1}^{+\infty}|c_{-n}| \\ &= |a_0|+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n-ib_n|+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n+ib_n| \\ &= |a_0|+\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2} \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|+\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n| < +\infty\end{aligned}$$

根据上述定理知 f 的 Fourier 级数也即 f 的三角 Fourier 级数 $a_0+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}\right)$ 在 $[a,a+T]$ 上一致收敛于 f.

推论 14.5

若函数 $f \in \widetilde{H}[a,a+T]$ 满足下述条件:

1. f 在 $[a,a+T]$ 上连续可导,
2. $f(a)=f(a+T)$.

则 f 的三角 Fourier 级数

$$a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

在 $[a,a+T]$ 上一致收敛于 f.

证明 因为 f 在 $[a,a+T]$ 上连续可导，所以 f' 在 $[a,a+T]$ 上连续. 下面我们来证明

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|<+\infty,\ \sum_{n=1}^{+\infty}|b_n|<+\infty.$$

为此我们用 $\langle\alpha_n\rangle,\langle\beta_n\rangle$ 表示导函数 f' 的三角 Fourier 系数序列. 由 f' 的 Bessel-Parseval 等式知，

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n^2<+\infty,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n^2<+\infty.$$

另一方面直接计算 α_n,β_n 得到

$$\begin{aligned}
\alpha_n&=\frac{2}{T}\int_a^{a+T}f'(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}\mathrm{d}t\\
&=\frac{2}{T}f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}\Big|_a^{a+T}+\frac{4n\pi}{T^2}\int_a^{a+T}f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}\mathrm{d}t\\
&=\frac{2n\pi}{T}b_n\\
\beta_n&=\frac{2}{T}\int_a^{a+T}f'(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}\mathrm{d}t\\
&=\frac{2}{T}f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}\Big|_a^{a+T}-\frac{4n\pi}{T^2}\int_a^{a+T}f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}\mathrm{d}t\\
&=-\frac{2n\pi}{T}a_n
\end{aligned}$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}n^2a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty}n^2b_n^2$ 收敛.

现在由 Hölder 不等式，$\forall m\in\mathbb{N}$ 我们有

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{m}|a_n|\right)^2&=\left(\sum_{n=1}^{m}(n\,|a_n|)\cdot\frac{1}{n}\right)^2\\
&\leqslant\left(\sum_{n=1}^{m}n^2a_n^2\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}\right)\\
&\leqslant\left(\sum_{n=1}^{+\infty}n^2a_n^2\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)<+\infty
\end{aligned}$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 收敛. 同理可证 $\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n|$ 收敛.

根据推论14.4，f 的三角 Fourier 级数在 $[a,a+T]$ 上一致收敛于 f.

例题 14.12 考虑以 2π 为周期的周期函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上的限制，仍记为 f，定义为：

$$f(x)=|x|,\forall x\in[-\pi,\pi].$$

于是 $f\in\widetilde{H}[-\pi,\pi]$，并且 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续. 由于 f 是偶函数，故 f 的三角 Fourier 系数 $b_n=$

$0(n \in \mathbb{N})$. 直接计算 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 得到

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2},$$
$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi}.$$

因此

$$a_{2n} = 0, a_{2n+1} = \frac{-4}{(2n+1)^2\pi}.$$

由此可知，级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|a_n|$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|b_n|$ 均收敛，根据上述推论 1 知，f 的三角 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 f, 从而在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛. 特别

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, \forall x \in [-\pi,\pi].$$

若取 $x=0$, 则我们又一次得到

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

函数 f 的图形就是所谓的锯齿波.

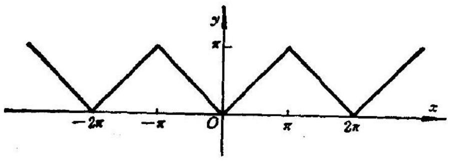


图 14.4

例题 14.13 考虑以 2π 为周期的周期函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上的限制 (仍记为 f) 定义为

$$f(x) = \frac{x^2}{4}, \forall x \in [-\pi,\pi].$$

于是 $f \in \widetilde{H}[-\pi,\pi]$, f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续可导，并且 $f(-\pi) = f(\pi)$. 由推论14.5 知，f 的三角 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 f, 从而在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

直接计算得到

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{t^2}{4}\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{12},$$
$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{t^2}{4}\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{n^2},$$
$$b_n = 0\,(\text{因 } f \text{ 为偶函数}).$$

因此我们特别有：

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}, \forall x \in [-\pi,\pi].$$

函数 f 的图形如下图所示.

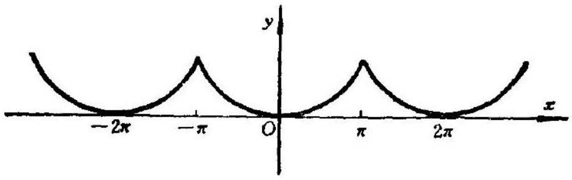


图 14.5

若取 $x=\pi$, 则我们又一次得到

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

习 题 14.3

1. 设函数 $f\in\widetilde{H}[-\pi,\pi]$ 定义为

$$f(x)=\begin{cases}\pi-x, & \forall x\in[0,\pi],\\ \pi+x, & \forall x\in[-\pi,0].\end{cases}$$

写出 f 的三角 Fourier 级数, 并由此推得 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$; 研究 f 的 Fourier 级数在 $x=\pm\pi$ 处的收敛性.

2. 设函数 $f\in\widetilde{H}[-\pi,\pi]$ 定义为

$$f(x)=\begin{cases}\pi-x, & \forall x\in[0,\pi),\\ -\pi+x, & \forall x\in(-\pi,0),\\ 0, & x=-\pi,\pi.\end{cases}$$

写出 f 的三角 Fourier 级数, 并由此推得

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4};$$

研究 f 的 Fourier 级数在 $x=\pm\pi,0$ 处的收敛性.

3. 设函数 $f\in\widetilde{H}[-\pi,\pi]$ 定义为:

$$f(x)=\cos px, x\in[-\pi,\pi],\ p\notin\mathbb{Z}.$$

写出 f 的三角 Fourier 级数, 并证明:

$$\frac{\pi}{\sin p\pi}=\frac{1}{p}+2p\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-p^2},$$

$$\pi\cot p\pi=\frac{1}{p}+2p\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2-n^2}.$$

4. 设函数 $f\in\widetilde{H}[0,T]$ 定义为

$$f(x)=|\sin\omega x|, \forall x\in[0,T],\ \left(T=\frac{\pi}{\omega}\right).$$

1) 写出 f 的三角 Fourier 级数.

2) 证明：$\forall g \in C^0([a,b],\mathbb{R})$,

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(x)|\sin\lambda x|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

5. 设函数 $f \in \widetilde{H}[-\pi,\pi]$ 定义为

$$f(x) = x^3 - \pi^2 x, \forall x \in [-\pi,\pi].$$

1) 写出 f 的三角 Fourier 级数.

2) 证明：f 的三角 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上简单收敛于 f.

6. 设 $f \in \widetilde{H}[-\pi,\pi]$ 是偶函数，它在 $[0,\pi]$ 上定义为

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{这里 } a,b,c \in \mathbb{R}.$$

1) f 的三角 Fourier 级数在任一点 $x \in [-\pi,\pi]$ 上是否收敛于 $f(x)$？此三角 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛吗？

2) 证明：可以选择常数 a,b,c 使得 f 的三角 Fourier 级数化为

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

3) 由此我们又推得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

7. 此题是要证明下述 Fejér 定理：设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是任一逐段连续的以 2π 为周期的函数，$\langle a_n\rangle, \langle b_n\rangle$ 是 f 的三角 Fourier 系数序列. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$，令

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),\ f_0(x) = a_0,$$

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k(x).$$

则

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sigma_n(x) = \frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right]$;

2) 若 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 不包含 f 的间断点，则函数项序列 $\{\sigma_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f.

为此我们建议：

1) 计算 $\displaystyle I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x$.

2) 证明：

$$\sigma_n(x) - \frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right] = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2\left[f(x+t) - f(x^+) + f(x-t) - f(x^-)\right]dt.$$

3) 由此推得 Fejér 定理.

8. 此题是要直接证明 Riemann 引理：

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是任意 Riemann 可积函数. 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x = 0.$$

为此我们建议

1) 证明：$\forall\varepsilon>0$，存在阶梯函数 $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ 使得

$$0 \leqslant \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

2) 证明：存在 $M>0$，使得

$$\forall \lambda>0,\left|\int_a^b \varphi(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right|<\frac{M}{\lambda}.$$

3) 由此推得 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x=0$.

4) 同理可证 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=0$.

第十五章 偏导数

这一章我们介绍多元实值函数的偏导数概念及其计算方法，并研究了偏导数在函数极值问题中的应用.

15.1 一阶偏导数

1. 一阶偏导数的定义

以下我们设 $U \subset \mathbb{R}^n (n > 1)$ 是任一开集，$f: U \to \mathbb{R}$ 是任一函数，$\boldsymbol{x}_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0\right) \in U$，

$\forall i = 1, 2, \cdots, n$，令 $U_i = \left\{x_i \in \mathbb{R} \mid (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_i^0, \cdots, x_n^0) \in U\right\}$，则 $U_i \subset \mathbb{R}$ 是一开集，并且 $x_i^0 \in U_i$ 是 U_i 的一个内点.

定义 15.1

对 n 元实值函数 $f: U \to \mathbb{R}$(以下简称 n 元函数或函数).

1. 函数 $f_{\boldsymbol{x}_0,i} U_i \to \mathbb{R}$，它定义为：

$$\forall x_i \in U_i, f_{\boldsymbol{x}_0,i}(x_i) = f\left(x_1^0, \cdots, x_{i-1}^0, x_i x_{i+1}^0, \cdots, x_n^0\right),$$

称为函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的第 i 个部分函数.

2. 若部分函数 $f_{\boldsymbol{x}_0,i}: U_i \to \mathbb{R}$ 在 x_i^0 处可导，则我们称 $f_{\boldsymbol{x}_0,i}$ 在 x_i^0 处的导数为函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处关于 x_i 的一阶偏导数，并记为

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0), D_i f(\boldsymbol{x}_0) \text{ 或 } f'_{x_i}(\boldsymbol{x}_0).$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0) &= \lim_{x_i \to x_i^0} \frac{f_{\boldsymbol{x}_0.i}(x_i) - f_{\boldsymbol{x}_0.i}\left(x_i^0\right)}{x_i - x_i^0} \\ &= \lim_{x_i \to x_i^0}\left[\frac{f\left(x_1^0, \cdots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \cdots, x_n^0\right)}{x_i - x_i^0} - \frac{i\left(x_1^0, \cdots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \cdots, x_n^0\right)}{x_i - x_i^0}\right]\end{aligned}$$

因此，对 n 元实值函数 $f: U \to \mathbb{R}$ 求偏导数，实质上就是对它的某一个变元的一元实值函数求导数.

♣

例题 15.1 考虑函数 $x_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，它定义为

$$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_i,$$

此函数称为第 i 个坐标函数. 试计算第 i 个坐标函数在任意一点 $\boldsymbol{x}_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0\right) \in \mathbb{R}^n$ 处关于

$x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)$. 因为

$$
\begin{aligned}
&-\frac{x_i\left(x_1^0,\cdots,x_{j-1}^0,x_j,x_{j+1}^0,\cdots,x_n^0\right)}{x_j-x_j^0}-\frac{x_i\left(x_1^0,\cdots,x_{j-1}^0,x_j^0,x_{j+1}^0,\cdots,x_n^0\right)}{x_j-x_j^0}\\
=&\frac{x_i\left(x_1^0,\cdots,x_{j-1}^c,x_j,x_{j+1}^0,\cdots,x_n^0\right)-x_i^0}{x_j-x_j^0}\\
=&\begin{cases}1,\text{ 若 } j=i,\\ 0,\text{ 若 } j\neq i,\end{cases}
\end{aligned}
$$

因此

$$
\frac{\partial x_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)=\begin{cases}1, & \text{若 } j=i,\\ 0, & \text{若 } j\neq i.\end{cases}
$$

例题 15.2 计算二元函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$
f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{若 } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{若 } (x,y)=(0,0)\end{cases}
$$

在 $(0,0)$ 处的一阶偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0),\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

直接由定义我们计算得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)&=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x}=0\\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)&=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{0-0}{y}=0
\end{aligned}
$$

定义 15.2

对 n 元函数 $f:U\to\mathbb{R}$,

1. 若 f 在 U 的每一点 $\boldsymbol{x}\in U$ 处关于 x_i 的一阶偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ 存在, 则函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}:U\to\mathbb{R}$

$$
\boldsymbol{x}\longmapsto\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}),\forall\boldsymbol{x}\in U
$$

称为 f 的第 i 个偏导函数.

2. 若 $\forall i=1,2,\cdots,n$, 偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}:U\to\mathbb{R}$ 在 U 上连续, 则我们称 f 在 U 上是连续可导的, 或 C^1 类的.

♣

例题 15.3 对每一个坐标函数 $x_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}(i=1,2,\cdots,n)$, 由于它的每一个偏导函数

$$
\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=\begin{cases}1, & \text{若 } j=i\\ 0, & \text{若 } j\neq i\end{cases}\quad(j=1,2,\cdots,n)
$$

为常值函数, 故坐标函数 $x_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是 C^1 类的 $(i=1,2,\cdots,n)$.

例题 15.4 考虑 n 元函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 它定义为

$$
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2,\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n.
$$

由于 $\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = 2x_i (\forall i = 1, 2, \cdots, n),$$

故 $\forall i = 1, 2, \cdots, n$，偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 存在，并且在 $\mathbb{R}^n$ 上连续，因此 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上是 C^1 类的.

例题 15.5 考虑二元函数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$：

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy\left(x^2 - y^2\right)^2}{x} + y^2, & 若\ (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & 若\ (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

证明：f 在 $\mathbb{R}^2$ 上是 C^1 类的.

事实上，对 $(x, y) \neq (0, 0)$，直接计算得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\right).$$

对 $(x, y) = (0, 0)$，由定义我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0.$$

因此 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上的每一点 (x, y) 处的一阶偏导数存在，故偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 有定义.

为了证明 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上是 C^1 类的，我们必须证明 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

直接由 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ 的表达式可知，$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ 上连续.

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\right| &= \left|y\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\right) - 0\right| \\ &\leqslant |y|\left[\left|\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right| + \frac{4x^2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\right] \\ &\leqslant 2|y| \leqslant 2(|x| + |y|) \end{aligned}$$

类似地

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\right| \leqslant 2|x| \leqslant 2(|x| + |y|),$$

因此

$$\begin{aligned} &(\forall \bar{\delta} > 0)\left(\exists \delta = \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| < \delta\right) \\ \Longrightarrow &\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\right| \leqslant 2(|x| + |y|) < \varepsilon, \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\right| \leqslant 2(|x| + |y|) < \varepsilon. \end{aligned}$$

此即表明 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0, 0)$ 处连续，故 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，从而 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上是 C^1 类的.

很显然，直接由定义可证，若 $f : U \to \mathbb{R}, g : U \to \mathbb{R}$ 是两个在 U 上 C^1 类的函数，则函数 $f + g, fg$ 及 $\dfrac{f}{g}$(当 $g \neq 0$ 时) 在 U 上也是 C^1 类的.

2. 函数的连续与一阶偏导数的关系

对一元实值函数 f 来说，导数 $f'(\boldsymbol{x}_0)$ 存在保证了 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续，但对于 n 元实值函数 $f:U\to\mathbb{R}(n>1)$ 来说，它的一阶偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0)$ 的存在一般说来还不足以保证 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续.

例如，对如下定义的二元函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$；

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & 若\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 若\ (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

虽然一阶偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ 存在，但是 f 在 $(0,0)$ 处并不连续，因为当 $(x,y)\to(0,0)$ 时极限不存在.

关于 n 元实值函数在一点处连续的充分条件，我们有下面的

定理 15.1

设 $f:U\left(\subset\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in U$ 的充分小邻域 W 内的所有一阶偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 存在 $(i=1,2,\cdots,n)$，并且在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续，则 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续.

证明 取 $\delta>0$ 充分小使得开集

$$V=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,\left|x_1-x_1^0\right|+\left|x_2-x_2^0\right|+\cdots+\left|x_n-x_n^0\right|<\delta\right\}\subset W.$$

于是 $\forall\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in V$，我们有

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)=&f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-f\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right)\\=&f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-f\left(x_1^0,x_2,\cdots,x_n\right)+f\left(x_1^0,x_2,\cdots,x_n\right)-f\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n\right)\\&+\cdots+f\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{n-1}^0,x_n\right)-f\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right)\\=&\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,x_2,\cdots,x_n)\left(x_1-x_1^0\right)+\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0,\xi_2,x_3,\cdots,x_n\right)\left(x_2-x_2^0\right)+\cdots\\&+\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,\xi_n\right)\left(x_n-x_n^0\right),\end{aligned}$$

这里我们应用了 n 次一元函数的 Lagrange 中值定理. 其中 ξ_i 介于 x_i 与 x_i^0 之间. 根据假设，上式右端的各偏导数存在，并且

$$\begin{aligned}&\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right),\\&\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0,\xi_2,x_3,\cdots,x_n\right)=\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right),\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{n-1}^0,\xi_n\right)=\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right),\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)=&\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,x_2^0,\ldots,x_n^0)(x_1-x_1^0)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,\xi_2,x_3^0,\ldots,x_n^0)(x_2-x_2^0)\\&+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},\xi_n)(x_n-x_n^0),\end{aligned}$$

此即表明 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0)$，因此 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续.

注 一阶偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})(i=1,2,\cdots,n)$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的连续性并不是 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续的必要条件，例如我们考虑二元函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，它定义为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, \text{若 } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, \text{若 } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

因为

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant|y|,$$

所以 f 在 $(0,0)$ 处倖续.

另一方面，由定义，直接计算得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

对 $(x,y)\neq(0,0)$，通过计算我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

令 $y=kx$，则当 $x\neq0$ 时，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,kx)=\frac{2k^3}{\left(1+k^2\right)^2}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,kx)=\frac{1-k^2}{\left(1+k^2\right)^2}.$$

由此可知 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时极限不存在，因此 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

3. 复合函数的一阶偏导数计算

这里我们介绍两种类型的复合函数的求导问题.

类型 I：

$$f:U\left(\subset\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}.$$

$$u_i:I(\subset\mathbb{R})\to\mathbb{R}(i=1,2,\cdots,n).$$

求复合函数

$$F:I\to\mathbb{R},$$

$$F(t)=f\left(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t)\right),\forall t\in I$$

的导数 $F'(t)$.

定理 15.2

设函数 $f:U\left(\subset\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}$ 在 U 上是 C^1 类的，函数 $u_i:I\to\mathbb{R}(i=1,2,\cdots,n)$ 在 I 上是 C^1 类的，并且

$$\forall t\in I,(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t))\in U,$$

则复合函数 $F:I\to\mathbb{R}\,(\forall t\in I, F(t)=f\left(u_1(t),u_2(t),\cdots u_n(t)\right))$ 在 I 上是 C^1 类的，并且它的导数

$$F'(t)=\sum_{i=1}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t)\right)u_i'(t),\forall t\in I.$$

证明 为了书写简单起见，我们假设 $n=2$. 这时

$$F(t)=f\left(u_1(t),u_2(t)\right),\forall t\in I.$$

任取 $t_0\in I$，于是 $M_0\left(u_1\left(t_0\right),u_2\left(t_0\right)\right)\in U$. 由 U 的开性及 u_1，x_2 的连续性，存在 $\delta>0,a>0$ 使得

$$V=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle||x-u_1(t_0)|+|y-u_2(t_0)|<\delta\right\}\subset U,$$

$$\forall t\in I\text{ 且 }|t-t_0|\leqslant a\Longrightarrow(u_1(t),u_2(t))\in V.$$

现在我们来考虑差式 $F(t)-F\left(t_0\right)\left(|t-t_0|\leqslant\alpha\right)$.

$$\begin{aligned}F(t)-F(t_0)&=f(u_1(t),u_2(t))-f(u_1(t_0),u_2(t_0))\\&=f(u_1(t),u_2(t))-f(u_1(t_0),u_2(t))+f(u_1(t_0),u_2(t))-f(u_1(t_0),u_2(t_0))\\&=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t),u_2(t))\left[u_1(t)-u_1(t_0)\right]+\frac{\partial f}{\partial y}(u_1(t_0),\eta(t))\left[u_2(t)-u_2(t_0)\right]\\&=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t),u_2(t))\,u_1'(\zeta)(t-t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(u_1(t_0),\eta(t))\,u_2'(\theta)(t-t_0)\\&=\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t),u_2(t))\,u_1'(\zeta)+\frac{\partial f}{\partial y}(u_1(t_0),\eta(t))\,u_2'(\theta)\right](t-t_0)\end{aligned}$$

这里我们四次应用了一元函数的 Lagrange 中值定理，其中 $\xi(t)$ 介于 $u_1(t),u_1\left(t_0\right)$ 之间，$\eta(t)$ 介于 $u_2(t)$ 与 $u_2\left(t_0\right)$ 之间，ζ 与 θ 介于 t_0 与 t 之间. 于是

$$\xi(t)\to u_1\left(t_0\right),\eta(t)\to u_2\left(t_0\right),\zeta\to t_0,\theta\to t_0\left(t\to t_0\right).$$

由于 f 及 u_1,u_2 都是 C^1 类函数，故

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0}\frac{F(t)-F\left(t_0\right)}{t-t_0}&=\lim_{t\to t_0}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(\xi(t),u_2(t)\right)u_1'(\zeta)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(u_1\left(t_0\right),\eta(t)\right)u_2'(\theta)\right]\\&=\frac{\partial f}{\partial x}\left(u_1\left(t_0\right),u_2\left(t_0\right)\right)u_1'\left(t_0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(u_1\left(t_0\right),u_2\left(t_0\right)\right)u_2'\left(t_0\right).\end{aligned}$$

此即表明 F 在 t_0 处可导，并且

$$F'\left(t_0\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(u_1\left(t_0\right),u_2\left(t_0\right)\right)u_1'\left(t_0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(u_2\left(t_0\right),u_1\left(t_0\right)\right)u_2'\left(t_0\right).$$

由 t_0 的任意性知 $F'(t)$ 的表达式知 F 是 C^1 类的.

例题 15.6 设 $X\subset\mathbb{R}^n$ 是任一非空集合，我们称 $f:X\to\mathbb{R}$ 是 k 次齐次函数，若下述恒等式成立：

$$f\left(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n\right)=t^kf\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right),\forall t>0,\forall x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\in X.$$

证明：若 C^1 类函数 f 满足一阶偏微分方程

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)+\cdots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)=hf(x),\forall x\in X,$$

则 f 是 k 次齐次函数.

事实上，考虑函数 $F:\mathbb{R}_*^*\to\mathbb{R}$ 如下：

$$F(t)=\frac{1}{t^k}f\left(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n\right),\forall t\in\mathbb{R}_*^+,$$

这里 $\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\in\mathbb{R}^n$ 是任一固定点. 则

$$t^kF(t)=f\left(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n\right).$$

两边对 t 求导数得到

$$kt^{k-1}F(t)+t^kF'(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)\cdot x_i$$

由假设，$\sum_{i=1}^{n}(tx_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=kf(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)$，故

$$kt^kF(t)+t^{k+1}F'(t)=hf(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=ht^kF(t).$$

从而 $t^{k+1}F'(t)=0(\forall t>0)$. 由于 $t\neq 0$，故必有 $F'(t)=0$，$\forall t\in\mathbb{R}_*^+$. 因此存在常数 C 使得 $F(t)=C,\forall t\in\mathbb{R}_*^+$.

为了确定常数 C，令 $t=1$ 代入得 $C=F(1)=f(x_1,x_2,\cdots x_n)$. 因此 $F(t)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\forall t\in\mathbb{R}_*^+$，即

$$f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=t^kf(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

此即表明 f 是 k 次齐次函数.

作为定理15.2的另一应用，我们证明下述中值定理.

定理 15.3 (中值定理)

设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是任一凸开集，$f:U\to\mathbb{R}$ 是任一 C^1 类的函数，则 $\forall x,y\in U$，存在一点 $z\in U$，它位于联结 x 与 y 的线段上，使得

$$f(x)-f(y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)(x_i-y_i).$$

证明 联结 x 与 y 两点的线段 $\overline{xy}$ 可来示成下达络式：

$$\overline{xy}=\{z(t)\mid z(t)=(1-t)x+ty,0\leqslant t\leqslant 1\}.$$

考虑函数 $F:[0,1]\to\mathbb{R}$，它定义如下：

$$\forall t\in[0,1],F(t)=f((1-t)x+ty).$$

显然 F 在 $[0,1]$ 上是 C^1 类的，并且

$$F(0)=f(x),F(1)=f(y).$$

由一元函数的 Lagrange 中值定理，我们有

$$f(x)-f(y)=F(0)-F(1)=-F'(\xi),\xi\in(0,1).$$

根据定理15.2，我们有

$$F'(\xi)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}((1-\xi)x+\xi y)\cdot(y_i-x_i).$$

若令 $z=(1-\xi)x+\xi y$，则 $z\in\overline{xy}$，并且

$$f(x)-f(y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)(x_i-y_i).$$

类型 II $f:U(\subset\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$，

$$u_i:V(\subset\mathbb{R}^m)\to\mathbb{R}(i=1,2,\cdots,n)$$

求复合函数

$$F: V \to \mathbb{R}$$

$$F(t_1, t_2, \cdots, t_m) = f(u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)), \forall t \in V$$

的偏导数 $\frac{\partial F}{\partial t_i}(t)(i = 1, 2, \cdots, n)$.

定理 15.4

设函数 $f: U(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 在 U 上是 C^1 类的，函数 $u_i: V(\subset \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 在 V 上是 C^1 类的，并且

$$\forall t \in V, (u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)) \in U,$$

则复合函数 $F: V \to \mathbb{R}$

$$\forall t \in V, F(t) = f(u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t))$$

在 V 上是 C^1 类的，并且

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)) \cdot \frac{\partial u_j}{\partial t_i}(t), (\forall t \in V, \forall i = 1, 2, \cdots, m).$$

证明 任取一点 $t_0 = (t_1^0, t_2^0, \cdots, t_m^0) \in V$，令

$$V_i = \left\{t_i \in \mathbb{R} \mid (t_1^0, \cdots, t_{i-1}^0, t_i, t_{i+1}^0, \cdots, t_m^0) \in V\right\}, (i = 1, 2, \cdots, m).$$

由于 $f, u_j(j = 1, 2, \cdots, n)$ 都是 C^1 类的，故 u_j 的每一个部分函数 $u_{j,i}: V_i \to \mathbb{R}$

$$\forall t_i \in V_i, u_{j,i}(t_i) = u_j(t_1^0, \cdots, t_{i-1}^0, t_i, t_{i+1}^0, \cdots, t_m^0)$$

在 V_i 上是 C^1 类的 $(i = 1, 2, \cdots, m)$. 从而函数 F 的每一个部分函数 $F_{t_0,i}: V_i \to \mathbb{R}$，它定义为：

$$\begin{aligned}\forall t_i \in V_i, F_{t_0,i}(t_i) &= F(t_1^0, \cdots, t_i^0 - t_i, t_{i+1}^0, \cdots, t_m^0) \\ &= f(u_{1,i}(t_i), u_{2,i}(t_i), \cdots, u_{n,i}(t_i)),\end{aligned}$$

在 V_i 上是 C^1 类的，它在 t_i^0 处的导数 $F_{t_0,i}(t_i^0)$ 正好等于 $\frac{\partial F}{\partial t_i}(t_0)$，根据定理15.2，我们有

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(t_0) = F_{t_0',i}(t_i^0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(u_{1,i}(t_i^0), u_{2,i}(t_i^0), \cdots, u_{n,i}(t_i^0)) \cdot u_{j,i}'(t_i^0) .(\forall i = 1, \cdots, m.)$$

由于 $\forall j = 1, 2, \cdots, n, \forall i = 1, 2, \cdots, m$，

$$u_{j,i}(t_i^0) = u_j(t_0), u_{j,i}'(t_i^0) = \frac{\partial u_j}{\partial t_i}(t_0),$$

故

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(t_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(u_1(t_0), u_2(t_0), \cdots, u_n(t_0)) \cdot \frac{\partial u_j}{\partial t_i}(t_0).$$

由 $t_0 \in V$ 的任意性，$\frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial u_j}{\partial t_i}$ 的连续性及上述等式推知，$\frac{\partial F}{\partial t_i}(i = 1, 2, \cdots, m)$ 在 V 上连续，从而 F 在 V 上是 C^1 类的.

例题 15.7 设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是任一 C^1 类的函数. 证明：$z = yf(x^2 - y^2)$ 满足下述所谓的一阶偏微分方程

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz$$

事实上，若令 $u(x,y)=x^2-y^2$，则 $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上是 C^1 类的. 于是

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) &= yf'\left(x^2-y^2\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2xyf'\left(x^2-y^2\right)\\
\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) &= f\left(x^2-y^2\right)+yf'\left(x^2-y^2\right)\frac{\partial u}{\partial y}\\
&= f\left(x^2-y^2\right)-2y^2f'\left(x^2-y^2\right)
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&y^2\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)+xy\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\\
=&2xy^3f'\left(x^2-y^2\right)+xyf\left(x^2-y^2\right)-2xy^3f'\left(x^2-y^2\right)\\
=&xyf\left(x^2-y^2\right)=xz(x,y)
\end{aligned}$$

习题 15.1

1. 设函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin y-y\sin x}{x^2+y^2}, & 若\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 若\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

   1) 证明：f 在 $(0,0)$ 处连续.
   2) 计算 f 的一阶偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
   3) 证明：一阶偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0,0)$ 处连续.

2. 设函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & 若\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 若\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

   1) 证明：f 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.
   2) 计算 f 的一阶偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
   3) 证明：$\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

3. 设函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}x^3y^3\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, & 若\ x\neq0,\ y\neq0,\\ 0, & 若\ x=0\ 或\ y=0.\end{cases}$$

   证明：f 在 $\mathbb{R}^2$ 上是 C^1 类的.

4. 设函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^p\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 若\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 若\ (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

   这里 $p\in\mathbb{N}$.
   1) p 为何值时，f 在 $(0,0)$ 处连续.

2) p 为何值时，$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ 存在.

3) p 为何值时，f 在 $\mathbb{R}^2$ 上是 C^1 类的.

5. 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一开集，$a \in U$，$f : U \to \mathbb{R}$ 是任一函数. 设 e 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个单位向量 (即 $\|e\| = 1$). 我们称 f 在 a 处有沿方向 e 的方向导数，记为 $D_e f(a)$，如果极限
$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(a+\lambda e) - f(a)}{\lambda}$$
存在. 令 $e_i = (0, \ldots, 0, 1_i, 0, \ldots, 0)$，则 $\|e_i\| = 1 (i = 1, 2, \ldots, n)$. 证明：$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ 存在当且仅当 $D_{e_i} f(a)$ 存在，并且
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{e_i} f(a).$$

6. 设函数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 定义如下：
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3 + x^3 y}{x^4 + y^4}, & 若 \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & 若 \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) 计算 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

2) 证明：f 在 $(0,0)$ 处不连续.

3) 证明：若 $x_0 \neq 0$ 或 $y_0 \neq 0$，则 f 在 $(0,0)$ 处有沿方向 $e = (x_0, y_0)$ 的方向导数 $D_e f(0,0)$.

7. 设函数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 定义如下：
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, & 若 \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & 若 \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) 计算 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

2) 证明：f 在 $(0,0)$ 处不连续.

3) 证明：若 $x_0 \neq 0$，则 f 在 $(0,0)$ 处有沿方向 $e = (x_0, y_0)$ 的方向导数 $D_e f(0,0)$.

8. 计算下列各函数 f 的一阶偏导数.

1) $f(x,y) = |x|^y$，

2) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$，

3) $f(x,y,z) = (x + y^2 + z^3) \log(x^2 + z^2)$，

4) $f(x,y,z) = \operatorname{arsinh}(x^2 y^2 z^2)$.

9. 计算下列各函数 f 的一阶偏导数.

1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \sin x^2 y^2}{(\mathrm{e}^{x^2} - 1)(\mathrm{e}^y - 1)}, & 若 \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & 若 \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$

2) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + 2x - y)xy \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & 若 \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & 若 \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$

3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1 + x^2 y^2)}{x^2 + y^2}, & 若 \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & 若 \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$

4) $f(x,y,z)=\begin{cases} x^2y^2z^2\log(x^2+y^2+z^2), & 若\ (x,y,z)\neq(0,0,0), \\ 0, & 若\ (x,y,z)=(0,0,0). \end{cases}$

5) $f(x,y,z)=\begin{cases} x^2\arctan\dfrac{yz^2}{x}, & 若\ x\neq 0, \\ 0, & 若\ x=0. \end{cases}$

10. 设 $f:X(\subset\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ 是 C^1 类的 k 次齐次函数，证明：f 满足下述 Euler 恒等式

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)+\cdots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)=kf(x),\forall x\in X.$$

11. 设 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 与 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是两个 C^1 类函数使得下述恒等式成立：

$$f(tx,ty,tz)=\varphi(t)f(x,y,z),\forall t\in\mathbb{R},\ \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

证明：f 是齐次函数.

12. 设 $U\subset\mathbb{R}^2$ 是任一凸开集，$f:U\to\mathbb{R}$ 是任一在 U 上有界的一阶偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 的函数. 证明：f 在 U 上一致连续.

13. 设 $U\subset\mathbb{R}^2$ 是任一开集，$f:U\to\mathbb{R}$ 是任一函数. 假设函数 f 对固定的 y，关于 x 是连续的，而 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 U 上有界. 证明：f 在 U 上连续.

14. 设 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是二次可导函数，定义函数 $\varphi,\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\varphi(u,v)=f(u)\cos v,\psi(u,v)=g(u)\sin v.$$

试确定函数 f,g 使之满足下述方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)=\dfrac{\partial\psi}{\partial v}(u,v), \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)=-\dfrac{\partial\psi}{\partial u}(u,v), \qquad \forall(u,v)\in\mathbb{R}^2. \\ f(0)=1,\ g(0)=0, \end{cases}$$

15. 设函数 $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$\varphi(x,y)=2x^3+5y^3,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是任一 C^1 类函数，使得

$$f[\varphi(x,y)]+x^2>0,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

令 $g(x,y)=\sqrt{f[\varphi(x,y)]+x^2}$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$. 证明：存在常数 a,b，使得函数 $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 满足如下一阶偏微分方程：

$$ay^2g(x,y)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)+bx^2g(x,y)\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=xy^2,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

16. 设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是任一凸集，$f:A\to\mathbb{R}$ 是任一函数. 仿照一元实值函数的凸函数定义，我们称 f 是凸 (凹) 的，若下述性质成立

$$\forall x_1,x_2\in A,\forall\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]\ 且\ \alpha_1+\alpha_2=1,$$
$$f\left(\alpha_1x_1+\alpha_2x\right)\leqslant\alpha_1f\left(x_1\right)+\alpha_2f\left(x_2\right)\left(\geqslant\alpha_1f\left(x_1\right)+\alpha_2f\left(x_2\right)\right).$$

证明：若 f 是 C^1 类的，则 f 是凸 (凹) 的充分必要条件是：

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) - f(x_2) \leqslant (\geqslant) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1)(x_{1i} - x_{2i}),$$

其中 $x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj})(j = 1, 2)$.

15.2 高阶偏导数

1. 高阶偏导数的定义

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一开集，$f : U \to \mathbb{R}$ 是任一函数，假设对某一 $i = 1$，$2, \cdots, n$, f 关于 x_i 的 1 阶偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$ 存在. 于是我们又可以研究函数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 的一阶偏导数的存在问题.

定义 15.3

1) 若函数 $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in U$ 处关于 $x_j (j = 1, 2$，$\cdots, n)$ 的 1 阶偏导函数 $\frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)$ 存在，则我们称此 1 阶偏导数为函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处关于 x_i, x_j 的 2 阶偏导数，记为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}_0), D_{ij} f(\boldsymbol{x}_0) \text{ 或 } f''_{x_{ij}}(\boldsymbol{x}_0).$$

于是

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}_0) \triangleq \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)$$

归纳地，我们可定义函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处关于 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_p}$ 的 p 阶偏导数 $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}}(\boldsymbol{x}_0)$，此 p 阶偏导数也记为

$$D_{i_1 i_2 \cdots i_p} f(\boldsymbol{x}_0) \text{ 或 } f^{(p)}_{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_p}}(\boldsymbol{x}_0).$$

当 $x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_p} = x_i$ 时，为简单起见，我们也记

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial^p f}{\partial x_i^p}(\boldsymbol{x}_0).$$

2) 若 $\forall x \in U, f$ 的一切 p 阶偏导数 $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}}(x)$ 存在并且 $\frac{\partial^p f}{x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}} : U \to \mathbb{R}$ 在 U 上连续，则我们称 f 在 U 上是 p 次连续可导的，或 C^p 类的.

3) 若 $\forall p \in \mathbb{N}$，函数 f 在 U 上是 C^p 类的，则我们称函数 f 在 U 上是 C^∞ 类的. ♣

例题 15.8 考虑函数 $f : \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，它定义为

$$f(x, y) = x^y, \forall (x, y) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}.$$

试计算 f 的所有 2 阶偏导数.

直接计算得到 f 的一阶偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y x^{y-1}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \log x.$$

因此由 2 阶偏导数的定义，我们得到

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}(x,y)=y(y-1)x^{y-2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}(x,y)=x^y(\log x)^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial\left(yx^{y-1}\right)}{\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\log x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial\left(x^y\log x\right)}{\partial x}=x^{y-1}+yx^{y-1}\log x$$

例题 15.9 考虑 § 1 例15.4 的函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}, & \text{若 } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{若 } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

计算 f 在 $(0,0)$ 处的 2 阶偏导数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0.0)$ 与 $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

我们已经知道 f 的一阶偏导数为：

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right),\ \forall(x,y)\neq(0,0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right),\ (x,y)\neq(0,0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

因此根据 2 阶偏导数的定义，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{-y}{y}=-1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=1,$$

这里 $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$.

注 从上面的例15.8 可以看出，对该函数 f 有 $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}\right)$，而对于例15.9中的函数 f，在 $(0,0)$ 处有 $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$，究其原因，我们发现例15.8的函数 f 的 2 阶偏导函数 $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 在 $\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}$ 上连续，而例15.9的函数 f 的 2 阶偏导函数 $-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

事实上，对例 15.9 的函数 f，直接计算可知，若 $(x,y)\neq(0,0)$，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial y}\left[y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\right]\\&=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{8x^4y^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}\end{aligned}$$

令 $y=kx,\forall x\neq 0$，我们有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,kx)=\frac{1-k^2}{1+k^2}+\frac{8k^2}{\left(1+k^2\right)^3}$$

由此可知，函数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时极限不存在，因此 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

类似可证 $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 在 $(0,0)$ 处也不连续.

下面我们来研究应该对函数 f 附加哪些条件才能够避免因求导次序不同 (例如上面例15.8的 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ 与 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)\right)$ 而导致不同的值的情形产生. 这就是下面介绍的定理.

2. Schwarz 定理

定理 15.5 (Schwarz 定理)

设 $U\subset\mathbb{R}^2$ 是任一开集，函数 $f:U\to\mathbb{R}$ 在点 $(\boldsymbol{x}_0,y_0)\in U$ 的充分小邻域 $W(\subset U)$ 内的偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 存在，并且在 (x_0,y_0) 处连续，则

1. 2 阶偏导数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot(x_0,y_0)$ 存在，
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$.

证明 首先取 $\delta>0$ 使得 $\mathbb{P}=[\boldsymbol{x}_0-\delta,\boldsymbol{x}_0+\delta]\times[y_0-\delta,y_0+\delta]\subset W$.

$\forall(h,k)\in\mathbb{R}^2$ 并且 $|h|<\delta,|k|<\delta$，我们令

$$\begin{aligned}\Delta(h,k)=&[f(\boldsymbol{x}_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)]-[f(\boldsymbol{x}_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)],\\ \varphi(y)=&f(\boldsymbol{x}_0+h,y)-f(\boldsymbol{x}_0,y),\end{aligned}$$

则函数 $\varphi:[y_0-\delta,y_0+\delta]\to\mathbb{R}$ 在 $(y_0-\delta,y_0+\delta)$ 上可导，并且

$$\Delta(h,k)=\varphi(y_0+k)-\varphi(y_0)=k\varphi'(y_0+\theta_1 k)=k\left[\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0+h,y_0+\theta_1 k)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\theta_1 k)\right],$$

这里 $0<\theta_1<1$. 由于函数 $x\longmapsto\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0+\theta_1 k),\forall x\in[\boldsymbol{x}_0-h\boldsymbol{x}_0+h]$ 在 $(\boldsymbol{x}_0-h,\boldsymbol{x}_0+h)$ 上可导，故由一元函数的 Lagrange 中值定理，存在 $0<\theta_2<1$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0+h,y_0+\theta_1 k)-\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0,y_0+\theta_1 k)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\boldsymbol{x}_0+\theta_2 h,y_0+\theta_1 k)\cdot h$$

因此

$$\Delta(h,k)=hk\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\boldsymbol{x}_0+\theta_2 h,y_0+\theta_1 k).$$

由 $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 在 (x_0,y_0) 处的连续性得到

$$\lim_{(k,t)\to(0,0)}\frac{\Delta(h,h)}{hk}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0).$$

另一方面，由于

$$\frac{\Delta(h,k)}{hk}=\frac{1}{k}\left[f(\boldsymbol{x}_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)-\frac{f(\boldsymbol{x}_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}\right],$$

并且

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta(h,k)}{hk}=\frac{1}{k}\left[\lim_{k\to c} f\left(\boldsymbol{x}_0+h,y_0+k\right)-f\left(x_0,y_0+k\right),-\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\boldsymbol{x}_0+h,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{h}\right]$$
$$=\frac{1}{h}-\left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0+k\right)-\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\right],$$

因此极限 $\lim\limits_{k\to 0}\left(\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Delta(h,k)}{hk}\right)$ 存在并且等于 $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{\Delta(h,k)}{hk}$，此即为

$$\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0+k\right)-\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\right]=\lim_{(h,h)\to(0,0)}\frac{\Delta(h,k)}{hk}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(x_0,y_0\right).$$

因此 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(x_0,y_0\right)$ 存在，并且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(x_0,y_0\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(x_0,y_0\right).$$

推论 15.1

若函数 $f:U\left(\subset\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}$ 在 U 上是 $C^k(k>1)$ 类的，则 $\forall i_1,i_2,\cdots,i_k\in\{1,2,\cdots,n\}$，$f$ 的 k 阶偏导数 $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}(x)$ 的值与对 $x_{i_p}(p=1,2,\cdots,k)$ 的求导次序无关.

例题 15.10 设 $f:U\left(\subset\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}$ 是任一 C^∞ 类函数，$a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$，若我们记

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)f&=\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\\ \left(\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f&=\left(\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\sum_{j=1}^n a_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)f\\ &=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\\ &=\sum_{i=1}^n a_i^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j},\end{aligned}$$

则可归纳地证明：$\forall k\in\mathbb{N}$，

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f=\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k}\frac{k!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_n^{i_n}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}.$$

特别地，我们来计算 $n=2$ 时的上述展开式. 令 $a_1=h, a_2=k$，则 $\forall p\in\mathbb{N}$，

$$
\begin{aligned}
\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f &= h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y},\\
\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f &= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\\
\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f &= h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}+3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}+k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f &= h^p\frac{\partial^p f}{\partial x^p}+C_p^1h^{p-1}k\frac{\partial^p f}{\partial x^{p-1}\partial y}\\
&\quad +C_p^2h^{p-2}k^2\frac{\partial^p f}{\partial x^{p-2}\partial y^2}+\cdots+C_p^{p-1}hk^{p-1}\frac{\partial^p f}{\partial x\partial y^{p-1}}+k^p\frac{\partial^p f}{\partial y^p}.
\end{aligned}
$$

3. Taylor 公式

定理 15.6

设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是任一开集，$f:U\to\mathbb{R}$ 是任一 C^k 类函数，$\boldsymbol{x}_0\in U$. 令 $r>0$ 使得 $B(\boldsymbol{x}_0,r)\subset U$. 则 $\forall\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\cdots h_n)\in\mathbb{R}^n$ 且 $\|\boldsymbol{h}\|<r$，存在 $\theta\in(0,1)$ 使得下述 Taylor 公式成立：

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0)&+\left(\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)f(\boldsymbol{x}_0)+\frac{1}{2!}\left(\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(\boldsymbol{x}_0)\\
&+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}\left(\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{k-1} f(\boldsymbol{x}_0)+\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{h})
\end{aligned}
$$

证明 设 $\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_n)\in\mathbb{R}^n$ 并且 $\|\boldsymbol{h}\|<r$，则 $\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{h}\in B(\boldsymbol{x}_0,r)\,(\forall 0\leqslant t\leqslant 1)$，若令

$$F(t)=f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{h}),\forall t\in[0,1]$$

则函数 $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ 在 $[0,1]$ 上是 C^k 类的，根据一元函数的 Maclaurin 公式，我们有：$\forall t\in[0,1]$，

$$F(t)=F(0)+\frac{1}{1!}F'(0)t+\frac{1}{2!}F''(0)t^2+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}F^{(k-1)}(0)t^{k-1}+\frac{1}{k!}F^{(k)}(\theta)t^k \tag{15.1}$$

这里 $\theta\in(0,1)$，直接计算得到

$$
\begin{aligned}
F'(0)&=f(\boldsymbol{x}_0)\\
F'(t)&=\left(\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{h})\\
F''(t)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left(\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{h})\right)\\
&=\left(\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\sum_{j=1}^n h_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{h})\right)\\
&=\left(\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{h})
\end{aligned}
$$

因此，归纳地可证：$\forall p \in \mathbb{N}$ 且 $1 \leqslant p \leqslant k$，我们有

$$F^{(p)}(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^p f\left(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}\right)$$

故

$$F(0) = f\left(\boldsymbol{x}_0\right), F'(0) = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) f\left(\boldsymbol{x}_0\right),$$

$$F''(0) = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f\left(\boldsymbol{x}_0\right), \cdots,$$

$$F^{(k-1)}(0) = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{k-1} f\left(\boldsymbol{x}_0\right),$$

$$F^{(k)}(\theta) = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f\left(\boldsymbol{x}_0 + \theta\boldsymbol{h}\right).$$

将它们代入式(15.1)的右端并令 $t = 1$，即为

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_0 + h) = f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{1!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(\boldsymbol{x}_0) + \cdots \\ + \frac{1}{(k-1)!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{k-1} f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\boldsymbol{x}_0 + \theta h), \end{aligned}$$

推论 15.2

$f, \boldsymbol{x}_0, r$ 如定理所述，则有 Taylor-Young 公式：

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{1!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(\mathbf{x}_0) + \cdots \\ + \frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{h}\|^k) \quad (\mathbf{h} \to 0). \end{aligned}$$

证明 $\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ 且 $\|\boldsymbol{h}\| < r$，令

$$R(h) = f\left(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}\right) - \left[f\left(\boldsymbol{x}_0\right) + \frac{1}{1!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) f\left(\boldsymbol{x}_0\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f\left(\boldsymbol{x}_0\right)\right].$$

我们证明 $R(\boldsymbol{h}) = o\left(\|\boldsymbol{h}\|^k\right) (h \to 0)$ 或 $\lim\limits_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \dfrac{R(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|^k} = 0$.

根据上述 Taylor 公式，$\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{h}\| < r, \exists \theta \in (0,1)$，使得

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{1!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) f(\boldsymbol{x}_0) + \cdots \\ + \frac{1}{(k-1)!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{k-1} f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\boldsymbol{x}_0 + \theta\boldsymbol{h}). \end{aligned}$$

因此

$$R(\boldsymbol{h})=\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{h})-\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\boldsymbol{x}_0)$$

又因为

$$\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\boldsymbol{x})=\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k}\frac{k!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}h_1^{i_1}h_2^{i_2}\cdots h_n^{i_n}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{x})$$

及 $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i}\cdots\rho x_n^{i_n}}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处连续，故

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists 0<\delta<r)\left(\forall\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n \text{ 且 } \|\boldsymbol{h}\|<\delta\right)(\forall 0\leqslant i_l\leqslant h, l=1,2,\cdots,n \text{ 且 } i_1+i_2+\cdots+i_n=k)$$

$$\Longrightarrow\left|\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}-(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{h})-\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{x}_0)\right|<\varepsilon.$$

因此我们有：$\forall\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n$ 且 $\|\boldsymbol{h}\|<\delta$，

$$\begin{aligned}|R(\boldsymbol{h})|&\leqslant\frac{1}{k!}\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k}\frac{k!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}\left|h_1^{i_1}h_2^{i_2}\cdots h_n^{i_n}\right|\cdot\left|\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{h})-\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{x}_0)\right|\\&<\frac{\varepsilon}{k!}\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k}\frac{k!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}\left|h_1^{i}h_2^{i_2}\cdots h_n^{i_n}\right|\\&=\frac{\varepsilon}{k!}(|h_1|+|h_2|+\cdots+|h_n|)^k\end{aligned}$$

从而

$$\left|\frac{R(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|^k}\right|<\frac{\varepsilon}{k!}\cdot\frac{(|h_1|+|h_2|+\cdots+|h_n|)^k}{\|\boldsymbol{h}\|^k}=\frac{\varepsilon}{k!}\left(\frac{\|\boldsymbol{h}\|_2}{\|\boldsymbol{h}\|}\right)^k.$$

由于 $\mathbb{R}^n$ 中的三个基本范数都是等价的，故存在常数 $M>0$ 使得 $\dfrac{\|\boldsymbol{h}\|_2}{\|\boldsymbol{h}\|}<M$．于是

$$\left|\frac{R(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|^k}\right|<\frac{M^k}{k!}\varepsilon,$$

此即表明 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{R(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|^k}=0$ 或 $R(\boldsymbol{h})=o\left(\|\boldsymbol{h}\|^k\right)$．

习题 15.2

1. 设函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{若 } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{若 } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

  1) 证明：函数 f 在 $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ 上是 C^∞ 类的.
  2) 证明：f 在 $(0,0)$ 处不连续.
  3) 证明：f 的一阶偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 存在，但在 $(0,0)$ 处不连续.
  4) 证明：$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

2. 设函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4}{x^2+y^2}, & \text{若 } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{若 } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1) 证明：f 在 $(0,0)$ 处连续.

2) 证明：f 的一阶偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 存在并且在 $(0,0)$ 处连续.

3) 证明：$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

4) f 的 2 阶偏导函数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 在 $(0,0)$ 处连续吗？在 $\mathbb{R}^2$ 上有界吗？

3. 考虑 §7 题 3 的函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$：

$$f(x,y)=\begin{cases}x^3y^3\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, & \text{若 } x\neq0,\ y\neq0,\\ 0, & \text{若 } x=0 \text{ 或 } y=0.\end{cases}$$

1) 证明：f 的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 存在并且在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

2) 证明：在形如 $x\neq0$，$y\neq0$ 或 $y=0$ 的点 (x,y) 处，2 阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ 存在；在形如 $(0,y)$ 的点处，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,y)$ 不存在. 类似地，在形如 $x\neq0$，$y\neq0$ 或 $x=0$ 的点 (x,y) 处，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ 存在，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,0)$ 不存在.

4. 设函数 $f:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}},\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}.$$

1) 证明：f 是 1 次齐次函数.

2) 若令 $r=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},s=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},t=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$，证明：

$$xr+ys=0,\quad xs+yt=0.$$

3) 由此推出 $rt-s^2=0$.

5. 设 $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x>0\}$. 函数 $f:U\to\mathbb{R}$ 定义为

$$f(x,y)=x^y,\quad \forall (x,y)\in U.$$

1) 证明：f 在 U 上是 C^∞ 类的.

2) 写出 f 在 $(1,0)$ 处的 4 阶 Taylor 公式.

6. 设函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^x, & \text{若 } (x,y)\neq(0,0),\\ 1, & \text{若 } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1) 证明：f 在 $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ 上是 C^∞ 类的.

2) 写出 f 在 $(0,1)$ 处的 3 阶 Taylor 公式.

3) 证明：f 在 $(0,0)$ 处连续.

7. 设 $U\subset\mathbb{R}^2$ 是任一非空开集，$f:U\to\mathbb{R}$ 是任一映射. 我们称 f 在 U 上是 p 次可导的，如果所

有 p 阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^p f}{\partial x_{i_p}\partial x_{i_{p-1}}\cdots\partial x_{i_1}}$ 在 U 上存在；称 f 在 U 上是无穷次可导的，如果对任意 $p \geqslant 1$，f 在 U 上是 p 次可导的．考虑如下定义的函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\exp\left(-\dfrac{1}{x^2y^2}\right)}{\exp\left(-\dfrac{1}{x^4}\right)+\exp\left(-\dfrac{1}{y^4}\right)}, & \text{若 } xy\neq 0,\\ 0, & \text{若 } xy=0.\end{cases}$$

1) 证明：f 在 $\mathbb{R}^2$ 上是无穷次可导的.

2) 证明：f 在 $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ 上是 C^∞ 类的.

3) 证明：f 在 $(0,0)$ 处不连续.

8. 设 $U\subset\mathbb{R}^2$ 是 $(0,0)$ 的一个充分小邻域，函数 $f:U\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}[1+x(1+y)]^{\frac{1}{x}}, & \text{若 } (x,y)\in U,\ x\neq 0,\\ 1, & \text{若 } (0,y)\in U.\end{cases}$$

证明：f 在 U 上是 C^∞ 类的.

9. 1) 是否存在一个无穷次可导函数 $f:R^*\to R$ 使得 $\forall p\in\mathbb{N}$，所有的 p 阶偏导数 $\dfrac{\partial^r f}{\partial x_{i_p}\partial x_{i_{p-1}}\cdots\partial x_{i_1}}(0)$ 都是互异的？

2) 设 $A_{i_1 i_2\cdots i_p}\ (1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_p\leqslant n)$ 是一组常数，是否存在 $\cdots$ 个无穷次可导函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 使得 $\forall p\in\mathbb{N},\forall 1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_p\leqslant n$，

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p}\partial x_{i_{p-1}}\cdots\partial x_{i_1}}(0)=A_{i_1 i_2\cdots i_p}?$$

10. 设 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 是任一 C^2 类函数. 我们令

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

若 $\Delta f=0$，则称 f 在 $\mathbb{R}^3$ 上是一个调和函数.

1) 证明:若 f 在 $\mathbb{R}^3$ 上是调和函数，并且 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上有连续的二阶偏导数，则 $y\dfrac{\partial f}{\partial x}-x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上也是调和的.

2) 证明：若 f 在 $\mathbb{R}^3$ 上是调和函数，则函数 $g:\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}\to\mathbb{R}$,

$$g(x,y,z)=\frac{1}{r}f\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right),\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\},$$

也是调和函数，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

11. 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是任一 C^2 类函数，$\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. 令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta(r\neq 0)$，试用 r,θ 的函数及 f 关于 r,θ 的偏导数表示 Δf.

15.3 多元函数的极值

在第 8 章 §5 中我们用导数研究了一元函数的局部极值，这里我们将用偏导数来研究多元函数的局部极值问题. 为此首先介绍局部极值的定义.

1. 局部极值的定义

定义 15.4

设 $X \subset \mathbb{R}^n (n > 1)$ 是任一非空集合，$f : X \to \mathbb{R}$ 是任一函数，$\boldsymbol{x}_0 \in X$.

1. 我们称函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处取局部极大 (小) 值：如果

$$\exists \delta > 0, \forall \boldsymbol{x} \in X \cap B(\boldsymbol{x}_0, \delta) \Longrightarrow f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{x}_0)\,(f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{x}_0)).$$

这时 $\boldsymbol{x}_0$ 称为 f 的局部极大 (小) 值点.

2. 我们称函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处取严格局部极大 (小) 值，如果

$$\exists \delta > 0, \forall \boldsymbol{x} \in X \cap B(\boldsymbol{x}_0, \delta) \Longrightarrow f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}_0)\,(f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x}_0)).$$

这时 $\boldsymbol{x}_0$ 称为 f 的严格局部极大 (小) 值点.

3. 函数 f 的局部极大与极小值点统称为 f 的局部极值点，f 在局部极值点所取的函数值称为 f 的局部极值.

♣

像一元函数一样，我们只对 $\boldsymbol{x}_0$ 为聚点的局部极值点感兴趣.

2. 局部极值的必要条件

定理 15.7

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是任一开集，$\boldsymbol{x}_0 \in U$. 假设函数 $f : U \to \mathbb{R}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的一阶偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0)\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 存在，若 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处取局部极值，则

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) = 0, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) = 0. \tag{15.2}$$

♡

证明 $\forall i = 1, 2, \cdots, n$，由于 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处取局部极值，故部分函数 $f_{x0',t} : U_t \to \mathbb{R}$，

$$\forall x_i \in U_i, f^s_{x_0,i}(x_i) = f\left(x_1^0, \cdots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \cdots, x_n^0\right)$$

在 x_i^0 处取局部极值，因此 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0) = 0$.

满足上述方程组(15.2)的点 $\boldsymbol{x}_0$ 称为函数 f 的局部极值可疑点或奇点. 当然极值可疑点不一定就是 f 的局部极值点.

例题 15.11 考虑函数 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$，它定义为

$$f(x, y, z) = xyz, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^{\nvDash}.$$

显然方程组

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = yz = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xz = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xy = 0$$

有解 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. 因此 $(0, 0, 0)$ 是 f 的一个极值可疑点. 因 $\forall n \in \mathbb{N}$，我们有

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3} > 0, f\left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n^3} < 0,$$

故 $(0, 0, 0)$ 不是 f 的局部极值点.

现在我们研究局部极值的充分条件.

3. 局部极值的充分条件

定理 15.8

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是任一开集, $f: U \to \mathbb{R}$ 是在 U 上的任一 C^2 类函数. $\boldsymbol{x_0} \in U$ 是 f 的一个局部极值可疑点, 使得二次型 $Q_{\boldsymbol{x_0}}: \boldsymbol{h} \longmapsto \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x_0}) h_i h_j, \forall \boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ 是非退化的.

1. 若 $Q_{\boldsymbol{x_0}}$ 是正定的, 则 $\boldsymbol{x_0}$ 是 f 的严格局部极小值点.
2. 若 $Q_{\boldsymbol{x_0}}$ 是负定的, 则 $\boldsymbol{x_0}$ 是 f 的严格局部极大值点.
3. 若 $Q_{\boldsymbol{x_0}}$ 既非正定又非负定, 则 $\boldsymbol{x_0}$ 不是 f 的极值点.

证明 因为 f 在 U 上是 C^2 类的, 故由 Taylor-Young 公式及 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x_0}) = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 得到: $\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ 且 $\|\boldsymbol{h}\| < r$,

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x_0}) &= \frac{1}{2!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(\boldsymbol{x_0}) + o\left(\|\boldsymbol{h}\|^2\right) (\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}) \\
&= \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x_0}) h_i h_j + o\left(\|\boldsymbol{h}\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2} Q_{\boldsymbol{x_0}}(\boldsymbol{h}) + o\left(\|\boldsymbol{h}\|^2\right) (\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}).
\end{aligned}
$$

因此 $\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{h}\| < r$ 且 $\boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}$, 我们有

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x_0}) &= \frac{\|\boldsymbol{h}\|^2}{2} Q_{\boldsymbol{x_0}}\left(\frac{\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|}\right) + o\left(\|\boldsymbol{h}\|^2\right) (\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}) \\
&= \frac{\|\boldsymbol{h}\|^2}{2}\left[Q_{\boldsymbol{x_0}}\left(\frac{\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|}\right) + o(1)\right] (\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}),
\end{aligned}
$$

这里 $\frac{\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|} \in S(0,1)$.

由于 $S(0,1)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 二次型 $Q_{\boldsymbol{x_0}}$ 在 $S(0,1)$ 上连续, 于是存在 $u, v \in S(0,1)$ 使得

$$
Q_{\boldsymbol{x_0}}(u) = \sup_{\boldsymbol{h} \in S(0,1)} Q_{\boldsymbol{x_0}}(\boldsymbol{h}), Q_{\boldsymbol{x_0}}(v) = \inf_{\boldsymbol{h} \in S(0,1)} Q_{\boldsymbol{x_0}}(\boldsymbol{h}).
$$

1) 若 $Q_{\boldsymbol{x_0}}$ 是正定的, 则 $Q_{\boldsymbol{x_0}}(v) = m > 0$. 从而

$$
Q_{\boldsymbol{x_0}}\left(\frac{h}{\|\boldsymbol{h}\|}\right) \geqslant m, \forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{h}\| < r, \text{且 } h \neq 0.
$$

于是存在 $0 < \delta < r$, 使得

$$
\begin{aligned}
\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n, 0 < \|\boldsymbol{h}\| < \delta &\Longrightarrow |0(1)| < \frac{m}{2} \\
&\Longrightarrow Q_{\boldsymbol{x_0}}\left(\frac{h}{\|\boldsymbol{h}\|}\right) + o(1) > \frac{m}{2} > 0 \\
&\Longrightarrow f(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x_0}) > 0.
\end{aligned}
$$

因此 $\boldsymbol{x_0}$ 是 f 的严格局部极小值点.

2) 若 $Q_{\boldsymbol{x_0}}$ 是负定的, 则 $Q_{\boldsymbol{x_0}}(u) = M < 0$. 从而

$$
Q_{\boldsymbol{x_0}}\left(\frac{\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|}\right) \leqslant M, \forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{h}\| < r \text{ 且 } \boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}.
$$

于是存在 $0<\eta<r$ 使得

$$\begin{aligned}\forall \boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n, 0<\|\boldsymbol{h}\|<\eta &\Longrightarrow |o(1)|<\frac{|M|}{2}\\ &\Longrightarrow Q_{\boldsymbol{x}_0}\left(\frac{\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|}\right)+o(1)<\frac{M}{2}<0\\ &\Longrightarrow f\left(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}\right)-f\left(\boldsymbol{x}_0\right)<0.\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的严格局部极大值点.

3) 若 $Q_{\boldsymbol{x}_0}$ 既非正定又非负定. 则存在 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n$ 且 $\boldsymbol{u}\neq\mathbf{0}$， $\boldsymbol{v}\neq\mathbf{0}$ 使得 $Q_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{u})=1, Q_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{v})=-1$. 于是存在 $\zeta>0$ 使得 $\forall t\in\mathbb{R}$ 且 $|t|\leqslant\zeta$，有

$$\begin{aligned}f\left(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{u}\right)-f\left(\boldsymbol{x}_0\right)&=\frac{1}{2}Q_{\boldsymbol{x}_0}(t\boldsymbol{u})+o\left(\|t\boldsymbol{u}\|^2\right)\\ &=\frac{1}{2}t^2+o\left(t^2\right)(t\to 0)\\ f\left(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v}\right)-f\left(\boldsymbol{x}_0\right)&=\frac{1}{2}Q_{\boldsymbol{x}_0}(t\boldsymbol{v})+o\left(\|t\boldsymbol{v}\|^2\right)\\ &=-\frac{1}{2}t^2+o\left(t^2\right)(t\to 0)\end{aligned}$$

由此可知，在 $\boldsymbol{x}_0$ 的任意小邻域内包含点 $\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{u}$ 及点 $\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v}$ 使得 $f\left(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{u}\right)-f\left(\boldsymbol{x}_0\right)>0, f\left(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v}\right)-f\left(\boldsymbol{x}_0\right)<0$，故 $\boldsymbol{x}_0$ 不是 f 的局部极值点.

推论 15.3

设 $U\subset\mathbb{R}^2$ 是任一开集，$f:U\to\mathbb{R}$ 是任一在 U 上 C^2 类的函数，$M_0\left(x_0,y_0\right)\in U$ 是 f 的一个局部极值可疑点.

1)M_0 是 f 的严格局部极小值点，如果

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(M_0\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(M_0\right)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(M_0\right)\right]^2>0 \text{ 且 } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(M_0\right)>0.$$

2)M_0 是 f 的严格局部极大值点，如果

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(M_0\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(M_0\right)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(M_0\right)\right]^2>0 \text{ 且 } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(M_0\right)<0.$$

3)M_0 不是 f 的局部极值点，如果

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(M_0\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(M_0\right)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(M_0\right)\right]^2<0.$$

证明 当 $n=2$ 时，二次型 Q_{M_0} 可改写成下述形式：

$\forall h=\left(h_1,h_2\right)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}Q_{M_0}(\boldsymbol{h})&=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\left(M_0\right)h_ih_j\\ &=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(M_0\right)h_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(M_0\right)h_1h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(M_0\right)h_2^2\\ &=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(M_0\right)\left[h_1+\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(M_0\right)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(M_0\right)}\right]^2+\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(M_0\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(M_0\right)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(M_0\right)\right]^2}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(M_0\right)}h_1^2.\end{aligned}$$

由此推知

1) 若 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M_0)\right]^3>0$ 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)>0$，则二次型 Q_{M_0} 是正定的，从而 M_0 是 f 的严格局部极小值点.

2) 若 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M_0)\right]^2>0$ 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)<0$，则二次型 Q_{M_0} 是负定的，从而 M_0 是 f 的严格局部极大值点.

3) 若 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M_0)\right]^2<0$，则二次型 Q_{M_0} 既非正定又非负定，故 M_0 不是 f 的局部极值点.

注 当 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M_0)\right]^2=0$ 时，利用上面的论证方法不能判断 M_0 是否为 f 的局部极值点，这时，我们必须对函数 f 进行更精细的研究.

例题 15.12 设函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=x^4+y^4-(x+y)^2.$$

试研究 f 的局部极值点及局部极值.

直接计算得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3-2x-2y, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4y^3-2x-2y.$$

由 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ 我们得到 $x+y=2x^3=2y^3$. 因此 $x=y$. 从而 f 的局部极值可疑点为

$$M_0=(0,0), M_1=(1,1), M_3=(-1,-1).$$

因为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x^2-2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=12y^2-2. \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-2$$

所以

1) 对 $M_0=(0,0)$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\right]^2=0$，因此我们不能利用上述推论判断 M_0 是否为局部极值点.

为此取 $y=x$ ，则 $f(x,x)=2x^4-4x^2=2x^2\left(x^2-2\right)$. 当 $0<|x|<\sqrt{2}$ 时，$f(x,x)<0$；若取 $y=-x$ ，则 $f(x,-x)=2x^4>0, \forall x\neq 0$. 因此 $M_0=(0,0)$ 不是 f 的局部极值点.

2) 对 $M_1=(1,1)$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)\right]^2=96>0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)=10>0$，因此 $M_1=(1,1)$ 是 f 的严格局部极小值点，其严格局部极小值为 $f(1,1)=-2$.

3) 对 $M_2=(-1,-1)$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-1)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-1,-1)\right]^2=96>0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1)=10>0$，因此 $M_2=(-1,-1)$ 也是 f 的严格局部极小值点，其严格局部极小值为 $f(-1,-1)=-2$.

例题 15.13 设函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=x^2y^2.$$

试研究 f 的局部极值.

由 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy^2=0, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x^2y=0$ 解之得 f 的局部极值可疑点为

$$(0,y)(\forall y\in\mathbb{R}), (x,0)(\forall x\in\mathbb{R}).$$

由于 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\right]^2=4x^2y^2-16x^2y^2=-12x^2y^2$$

故

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,y)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,y)\right]^2=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,0)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,0)\right]^2=0$$

因此我们不能用上述推论判断 f 在点 $(0,y)(y\in\mathbb{R})$ 与 $(x,0)(x\in \mathrm{R})$ 处的局部极值性.

但是直接由 f 的表达式可知，$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$，

$$f(x,y)-f(0,\bar{y})=x^2y^2\geqslant 0(\forall\bar{y}\in\mathbb{R}),$$

$$f(x,y)-f(\bar{x},0)=x^2y^2\geqslant 0(\forall\bar{x}\in\mathbb{R}).$$

因此由定义知，可疑点 $(0,y)(\forall y\in\mathbb{R})$ 与 $(x,0)(\forall x\in\mathbb{R})$ 都是 f 的局部极小值点，其局部极小值为

$$f(0,y)=f(x,0)=0,(\forall x,y\in\mathbb{R}).$$

例题 15.14 设函数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, f(x,y,z)=\left(y+z^2\right)\mathrm{e}^{y\left(x^2+z^2+1\right)}.$$

试研究 f 的局部极值性.

首先确定 f 的局部极值可疑点. 因为

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2xy\left(y+z^2\right)\mathrm{e}^{y\left(x^2+z^2+1\right)}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\left[1+\left(x^2+z^2+1\right)\left(y+z^2\right)\right]\mathrm{e}^{y\left(x^2+z^2+1\right)}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2z\left(1+y^2+yz^2\right)\mathrm{e}^{y\left(x^2+z^2+1\right)}$$

由 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=0, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=0, \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0$ 解之得到 f 的唯一局部极值可疑点为 $(0,-1,0)$.

其次写出 f 在 $(0,-1,0)$ 处的 2 阶 Taylor-Young 展开式. 令 $x=h,y=-1+k,z=l,r=\sqrt{h^2+k^2+l^2}$，则

$$\begin{aligned}f(x,y,z)&=f(h,-1+k,l)=\left(-1+k+l^2\right)\mathrm{e}^{(-1+k)(\hbar^2+l^2+1)}\\&=\left(-1+k+l^2\right)\mathrm{e}^{-1+k-k^2-l^2+kl^2+kl^2}\\&=\left(-1+k+l^2\right)\mathrm{e}^{-1+k-k^2-l^2+o(r^2)}\\&=-\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1-k-l^2\right)\left[1+k-h^2-l^2+\frac{k^2}{2}+o\left(r^2\right)\right]\\&=-\frac{1}{\mathrm{e}}\left[1-\frac{k^2}{2}-h^2-2l^2+o\left(r^2\right)\right]\\&=-\frac{1}{\mathrm{e}}+\frac{1}{\mathrm{e}}\left[h^2+\frac{k^2}{2}+2l^2\right]+o\left(r^2\right),\end{aligned}$$

或

$$f(x,y,z)-f(0,-1,0)=\frac{1}{\mathrm{e}}\left(h^2+\frac{1}{2}k^2+2l^2\right)+o\left(r^2\right)(r\to 0)$$

最后，二次型 $Q_{(0,-1,0)}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$，它定义为

$$\forall(h,k,l), Q_{(0,-1,0)}(h,k,l)=\frac{1}{\mathrm{e}}\left(h^2+\frac{1}{2}k^2+2l^2\right)$$

是正定的，故由定理15.8知，$(0,-1,0)$ 是 f 的严格局部极小值点，其严格局部极小值为 $f(0,-1,0)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

实际上，我们还可以证明 f 在 $(0,-1,0)$ 处取最小值 $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. 这是因为：

若 $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ 使得 $f(x,y,z)\geqslant 0$，则 $f(x,y,z)>-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. 因此我们只需要在 $\mathbb{R}^3$ 的子集 E 上考虑 f，这里

$$\begin{aligned}E&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=\left(y+z^2\right)\mathrm{e}^{y\left(x^2+z^2-1\right)}<0\right\}\\&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \left(y+z^2\right)<0\right\}.\end{aligned}$$

显然 $E\subset\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y<0\right\}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^-\times\mathbb{R}$.

在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^-\times\mathbb{R}$ 上，$f(x,y,z)\geqslant y\mathrm{e}^y$，并且 $f(x,y,z)=y\mathrm{e}^y$，当且仅当 $x=z=0$，因为函数

$$\varphi:\mathbb{R}_*^-\to\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R}_*^-,\varphi(y)=y\mathrm{e}^y$$

在 $y=-1$ 处取最小值 $\varphi(-1)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，故

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^-\times\mathbb{R}, f(x,y,z)\geqslant-\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

并且 $f(x,y,z)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 当且仅当 $(x,y,z)=(0,-1,0)$.

因此 f 在 $(0,-1,0)$ 处取最小值 $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.，

✍ 习题 15.3

1. 研究如下所定义的各函数 f 的局部极值：
   1) $f(x,y)=x^4+y^4+(x-y)^2$.
   2) $f(x,y)=x^3+y^8+(x-y)^2$.
   3) $f(x,y)=x^2y-xy^2+xy$.
   4) $f(x,y)=\sin x\sin y\sin(x+y)$.
   5) $f(x,y)=x^2y^2(x^y-1)$.
   6) $f(x,y,z)=x^2y+y^2z+2x-z$.
   7) $f(x,y,z)=x^2y^2+(x^2-y^2)z-4z$.
2. 设
$$U=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_i>0\ (i=1,2,\dots,n),\ x_1x_2\cdots x_n=1\},$$
   函数 $f:U\to\mathbb{R}$ 定义如下：
$$\forall(x_1,x_2,\dots,x_n)\in U, f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i.$$
   试研究函数 f 的局部极值.
3. 设 $a,b\in\mathbb{R}$，函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义如下：
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=(ax^2+by^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}.$$
   试问：f 在 $\mathbb{R}^2$ 上有界吗？若有界，f 在 $\mathbb{R}^2$ 上是否达到它的上、下确界.

4. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是任一 C^1 类函数，满足条件：

$$\forall x\in\mathbb{R}, |f'(x)|\leqslant k<1.$$

考虑如下定义的映射 $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$：

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, g(x,y)=(x+f(y),\ y+f(x)).$$

1) 证明：$\forall a,b\in\mathbb{R}$，函数

$$(x,y)\mapsto h(x,y)=[a-x-f(y)]^2+[b-y-f(x)]^2,(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

在使 $g(\alpha,\beta)=(a,b)$ 的点 (α,β) 处取极小值. 由此推出 g 是满射.

2) 证明：g 是一一映射.

5. 设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是任一凸开集，$f:A\to\mathbb{R}$ 是任一凸 (凹) 函数.

1) 证明：f 的任何局部极小 (大) 值点也是 f 的最小 (大) 值点.

2) 证明：f 的全部极小 (大) 值点的集合是 $\mathbb{R}^n$ 的凸集.

3) 若 f 是严格凸 (凹) 的，则 f 在 A 上的最小 (大) 值点是唯一的.

4) 若 f 是 C^1 类的，则 $x^*\in A$ 是 f 的极小 (大) 值点的充分必要条件是 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)=0, i=1,2,\ldots,n$.(提示：利用 §1 习题 16 的结论.)

第十六章 映射的微分

这一章我们首先介绍映射微分的概念及其基本性质. 然后研究了一类重要的微分同胚映射. 特别证明了两个重要定理：局部微分同胚与隐射定理. 最后介绍了映射微分的一个应用——函数的条件极值研究.

16.1 微分的定义

1. 微分概念的引入

在第 6 章中, 我们介绍了一元实值函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 在 $x_0 \in X$ 处的导数 $f'(x_0)$ 的概念, 它定义为

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}. \tag{16.1}$$

对于 n 元向量值函数 $f: U\left(\subset \mathbb{R}^n\right) \to \mathbb{R}^m (n > 1, m \geqslant 1)$, 我们自然要问是否也可以用类似于式(16.1)的极限方式来定义 f 在 $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{l}$ 处的 “导数” 呢？回答是否定的. 因为这时 $\boldsymbol{h} \in U$ 是一个向量 $(n > 1)$, 何谓 $f(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x_0})$ 被一个向量 $\boldsymbol{h}$ 去除呢？

然而式(16.1)的下述等价形式给了我们启示：

$$f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h = o(h)(h \to 0) \tag{16.2}$$

我们不把 $f'(x_0)$ 看作一个实数, 而是把它当作一个映射 $f'(x_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 來看待, 它定义为

$$\forall h \in \mathbb{R}, f'(x_0)(h) = f'(r_0)h,$$

那么 $f'(x_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 就是一个线性映射, 即 $f'(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. 上述式(16.2)表明 $f(x_0+h)$ 与映射 $h \longmapsto f(x_0) + f'(x_0)h, h \in \mathbb{R}$ 在 h 处的值的差是关于 h 的一个小 o 关系.

为了解决 n 元向量值函数的 “导数” 问题, 我们先来介绍仿射空间的概念.

设 $\mathscr{A}$ 是任一非空集合, $\boldsymbol{E}$ 是一向量空间, 我们称 $\mathscr{A}$ 是以 $\boldsymbol{E}$ 为方向的仿射空间, 若对任一固定点 $\boldsymbol{x_0} \in \mathscr{A}$, 以 $\boldsymbol{x_0}$ 为起点, 任一点 $\boldsymbol{x} \in \mathscr{A}$ 为终点的向量 $\boldsymbol{x_0 x}$ 的全体组成向量空间 E, 这时记 $\mathscr{A} = \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{E}$. 于是

$$\boldsymbol{x} \in \mathscr{A} \iff \exists\, \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h}.$$

$\mathbb{R}^n$ 可以看作是以 $\mathbb{R}^n$ 本身为方向的仿射空间.

现在对 n 元向量值函数 $f: U\left(\subset \mathbb{R}^n\right) \to \mathbb{R}^m$, 我们可以问是否存在线性映射 $T \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$ 使得 $f(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})$ 与映射 $\boldsymbol{h} \longmapsto f(\boldsymbol{x_0}) + T(\boldsymbol{h}), \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ 在 $\boldsymbol{h}$ 处的值的差是关于 $\boldsymbol{h}$ 的一个小 o 关系? 即

$$f(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x_0}) - T(\boldsymbol{h}) = o(\boldsymbol{h})(1)(\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0})$$

如果这样的 T 存在, 则 T 就是下面介绍的微分概念.

定义 16.1

设 $U\left(\subset \mathbb{R}^n\right)(n \geqslant 1)$ 是任一非空开集, $\boldsymbol{x_0} \in U, f: U \to \mathbb{R}^m$ 是任一映射. 若存在线性映射 $T \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$ 使得下式成立

$$f(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x_0}) - T(\boldsymbol{h}) = o(\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}),$$

则我们称映射 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处是可微的, 而线性映射 T 称为 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的微分, 记为 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})$. ♣

从这个定义可知, f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处可微, 当且仅当存在 $T \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$ 使得

$$\|f(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x_0})-T(\boldsymbol{h})\|=o(\|\boldsymbol{h}\|)(\boldsymbol{h} \rightarrow \mathbf{0}).$$

现在我们假设 f 在 U 的每一点 $\boldsymbol{x}$ 处可微, 于是我们得到一个从 U 到 $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$ 的映射 $\mathrm{d} f: U \rightarrow \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$, 它定义为:

$$\forall \boldsymbol{x} \in U,(\mathrm{d} f)(\boldsymbol{x})=\mathrm{d} f(\boldsymbol{x})$$

定义 16.2

若映射 $f: U\left(\subset \mathbb{R}^n\right) \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 U 的每一点 $\boldsymbol{x}$ 处可微, 则我们称 f 在 U 上可微, 而映射 $\mathrm{d} f: U \rightarrow \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \mathbb{R}^{\mathrm{m}}\right)$ 称为 f 的微分映射. ♣

现在我们按第 10 章 § 1 例??的方式在向量空间 $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$ 上定义范数 $\|\cdot\|$, 即

$$\forall T \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right),\|T\|=\sup _{\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n ;\ \|\boldsymbol{h}\|=1}\|T(\boldsymbol{h})\|$$

则 $\left(\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right),\|\cdot\|\right)$ 就是一个赋范向量空间.

显然微分映射 $\mathrm{d} f: U \rightarrow \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$ 在 $\boldsymbol{x_0} \in U$ 处连续, 用 ε-δ 语言描述就是:

$$\begin{aligned}
&(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left(\forall \boldsymbol{x} \in U \cap B\left(\boldsymbol{x_0}, \delta\right)\right) \\
&\Longrightarrow\|\mathrm{d} f(\boldsymbol{x})-\mathrm{d} f(\boldsymbol{x_0})\|<\varepsilon \\
&\Longleftrightarrow \sup _{\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n,\|\boldsymbol{h}\|=1}\|[\mathrm{d} f(\boldsymbol{x})-\mathrm{d} f(\boldsymbol{x_0})](\boldsymbol{h})\|<\varepsilon .
\end{aligned}$$

定义 16.3

若映射 $f: U\left(\subset \mathbb{R}^n\right) \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 U 上可微, 并且微分映射 $\mathrm{d} f: U \rightarrow \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$ 在 U 上连续, 则我们称 f 在 U 上是连续可微的, 或 C^1 类的. ♣

2. 映射微分的两个简单性质

定理 16.1

若映射 $f: U\left(\subset \mathbb{R}^n\right) \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 $\boldsymbol{x_0} \in U$ 处可微, 则

1. f 的微分 $\mathrm{d} f(\boldsymbol{x_0})$ 是唯一的.
2. f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处连续.

♡

证明 1) 假设存在 $T_1, T_2 \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$ 使得

$$\begin{aligned}
&f(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x_0})-T_1(\boldsymbol{h})=o(\boldsymbol{h}), \\
&f(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x_0})-T_2(\boldsymbol{h})=o(\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h} \rightarrow \mathbf{0}),
\end{aligned}$$

两式相减得

$$\left(T_1-T_2\right)(\boldsymbol{h})=o(\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h} \rightarrow \mathbf{0}).$$

于是

$$\left\|\left(T_1-T_2\right)(\boldsymbol{h})\right\|=o(\|\boldsymbol{h}\|)(\boldsymbol{h} \rightarrow \mathbf{0})$$

从而 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 使得

$$\forall \boldsymbol{h}\in\mathbb{R},0<\|\boldsymbol{h}\|<\delta\Longrightarrow\|(T_1-T_2)(\boldsymbol{h})\|<\varepsilon\|\boldsymbol{h}\|.$$

现在 $\forall\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, 取 $\lambda>0$ 使得 $\|\lambda\boldsymbol{k}\|<\delta$, 由上式得

$$\|(T_1-T_2)(\lambda\boldsymbol{k})\|<\varepsilon\|\lambda\boldsymbol{k}\|=\lambda\varepsilon\|\boldsymbol{k}\|,$$

或

$$\|(\boldsymbol{T}_1-\boldsymbol{T}_2)(\boldsymbol{k})\|<\varepsilon\|\boldsymbol{k}\|.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性, 必有 $\|(T_1-T_2)(\boldsymbol{k})\|=0$, 从而 $(T_1-T_2)(\boldsymbol{k})=0$, 再由 $\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^n$ 的任意性知 $T_1-T_2=0$, 即 $T_1=T_2$.

2) f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的连续性是显然的, 因为在等式

$$f(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x_0})=T(\boldsymbol{h})+o(\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0})$$

中令 $\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}$ 取极限即得到

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}f(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x_0}).$$

例题 16.1 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是点 $\boldsymbol{0}$ 的任一邻域, $f:U\to\mathbb{R}^m$ 是任一映射, 并且满足条件

$$\|f(\boldsymbol{x})\|=o(\|\boldsymbol{x}\|)(\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}).$$

证明: f 在 $\boldsymbol{0}$ 处可微, 并且 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$.

事实上, 这时 $f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$, 并且由于 $\boldsymbol{0}\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ 及

$$\|f(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{h})-f(0)-0(\boldsymbol{h})\|=\|f(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{h})\|=o(\|\boldsymbol{h}\|)(\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0})$$

故 f 在 $\boldsymbol{0}$ 处可微, 并且由 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{0})$ 的唯一性知, $\mathrm{d}f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$.

下面一个定理指出了一元实值函数在一点处的可微与可导之间的关系.

定理 16.2

设 $I\subset\mathbb{R}$ 是任一非空区间, $f:I\to\mathbb{R}$ 是任一函数. $x_0\in I$. 则 f 在 x_0 处可微, 当且仅当 f 在 x_0 处可导. 并且这时

$$\mathrm{d}f(x_0)(h)=f'(x_0)h,\forall h\in\mathbb{R}.\tag{16.3}$$

证明 首先我们知道, $T\in\mathscr{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 当且仅当存在常数 $A\in\mathbb{R}$ 使得

$$\forall h\in\mathbb{R},T(h)=Ah.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}f\text{ 在 }x_0\text{ 处可微 }&\Leftrightarrow\exists T\in\mathscr{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})\text{ 使得 }f(x_0+h)-f(x_0)-T(h)=o(h)(h\to0)\\&\Leftrightarrow\exists A\in\mathbb{R}\text{ 使得 }f(x_0+h)-f(x_0)-Ah=o(h)(h\to0)\\&\Leftrightarrow\exists A\in\mathbb{R}\text{ 使得 }\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=A\\&\Leftrightarrow f\text{ 在 }x_0\text{ 处可导.}\end{aligned}$$

由于这时 $A=f'(x_0)$, 故

$$\mathrm{d}f(x_0)(h)=f'(x_0)h,\forall h\in\mathbb{R}.$$

注 虽然上述定理表明一元实值函数 f 在 x_0 处可微与 f 在 x_0 处可导是等价的, 但微分 $\mathrm{d}f(x_0)$ 与导数

$f'(x_0)$ 又是两个完全不同的概念. $\mathrm{d}f(x_0)$ 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 上的线性映射, 而 $f'(x_0)$ 是一个实数, 两者之间的联系由上述式(16.3)所确定.

对于 n 元实值函数 $f: U\left(\subset \mathbb{R}^n\right) \to \mathbb{R}(n>1)$ 来说, f 在 $\boldsymbol{x_0} \in U$ 处可微与 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x_0})$ 的存在已不再是等价的了, 在下一节我们将举出这样的反例, 并进一步研究可微与偏导数之间的关系.

3. 一元实值函数微分的几何意义

对于一元实值函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 在一点 $x_0 \in I$ 处的微分 $\mathrm{d}f(x_0), \mathrm{d}f(x_3)(h)$ 有十分明显的几何意义.

为此我们用 $\varGamma$ 表示函数 f 所代表的平面曲线. 因 f 在 x_0 处可微, 故 f 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 存在. 我们记 T 为 $\varGamma$ 在 $M_0(x_0, f(x_0))$ 处的切线. 则切线 T 的方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0), \forall(x, y) \in T.$$

取 $|h|$ 充分小, 使得 $x_0+h \in I$. 于是与 x_0+h 相对应的切线 T 上的点为 $M(x_0+h, y)$, 曲线 $\varGamma$ 上的点为 $P(x_0+h, f(x_0+h))$, 这里点 M 的纵坐标 y 可由 $\mathrm{d}f(x_0)$ 表示成下述形式:

$$y-y_0=f'(x_0)(x_0+h-x_0)=f'(x_0)h=\mathrm{d}f(x_0)(h).$$

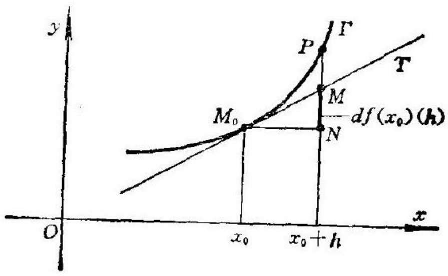


图 16.1

从上述图形上看, $\mathrm{d}f(x_0)(h)$ 就是有向线段 NM.

由于 $f(x_0+h)-f(x_0)$ 是有向线段 $\boldsymbol{NP}$, 并且

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\mathrm{d}f(x_0)(h)+o(h) \approx \mathrm{d}f(x_0)(h)(h \to 0),$$

故此近似式表明, 只要 $|h|$ 充分小, 我们可以用有向线段 NM 近似代替有向线段 $\boldsymbol{NP}$.

因此一元函数的微分常用作某些近似计算.

例题 16.2 计算 $(2.001)^3$ 的近似值使其绝对误差低于 7×10^{-4}.

取 $f(x)=x^3, x_0=2, h=0.001$, 显然函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 并且 $f'(x_0)=3x_0^2=12$. 因此

$$\begin{aligned}(2.001)^3 &= f(x_0+h) \approx f(x_0)+\mathrm{d}f(x_0)(h)\\ &= f(x_0)+f'(x_0)\cdot h=8+12\times 0.001=8.012.\end{aligned}$$

下面计算 $(2.001)^3$ 与近似值 8.012 的绝对误差. 因

$$\begin{aligned}(2.001)^3 &= (x_0+h)^3=x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3\\ &= f(x_0)+\mathrm{d}f(x_0)(h)+3x_0h^2+h^3\\ &= 8.012+3\times 2\times(0.001)^2+(0.001)^3,\end{aligned}$$

所以

$$\left|(2.001)^3-8.012\right|=\left|6\times(0.001)^2+(0.001)^3\right|=0.000006001<7\times 10^{-6}.$$

此即表明 $(2.001)^3$ 与它的近似值 8.012 的绝对误差小于 7×10^{-8}.

4. 用定义计算映射的微分

这里我们举几个直接从微分定义出发计算映射微分的例子.

例题 16.3 若 $f:U\left(\subset\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}^m$ 是常值映射, 则 f 在 U 上可微, 并日 $\forall\boldsymbol{x}\in U,\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$. 即 $\mathrm{d}f=\mathbf{0}$.

事实上, 因为 $T=0\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right)$, 并且

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})-T(\boldsymbol{h})=\mathbf{0},\forall\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n,$$

因此 $\forall\boldsymbol{x}\in U,f$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处可微, 并且 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$.

例题 16.4 若 $T\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right)$, 则 T 在 $\mathbb{R}^n$ 上可微, 并且 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\mathrm{d}T(x)=T$, 因此 $\mathrm{d}T=T$.

事实上, $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 我们有

$$T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-T(\boldsymbol{x})-T(\boldsymbol{h})\equiv 0,\forall\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^*.$$

因此 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,T$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处可微, 并且 $\mathrm{d}T(\boldsymbol{x})=T$, 从而 T 在 $\mathbb{R}^n$ 上可微且 $\mathrm{d}T=T$.

例题 16.5 设映射 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 定义如下:

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,f(x,y)=(x+y,xy).$$

试计算 f 在任一点 (x,y) 处的微分 $df(x,y)$.

设 $(x,y)\in\mathbb{R}^2,(h,k)\in\mathbb{R}^2$. 则

$$\begin{aligned}&f((x,y)+(h,k))-f(x,y)\\=&f(x+h,y+k)-f(x,y)\\=&(x+h+y+k,(x+h)(y+k))-(x+y,xy)\\=&(h+k,yh+xk+hk)\\=&(h+k,yh+xk)+(0,hk).\end{aligned}$$

若定义映射 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 如下:

$$\forall(k,k)\in\mathbb{R}^2,T(h,k)=(h+k,yh+xk),$$

则 $T\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2\right)$, 并且.

$$\|f((x,y)+(h,k))-f(x,y)-T(h,k)\|=\|(0,hk)\|=o(\|h,k)\|)((h,k)\to(0,0)).$$

因此 f 在 (x,y) 处可微, 并且 $\mathrm{d}f(x,y)=T$. 也就是说 f 在任一点 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 处的微分 $\mathrm{d}f(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 由下式定义:

$$\forall(h,k)\in\mathbb{R}^2,\mathrm{d}f(x,y)(h,k)=(h+k,yh+xk).$$

✍ 习题 16.1

1. 设函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义如下:

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 若\ \ xy=0,\\1, & 若\ \ xy\neq 0.\end{cases}$$

   1) 指出 f 的不可微点集.

   2) 指出 f 的可微点集, 并求其微分 $\mathrm{d}f(x,y)$.

2. 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是任一双线性映射.

1) 证明：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

2) 证明：f 在任意一点 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 处可微，并且

$$df(x,y)(h,k)=f(x,k)+f(h,y),\quad \forall(h,k)\in\mathbb{R}^2.$$

3. 设 $f_i:[a,b]\to\mathbb{R}\ (i=1,2,\ldots,n)$ 是 n 个在 $[a,b]$ 上可微的函数，令

$$P=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid a\leqslant x_i\leqslant b,\ i=1,2,\ldots,n\},$$

并定义映射 $f:P\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\forall x\in P,\quad f(\boldsymbol{x})=f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_n(x_n).$$

证明：f 在 P 上可微，并且 $\forall x\in P$，

$$\mathrm{d}f(x)(h)=\sum_{i=1}^n df_i(x_i)(h_i),\quad \forall h=(h_1,h_2,\ldots,h_n)\in\mathbb{R}^n.$$

4. 设 $f_i:U(\subset\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ 是任意 n 个函数，定义映射 $f:U\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\forall\boldsymbol{x}\in U,\ f(\boldsymbol{x})=f_1(\boldsymbol{x})+f_2(\boldsymbol{x})+\cdots+f_n(\boldsymbol{x}).$$

我们假设 $\forall i=1,2,\ldots,n$，下述极限

$$\lim_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}}\frac{f_i(\boldsymbol{y})-f_i(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|}\triangleq a_i(\boldsymbol{x})\quad(\forall\boldsymbol{x}\in U)$$

存在. 证明：f 在任一点 $x\boldsymbol{x}\in U$ 处可微，并且

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})=\sum_{i=1}^n a_i(\boldsymbol{x})h_i,\quad \forall\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\ldots,h_n)\in\mathbb{R}^n.$$

5. 设 $f:U(\subset\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ 是任一映射，$\boldsymbol{x_0}\in U,\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n$，$f'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x_0})$ 是 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处沿方向 $\boldsymbol{h}$ 的方向导数，即

$$f'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x_0})=\lim_{t\to0}\frac{f(\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x_0})}{t}.$$

证明：若 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处可微，则 $\forall\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n$，$f$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处沿方向 $\boldsymbol{h}$ 的方向导数 $f'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x_0})$ 存在，并且

$$df(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})=f'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x_0}).$$

6. n 元向量值函数 $f:U(\subset\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^m$ 在一点 $\boldsymbol{x_0}\in U$ 处的微分定义可以推广到一般赋范向量空间中去.

设 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}$ 是两个实赋范向量空间，$f:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ 是任一映射，$\boldsymbol{x_0}\in\boldsymbol{E}$，我们称 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处可微，如果存在 $T\in\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$，使得

$$f(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x_0})-T(\boldsymbol{h})=o(\boldsymbol{h})\quad(\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}).$$

T 称为 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的微分，记为 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})$.

我们用 $\mathbb{R}[X]$ 表示所有实多项式集合. $\forall P\in\mathbb{R}[X]$，令

$$\|P\|=\left(\int_0^1 P^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac12}.$$

1) 证明：如此定义的 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}[X]$ 上的一个范数. 于是 $(\mathbb{R}[X],\|\cdot\|)$ 是赋范向量空间，它是有限维的吗？

2) 设映射 $f:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$\forall P\in\mathbb{R}[X],\quad f(P)=\int_0^1\sin(tP(t))\,\mathrm{d}t.$$

证明：f 在任一点 $P\in\mathbb{R}[X]$ 处可微，并写出 f 的微分 $\mathrm{d}f(P)$ 的具体表达式.

16.2 微分的性质

从上一节末几个用定义直接计算映射微分的例子可以看出，对比较复杂的映射来说，这种方法就十分不方便了，因为选择线性映射 T，并证明 T 就是映射的微分都是相当困难的.

下面我们试图通过对映射微分的性质的研究找出一些计算映射微分的实际方法.

1. 微分的运算性质

定理 16.3

设映射 $f,g:U\left(\subset\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}^m$ 在点 $\boldsymbol{x_0}\in U$ 处可微，则 $\forall a,\beta\in\mathbb{R}$，映射 $\alpha f+\beta g:U\to\mathbb{R}$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处可微，并且

$$\mathrm{d}(\alpha f+\beta g)(\boldsymbol{x_0})=\alpha\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})+\beta\mathrm{d}g(\boldsymbol{x_0}).$$

证明 根据假设，我们有

$$f(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x_0})-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})=o_1(\boldsymbol{h}),(\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}),$$

$$g(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-g(\boldsymbol{x_0})-\mathrm{d}g(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})=o_2(\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}).$$

因此 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，

$$\begin{aligned}&(af+\beta g)(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-(\alpha f+\beta g)(\boldsymbol{x_0})-(\alpha\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})+\beta\mathrm{d}g(\boldsymbol{x_0}))(\boldsymbol{h})\\=&a\left[f(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x_0})-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})\right]+\beta\left[g(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-g(\boldsymbol{x_0})-\mathrm{d}g(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})\right]\\=&ao_1(\boldsymbol{h})+\beta o_2(\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0})=o(\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}),\end{aligned}$$

此即表明映射 $\alpha f+\beta g$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处可微，并且

$$\mathrm{d}(\alpha f+\beta g)(\boldsymbol{x_0})=\alpha a'f(\boldsymbol{x_0})+\beta\mathrm{d}g(\boldsymbol{x_0}).$$

定理 16.4

设函数 $f,g:U\left(\subset\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}$ 在点 $\boldsymbol{x_0}\in U$ 处可微，则函数 $fg:U\to\mathbb{R}$ 与 $\dfrac{f}{g}:U\to\mathbb{R}\,(g(\boldsymbol{x_0})\neq\boldsymbol{0})$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处也可微，并且

$$\mathrm{d}(fg)(\boldsymbol{x_0})=g(\boldsymbol{x_0})\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})+f(\boldsymbol{x_0})\mathrm{d}g(\boldsymbol{x_0})$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)(\boldsymbol{x_0})=\frac{g(\boldsymbol{x_0})\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})-f(\boldsymbol{x_0})\mathrm{d}g(\boldsymbol{x_0})}{g^2(\boldsymbol{x_0})}$$

证明 因为 f,g 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处可微，所以

$$f(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-f(x_1)-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})=o_1(\boldsymbol{h}),$$

$$g(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-g(\boldsymbol{x_0})-\mathrm{d}g(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})=o_2(\boldsymbol{h})$$

因此

$$
\begin{aligned}
& fg(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-fg(\boldsymbol{x_0})-[g(\boldsymbol{x_0})\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})+f(\boldsymbol{x_0})\mathrm{d}g(\boldsymbol{x_0})](\boldsymbol{h}) \\
=& g(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})[f(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x_0})-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})]+[g(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-g(\boldsymbol{x_0})]\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h}) \\
& +f(\boldsymbol{x_0})[g(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-g(\boldsymbol{x_0})-\mathrm{d}g(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})] \\
=& g(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})o_1(\boldsymbol{h})+[g(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-g(\boldsymbol{x_0})]\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})+f(\boldsymbol{x_0})o_2(\boldsymbol{h}).
\end{aligned}
$$

另一方面，由于 g 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处连续，故

$$
\begin{aligned}
g(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-g(\boldsymbol{x_0}) &= o(1)(\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}), \\
g(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h}) &= O(1)(\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0})
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
& fg(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-fg(\boldsymbol{x_0})-[g(\boldsymbol{x_0})\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})+f(\boldsymbol{x_0})\mathrm{d}g(\boldsymbol{x_0})](\boldsymbol{h}) \\
=& O(1)o_1(\boldsymbol{h})+o(1)\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})+f(\boldsymbol{x_0})o_2(\boldsymbol{h})=o(\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}),
\end{aligned}
$$

此即表明 fg 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处可微，并且

$$
\mathrm{d}(fg)(\boldsymbol{x_0})=g(\boldsymbol{x_0})\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})+f(\boldsymbol{x_0})\mathrm{d}g(\boldsymbol{x_0}).
$$

对 $\dfrac{f}{g}$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的可微性论证留给读者作为练习.

2. 微分与偏导数的关系

我们首先研究 n 元实值函数 $f:U(\subset\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ 在一点 $\boldsymbol{x_0}$ 处的微分与偏导数的关系.

定理 16.5

设 $f:U(\subset\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ 是任一函数，$\boldsymbol{x_0}\in U$.

1) 若 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处可微，则 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的所有一阶偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x_0})\,(i=1,2,\cdots,n)$ 存在，并且微分 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})$ 可表示成下述形式：

$$
\begin{aligned}
& \forall\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_n)\in\mathbb{R}^n, \\
& \mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x_0})h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x_0})h_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x_0})h_n.
\end{aligned}
\tag{16.4}
$$

2) 若 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 的一个邻域 $B(\boldsymbol{x_0},\delta)\subset U$ 内所有一阶偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}:B(\boldsymbol{x_0},\delta)\to\mathbb{R}(i=1,2,\cdots,n)$ 存在，并且在 $\boldsymbol{x_0}$ 处连续，则 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处可微. 从而 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})$ 有(16.4)的表达形式.

证明 1) 因为 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处可微，故我们有

$$
f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x_0})=\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(x-\boldsymbol{x_0})+o((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}))(x\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}).
$$

另一方面，由于 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, 故存在唯一向量 $\boldsymbol{l}=(l_1,l_2,\cdots,l_n)\in\mathbb{R}^n$ 使得

$$
\forall\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_n)\in\mathbb{R}^n,\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})=l_1h_1+l_2h_2+\cdots+l_nh_n.
$$

从而

$$
f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x_0})=l_1\left(x_1-x_1^0\right)+l_2\left(x_2-x_2^0\right)+\cdot+l_n\left(x_n-x_n^0\right)+o((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})).
$$

因此 $\forall i=1,2,\cdots,n$, f 的第 i 个部分函数 $f_{\boldsymbol{x_0},1}:U_i\to\mathbb{R}$ 满足下述关系式：

$$
f_{\boldsymbol{x_0},i}(x_i)-f_{\boldsymbol{x_0},i}\left(x_i^0\right)=l_i\left(x_i-x_i^0\right)+o\left(\left(x_i-x_i^0\right)\right)\left(x_i\to x_i^0\right).
$$

此即表明 $f_{\boldsymbol{x_0}}$, 在 x_i^0 处可导, 并且 $f'_{\boldsymbol{x_0},i}\left(x_i^0\right)=l_i$, 因此 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的一阶偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x_0})\,(i=1,2,\cdots,n)$ 存在, 且

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x_0})=f'_{\boldsymbol{x_0},i}\left(x_i^0\right)=l_i.$$

从而我们推得 $\mathrm{d}f\,(x_0)$ 的下述表达式:

$$\mathrm{d}f\,(\boldsymbol{x_0})\,(\boldsymbol{h})=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x_0})\,h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x_0})\,h_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x_0})\,h_n,\forall\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_n)\in\mathbb{R}^n.$$

2) 因为 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})(i=1,2,\cdots,n)$ 在 $B\,(\boldsymbol{x_0},\delta)$ 上存在, 所以 $\forall\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_n)\in\mathbb{R}^n$ 且 $\|\boldsymbol{h}\|<\delta$, 我们有:

$$\begin{aligned}
&f\,(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-f\,(\boldsymbol{x_0})\\
=&f\left(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2,\cdots,x_n^0+h_n\right)-f\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right)\\
=&f\left(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2,\cdots,x_n^0+h_n\right)-f\left(x_1^0,x_2^0+h_2,\cdots,x_n^0+h_n\right)+f\left(x_1^0,x_2^0+h_2,x_3^0+h_3,\cdots,x_n^0+h_n\right)\\
&-f\left(x_1^0,x_2^0,x_3^0+h_3,\cdots,x_n^0+h_n\right)+\cdots++f\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{n-1}^0,x_n^0+h_n\right)-f\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{n-1}^0,x_n^0\right)\\
=&\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0+\theta_1h_1,x_2^0+h_2,\cdots,x_n^0+h_n\right)h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0,x_2^0+\theta_2h_2,x_3^0+h_3+\cdots+x_n^0+h_n\right)h_2+\cdots\\
&+\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{n-1}^0,x_n^0+\theta_nh_n\right)h_n.
\end{aligned}$$

这里 $0<\theta_i<1(i=1,2,\cdots,n)$. 由于 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处连续 $(i=1,2,\cdots,n)$, 故

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0+\theta_1h_1,x_2^0+h_2,\cdots,x_n^0+h_n\right)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right)+o_1(1)(\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0})\\
&\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0,x_2^0+\theta_2h_2,x_3^0+h_3,\cdots,x_n^0+h_n\right)=\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right)+o_2(1)(\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0})\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0+\theta_nh_n\right)=\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right)+o_n(1)(\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0})
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
f\,(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-f\,(\boldsymbol{x_0})&=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x_0})\,h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x_0})\,h_2+\cdots\\
&\quad+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x_0})\,h_n+h_1o_1(1)+h_2o_2(1)+\cdots+h_no_n(1)(\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0})\\
&=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x_0})\,h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x_0})\,h_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x_0})\,h_n+o(\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0})
\end{aligned}$$

由于映射 $\boldsymbol{h}\longmapsto\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x_0})\,h_i,\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n$ 是线性的, 故上式表明 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处可微, 并且 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的微分 $\mathrm{d}f\,(\boldsymbol{x_0})$ 为:

$$\partial f\,(x_0)\,(\boldsymbol{h})=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x_0})\,h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x_0})\,h_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x_0})\,h_n,\forall\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_n)\in\mathbb{R}^n.$$

例题 16.6 考虑坐标函数 $x_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}(i=1,2,\cdots,n)$. 在第 5 章 § 1 例**??**中我们已经证明了每一个坐标函数 $x_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是连续可导的, 并且

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & 若\ j=i\\ 0, & 若\ j\neq i\end{cases}\quad(\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n)$$

因此根据上述定理知，坐标函数 $x_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是可微的，并且 x_i 在任意一点 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 处的微分 $\mathrm{d}x_i(\boldsymbol{x})$ 的表达式为：

$$\forall \boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_n)\in\mathbb{R}^n, \mathrm{d}x_i(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial x_j}(x)h_j=h_i.$$

由于 $\mathrm{d}x_i(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})=h_i(i=1,2,\cdots,n)$ 与 $\boldsymbol{x}$ 无关，故我们可以记 $\mathrm{d}x_i\triangleq\mathrm{d}x_i(\boldsymbol{x})$. 因此

$$\forall \boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n, \mathrm{d}x_i(\boldsymbol{h})=h_i(i=1,2,\cdots,n).$$

特别地，若取 $\boldsymbol{h}=e_j=(0,\cdots,0,1,0,\cdots 0)(j=1,2,\cdots,n)$(这里 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基底)，则

$$\mathrm{d}x_i\left(e_j\right)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } j=i\\ 0, & \text{若 } j\neq i\end{cases}(\forall i,j=1,2,\cdots,n). \tag{16.5}$$

1) 标准基底 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 的对偶基底.

现在我们从代数的角度进一步研究 $\mathrm{d}x_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}(i=1,2,\cdots,n)$.

从代数学的线性空间理论中我们知道，$\mathbb{R}^n$ 的对偶空间 $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$ 是一个 n 维的向量空间. 由于 $\forall i=1,2,\cdots,n, \mathrm{d}x_i\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$. 并且由上述关系式(16.5)推知，

$$c_1\mathrm{d}x_1+c_2\mathrm{d}x_2+\cdots+c_n\mathrm{d}x_n=0\iff c_1=c_2=\cdots=c_n=0.$$

因此 $(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n)$ 构成 $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$ 的一个基底，通常我们称 $(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准基底 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 的对偶基底.

下面我们来研究函数 $f:U\left(\subset\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}$ 的微分在对偶基底下的表示.

2) 微分在对偶基底下的表示

定理 16.6

若函数 $f:U\left(\subset\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}$ 在 $\boldsymbol{x_0}\in U$ 处可微，则

$$\mathrm{d}f\left(\boldsymbol{x_0}\right)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\boldsymbol{x_0}\right)\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\boldsymbol{x_0}\right)\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(\boldsymbol{x_0}\right)\mathrm{d}x_n,$$

证明 因为 $(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n)$ 是 $\mathscr{P}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$ 的一个基底，并且 $\mathrm{d}f\left(\boldsymbol{x_0}\right)\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$, 所以存在唯一一组 n 个实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 使得

$$\mathrm{d}f\left(\boldsymbol{x_0}\right)=c_1\mathrm{d}x_1+c_2\mathrm{d}x_2+\cdots+c_n\mathrm{d}x_n.$$

为了确定常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$, 我们注意到 $\mathrm{d}f\left(\boldsymbol{x_0}\right)$ 的具体表达式(16.5), 特别取 $\boldsymbol{h}=e_i$, 则由关系式(16.5)我们得到：$\forall i=1,2,\cdots,n$,

$$\mathrm{d}f\left(\boldsymbol{x_0}\right)\left(e_i\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\boldsymbol{x_0}\right)c_{ij}=\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\boldsymbol{x_0}\right)$$

$$\mathrm{d}f\left(\boldsymbol{x_0}\right)\left(e_i\right)=\sum_{j=1}^{n}c_j\mathrm{d}x_j\left(e_i\right)=c_i$$

因此 $c_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\left(\boldsymbol{x_0}\right)(i=1,2,\cdots,n)$. 从而

$$\mathrm{d}f\left(\boldsymbol{x_0}\right)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\boldsymbol{x_0}\right)\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\boldsymbol{x_0}\right)\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(\boldsymbol{x_0}\right)\mathrm{d}x_n.$$

推论 16.1

若函数 $f:U\left(\subset\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可微，则 f 的微分映射 $\mathrm{d}f$ 可表示成下述形式：

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$$

注 对于 n 元实值函数 $f:U\left(\subset\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}$, 定理16.5中给出的保证 f 在 $\boldsymbol{x_0}\in U$ 处可微的条件：一阶编导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})(i=1,2,\cdots,n)$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处连续是十分重要的. 我们可以举出反例，当 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处不连续时，f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处不可微.

当然，$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})(i=1,2,\cdots,n)$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处连续只是保证 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处可微的一个充分条件，而不是必要条件. 我们也可以举出反例，虽然 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处可微，但 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处并不连续.

例题 16.7 考虑二元函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, 它定义为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & 若\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 若\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

我们已经证明了此函数 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 存在，但在 $(0,0)$ 处不连续 (见第 15 章定理15.5的附注). 下画伐们来证明 f 在 $(0,0)$ 处不可微.

事实上，如果 f 在 $(0,0)$ 处可微，则由定理16.5知，$\mathrm{d}f(0,0)$ 必为下述形式：

$$\forall(h,k)\in\mathbb{R}^2,\mathrm{d}f(0,0)(h,k)=-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k.$$

由于 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, 故

$$\mathrm{d}f(0,0)(h,k)\equiv 0,\forall(h,k)\in\mathbb{R}^2$$

从而

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(0,0)&=\mathrm{d}f(0,0)(x,y)+o((x,y))\\&=o((x,y))(x,y)\to(0,0),\end{aligned}$$

或

$$\frac{x^2y}{x^2+y^2}=o((x,y))(x,y)\to(0,0).$$

特别 $y=x$, 则我们得到

$$\frac{x}{2}=o((x,x))=o(x)(x\to 0),$$

或 $\dfrac{1}{2}=o(1)(x\to 0)$, 这显然是不可能的，因此 f 在 $(0,0)$ 处不可微.

例题 16.8 考虑二元函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, 它定义为

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2-y^2}, & 若\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 若\ (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

直接计算得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\left(\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right),\forall(x,y)\neq(0,0).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\left(\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right),\forall(x,y)\neq(0,0).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0,\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

于是一阶偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 存在. 下面我们来证明 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

为此取 $\mathbb{R}^2$ 中的两个点序列 $\left\langle\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},0\right)\right\rangle$ 与 $\left\langle\left(0-\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right)\right\rangle$ 这时，我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(-\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},0\right)=-2\sqrt{2n\pi},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right)=-2\sqrt{2n\pi}(\forall n\in\mathbb{N}).$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},0\right)=-\infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right)=-\infty,$$

从而 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

然而函数 f 在 $(0,0)$ 处是可微的. 因为 $T=0\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$, 并且

$$f(x,y)-f(0,0)-T(x,y)=f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=o((x,y))\ (x,y)\to(0,0)$$

因此 f 在 (0.0) 处可微，并且 $\mathrm{d}f(0,0)=T=0$.

现在我们来研究 n 元向量值函数 $f:U\left(\subset\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}^m$ 的微分与 f 的偏导数之间的关系.

3) 可微映射的 Jacobi 矩阵

令 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$, 则我们得到 f 的 m 个分量函数 $f_i:U\to\mathbb{R}(i=1,2,\cdots,m)$.

首先我们有关于 f 的微分与分量函数 f_i 的微分之间关系的下述定理.

定理 16.7

映射 $f:U\left(\subset\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}^m$ 在 $\boldsymbol{x_0}\in U$ 处可微的充分必要条件是：f 的每一个分量函数 $f_i:U\left(\subset\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}(i=1,2,\cdots,m)$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处可微. 并且这时

$$\forall\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n,\mathrm{d}f\left(\boldsymbol{x_0}\right)(\boldsymbol{h})=\left(\mathrm{d}f_1\left(\boldsymbol{x_0}\right)(\boldsymbol{h}),\mathrm{d}f_2\left(\boldsymbol{x_0}\right)(\boldsymbol{h}),\cdots,\mathrm{d}f_m\left(\boldsymbol{x_0}\right)(\boldsymbol{h})\right),$$

或简记为：$\left(\mathrm{d}f\left(\boldsymbol{x_0}\right)\right)_i=\mathrm{d}f_i\left(\boldsymbol{x_0}\right)(i=1,2,\cdots,m)$.

证明 首先设 $T\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right).\forall\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n$, 令

$$T(\boldsymbol{h})=\left(T_1(\boldsymbol{h}),T_2(\boldsymbol{h}),\cdots,T_m(\boldsymbol{h})\right).$$

于是我们得到 T 的 m 个分量函数 $T_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}(i=1,2,\cdots,m)$. 下面证明 $\forall i=1,2,\cdots,m,T_i\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$.

事实上，$\forall\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^n,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 由定义有

$$T(\alpha\boldsymbol{h}+\beta\boldsymbol{k})=\left(T_1(\alpha\boldsymbol{h}+\beta\boldsymbol{k}),T_2(\alpha\boldsymbol{h}+\beta\boldsymbol{k}),\cdots,T_m(\alpha\boldsymbol{h}+\beta\boldsymbol{k})\right).$$

另一方面，由于 T 是线性映射，故

$$T(\alpha\boldsymbol{h}+\beta\boldsymbol{k})=\alpha T(\boldsymbol{h})+\beta T(\boldsymbol{k})=(\alpha T_1(\boldsymbol{h})+\beta T_1(\boldsymbol{k}),\alpha T_2(\boldsymbol{h})+\beta T_2(\boldsymbol{k}),\cdots,\alpha T_m(\boldsymbol{h})+\beta T_m(\boldsymbol{k}))$$

因此

$$T_i(\alpha\boldsymbol{h}+\beta\boldsymbol{k})=\alpha T_i(\boldsymbol{h})+\beta T_i(\boldsymbol{k}),\forall i=1,2,\cdots,m,$$

此即表明 $T_i:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 是线性映射，故 $T_i\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}\right)(i=1,2,\cdots,m)$.

现在我们有

$$\begin{aligned}f \text{ 在 } \boldsymbol{x_0} \text{ 处可微 } &\iff \exists T\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right) \text{ 使得 } f(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x_0})-T(\boldsymbol{h})=o(\boldsymbol{h})\quad(\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0})\\&\iff \exists T=(T_1,T_2,\ldots,T_m)\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \text{ 使得}\\&\qquad f_i(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h})-f_i(\boldsymbol{x_0})-T_i(\boldsymbol{h})=o(\boldsymbol{h})\quad(\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}),\ i=1,2,\cdots,m\\&\iff f_i \text{ 在 } \boldsymbol{x_0} \text{ 处可微 } (i=1,2,\cdots,m).\end{aligned}$$

并且这时我们有：$\forall\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})=T(\boldsymbol{h})=(T_1(\boldsymbol{h}),T_2(\boldsymbol{h}),\cdots,T_m(\boldsymbol{h}))=(\mathrm{d}f_1(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h}),\mathrm{d}f_2(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h}),\cdots,\mathrm{d}f_m(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h}))$$

因此

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})=(\mathrm{d}f_1(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h}),\mathrm{d}f_2(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h}),\cdots,\mathrm{d}f_m(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})),\forall\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n$$

或

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})=(\mathrm{d}f_1(\boldsymbol{x_0}),\mathrm{d}f_2(\boldsymbol{x_0}),\cdots,\mathrm{d}f_m(\boldsymbol{x_0})).$$

注 这个定理的意义在于将映射 $f:U\left(\subset\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}^m$ 的微分的研究化为对每一个分量函数 $f_i:U\left(\subset\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}$ 的微分的研究.

例如，对 § 1 例16.5的二元向量值函数

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\,f(x,y)=(x+y,xy),(x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

$f_1,f_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为：

$$f_1(x,y)=x+y,\ f_2(x,y)=xy,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

由于 f_1,f_2 在 $\mathbb{R}^2$ 上是 C^1 类的，故根据定理16.5知，f_1,f_2 在 $\mathbb{R}^2$ 上是可微的，并且 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\forall(h,k)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f_1(x,y)(h,k)&=\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)h+\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)k=h+k\\\mathrm{d}f_2(x,y)(h,k)&=\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)h+\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)k=yh+xk\end{aligned}$$

因此根据定理16.7,f 在 $\mathbb{R}^2$ 上可微，并且 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, f 的微分 $\mathrm{d}f(x,y)$ 可表示为：

$$\forall(h,k)\in\mathbb{R}^2,\mathrm{d}f(x,y)(h,k)=(\mathrm{d}f_1(x,y)(h,k),\mathrm{d}f_2(x,y)(h,k))=(h+k,yh+xk)$$

这与我们直倿按微分定义计算的结果完全一致.

注 如果我们将映射 $\mathrm{d}f(x,y)$ 的表达式

$$\mathrm{d}f(x,y)(h,k)=(h+k,yh+xk)\left(\forall(h,k)\in\mathbb{R}^2\right)$$

改写成下述矩阵乘积的形式

$$\mathrm{d}f(x,y)(h,k)=\begin{pmatrix}1&1\\y&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}$$

并注意到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

则矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

实际上就是线性映射 $\mathrm{d}f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的标准基底 (e_1, e_2) 下方对应的矩阵.

这个结果是可以推广到一般映射 $f: U\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ 上去的, 即有下面的定理.

定理 16.8

设 $f: U\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ 是任一映射, $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是 f 的 m 个分量函数, 若 f 在 $\boldsymbol{x_0} \in U$ 处可微, 则 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的微分 $\mathrm{d}f\,(\boldsymbol{x_0})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$ 的标准基底下所对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}. \tag{16.6}$$

证明 根据定理16.7, 我们有

$$\mathrm{d}f\,(\boldsymbol{x_0})\,(\boldsymbol{h}) = (\mathrm{d}f_1\,(\boldsymbol{x_0})\,(\boldsymbol{h}), \mathrm{d}f_2\,(\boldsymbol{x}_0)\,(\boldsymbol{h}), \cdots, \mathrm{d}f_m\,(\boldsymbol{x_0})\,(\boldsymbol{h}))\,, \forall \boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

另一方面, 由定理16.5 , $\forall i = 1, 2, \cdots, n$,

$$\mathrm{d}f_i\,(\boldsymbol{x_0})\,(\boldsymbol{h}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\boldsymbol{x_0})\,h_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\boldsymbol{x_0})\,h_2 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\boldsymbol{x_0})\,h_n \forall \boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^*.$$

因此

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f\,(\boldsymbol{x}_0)\,(\boldsymbol{h})^T &= \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})\,h_j, \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})\,h_j, \cdots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})\,h_j\right)^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x_0}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x_0}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x_0}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x_0}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\boldsymbol{x_0}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{x_0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由此即推得定理.

注 上述矩阵(16.6)称为映射 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的 Jacobi 矩阵, 通常

$$\frac{\partial\,(f_1, f_2, \cdots, f_m)}{\partial\,(x_1, x_2, \cdots, x_n)}(\boldsymbol{x_0})\,, \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})\right) \text{ 或 } J_f\,(\boldsymbol{x_0})\,.$$

当 $n=m$ 时, Jacobi 矩阵的行列式称为 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的 Jacobi 行列式, 记为

$$\frac{D(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}(\boldsymbol{x_0}),\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})\right) \text{ 或 } \Delta_f(\boldsymbol{x_0}).$$

现在我们来考虑 $n=1$ 与 $m=1$ 时的 Jacobi 矩阵.

$n=1$: f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的 Jacobi 矩阵 $J_f(\boldsymbol{x_0})$ 为一列向量

$$J_f(\boldsymbol{x_0})=\begin{pmatrix} f_1'(\boldsymbol{x_0}) \\ f_2'(\boldsymbol{x_0}) \\ \vdots \\ f_m'(\boldsymbol{x_0}) \end{pmatrix}, \mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(h)=\begin{pmatrix} f_1'(\boldsymbol{x_0})h \\ f_2'(\boldsymbol{x_0})h \\ \vdots \\ f_m'(\boldsymbol{x_0})h \end{pmatrix}, \forall h\in\mathbb{R}.$$

这时 $J_f(\boldsymbol{x_0})$ 也常记为 $f'(\boldsymbol{x_0})$, 并称为 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的导数:

$$f'(\boldsymbol{x_0})=\left(f_1'(\boldsymbol{x_0}),f_2'(\boldsymbol{x_0}),\cdots,f_m'(\boldsymbol{x_0})\right),$$

$$f'(\boldsymbol{x_0})h=\left(f_1'(\boldsymbol{x_0})h,f_2'(\boldsymbol{x_0})h,\cdots,f_m'(\boldsymbol{x_0})h\right),\forall h\in\mathbb{R}.$$

$m=1$: f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的 Jacobi 矩阵 $J_f(\boldsymbol{x_0})$ 为一行向量

$$J_f(\boldsymbol{x_0})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x_0}),\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x_0}),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x_0})\right),$$

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x_0})h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x_0})h_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x_0})h_n,\forall\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n.$$

例题 16.9 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 在 $(0,0)$ 处可微. 我们定义映射 $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 如下:

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, F(x,y,z)=(f(y,z),f(z,x),f(x,y)).$$

证明: F 在 $(0,0,0)$ 处可澈, 并计算 F 在 $(0,0,0)$ 处的 Jacobi 矩阵及 Jacobi 行列式.

由于 F 的每一个分量函数在 $(0,0,0)$ 处可微, 故 F 在 $(0,0,0)$ 处可微, 直接计算我们得到

$$J_F(0,0,0)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_F(0,0,0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right)^3+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)^3.$$

例题 16.10 考虑在第 10 章 § 3 例 **??** 中我们研究过的三个坐标变换映射:

$$f:[0,+\infty)\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2,$$

$$f(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

$$g:[0,+\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]\to\mathbb{R}^3,$$

$$g(r,\theta,\alpha)=(r\sin\alpha\cos\theta,r\sin\alpha\sin\theta,r\cos\alpha).$$

$$h:[0,+\infty)\times[0,2\pi]\times(-\infty,+\infty)\to\mathbb{R}^3,$$

$$h(r,\theta,z)=(r\cos\theta,r\sin\theta,z).$$

证明: f,g,h 在各自定义域上是可微的, 并计算它们的 Jacobi 矩阵与 Jacobi 行列式.

由 f,g,h 的定义可知, f,g,h 的各自的分量函数 f_1,f_2 ; g_1,g_2,g_3 及 h_1,h_2,h_3 都是在各自定义域

上的 C^∞ 类函数，故根据定理16.7知，坐标变换映射 f,g,h 在各自定义域上都是可微的.

对于映射 f ：

$$J_f(r,\theta)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(r,\theta)\\ \frac{\partial f_2}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(r,\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\Delta_f(r,\theta)=r$$

对于映射 g ：

$$J_g(r,\theta,\alpha)=\begin{pmatrix}\sin\alpha\cos\theta & -r\sin\alpha\sin\theta & r\cos\alpha\cos\theta\\ \sin\alpha\sin\theta & r\sin\alpha\cos\theta & r\cos\alpha\sin\theta\\ \cos\alpha & 0 & -r\sin\alpha\end{pmatrix},$$

$$\Delta_g(r,\theta,a)=-r^2\sin\alpha.$$

对于映射 h ：

$$J_h(r,\theta,z)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Delta_f(r,\theta,z)=r$$

下面一个定理是关于映射 $f:U\left(\subset\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}^m$ 的光滑性判别法的.

定理 16.9

映射 $f:U\left(\subset\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}^m$ 在 U 上是 C^1 类的充分必要条件是：f 的所有一阶偏导数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$ 在 U 上存在，并且偏导函数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}:U\to\mathbb{R}$ 在 U 上连续.

证明 (必要性) 设 f 在 U 上是 C^1 类的.

我们来证明，$\forall\boldsymbol{x}\in U,\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$ 存在，并且偏导函数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}:U\to\mathbb{R}$ 在 U 上连续.

因为 f 是 C^1 类的，所以 $\forall\boldsymbol{x}\in U,f$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处可微，从而由定理16.7知，f 的每一个一阶偏导数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$ 存在，并且 $\forall\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n,\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})=\left(\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})h_j,\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_2}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})h_j,\cdots,\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})h_j\right)$. 因此对任一固定点 $\boldsymbol{x_0}\in U$, 我们有

$$\begin{aligned}&(\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0}))(\boldsymbol{h})\\ =&\left(\sum_{j=1}^n\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})-\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})\right]h_j\sum_{j=1}^n\left[\frac{\partial f_2}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})-\frac{\partial f_2}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})\right]h_j,\cdots,\sum_{j=1}^n\left[\frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})-\frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})\right]h_j\right).\end{aligned}$$

若在 $\mathbb{R}^m$ 中取基本范数 $\|\cdot\|_2$, 则

$$\|(\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0}))(\boldsymbol{h})\|=\sum_{i=1}^m\left|\sum_{j=1}^n\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})\right]h_j\right|.$$

特别对 $\boldsymbol{h}=e_j$, 我们有

$$\left\|(\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0}))(e_j)\right\|=\sum_{i=1}^m\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})\right|.$$

又因为

$$\begin{aligned}\|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})\| &= \sup_{\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n;\quad \|\boldsymbol{h}\|=1}\|(\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0}))(\boldsymbol{h})\| \\ &\geqslant \left\|(\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0}))\left(e_j\right)\right\|,\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})-\partial f_i(\boldsymbol{x_0})\right| \leqslant \|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})\|(\forall i=1,2,\cdots,m,\forall j=1,2,\cdots,n).$$

另一方面，由假设 f 在 U 上是 C^1 类的，故微分映射 $\mathrm{d}f: U\to\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right)$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处连续，从而

$$\begin{aligned}&(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall\boldsymbol{x}\in U\cap B(\boldsymbol{x_0},\delta))\\ \Longrightarrow&\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})<\varepsilon\\ \Longrightarrow&\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})\right|<\varepsilon\\ \Longrightarrow&\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})\right|<\varepsilon\quad\begin{pmatrix}i=1,2,\cdots,m\\ j=1,2,\cdots,n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

此即表明每一个一阶偏导函数 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}: U\to\mathbb{R}$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处连续. 由 $\boldsymbol{x_0}$ 的任意性知 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 在 U 上连续 $\begin{pmatrix}i=1,2,\cdots,m\\ j=1,2,\cdots,n\end{pmatrix}$.

(充分性) 设 f 的每一个一阶偏导函数 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}: U\to\mathbb{R}$ 在 U 上连续. 那么 f_i 在 U 上可微，从而 f 在 U 上可微. 为了证明 f 在 U 上是 C^1 类的，我们只需证明 $\mathrm{d}f: U\to\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right)$ 在 U 上连续.

任取一点 $\boldsymbol{x_0}\in U$. 由假设 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处连续知

$$\begin{aligned}&(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall\boldsymbol{x}\in U\cap B(\boldsymbol{x_0},\delta))\\ \Longleftrightarrow&\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})\right|<\varepsilon/m\quad(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n).\end{aligned}$$

现在在 $\mathbb{R}^n$ 中取基本范数 $\|\cdot\|_2$, 则 $\forall\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n$ 且 $\|\boldsymbol{h}\|_2=1$, 我们有

$$\begin{aligned}\|(\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0}))(\boldsymbol{h})\| &= \sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})\right)h_j\right|\\ &\leqslant\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}-(\boldsymbol{x})-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})\right|\left|h_j\right|\\ &\leqslant\frac{\varepsilon}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|h_j\right|\right)=\frac{\varepsilon}{m}\cdot m=\varepsilon\end{aligned}$$

从而

$$\|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})\|=\sup_{\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n,\|\boldsymbol{h}\|_2=1}\|(\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0}))(\boldsymbol{h})\|\leqslant\varepsilon,$$

此即表明 $\mathrm{d}f$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处连续. 再由 $\boldsymbol{x_0}$ 的任意性推知 $\mathrm{d}f$ 在 U 上连续. 因此 f 在 U 上是 C^1 类的.

受上述定理的启发，我们可以合理地给出映射光滑性程度的下述定义.

定义 16.4

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是任一开集，$f: U \to \mathbb{R}^m$ 是任一映射，我们称 f 在 U 上是 $C^k(k \geqslant 1)$ 类的，如果 f 的所有 k 阶偏导函数 $\dfrac{\partial^k f_i}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}: U \to \mathbb{R}$ 在 U 上存在并且连续 $(i = 1, 2, \cdots, m)$.

3. 复合映射的微分

定理 16.10

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 与 $V \subset \mathbb{R}^m$ 是两个开集，$f: U \to \mathbb{R}^m$ 与 $g: V \to \mathbb{R}^k$ 是任意两个映射满足下述条件：
1)f 在 $\boldsymbol{x_0} \in U$ 处可微，g 在 $\boldsymbol{y_0} \in V$ 处可微.
2)$y_0 = f(\boldsymbol{x_0}), W = U \cap f^{-1}(V)$ 为开集，
则复合映射 $g \circ f: W \to \mathbb{R}^k$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处可微，并且
1)$\mathrm{d}(g \circ f)(\boldsymbol{x_0}) = \mathrm{d}g(\boldsymbol{y_0}) \circ \mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})$,
2)$g \circ f$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的 Jacobi 矩阵满足下述等式：

$$\left(\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})\right) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_l}(\boldsymbol{y_0})\right) \cdot \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})\right).$$

证明 因为 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处可微，g 在 y_0 处可敞，所以

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x_0}) &= \mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h}) + o_1(\boldsymbol{h}) \quad (\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}), \\ g(\boldsymbol{y_0} + \boldsymbol{k}) - g(\boldsymbol{y_0}) &= \mathrm{d}g(\boldsymbol{y_0})(\boldsymbol{k}) + o_2(\boldsymbol{k}) \quad (\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{0}). \end{aligned}$$

于是由 $y_0 = f(\boldsymbol{x_0})$ 得到

$$\begin{aligned} &g \circ f(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h}) - g \circ f(\boldsymbol{x_0}) = g(f(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h})) - g(f(\boldsymbol{x_0})) \\ =& g(f(\boldsymbol{x_0}) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h}) + o_1(\boldsymbol{h})) - g(f(\boldsymbol{x_0})) \\ =& \mathrm{d}g(\boldsymbol{y_0})(\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h}) + o_1(\boldsymbol{h})) + o_2(\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h}) + o_1(\boldsymbol{h})) \\ =& \mathrm{d}g(\boldsymbol{y_0})(\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})) + \mathrm{d}g(\boldsymbol{y_0})(o_1(\boldsymbol{h})) + o_2(\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h}) + o_1(\boldsymbol{h})) \\ =& \mathrm{d}g(\boldsymbol{y_0}) \circ \mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h}) + \mathrm{d}g(\boldsymbol{y_0})(o_1(\boldsymbol{h})) + o_2(\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h}) + o_1(\boldsymbol{h})). \end{aligned}$$

下面我们来证明

$$\mathrm{d}g(\boldsymbol{y_0})(o_1(\boldsymbol{h})) + o_2(\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h}) + o_1(\boldsymbol{h})) = o(\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}). \tag{16.7}$$

事实上，$\forall \varepsilon > 0$,

由 $o_1(\boldsymbol{h})$ 知，$\exists \xi > 0, \forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{h}\| < \xi \Longrightarrow \|o_1(\boldsymbol{h})\| < \varepsilon \|\boldsymbol{h}\|$.

由 $o_2(\boldsymbol{k})$ 知，$\exists \eta > 0, \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{k}\| < \eta \Longrightarrow \|o_2(\boldsymbol{k})\| < \varepsilon \|\boldsymbol{k}\|$.

现在我们令 $\delta = \min(\xi, \eta / (\|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})\| + \varepsilon))$, 则

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{h}\| < \delta \Longrightarrow & \|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h}) + o_1(\boldsymbol{h})\| \\ & \leqslant \|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})\| \, | \, \boldsymbol{h}\| + \|o_1(\boldsymbol{h})\| \\ & < \|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})\| \boldsymbol{h}\| + \varepsilon \|\boldsymbol{h}\| \\ & = (\|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})\| + \varepsilon) \|\boldsymbol{h}\| < \eta \end{aligned}$$

因此 $\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{h}\| < \delta$, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\|\mathrm{d}g(\boldsymbol{y_0})(o_1(\boldsymbol{h})) + o_2(\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h}) + o_1(\boldsymbol{h}))\| \\
\leqslant &\|\mathrm{d}g(\boldsymbol{y_0})(o_1(\boldsymbol{h}))\| + \|o_2(\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h}) + o_1(\boldsymbol{h}))\| \\
\leqslant &\|\mathrm{d}g(\boldsymbol{y_0})\|\|o_1(\boldsymbol{h})\| + \varepsilon\|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h}) + o_1(\boldsymbol{h})\| \\
\leqslant &\varepsilon\|\mathrm{d}g(\boldsymbol{y_0})\|\|\boldsymbol{h}\| + \varepsilon(\|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})\|\|\boldsymbol{h}\| + \varepsilon\|\boldsymbol{h}\|) \\
= &\varepsilon(\|\mathrm{d}g(\boldsymbol{y_0})\| + \|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})\| + \varepsilon)\|\boldsymbol{h}\|.
\end{aligned}
$$

此即表明式(16.7)成立. 从而

$$g \circ f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - g \circ f(\boldsymbol{x_0}) = \mathrm{d}g(\boldsymbol{y_0}) \circ \mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h}) + o(\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}).$$

因此 $g \circ f$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处可微, 并且 $g \circ f$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的微分

$$d(g \circ f)(\boldsymbol{x_0}) = \mathrm{d}g(\boldsymbol{y_0}) \circ \mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0}). \tag{16.8}$$

由式(16.8)及定理16.8得到

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0}) = \frac{\partial g_i}{\partial y_1}(\boldsymbol{y_0})\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0}) + \frac{\partial g_i}{\partial y_2}(\boldsymbol{y_0})\frac{\partial f_2}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0}) + \cdots + \frac{\partial g_i}{\partial y_{iu}}(\boldsymbol{y_0})\frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})$$

因此由矩阵的乘法法则知

$$\left(\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})\right) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_i}(y_i)\right) \cdot \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0})\right).$$

推论 16.2

若映射 $f: U(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ 在 U 上可微 (C^k 类), 映射 $g: (\subset \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^k$ 在 V 上可微 (C^k 类), 并且 $W = U \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing$, 则复合映射 $g \circ f: W(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^k$ 在 W 上可微 (C^k 类).

证明 因为 f, g 分别在 U, V 上可微, 所以 f, g 分别在 U, V 上连续, 从而 $W = U \cap f^{-1}(V)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空开集, $\forall \boldsymbol{x} \in W$, 由假设 f 在 $\boldsymbol{x} \in U$ 处可微, g 在 $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ 处可微, 于是由上述定理知, $g \circ f$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处可微, 从而 $g \circ f$ 在 W 上可微.

若 f, g 分别在 U 与 V 上是 C^k 类的, 则

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f_l}{\partial x_j}: U \to \mathbb{R} \text{ 在 } U \text{ 上是 } C^{k-1} \text{ 类的 } (l = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n), \\
&\frac{\partial g_i}{\partial y_l}: V \to \mathbb{R} \text{ 在 } V \text{ 上是 } C^{k-1} \text{ 类的 } (i = 1, 2, \cdots, k, l = 1, 2, \cdots, m).
\end{aligned}
$$

由 $g \circ f$ 的 Jacobi 矩阵的下述关系式

$$\left(\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\right) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_i}(f(\boldsymbol{x}))\right) \cdot \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\right) \forall \boldsymbol{x} \in W$$

知, $\forall i = 1, 2, \cdots, k, \forall j = 1, 2, \cdots, n$, $\dfrac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}: W \to \mathbb{R}$ 在 W 上是 C^{k-1} 类的, 因此 $g \circ f$ 在 W 上是 C^k 类的.

通常在计算 n 元实值函数 $f: U(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 的微分 $\mathrm{d}f$ 时, 都是利用复合函数求微分的方法进行的, 它比直接计算 f 的一阶偏导数来求 $\mathrm{d}f$ 便利.

例题 16.11 设二元函数 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 定义如下:

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2, f(r, \theta) = r^2 \sin\theta\cos\theta.$$

计算 f 在任一点 (r,θ) 处的微分 $\mathrm{d}f(r,\theta)$.

我们首先令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则 $f(r,\theta)=xy$. 由复合函数的微分法则知 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上是 C^∞ 类, 并且

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(r,\theta)=&\mathrm{d}(xy)=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\\
=&(r\sin\theta)\mathrm{d}(r\cos\theta)+(r\cos\theta)\mathrm{d}(r\sin\theta)\\
=&(r\sin\theta)[\cos\theta\mathrm{d}r-r\sin\theta\mathrm{d}\theta]+(r\cos\theta)[\sin\theta\mathrm{d}r+r\cos\theta\mathrm{d}\theta]\\
=&2r\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}r+r^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta\\
=&\sin 2\theta\mathrm{d}r+r^2\left(1-2\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

我们建议读者直接按公式

$$\mathrm{d}f(r,\theta)=\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)\mathrm{d}r+\frac{\partial f}{\partial\theta}(r,\theta)\mathrm{d}\theta$$

重新计算一遍.

例题 16.12 设二元函数 $f:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ 定义如下:

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}, f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

试计算 f 的一阶偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

我们令 $u=x^2-y^2, v=x^2+y^2$, 则 $f(x,y)=\frac{u}{v}$. 函数 f 在 $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ 上可微, 并且

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(x,y)=&\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=-\frac{v\mathrm{d}u}{v^2}-u\mathrm{d}v\\
=&\frac{\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\left(x^2-y^2\right)-\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\
=&\frac{x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}(2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y)-\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}(2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y)\\
=&\frac{4xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x-\frac{4yx^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

由此我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\frac{4xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=-\frac{4yx^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}
\end{aligned}$$

这个例子表明利用计算函数的微分的办法可一次计算出 f 的所有一阶编导数.

4. 有限增量定理

作为这一节的结束, 我们证明一个后面研究需要的 n 元向量值函数的有限增量定理.

定理 16.11

设 $f:U\left(\subset\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}^m$ 是在 U 上 C^1 类的映射, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in U$, 并且假设连结 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的线段 $\boldsymbol{xy}$ 位于 U 内, 则

$$\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\|\leqslant\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\sup_{\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{xy}}\|\mathrm{d}f(\boldsymbol{z})\|.$$

证明 因为连结 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的线段 $\boldsymbol{xy}$ 为:

$$\boldsymbol{xy}=\{\boldsymbol{x}+z(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\mid 0\leqslant t\leqslant 1\},$$

若令 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$ 并定义函数 $F:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ 为

$$\forall t\in[0,1], F(t)=(f_1(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})),f_2(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))),$$

则 F 是 $[0,1]$ 上的 C^1 类映射, 并且 $F(0)=f(\boldsymbol{x}),F(1)=f(\boldsymbol{y})$.

现在记 $F_i(t)=f_i(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))(i=1,2,\cdots,m)$, 则函数 $F_i:[0,1]\to\mathbb{R}$ 在 $[0,1]$ 上是 C^1 类的. $F=(F_1,F_2,\cdots,F_m)$ .F_i 在 $t\in[0,1]$ 处的导数 $F_i'(t)$ 为:

$$\begin{aligned}F_i'(t)=&f_i'\left(x_1+t\left(y_1-x_1\right),x_2+t\left(y_2-x_2\right),\cdots,x_n+t\left(y_n-x_n\right)\right)\\=&\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))\left(y_1-x_i\right)+\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))\cdot\left(y_2-x_2\right)+\cdots+\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))\left(y_n-x_n\right)\\=&\mathrm{d}f_i(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

若我们在 $\mathbb{R}^m$ 中取基本范数 $\|\cdot\|_s$, 则

$$\begin{aligned}\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\|&=\|F(0)-F(1)\|\\&=\max_{1\leqslant i\leqslant m}|F_i(0)-F_i(1)|\\&=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\left|\int_0^1F_i'(t)\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\int_0^1\max_{1\leqslant i\leqslant m}\left|F_i'(t)\right|\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\max_{1\leqslant i\leqslant m}|\mathrm{d}f_i(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\|\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_0^1\|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))\|\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|\mathrm{d}t\\&\leqslant\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_i\cdot\sup_{z\in\boldsymbol{xy}}\|\mathrm{d}f(z)\|\end{aligned}$$

现在我们利用上述有限增量定理证明：对 n 元向量值函数也有类似于一元实值函数的下述定理.

定理 16.12

设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是任一连通开集 $f:U\to\mathbb{R}^m$ 是任一在 U 上可微的映射, 则 f 在 U 上为常值映射的充分必要条件是: $\forall\boldsymbol{x}\in U,\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})=0$.

证明 (必要性) 在 §1 的例16.3中已证.

(充分性) 设 $\boldsymbol{x_0}\in U$ 是一固定点, 我们只需证明 $\forall\boldsymbol{x}\in U, f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x_0})$.

因为 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是连通开集, 根据定理**??**知, 可用位于 U 内的一折线 l 连结 $\boldsymbol{x_0}$ 与 $\boldsymbol{x}$. 令此折线 l 的顶点为 $\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\cdots,\boldsymbol{x_{m-1}},\boldsymbol{x_m}=\boldsymbol{x}$, 即

$$l=\boldsymbol{x_0x_1}\cup\boldsymbol{x_1x_2}\cup\cdots\cup\boldsymbol{x_{m-1}x_m}$$

因为 $\boldsymbol{x_ix_{i+1}}\subset U$, 且 $\forall\boldsymbol{x}\in U,\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$, 故由上述有限增量定理, 报们有

$$\|f(\boldsymbol{x_i})-f(\boldsymbol{x_{i+1}})\|\leqslant\|\boldsymbol{x_i}-\boldsymbol{x_{i+1}}\|\sup_{z\in\boldsymbol{x_ix_{i+1}}}\|\mathrm{d}f(z)\|=0,\forall i=0,1,\cdots,n-1.$$

于是 $\|f(\boldsymbol{x}_i)-f(\boldsymbol{x}_{i+1})\|=0$ 或 $f(\boldsymbol{x}_i)=f(\boldsymbol{x}_{i+1})\,(i=0,1,\cdots,m-1)$. 因此 $f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0)$. 此耶表明 f 在 U 上为常值映射.

注 此定理中 U 的连通性非常重要, 否则可能出现 f 在 U 的分裂 (A,B) 的 A,B 上取不同的常值.

✍ 习题 16.2

1. 写出下列各函数 f 在其定义域的任意一点 (x_0,y_0) 或 (x_0,y_0,z_0) 处的微分表达式:
   1) $f(x,y)=x^y$,
   2) $f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}\cos x\sin y$,
   3) $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$,
   4) $f(x,y)=\log\dfrac{x}{y}$,
   5) $f(x,y,z)=\sin x\sin y\sin z$,
   6) $f(x,y,z)=\log\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,
   7) $f(x,y,z)=\arctan\dfrac{z}{x^2+y^2}$,
   8) $f(x,y,z)=\sqrt[z]{\dfrac{x}{y}}$.
2. 证明: 设函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 若\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 若\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$
   在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 并且有有界的一阶偏导函数, 但 f 在 $(0,0)$ 处不可微.
3. 设函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义如下:
$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^p\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 若\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 若\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$
   选择 $p\in\mathbb{N}$ 使得 f 在 $(0,0)$ 处可微. (参看第 15 章 §1 习题 4)
4. 设函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义如下:
$$f(x,y)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{y}{x}, & 若\ x\neq0,\\ 0, & 若\ x=0.\end{cases}$$
   1) 证明: f 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.
   2) 证明: $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, f 的一阶偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$、$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 存在.
   3) 证明: 偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 但偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 在任意点 $(0,y)(y\neq0)$ 处不连续.
   4) 证明: f 在任一点 $(0,y_0)$ 处可微, 并写出微分 $\mathrm{d}f(0,y_0)$ 的具体表达式.
5. 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是任一 C^1 类函数, 我们定义二元函数 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 如下:
$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}, & 若\ x\neq y,\\ f'(x), & 若\ x=y.\end{cases}$$

1) 证明：F 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

2) 假设 $f''(a)$ 存在，证明：F 在 (a,a) 处可微.

6. 设 $f,g:U(\subset\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ 是任意两个函数，$\boldsymbol{a}\in U$. 假设 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处可微，$f(\boldsymbol{a})=0$，g 在 a 处连续. 证明：$fg:U\to\mathbb{R}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 处可微.

7. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是任一连续函数，$\forall n\in\mathbb{N}$，定义函数 $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 如下：
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad g(x,y)=\int_0^y f(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t.$$
证明：g 在 $\mathbb{R}^2$ 上可微，并计算它的微分 $\mathrm{d}g(x,y)(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)$.

8. 设 $U=\mathbb{R}^n-\{0\}$. 定义映射 $f:U\to U$ 如下：
$$\forall\boldsymbol{x}\in U, f(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^2}.$$
证明：f 在 U 上可微，并写出 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})$ 的表达式 $(\forall\boldsymbol{x}\in U)$.

9. 设 $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是任意两个映射，f 在 $\boldsymbol{x_0}\in\mathbb{R}^n$ 处可微，$f(\boldsymbol{x_0})=0$，g 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处连续. 定义映射 $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 如下：
$$\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\quad h(\boldsymbol{x})=\langle f(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x})\rangle\triangleq\sum_{i=1}^m f_i(\boldsymbol{x})g_i(\boldsymbol{x}),$$
其中 $f(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\ldots,f_m(\boldsymbol{x}))$，$g(\boldsymbol{x})=(g_1(\boldsymbol{x}),\ldots,g_m(\boldsymbol{x}))$. 证明：映射 h 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处可微，并且
$$\mathrm{d}h(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{k})=\langle g(\boldsymbol{x_0}),df(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{k})\rangle,\forall\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^n.$$

10. 设 $X\subset\mathbb{R}^2$，映射 $f:X\to\mathbb{R}^3$ 定义如下：
$$\forall(x,y)\in X,\quad f(x,y)=\left(\frac{x^3+y^2}{y(x^2+y^2)},\frac{x^3-y^3}{y(x^2+y^2)},\frac{xy^3}{x^4+y^4}\right).$$
1) 确定 f 的定义域 X.

2) 指出 $\mathbb{R}^2$ 的一个开集 U，使得 f 在 U 上的每一点处可微.

3) 计算 f 在 $\boldsymbol{x}\in U$ 处的 Jacobi 矩阵及其秩.

11. 证明：$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是仿射映射 (即存在 $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m$ 及 $T\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$，使得 $f(\boldsymbol{x})=T(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{b}$，$\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$) 的充要条件是：$f$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可微，且 df 是常值映射.

12. 证明 n 元向量值函数的中值定理：设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是任一开集，$f:U\to\mathbb{R}^m$ 在 U 上可微，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in U$ 使得连结 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的线段 $\boldsymbol{xy}\subset U$. 那么 $\forall\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^m$，$\exists\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{xy}$ 使得
$$\langle\boldsymbol{a},f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})\rangle=\langle\boldsymbol{a},\mathrm{d}f(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\rangle.$$

13. 设映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ 定义如下：
$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=(\cos x,\sin x).$$
1) 计算 $\mathrm{d}f(x)(h)$，$\forall x\in\mathbb{R}$，$\forall h\in\mathbb{R}$.

2) 证明：一元实值函数的 Cauchy 中值定理不能推广到此映射 f，即
$$\forall x,y\in\mathbb{R}, f(y)-f(x)=\mathrm{d}f(z)(y-x)$$
(其中 z 介于 x 与 y 之间) 一般不成立. 例如取 $x=0$，$y=2\pi$.

3) $\forall a\in\mathbb{R}^2$，确定 z 使得
$$\langle a,f(y)-f(x)\rangle=\langle a,\mathrm{d}f(z)(y-x)\rangle$$
在 $x=0$，$y=2\pi$ 时成立.

16.3 微分同胚

可微映射的一类重要映射就是微分同胚. 下面我们首先介绍微分同胚的概念.

1. 微分同胚的概念

定义 16.5

设 $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ 是任意两个开集，$f : U \to V$ 是任一映射，我们称 f 是 $\mathbb{C}^k$ 类微分同胚，若它满足下述条件：

1. $f : U \to V$ 是一一映射.
2. $f : U \to V$ 在 U 上是 C^k 类的，$f^{-1} : V \to U$ 在 V 上是 C^k 类的.

♣

例题 16.13 考虑映射 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 它定义为

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3.$$

显然 f 是一一映射，它的逆映射 $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为：

$$\forall y \in \mathbb{R}, f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}.$$

f 在 $\mathbb{R}$ 上是 C^2 类的，但 f^{-1} 在 $y = 0$ 处不可微，因为 $\left(f^{-1}\right)'(0) = +\infty$. 因此 f 不是微分同胚.

然而 f 在 $(0,1)$ 上的限制 $f|_{(0,1)} : (0,1) \to (0,1)$ 是微分同胚.

例题 16.14 设 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是任一线性映射. 它在 $\mathbb{R}^n$ 的标准基底 F 所对应的矩阵 $\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)$ 满足 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$. 则 T 是 C^∞ 类微分同胚.

事实上，由于 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 故 T 是一一映射，并且 $T^{-1} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n\mathbb{R}^n)$. 因为

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \mathrm{d}T(\boldsymbol{x}) = T, \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \mathrm{d}T^{-1}(\boldsymbol{y}) = T^{-1},$$

所以 T 与 T^{-1} 都是 C^∞ 类映射，从而 T 是 C^∞ 类微分同胚.

2. 微分同胚的性质

定理 16.13

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 与 $V \subset \mathbb{R}^m$ 是两个开集，$f : U \to V$ 是任一 C^k 类微分同胚，则

1. $f^{-1} : V \to U$ 也是 C^k 类微分同胚.
2. $\forall \boldsymbol{x} \in U, \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是一同构，因此 $n = m$.
3. $\forall \boldsymbol{x} \in U, \mathrm{d}f^{-1}(f(\boldsymbol{x})) = [\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})]^{-1}$. 及 $J_{f^{-1}}(f(\boldsymbol{x})) = \left[J_f(\boldsymbol{x})\right]^{-1}$.

♡

证明 1) 因为 $f : U \to V$ 是 C^k 类微分同胚，故 $f^{-1} : V \to U$ 是一一映射，并且由于 $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$, 故 f^{-1} 及 $\left(f^{-1}\right)^{-1}$ 都是 C^k 类映射，从而 $f^{-1} : V \to U$ 是 C^k 类微分同胚

2)$\forall \boldsymbol{x} \in U$, 由下述恒等式

$$f^{-1} \circ f = id_U, f \circ f^{-1} = id_V$$

并利用复合映射的微分法则 (定理16.10) 得到

$$\mathrm{d}f^{-1}(f(\boldsymbol{x})) \circ \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}) = id_{\mathbb{R}^n}, \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}) \circ \mathrm{d}f^{-1}(f(\boldsymbol{x})) = id_{\mathbb{R}^m},$$

因此 $\mathrm{d}_f(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是同构，从而 $n = m$.

3) 由 2) 所证之等式立即推知，$\forall \boldsymbol{x} \in U, df^{-1}(f(\boldsymbol{x})) = [\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})]^{-1}$, 从而由定理 16.10得到 $J_{f^{-1}}(f(\boldsymbol{x})) = [J_f(\boldsymbol{x})]^{-1}$.

定理 16.14

设 $U, V, W \subset \mathbb{R}^n$ 是三个开集，$j: U \to V, g: V \to W$ 是两个 C^k 类微分同胚，则复合映射 $g \circ f: U \to W$ 也是 C^k 类微分同胚.

证明 因为 f, g 是 C^k 类微分同胚，故由定义，

1)$f: U \to V$ 与 $g: V \to W$ 是一一映射.

2)$f: U \to V, f^{-1}: V \to U$ 与 $g: V \to W, g^{-1}: W \to V$ 都是 C^* 类映射.

因此，由复合映射的有关定理知

1)$g \circ f: U \to W$ 是一一映射.

2)$g \circ f: U \to W$ 与 $(g \circ f)^{-1}: W \to U$ 都是 C^k 类映射，故 $g \circ f: U \to W$ 是 C^k 类微分同胚.

3. 局部微分同胚定理

有许多映射虽然在它的整个定义城上不是微分同胚，但在小范围内即局部是微分同胚. 如例16.13. 这就是下面我们要介绍的定理.

定理 16.15 (局部微分同胚定理)

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一开集，$f: U \to \mathbb{R}^n$ 是 C^k 类映射 $(k \geqslant 1)$, $\boldsymbol{x_0} \in U$, 若 $\mathrm{d} f(\boldsymbol{x_0})$ 可逆，则存在 $\boldsymbol{x_0}$ 的邻域 $W \subset U$ 及 $\boldsymbol{y_0} = f(\boldsymbol{x_0})$ 的邻域 $V \subset \mathbb{R}^n$ 使得 $f\big|_W: W \to V$ 是 C^k 类微分同胚.

证明 证明分三步进行.

第一步　证明存在 f 的一个局部同胚映射.

首先我们有下述等价关系：对 $\boldsymbol{x} \in U, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$,

$\boldsymbol{y} = f(n) \Longleftrightarrow [\mathrm{d} f(\boldsymbol{x_0})]^{-1}(y) = [\mathrm{d} f(\boldsymbol{x_0})]^{-1}(f(\boldsymbol{x})) \Longleftrightarrow x = x - [\mathrm{d} f(\boldsymbol{x_0})]^{-1}(f(\boldsymbol{x})) + [\mathrm{d} f(\boldsymbol{x_0})]^{-1}(\boldsymbol{y})$.

于是 $\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, 我们定义映射 $g_{\boldsymbol{y}}: U \to \mathbb{R}^n$ 如下：

$$\forall \boldsymbol{x} \in U, g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - [\mathrm{d} f(\boldsymbol{x_0})]^{-1}(f(\boldsymbol{x})) + [\mathrm{d} f(\boldsymbol{x_0})]^{-1}(\boldsymbol{y}).$$

显然

$$\forall \boldsymbol{x} \in U, \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) \Longleftrightarrow g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}. \tag{16.9}$$

由 $g_{\boldsymbol{y}}$ 的表达式可知，$\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, g_{\boldsymbol{y}}$ 在 U 上是 C^k 类的，并且 $\mathrm{d}g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) = id_{\mathbb{R}^n} - [\mathrm{d} f(\boldsymbol{x_0})]^{-1} \circ \mathrm{d} f(\boldsymbol{x}), \mathrm{d}g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{0}$. 于是

$$(\exists r > 0)(\forall \boldsymbol{x} \in U, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}\| \leqslant r)\left(\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n\right) \Longrightarrow \left\|\mathrm{d}g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})\right\| < \frac{1}{2}.$$

由有限增量定理 (因 $\bar{B}(\boldsymbol{x_0}, r)$ 为凸集). 我们有：

$$\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \bar{B}(\boldsymbol{x_0}, r) \Longrightarrow \left\|g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x_1}) - g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x_2})\right\| \leqslant \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}\|. \tag{16.10}$$

注意 $g_{\boldsymbol{y}}$ 不一定映 $\bar{B}(\boldsymbol{x_0}, r)$ 到 $\bar{B}(\boldsymbol{x_0}, r)$ 内，为此我们限制 $\boldsymbol{y}$ 的取值范围.

对 $\boldsymbol{x_0} \in U$, 考虑映射 $\boldsymbol{y} \to g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x_0}), \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. 它在 $\mathbb{R}^n$ 上连续，并且 $g_{\boldsymbol{y_0}}(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{x_0}$(这里 $\boldsymbol{y_0} = f(\boldsymbol{x_0})$), 于是存在 $\boldsymbol{y_0}$ 的一开集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 使得

$$\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}, \left\|g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x_0}) - g_{\boldsymbol{y_0}}(\boldsymbol{x_0})\right\| = \left\|g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x_0}) - \boldsymbol{x_0}\right\| < \frac{r}{2},$$

从而，$\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}, \forall \boldsymbol{x} \in \bar{B}(\boldsymbol{x_0}, r)$, 由不等式(16.10)得到

$$\left\|g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x_0}\right\| \leqslant \left\|g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) - g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x_0})\right\| + \left\|g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x_0}) - \boldsymbol{x_0}\right\| < \frac{1}{2}\|x - \boldsymbol{x_0}\| + \frac{r}{2} \leqslant r$$

此即表明 $\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}, g_{\boldsymbol{y}}$ 映射 $\bar{B}\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}, r\right)$ 到 $\bar{B}\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}, r\right)$ 内. 由于 $g_{\boldsymbol{y}}$ 是压缩映射式(16.10)), 故由 Banach 不动点定理 (定理**??**), 存在唯一的不动点 $\boldsymbol{x} \in \bar{B}\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}, r\right)$, 它依赖于 $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}$, 记它为 $\varphi(\boldsymbol{y})$.

下面证映射 $\varphi: \boldsymbol{A} \rightarrow \bar{B}\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}, r\right)$ 连续. 任取 $\boldsymbol{y}^{\prime} \in \boldsymbol{A}$, 令 $\boldsymbol{x}^{\prime}=\varphi\left(\boldsymbol{y}^{\prime}\right)$, 则由式(16.10)) 及 $g_{\boldsymbol{y}}$ 的定义, 我们有

$$
\begin{aligned}
\left\|\varphi(\boldsymbol{y})-\varphi\left(\boldsymbol{y}^{\prime}\right)\right\| &=\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\prime}\right\|=\left\|g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})-g_{\boldsymbol{y}^{\prime}}\left(\boldsymbol{x}^{\prime}\right)\right\| \\
& \leqslant\left\|g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})-g_{\boldsymbol{y}}\left(\boldsymbol{x}^{\prime}\right)\right\|+\left\|g_{\boldsymbol{y}}\left(\boldsymbol{x}^{\prime}\right)-g_{\boldsymbol{y}^{\prime}}\left(\boldsymbol{x}^{\prime}\right)\right\| \\
& \leqslant \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\prime}\right\|+\left\|\left[\mathrm{d} f\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}\right)\right]^{-1}\left(y-y^{\prime}\right)\right\| \\
& \leqslant \frac{1}{2}\left\|\varphi(\boldsymbol{y})-\varphi\left(\boldsymbol{y}^{\prime}\right)\right\|+\left[\mathrm{d} f\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}\right)\right]^{-1}\|\left\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^{\prime}\right\|
\end{aligned}
$$

$$
\left\|\varphi(\boldsymbol{y})-\varphi\left(\boldsymbol{y}^{\prime}\right) \leqslant 2^{\prime} \mid\left[\mathrm{d} f\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}\right)\right]^{-1}\right\|\left\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^{\prime}\right\| \tag{16.11}
$$

此即表明 φ 在 $\boldsymbol{A}$ 上连续. 因为 $\forall \boldsymbol{x} \in \bar{B}\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}, r\right), \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}$ 成立:

$$
\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x}) \Longleftrightarrow g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x}=\varphi(\boldsymbol{y}).
$$

故 $\varphi: \boldsymbol{A} \rightarrow \varphi(\boldsymbol{A})$ 与 $\left.f\right|_{\varphi(\boldsymbol{A})}: \varphi(\boldsymbol{A}) \rightarrow \boldsymbol{A}$ 互为逆映射. 并且

$$
\begin{aligned}
& W=B\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}, r\right) \cap f^{-1}(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{x} \in W \\
& \Rightarrow \boldsymbol{x} \in B\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}, r\right), f(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{A} \\
& \Rightarrow \boldsymbol{x}=\varphi(\boldsymbol{y}) \in \varphi(\boldsymbol{A}) \\
& \Rightarrow f(W)=\left.f\right|_{\varphi(\boldsymbol{A})}(W)=\varphi^{-1}(W)
\end{aligned}
$$

由于 φ 连续, W 为开集, 故 $V=f(W)=\varphi^{-1}(W)$ 为开集, 从而 $\left.f\right|_{W}: W \rightarrow V$ 是同胚映射且 $\left.f\right|_{W}$ 在 W 上是 C^{k} 类.

第二步　证明 $\left.f^{-1}\right|_{W}: V \rightarrow W$ 在 V 上可微.

首先由 $\mathrm{d} f\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}\right)$ 可逆知 $\Delta_{f}\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}\right)=0$, 由 f 的 C^{k} 类性存在 $\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$ 的一个邻域, 通过缩小 W, 不妨就认为此邻域为 W, 使得 $\forall \boldsymbol{x} \in W, \Delta_{f}(\boldsymbol{x}) \neq 0$, 从而 $[\mathrm{d} f(\boldsymbol{x})]^{-1}$ 存在.

现任取 $\boldsymbol{y}^{\prime} \in V$. 对 $\boldsymbol{y} \in V$, 令 $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}^{\prime}=f\left(\boldsymbol{x}^{\prime}\right)$, 于是 $\boldsymbol{x}^{\prime}, \boldsymbol{x} \in W$. 从而由不等式(16.11)得到

$$
\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\prime}\right\| \leqslant 2\left\|\left[\mathrm{d} f\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}\right)\right]^{-1}\right\|\left\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^{\prime}\right\| .
$$

于是

$$
\begin{aligned}
& \left\|f^{-1}|_{W}(\boldsymbol{y})-f^{-1}|_{W}(\boldsymbol{y}^{\prime})-\left[\mathrm{d} f(\boldsymbol{x}^{\prime})\right]^{-1}\left(y-y^{\prime}\right)\right\| \\
= & \left\|\left[\mathrm{d} f(\boldsymbol{x}^{\prime})\right]^{-1} \circ\left(\mathrm{d} f(\boldsymbol{x}^{\prime})\left[f^{-1}|_{W}(\boldsymbol{y})-f^{-1}|_{W}(\boldsymbol{y}^{\prime})\right]-\left[\mathrm{d} f(\boldsymbol{x}^{\prime})\right]^{-1}\left(y-y^{\prime}\right)\right)\right\| \\
= & \left\|\left[\mathrm{d} f(\boldsymbol{x}^{\prime})\right]^{-1}\left[\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^{\prime}-\mathrm{d} f(\boldsymbol{x}^{\prime})\left(f^{-1}|_{W}(\boldsymbol{y})-f^{-1}|_{W}(\boldsymbol{y}^{\prime})\right)\right]\right\| \\
\leqslant & \left\|\left[\mathrm{d} f(\boldsymbol{x}^{\prime})\right]^{-1}\right\|\left\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}^{\prime})-\mathrm{d} f(\boldsymbol{x}^{\prime})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\prime})\right\| \\
= & o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\prime}\|)=o(\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^{\prime}\|) \quad(\boldsymbol{y} \rightarrow \boldsymbol{y}^{\prime}).
\end{aligned}
$$

此即表明映射 $f^{-1}|_{W}$ 在 $\boldsymbol{y}^{\prime}$ 处可微. 从而由 $\boldsymbol{y}^{\prime}$ 的任意性知, $f^{-1}|_{W}$ 在 $V^{\prime}$ 上可微, 并且 $\mathrm{d}\left(f^{-1}|_{W}\right)(\boldsymbol{y})=\left[\mathrm{d} f\left(f^{-1}|_{W}(\boldsymbol{y})\right)\right]^{-1}, \forall \boldsymbol{y} \in V$.

第三步　证明 $f^{-1}|_{W}: V \rightarrow W$ 是 C^{k} 类的.

为此只需证明 $f^{-1}|_W$ 的 Jacobi 矩阵 $J_{f^{-1}|_W}$ 的每一个元素在 V 上是 C^k 类的，这可由

$$\begin{aligned}J_{f^{-1}|_W}(\boldsymbol{y})&=\left[J_f\left(f^{-1}|_W(\boldsymbol{y})\right)\right]^{-1}\\&=\frac{1}{\Delta_f\left(f^{-1}|_W(\boldsymbol{y})\right)}\begin{pmatrix}A_{11}\left(f^{-1}|_W(\boldsymbol{y})\right)&\cdots&A_{n1}\left(f^{-1}|_W(\boldsymbol{y})\right)\\\vdots&&\vdots\\A_{1n}\left(f^{-1}|_W(\boldsymbol{y})\right)&\cdots&A_{nn}\left(f^{-1}|_W(\boldsymbol{y})\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

推出，因为这里 $A_{ij}\left(f^{-1}|_W(\boldsymbol{y})\right)$ 是 $J_f\left(f^{-1}|_W(\boldsymbol{y})\right)$ 的元素 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(f^{-1}|_W(\boldsymbol{y})\right)$ 的代数余子式，$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 在 W 上是 C^{k-1} 类的，从而由归纳法可证，$J_{f^{-1}|_W}$ 的每一个元素在 V 上是 C^{k-1} 类的，因此 $f^{-1}|_W$ 在 V 上是 C^k 类的.

综合上述三步所证知，$f^{-1}|_W: W\to V$ 是 C^k 类微分同胚，

注 下面我们写出用坐标形式描述的局部微分同胚定理. 这时通常称为反函数定理.

设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是一开集，$\boldsymbol{x_0}\in U$, $f_i:U\to\mathbb{R}(i=1,2,\cdots,n)$ 是 n 个 C^k 类函数. 并且假设 Jacobi 行列式 $\frac{D\left(f_1,f_2,\cdots,f_n\right)}{D\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)}(\boldsymbol{x_0})\neq 0$. 考虑方程组

$$\begin{cases}f_1\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=y_1\\f_2\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=y_2\\\qquad\cdots\cdots\cdots\\f_n\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=y_n\end{cases}$$

这时存在 $\boldsymbol{x_0}$ 的一个邻域 $W\subset U$ 及 $\boldsymbol{y_0}=f\left(\boldsymbol{x_0}\right)$ 的一个邻域 $V\subset\mathbb{R}^n$, 唯一一组 n 个函数 $\varphi_i:V\to\mathbb{R}$, 它们具有下述性质：

1)$\varphi_i(i=1,2,\cdots,n)$ 在 V 上是 C^k 类的，若令 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_{2s}\cdots,\varphi_n)$, 则 $\varphi(V)=W$.

2)$\forall\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in V$, 成立恒等式：

$$\begin{cases}f_1\left(\varphi_1(\boldsymbol{y}),\varphi_2(\boldsymbol{y}),\cdots,\varphi_n(\boldsymbol{y})\right)=y_1\\f_2\left(\varphi_1(\boldsymbol{y}),\varphi_2(\boldsymbol{y}),\cdots,\varphi_n(\boldsymbol{y})\right)=y_2\\\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\f_n\left(\varphi_1(\boldsymbol{y}),\varphi_2(\boldsymbol{y}),\cdots,\varphi_n(\boldsymbol{y})\right)=y_n\end{cases}$$

3)$\forall\boldsymbol{y}\in V$, $\frac{D\left(f_1,f_2,\cdots,f_n\right)}{D\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)}(\boldsymbol{x})\cdot\frac{D\left(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\right)}{D\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right)}(\boldsymbol{y})=1$(这里 $\boldsymbol{x}=\varphi(\boldsymbol{y})$).

下面我们介绍一个有重要应用价值的定理.

4. 全局微分同胚定理

首先证明两个引理, 它们都有其独立意义.

引理 16.1 (区域不变性)

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一开集, $f: U \to \mathbb{R}^n$ 是任一 C^1 类映射. 若 $\forall \boldsymbol{x} \in U, \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})$ 可逆, 则 $f(U)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集.

证明 只需证明 $\forall \boldsymbol{y} \in f(U), \exists V \in \mathscr{N}(\boldsymbol{y})$ 使得 $V \subset f(U)$.

令 $\boldsymbol{x} \in U$ 使得 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$. 因为 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})$ 可逆, 由局部微分同胚定理知, 存在 $W \in \mathscr{N}(\boldsymbol{x})$ 及 $V \in \mathscr{N}(\boldsymbol{y})$ 使得 $f|_W: W \to V$ 是微分同胚, 于是 $V = f(W) \subset f(I)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集. 因此 $f(U)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集.

引理 16.2

设 $U, V \subset \mathbb{R}^n$ 是两个开集, $f: U \to V$ 是任一同胚映射, $\boldsymbol{x_0} \in U$. 若 f 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处可微, 并且 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})$ 可逆 (即 $\Delta_f(\boldsymbol{x_0})$), 则 f^{-1} 在 $\boldsymbol{y_0} = f(\boldsymbol{x_0})$ 处可微, 且

$$\mathrm{d}f^{-1}(\boldsymbol{y_0}) = [\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})]^{-1}.$$

证明 取 $\eta > 0$ 充分小使得 $\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n$, 且 $\|\boldsymbol{k}\| < \eta$ 有 $f^{-1}(\boldsymbol{y_0} + \boldsymbol{k}) \in U$.

$\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n$ 且 $|\boldsymbol{k}\| < \eta$, 由 f 的同胚性知, 存在唯一的 $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$f^{-1}(\boldsymbol{y_0} + \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h} \text{ 并且 } \boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0} (\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{0}).$$

下面我们来证明: 存在 $0 < \xi < \eta$ 使得 $\dfrac{\|\boldsymbol{h}\|}{\|\boldsymbol{k}\|}$ 在 $\mathring{B}(\boldsymbol{0}, \xi)$ 上是有界的. 事实上, 由 $\boldsymbol{k} = f(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x_0})$ 得到

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{k}\| = \|f(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x_0})\| &= f(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x_0}) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h}) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})\| \\
&\geqslant \|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})\| - \|f(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x_0}) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})\| \\
&= \|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})\| - o(\|\boldsymbol{h}\|) \,(f \text{ 在 } \boldsymbol{x_0} \text{ 处可微}) \\
&= \|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{h})\| - \|\boldsymbol{h}\| o(1).
\end{aligned}$$

因为当 $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{0}$ 时 $\boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}$, 所以

$$\frac{\|\boldsymbol{k}\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = \left\|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})\left(\frac{\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|}\right)\right\| - o(1).$$

另一方面, $\dfrac{\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|} \in S(0,1), S(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ 是一紧集, 映射 $\boldsymbol{z} \mapsto \|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{z})\|, \boldsymbol{z} \in S(0,1)$ 是连续的, 故存在 $\boldsymbol{z_0} \in S(0,1)$ 使得

$$\|f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{z_0})\| = \inf_{\boldsymbol{z} \in S(0,1)} \|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{z})\|$$

因为 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)$ 可逆，并且 $\boldsymbol{z}_0 \neq \boldsymbol{0}$, 所以 $\|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{z}_0)\| \neq 0$. 由于 $o(1)$, 故存在 $0<\xi<\eta$ 使得

$$\begin{aligned}
\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n,\ \text{且}\ \|\boldsymbol{k}\| \leqslant \xi \Longrightarrow & o(1) < \frac{1}{2}\|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{z}_0)\| \\
\Longrightarrow & \frac{\|\boldsymbol{k}\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = \left\|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\left(\frac{\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|}\right)\right\| - o(1) \\
& > \|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{z}_0)\| - \frac{1}{2}\|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{z}_0)\| = \frac{1}{2}\|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{z}_0)\| \\
\Longrightarrow & \frac{|\boldsymbol{h}|}{\|\boldsymbol{k}\|} < \frac{2}{\left\|\mathrm{d}f\left(\boldsymbol{x}_\eta\right)(\boldsymbol{z}_0)\right\|}.(\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{0}),
\end{aligned}$$

此即表明在 $\mathring{B}(\boldsymbol{0},\xi)$ 上，$\left\{\dfrac{\|\boldsymbol{h}\|}{\|\boldsymbol{k}\|}\right\}$ 是有界集.

现在我们来证明 f^{-1} 在 $\boldsymbol{y}_0$ 处可微. $\forall \boldsymbol{k} \in \mathring{B}(\boldsymbol{0},\xi)$,

$$\begin{aligned}
&\left\|f^{-1}(\boldsymbol{y}_0+\boldsymbol{k}) - f^{-1}(\boldsymbol{y}_0) - [\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)]^{-1}(\boldsymbol{k})\right\| \\
=&\left\|\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}-\boldsymbol{x}_0-[\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)]^{-1}(f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0))\right\| \\
=&\left\|[\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)]^{-1}\circ(\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}))-[\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)]^{-1}(f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0))\right\| \\
\leqslant&\left\|[\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)]^{-1}\right\|\|f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h})\| \\
=&\left\|[\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)]^{-1}\right\| o(\|\boldsymbol{h}\|) \\
=&\left\|[\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)]^{-1}\right\| \|\boldsymbol{k}\| \cdot \frac{\|\boldsymbol{h}\|}{\|\boldsymbol{k}\|}.
\end{aligned}$$

根据上面所证的 $\left\{\dfrac{\|\boldsymbol{h}\|}{\|\boldsymbol{k}\|}\right\}$ 在 $\mathring{B}(\boldsymbol{0},\xi)$ 上的有界性，我们有

$$\left\|[\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)]^{-1}\right\| \cdot \frac{\|\boldsymbol{h}\|}{\|\boldsymbol{k}\|} o(1) = o(1) \quad (\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{0}).$$

因此

$$\left\|f^{-1}(\boldsymbol{y}_0+\boldsymbol{k}) - f^{-1}(\boldsymbol{y}_0) - [\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)]^{-1}(\boldsymbol{k})\right\| = \|\boldsymbol{k}\| o(1) \quad (\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{0}),$$

此即表明 f^{-1} 在 $\boldsymbol{y}_0$ 处可微，并且 $\mathrm{d}f^{-1}(\boldsymbol{y}_0) = [\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)]^{-1}$.

利用上述两个引理，现在我们可以证明全局敞分同胚定理.

定理 16.16 (全局微分同胚定理)

设 $U, V \subset \mathbb{R}^n$ 是任意两个开集，$f: U \to V$ 是任一 C^1 类的一一映射，若 $\forall \boldsymbol{x} \in U, \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})$ 可逆，则映射 $f: U \to V$ 是微分同胚.

证明 首先证明 f 是同胚. 由已知条件可知，我们只需证明 $f^{-1}: V \to U$ 是连续映射即可.

为此，设 $W \subset U$ 是任一开集. 我们来证明 W 在 f^{-1} 下的逆象 $\left(f^{-1}\right)^{-1}(W)$ 是 V 中的开集. 事实上 $\left(f^{-1}\right)^{-1}(W) = f(W)$, 根据引理16.1, $f(W) \subset V$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集. 因此 $f^{-1}: V \to U$ 是连续映射.

其次证明 $f^{-1}: V \to U$ 在 V 上是 C^1 类的.

由于 f 是同胚，并且 $\forall \boldsymbol{x} \in U, \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})$ 可逆，故由上述引理16.2，f^{-1} 在 $y = f(\boldsymbol{x})$ 处可微，从而 f^{-1} 在 V 上可微，并且

$$\mathrm{d}f^{-1}(y) = [\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})]^{-1} = \left[\mathrm{d}f\left(f^{-1}(y)\right)\right]^{-1}.$$

现在只需重复定理 16.15中证明 $\mathrm{d}f^{-1}|_W$ 在 V 上连续的论证过程即可知，$\mathrm{d}f^{-1}$ 在 V 上连续.

因为 f 是一一映射，并且 f 与 f^{-1} 都是 C^1 类的映射，所以 f 是微分同胚.

下面我们利用定理16.16证明几个重要映射的微分同胚性，它们在重积分一章中有重要应用.

例题 16.15 设 $\lambda \in \mathbb{R}$, 我们用 T_λ 表示 xy —平面上从原点 $(0,0)$ 出发的一射线，它与正 x 轴的夹角为 λ. 令

$$U_\lambda = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0, \lambda < \theta < \lambda + 2\pi\right\},$$
$$V_\lambda = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \notin T_\lambda\right\},$$

则 $U_\lambda \subset \mathbb{R}^2$ 与 $V_\lambda \subset \mathbb{R}^2$ 是两个开集. 考虑平面极坐标变换映射 $f: U_\lambda \to \mathbb{R}^2$：

$$\forall (r,\theta) \in U_2, f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

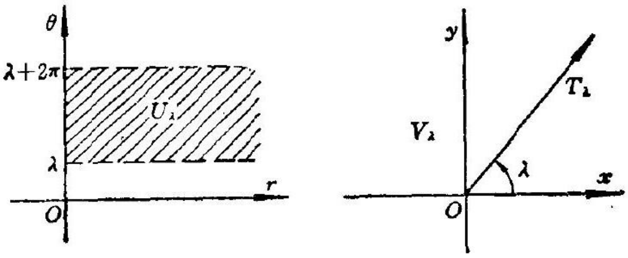


图 16.2

证明：$f(U_\lambda) = V_\lambda$, 并且 $f: U_\lambda \to V_\lambda$ 是 C^∞ 类微分同胚.

首先证明 $f(U_\lambda) = V_\lambda$ 且 $f: U_\lambda \to V_\lambda$ 是一一映射.

显然有 $f(U_\lambda) \subset V_\lambda$. 下面证 $V_\lambda \subset f(U_\lambda)$.

任取 $(x,y) \in V_\lambda$. 于是 $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$, 并且

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1,$$

从而存在唯一的 $\theta \in (\lambda, \lambda+2\pi)$ 使得

$$\frac{x}{r} = \cos\theta, \frac{y}{r} = \sin\theta \text{ 或 } x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,$$

此即表明 $(r,\theta) \in U_2$, 并且 $f(r,\theta) = (x,y)$. 此论证同时表明 f 是一一映射.

其次证明 f 是 C^∞ 类的.

事实上，由于 f 的分量函数 $f_1, f_2: U_\lambda \to \mathbb{R}$ 为

$$f_1(r,\theta) = r\cos\theta, f_2(r,\theta) = r\sin\theta, (r,\theta) \in U_\lambda,$$

故它的各阶偏导函数 $\dfrac{\partial^n f_i}{\partial r^k \partial\theta^m}: U_\lambda \to \mathbb{R} (i = 1,2, k+m = n)$ 在 U_λ 上连续，故 f 在 U_λ 上是 C^n 类的，从而 f 在 U_λ 上是 C^∞ 类的.

最后证明 $\forall (r,\theta) \in U_\lambda, \mathrm{d}f(r,\theta)$ 可逆.

直接计算 f 在 (r,θ) 处的 Jacobi 行列式为 $\dfrac{D(f_1,f_2)}{D(r,\theta)}(r,\theta) = r > 0$, 故 $\mathrm{d}f(r,\theta)$ 是可逆的.

综合上述所证，由定理16.16 知，$f: U_\lambda \to V_\lambda$ 是 C^∞ 类微分同胚.

例题 16.16 设 $\lambda \in \mathbb{R}$, 我们记 $\Pi_:$ 为 xyz —空间中的一闭半平面，它以 z 轴为边界并且与 xOy 平面的交线是极角为 λ 的一条射线 T_λ. 令

$$U_\lambda = \left\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0, \lambda < \theta < \lambda + 2\pi, 0 < z < \pi\right\}.$$
$$V_\lambda = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) \notin \Pi_\lambda\right\}.$$

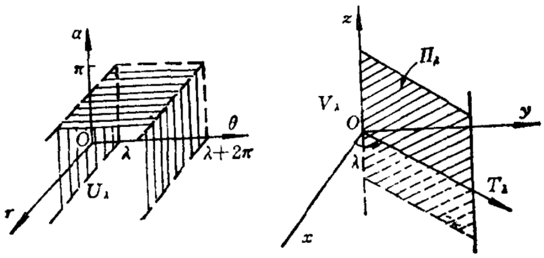


图 16.3

显然 $U_\lambda \subset \mathbb{R}^3$ 与 $V_\lambda \subset \mathbb{R}^3$ 都是开集. 考虑空间球面坐标变换映射 $g : U_\lambda \to \mathbb{R}^3$:

$$\forall (r,\theta,\alpha) \in U_\lambda, g(r,\theta,\alpha) = (r\sin\alpha\cos\theta, r\sin\alpha\sin\theta, r\cos\alpha).$$

与例16.15一样可证 $g(U_\lambda) = V_\lambda, g : U_\lambda \to V_\lambda$ 是 C^∞ 类微分同胚.

例题 16.17 设 $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varPi_\lambda$ 如例16.16所定义. 令

$$U_\lambda = \left\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0, \lambda < \theta < \lambda + 2\pi, -\infty < z < +\infty\right\},$$
$$V_\lambda = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) \notin \varPi_\lambda\right\},$$

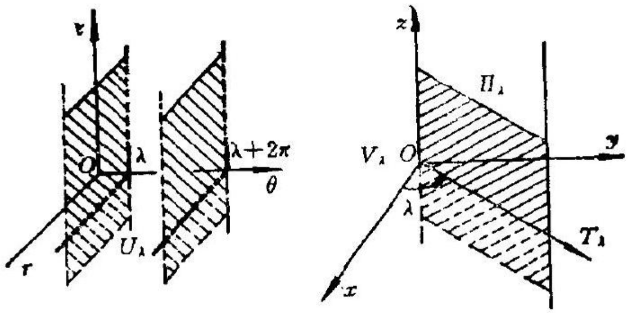


图 16.4

U_λ 与 V_λ 都是开集. 考虑空间柱面坐标变换映射 $h : U_\lambda \to \mathbb{R}^3$:

$$\forall (r,\theta,z) \in U_\lambda, h(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

同理可证 $h(U_\lambda) = V_\lambda$, 并且 $h : U_\lambda \to V_\lambda$ 是 C^∞ 类微分同胚.

下面我们来介绍与局部微分同胚 (或反函数) 定理齐名的另一个重要定理, 即隐射定理.

5. 隐射定理

在叙述隐射定理之前, 我们介绍映射的偏微分的概念.

设 $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ 是任一开集, $f : U \to \mathbb{R}^k$ 是任一 C^p 类映射. $\forall \boldsymbol{z} \in U$, 令 $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, 这里

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m.$$

由于 f 在 $\boldsymbol{z}$ 处可微，故 $\forall \boldsymbol{H}=(\boldsymbol{h};\ \boldsymbol{k})\in\mathbb{R}^{n+m}$ 有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{H}) &= \mathrm{d}f(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})(\boldsymbol{h};\ \boldsymbol{k})\\
&=\begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(z) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(z)\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\frac{\partial f_k}{\partial x_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(z) & \frac{\partial f_k}{\partial y_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial y_m}(z)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} h_1\\ \vdots\\ h_n\\ k_1\\ \vdots\\ k_m\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(z)h_1+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(z)h_n+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}(z)k_1+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial y_m}(z)k_m\\
\vdots\\
\frac{\partial f_k}{\partial x_1}(z)h_1+\cdots+\frac{\partial f_k}{\partial x_n}(z)h_n+\frac{\partial f_k}{\partial y_1}(z)k_1+\cdots+\frac{\partial f_k}{\partial y_m}(z)k_n
\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(z)\\
\vdots & & \vdots\\
\frac{\partial f_k}{\partial x_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(z)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}
+\begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial y_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(z)\\
\vdots & & \vdots\\
\frac{\partial f_k}{\partial y_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial y_m}(z)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} k_1\\ \vdots\\ k_m\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

若用 $\boldsymbol{A}(z)$ 与 $\boldsymbol{B}(z)$ 分别表示对应于矩阵

$$
\begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(z)\\
\vdots & & \vdots\\
\frac{\partial f_k}{\partial x_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(z)
\end{pmatrix}
\text{与}
\begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial y_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(z)\\
\vdots & & \vdots\\
\frac{\partial f_k}{\partial y_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial y_m}(z)
\end{pmatrix}
$$

的线性映射，则 $\boldsymbol{A}(z)\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k\right)$，$\boldsymbol{B}(z)\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^k\right)$. 并且 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{H})=\mathrm{d}f(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})(\boldsymbol{h};\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{A}(z)(\boldsymbol{h})+\boldsymbol{B}(z)(\boldsymbol{k})$.

定义 16.6

线性映射 $\boldsymbol{A}(z)$ 与 $\boldsymbol{B}(z)$ 分别称为映射 $f:U\left(\subset\mathbb{R}^{n+m}\right)\to\mathbb{R}^k$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的偏微分，并记为

$$\boldsymbol{A}(z)=\mathrm{d}f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}),\boldsymbol{B}(z)=\mathrm{d}f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}).$$

于是

$$\forall(\boldsymbol{h};\ \boldsymbol{k})\in\mathbb{R}^{n+m}\mathrm{d}f(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})(\boldsymbol{h};\ \boldsymbol{k})=\mathrm{d}f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})(\boldsymbol{h})+\mathrm{d}f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})(\boldsymbol{k}). \tag{16.12}$$

♣

定理 16.17 (隐射定理)

设 $U\subset\mathbb{R}^{n+m}$ 是一开集，$f:U\to\mathbb{R}^m$ 是任一 C^k 类映射. $(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})\in U$ 使得

1) $f(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})=0$,

2) $\mathrm{d}f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m\right)$ 可逆，即 $\dfrac{D\left(f_1,\cdots,f_m\right)}{D\left(y_1,\cdots,y_m\right)}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})\neq 0$, 则存在 $(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})$ 的一个邻域 $U_0\subset U,\boldsymbol{a}$ 的一个邻域 $W\subset\mathbb{R}^n$ 及唯一的 C^k 类映射 $\varphi:W\to\mathbb{R}^m$(φ 称为由 $f=0$ 确定的隐射)，使得

1)$\varphi(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}$,
2)$f(x;\ \varphi(\boldsymbol{x}))=0, \forall \boldsymbol{x}\in W$或 $\{(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})\in U_0 \mid f(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})=\mathbf{0}\}=\{(\boldsymbol{x};\ \varphi(\boldsymbol{x}))\in U_0 \mid \boldsymbol{x}\in W\}$,
3)$\forall(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})\in U_0, \mathrm{d}f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})$ 是可逆的，并且

$$\mathrm{d}f_{\boldsymbol{x}}(x;\ \varphi(\boldsymbol{x}))+\mathrm{d}f_{\boldsymbol{y}}(x;\ \varphi(\boldsymbol{x}))\circ d\varphi(\boldsymbol{x})=0, \forall \boldsymbol{x}\in W.$$

证明 定义新的映射 $F:U\to\mathbb{R}^{n+m}$ 如下：

$$\forall(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})\in U, F(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x};\ f(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})).$$

于是 $F(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a};\ \mathbf{0}), F$ 在 U 上是 C^k 类的，并且 F 在 $(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})$ 处的 Jacobi 行列式

$$\begin{aligned}
&\frac{D\left(F_1,\cdots,F_{n+m}\right)}{D\left(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m\right)}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})\\
=&\begin{pmatrix}
1 & & & 0 & \cdots & 0\\
 & \ddots & & \vdots & & \vdots\\
 & & 1 & 0 & \cdots & 0\\
* & \cdots & * & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
* & \cdots & * & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})
\end{pmatrix}\\
=&\frac{D(f_1,\cdots,f_m)}{D(y_1,\cdots,y_m)}(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})\neq 0.
\end{aligned}$$

根据局部微分同胚定理，存在 $(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})$ 的一个邻域 $U_0\subset U$ 及 $(\boldsymbol{a};\ \mathbf{0})$ 的一个邻域 $V\subset\mathbb{R}^{n+m}$ 使得 F 在 U_0 上的限制 $F|_{U_0}:U_0\to V$ 是 C^k 类微分同胚，于是

$\left(F|_{v_0}\right)^{-1}:V\to U_0$ 也是 C^k 类微分同胚,

$\dfrac{D\left(f_1,\cdots,f_m\right)}{D\left(y_1,\cdots,y_m\right)}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})\neq 0, \forall(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})\in U_0$, 即 $\mathrm{d}f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})$ 可逆.

由 F 的定义可知,

$$\forall(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{z})\in V, \left(F|_{U_0}\right)^{-1}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x};\ g(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{z})).$$

如此确定的映射 $g:V\to\mathbb{R}^m$ 是 C^k 类的，并且

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})&=\left(f|_{U_0}\right)^{-1}(\boldsymbol{a};\ \mathbf{0})=(\boldsymbol{a};\ g(\boldsymbol{a};\ \mathbf{0}))\Longrightarrow g(\boldsymbol{a};\ \mathbf{0})=\boldsymbol{b},\\
(\boldsymbol{x};\ \mathbf{0})&=f|_{U_0^\circ}\left(f|_{U_0}\right)^{-1}(\boldsymbol{x};\ \mathbf{0})=f|_{U_0}(\boldsymbol{x};\ g(\boldsymbol{x};\ \mathbf{0}))\\
&=(\boldsymbol{x};\ f(\boldsymbol{x};\ g(\boldsymbol{x};\ \mathbf{0}))).
\end{aligned}$$

由此得到

$$\mathbf{0}=f(\boldsymbol{x};\ g(\boldsymbol{x};\ \mathbf{0})), \forall(\boldsymbol{x};\ \mathbf{0})\in V.$$

我们令

$$\begin{aligned}
W&=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid (\boldsymbol{x};\ \mathbf{0})\in V=F\left(U_0\right)\},\\
\varphi(\boldsymbol{x})&=g(\boldsymbol{x};\ \mathbf{0}), \forall \boldsymbol{x}\in W,
\end{aligned}$$

则 $W\subset\mathbb{R}^n$ 是含 $\boldsymbol{a}$ 的开集 (因 V 是开集)，并且映射 $\varphi:W\to\mathbb{R}^m$ 是 C^k 类的，$\varphi(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}, f(\boldsymbol{x};\ \varphi(\boldsymbol{x}))=$

$\mathbf{0}, \forall \boldsymbol{x} \in W$.

现在由映射 F 的定义可推知

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}) \in U_0, f(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}) = \mathbf{0} &\Longleftrightarrow F(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x};\ \mathbf{0}), \boldsymbol{x} \in W \\ &\Longleftrightarrow (\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}) = \left(f\big|_{U_0}\right)^{-1}(\boldsymbol{x};\ \mathbf{0}), \boldsymbol{x} \in W \\ &\Longleftrightarrow (\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x};\ g(\boldsymbol{x};\ \mathbf{0})) = (\boldsymbol{x};\ \varphi(\boldsymbol{x}))W \\ &\Longleftrightarrow \boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in W.\end{aligned}$$

最后，由恒等式

$$(xG) = f(\boldsymbol{x};\ \varphi(\boldsymbol{x})) \equiv \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{x} \in W$$

得到

$$\mathrm{d}G(\boldsymbol{x}) = 0, \forall \boldsymbol{x} \in W.$$

另一方面，$G(\boldsymbol{x}) = f \circ (id_{\mathbb{R}^n};\ \varphi)(\boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{x} \in W$. 故由复合映射的微分法则得到

$$0 = \mathrm{d}G(\boldsymbol{x}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{x};\ \varphi(\boldsymbol{x})) \circ (id_{\mathbb{R}^n};\ \mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{x})).$$

从而由上述偏微分关系式(16.12)推得

$$\begin{aligned}\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n, 0 = \mathrm{d}G(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h}) &= \mathrm{d}f(\boldsymbol{x};\ \varphi(\boldsymbol{x})) \circ (id_{\mathbb{R}^n};\ \mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{h}) \\ &= \mathrm{d}f(\boldsymbol{x};\ \varphi(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{h};\ \mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})) \\ &= \mathrm{d}f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x};\ \varphi(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{h}) + \mathrm{d}f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x};\ \varphi(\boldsymbol{x}))(\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})) \\ &= \left[\mathrm{d}f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x};\ \varphi(\boldsymbol{x})) + \mathrm{d}f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x};\ \varphi(\boldsymbol{x})) \circ \mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{x})\right](\boldsymbol{h}).\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{d}f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x};\ \varphi(\boldsymbol{x})) + \mathrm{d}f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x};\ \varphi(\boldsymbol{x})) \circ \mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{x}) = 0, \forall \boldsymbol{x} \in W.$$

注 用坐标形式叙述的隐射定理，通常称为隐函数定理，就是：

设 $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ 是任一开集，$(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}) \in U. f_i : U \to \mathbb{R}(i = 1, 2, \cdots, m)$ 是 m 个 C^k 类函数. 考虑方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) = \mathbf{0}, \\ f_2(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) = \mathbf{0}, \\ \qquad \cdots \\ f_m(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

假设

1) $f_i(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}) = \mathbf{0}(i = 1, 2, \cdots, m)$,

2) $\dfrac{D(f_1, \cdots, f_m)}{D(y_1, \cdots, y_m)}(a;\ b) \neq 0$,

则存在 a 的一个邻域 $W \subset \mathbb{R}^n$ 及唯一的 m 个函数 $\varphi_i : W \to \mathbb{R}(i = 1, 2, \cdots, m)$ 使得

1) 每一个 φ_i 在 W 上是 C^k 类的，若令 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m)$，则 $\varphi(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$，并且 $(W;\ \varphi(W)) \subset U$.

2) $\varphi_i(i = 1, 2, \cdots, m)$ 满足下述恒等式：

$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ \varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, \varphi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)) = \mathbf{0}$,

$$\forall i = 1, 2, \cdots, m, \forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in W.$$

3)φ_i 的微分 $\mathrm{d}\varphi_i$ 可由下述方程组确定：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},\varphi_1(\boldsymbol{x}),\cdots,\varphi_m(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}x_i+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_1}{\partial y_i}(\boldsymbol{x},\varphi_1(\boldsymbol{x}),\cdots,\varphi_m(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}\varphi_i(\boldsymbol{x})=\mathbf{0},$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},\varphi_1(\boldsymbol{x}),\cdots,\varphi_m(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}x_i+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_2}{\partial y_i}(\boldsymbol{x},\varphi_1(\boldsymbol{x}),\cdots,\varphi_m(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}\varphi_i(\boldsymbol{x})=\mathbf{0},$$
$$\cdots$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},\varphi_1(\boldsymbol{x}),\cdots,\varphi_m(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}x_i+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_m}{\partial y_i}(\boldsymbol{x},\varphi_1(\boldsymbol{x}),\cdots,\varphi_m(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}\varphi_i(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}.$$

特别我们给出 $n=m=1$ 时的隐函数定理：

设 $U\subset\mathbb{R}^2$ 是任一开集，$f:U\to\mathbb{R}$ 是任一 C^k 类实值函数，$(a,\mathrm{b})\in U$. 并且假设

1. $f(a,b)=0$,
2. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$,

则存在 a 的一个邻域 W 及唯一的函数 $\varphi:W\to\mathbb{R}$ 使得

1. φ 在 W 上是 C^k 类的，并且 $\varphi(a)=b,(W,\varphi(W))\subset U$.
2. $f(x,\varphi(x))=0,\forall\boldsymbol{x}\in W$.
3. φ 在任一点 $x\in W$ 处的导数 $\varphi'(x)$ 可由下式确定：

$$\varphi'(x)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}.$$

注 1) 若 φ 是由 $f(x,y)=0$ 确定的隐函数，则导数 $\varphi'(x)$ 可直接对恒等式 $f(x,\varphi(x))\equiv 0$ 求导数得到. 即

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0,\forall\boldsymbol{x}\in W.$$

从而

$$\varphi'(x)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}.$$

2) 若 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ 但 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)\neq 0$, 则隐函数定理确定的是另外一个 C^k 类函数 $\psi:V(\subset\mathbb{R})\to\mathbb{R}$(这里 V 是 b 的一个邻域) 使得

1)$\psi(b)=a,(\psi(V),V)\subset U$,

2)$f(\psi(y),y)=0,\forall y\in V$,

3)$\psi'(y)=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(\psi(y),y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(\psi(y),y)},\forall y\in V$.

但是若 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$, 则这时上述隐函数定理都不适用，因此必须对具体情况进行具体分析.

例题 16.18 考虑方程 $f(x,y)=x^2+y^2-1=0$.

函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上是 C^∞ 类的.

若取 $(a,b)=(0,1)$, 则 $f(0,1)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)=1$, 故由隐函数定理知，存在 0 的一个邻域 I 及唯一

的 C^∞ 类函数 $\varphi: I \to \mathbb{R}$ 使得

$$\varphi(0)=1, f(x,\varphi(x))=0, \forall \boldsymbol{x} \in I.$$

实际上, 直接计算可知, 这个隐函数 φ 就是:

$$\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}, \forall \boldsymbol{x} \in (-1,1)=I.$$

若取 $(a,b)=(1,0)$, 则 $f(1,0)=0, \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)=1$. 于是隐函数定理确定出另外一个 C^∞ 类的函数 $\psi: J \to \mathbb{R}$ 使得

$$\psi(1)=0, f(\psi(y),y)=0, \forall y \in J.$$

直接计算得到此隐函数 ψ 为:

$$\psi(y)=\sqrt{1-y^2}, \forall y \in (-1,1)=J.$$

例题 16.19 考虑方程 $f(x,y)=y^6-4y^4+4x^2y^2-x^4=0$.

函数 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上是 C^∞ 类的.

若取 $(a,b)=(1,1)$. 则 $f(1,1)=0, \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)=-2$. 因此由隐函数定理知, 存在 1 的一个邻域 I 及唯一的 C^∞ 类函数 $\varphi: I \to \mathbb{R}$ 使得 $\varphi(1)=1$, 并且

1) $f(x,\varphi(x))=0, \forall \boldsymbol{x} \in I$,

2) $\varphi'(x)=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}=\dfrac{4x^3-8x\varphi^2(x)}{6\varphi^5(x)-16\varphi^3(x)+8x^2\varphi(x)}, \forall \boldsymbol{x} \in I.$

特别地, 我们有 $\varphi'(1)=2$.

若取 $(a,b)=(0,0)$, 则 $f(0,0)=0, \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0, \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, 这时隐函数定理已不适用. 下面我们来证明在 $(0,0)$ 的任何邻域内, 方程 $f(x,y)=0$ 既不能确定 y 为 x 的连续函数, 也不能确定 x 为 y 的连续函数.

事实上, 由 $f(x,y)=y^6-4y^4+4x^2y^2-x^4=0$ 直接解得 $x^2=2y^2\pm|y|^3$. 它所表示的平面图形关于原点,x 轴,y 轴对称. 此图形在第一象限内的分支 Γ_1,Γ_2 有方程:

$$x=y\sqrt{2}\pm y, x'(0)=\sqrt{2}.$$

由此不难描绘 Γ_1,Γ_2 在原点邻域内的轨迹图形.

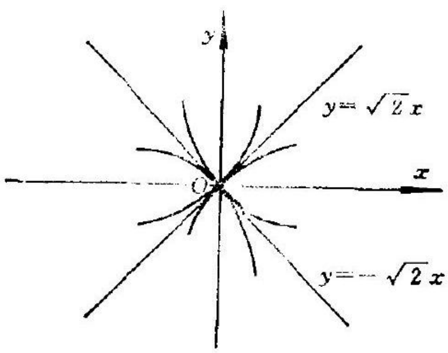


图 16.5

由此图形可以看出在 $(0,0)$ 的任何邻域内, 方程 $f(x,y)=0$ 既不能确定 y 为 x 的连续函数, 也不能确定 x 为 y 的连续函数.

✍ 习题 16.3

1. 设 $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$. 映射 $f : U \to \mathbb{R}^2$ 定义如下：
$$\forall (x,y) \in U, f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$
证明：$f(U) = U$，且 $f : U \to U$ 是 C^∞ 类微分同胚.

2. 设 $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0 \text{ 且 } x+y > 0\}$，映射 $f : U \to \mathbb{R}^3$ 定义如下：
$$\forall (x,y,z) \in U, f(x,y,z) = \left(x+y, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$
   1) 确定 $f(U)$；
   2) 证明：$f : U \to f(U)$ 是微分同胚.

3. 设映射 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 定义如下：
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = \left(x^2+y^2, z^2, 1-y\right).$$
证明：存在 $(1,1,1)$ 的一个邻域 U，使得 $f|_U : U \to f(U)$ 是 C^∞ 类微分同胚.

4. 设映射 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 定义如下：
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \left(\mathrm{e}^x \cos y, \mathrm{e}^x \sin y\right).$$
   1) 证明：$f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
   2) 证明：$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$，$f$ 在 (x,y) 处的 Jacobi 行列式不等于 0.
   3) 证明：f 是局部可逆的，但 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上不是单射.
   4) 证明：上述 2)、3) 中所述的现象对一元实值函数不可能出现.

5. 设 $U \subset \mathbb{R}^m$ 是一开集，$f : U \to \mathbb{R}^n$ 是 C^k 类映射 $(k \geqslant 1)$，满足条件：
$$f(0) = 0, J_f(0) \text{ 的秩等于 } m(m \leqslant n).$$
证明：存在 $\mathbb{R}^n$ 中含 0 的两个邻域 V 及 W，C^k 类微分同胚 $h : V \to W$ 使得 $h(0) = 0$，并且
$$\forall (x_1,\ldots,x_m) \in f^{-1}(V), h \circ f(x_1,\ldots,x_m) = (x_1,\ldots,x_m,0,\ldots,0).$$
(提示：考虑映射 $F : U \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$，
$$F(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_m) + (0,\ldots,0,x_{m+1},\ldots,x_n).)$$

6. 设 $U \subset \mathbb{R}^m$ 是一开集，$f : U \to \mathbb{R}^n$ 是 C^k 类映射 $(k \geqslant 1)$，满足条件：
$$f(0) = 0, J_f(0) \text{ 的秩等于 } n(m \geqslant n).$$
证明：存在 $\mathbb{R}^m$ 中含 0 的两个邻域 V 及 W，C^k 类微分同胚 $k : V \to W$ 使得 $k(0) = 0$，并且
$$\forall (x_1,\ldots,x_m) \in V, f \circ k(x_1,\ldots,x_m) = (x_1,\ldots,x_n).$$
(提示：考虑映射 $F : U \to \mathbb{R}^m$，
$$F(x_1,\ldots,x_m) = (f_1(x),\ldots,f_n(x),x_{n+1},\ldots,x_m).)$$

7. 考虑方程 $xy + 1 = \mathrm{e}^{x+y}$.
   1) 证明：存在 0 的邻域 $I \subset \mathbb{R}$ 及 C^∞ 类函数 $f : I \to \mathbb{R}$，使得 $xf(x) + 1 = \mathrm{e}^{x+f(x)}, \forall \boldsymbol{x} \in I$.
   2) 计算 f 在 $x = 0$ 邻域内的 3 阶限定展开式.

8. 考虑集合 $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 3,\ x^2+3xy-2y = 0\}$.
   1) 证明：存在 $(1,-1,1)$ 的一个邻域 U，$x = 1$ 的一个邻域 I，及两个 C^∞ 类函数 $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$,

使得

$$U \cap \Gamma = \left\{(x, \varphi(x), \psi(x)) \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{x} \in I\right\}.$$

2) 写出 φ 与 ψ 在 $x=1$ 邻域内的 2 阶限定展开式.

9. 设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 类映射, 并且满足条件:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|f(x)-f(y)\| \geqslant \|x-y\|.$$

1) 证明: $f(\mathbb{R}^n)$ 是闭集.

2) 证明: $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d} f(x)$ 是可逆的.

3) 证明: $f(\mathbb{R}^n)$ 是开集.

4) 由此推出 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一一映射.

10. 设 $f: U(\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ 是任一 C^2 类映射, $(x_0, y_0, z_0) \in U$ 使得

$$f(x_0, y_0, z_0)=0, \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

试计算由方程 $f(x, y, z)=0$ 所确定的隐函数 $z=\varphi(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的偏导数:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0),\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x_0, y_0),\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0),\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

11. 设 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是 C^2 类映射, 映射 $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 定义如下:

$$\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, g(x, y, z)=f(x, y)-z.$$

1) 设 $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ 使得 $g(a, b, c)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$, $x=\varphi(y, z)$ 是在 (a, b, c) 的某一邻域内由方程 $g(x, y, z)=0$ 所确定的隐函数. 试计算:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y, z),\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}(y, z),\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}(y, z).$$

2) 局部地解方程 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}=0$.

16.4 条件极值

函数的条件极值, 顾名思义就是求一个函数 f 在某些约束条件下的局部极值. 我们首先给出条件极值的定义.

1. 条件极值的定义

定义 16.7

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是任一开集, $f, g: U \to \mathbb{R}(i=1,2, \cdots, m)$ 是任意 $m+1$ 个 C^1 类映射, 并且 $m<n$. 令

$$A=\left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in U \mid g_i\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=0, \forall i=1,2, \cdots, m\right\},$$

我们称 f 在集合 A 上的点所取的局部极值为函数 f 的条件极值.

♣

我们假设从方程组 $g_i\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=0(i=1,2, \cdots, m)$ 中可以确定出 m 个函数

$$x_i=\varphi_i\left(x_{m+1}, \cdots, x_n\right),\left(x_{m+1}, \cdots, x_n\right) \in V \subset \mathbb{R}^{n-m}, i=1,2, \cdots, m$$

(例如 $g_i, i=1,2, \cdots, m$ 满足隐函数定理的条件), 将它们代入 $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n\right)$ 中, 于

是我们得到一个函数 $G: V \to \mathbb{R}$,

$\forall (x_{m+1}, \cdots, x_n) \in V$,

$G(x_{m+1}, \cdots, x_n) = f(\varphi_1(x_{m+1}, \cdots, x_n), \varphi_2(x_{m+1}, \cdots, x_n), \cdots\cdots, \varphi_m(x_{n+1}, \cdots, x_n), x_{m+1}, \cdots, x_n)$.

由此可知，函数 f 在点 $M_0(x_1^0, \cdots, x_m^0, x_{m+1}^0, \cdots, x_n^0) \in A$ 处取条件极值就等价于函数 G 在点 $N_0(x_{m+1}^0, \cdots, x_n^0)$ 处取局部极值.

但是我们注意到，上述 φ_i 是由 $g_j = 0 (j = 1, 2, \cdots, m)$ 所确定的隐函数，一般说来，φ_i 的具体表达式不容易求出，因此上述化条件极值为普通局部极值的方法理论上成立，但实际计算时就不一定行得通. 下面我们介绍求函数条件极值的另一方法.

2. Lagrange 乘数因子法

定理 16.18

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是任一开集，$f, g_i: U \to \mathbb{R}$ 是 $m+1$ 个 C^1 类函数，并且 $m < n$, 集合 A 如上所定义. $M_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \in A$.

若 Jacobi 矩阵 $\dfrac{\partial(g_1, g_2, \cdots, g_m)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}(M_0)$ 的秩等于 m, 并且 f 在 M_0 处取条件极值，则存在常数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使得

$$\mathrm{d}f(M_0) = \lambda_1 \mathrm{d}g_1(M_0) + \lambda_2 \mathrm{d}g_2(M_0) + \cdots + \lambda_m \mathrm{d}g_m(M_0),$$

或等价地

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(M_0) + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i}(M_0) + \cdots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(M_0). (i = 1, 2, \cdots, n)$$

(这里常数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 称为 Lagrange 常数因子).

证明 因为 Jacobi 矩阵 $\dfrac{\partial(g_1, g_2, \cdots, g_m)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}(M_0)$ 的秩为 m, 故不失一般性我们可以假设

$$\frac{D(g_1, g_2, \cdots, g_m)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_m)}(M_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(M_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(M_0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(M_0) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m}(M_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(M_0) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m}(M_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

由于 $M_0 \in A$, 所以 $g_i(M_0) = 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$. 根据隐函数定理知，存在点 $N_0(x_{m+1}^0, \cdots, x_n^0)$ 的一个邻域 V 及 m 个 C^1 类映射 $\varphi_i: V \to \mathbb{R}$ 使得

$$x_i^0 = \varphi_i(x_{m+1}^0, \cdots, x_n^0),$$

$$g_i(\varphi_1(x_{m+1}, \cdots, x_n), \cdots, \varphi_m(x_{m+1}, \cdots, x_n), x_{m+1}, \cdots, x_n) = 0,$$

$$\forall (x_{m+1}, \cdots, x_n) \in V, \forall i = 1, 2, \cdots, m.$$

现在上述恒等式的两边在 N_0 处求关于 $x_{m+1},\cdots,x_n$ 的偏导数, 则我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g_i}{\partial x_1}(M_0)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{m+1}}(N_0)+\cdots+\frac{\partial g_i}{\partial x_m}(M_0)\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{m+1}}(N_0)+\frac{\partial g_i}{\partial x_{m+1}}(N_0)=0,\\
&\frac{\partial g_i}{\partial x_1}(M_0)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{m+2}}(N_0)+\cdots+\frac{\partial g_i}{\partial x_m}(M_0)\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{m+2}}(N_0)+\frac{\partial g_i}{\partial x_{m+2}}(N_0)=0,\\
&\cdots\\
&\frac{\partial g_i}{\partial x_1}(M_0)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(N_0)+\cdots+\frac{\partial g_i}{\partial x_m}(M_0)\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}(N_0)+\frac{\partial g_i}{\partial x_n}(N_0)=0
\end{aligned}\tag{16.13}$$

若我们令

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{m+1}}&=\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{m+1}}(N_0),\cdots,\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{m+1}}(N_0),1,0,\cdots,0\right),\\
\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{m+2}}&=\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{m+2}}(N_0),\cdots,\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{m+2}}(N_0),0,1,\cdots,0\right),\\
&\cdots\\
\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}&=\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(N_0),\cdots,\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}(N_0),0,0,\cdots,1\right),\\
\operatorname{grad} g_i(M_0)&=\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_1}(M_0),\cdots,\frac{\partial g_i}{\partial x_r}(M_0)\right)(i=1,2,\cdots,m),
\end{aligned}$$

则式(16.13)表明梯度向量 $\operatorname{grad} g_i(M_n)$ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 正交 $(i=1,2,\cdots,m)$. 我们分别用 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 表示将向量 $\operatorname{grad} g_i(M_0)\,(i=1,2,\cdots,m)$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{m+1}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}$ 所张成的向量空间, 则由于

$$\operatorname{grad} g_1(M_0),\cdots,\operatorname{grad} g_m(M_0)$$

线性无关 (因 Jacobi 行列式 $\dfrac{D(g_1,g_2,\cdots,g_m)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_m)}(M_0)\neq 0$), $\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 我们有

$$\mathbb{R}^n=E\oplus F$$

另一方面, 若记

$$G(x_{m+1},\cdots,x_n)=f(\varphi_1(x_{m+1},\cdots,x_n),\cdots,\varphi_m(x_{m+1},\cdots,x_n)\,x_{m+1},\cdots,x_n)$$

则函数 $G:V\to\mathbb{R}$ 在 N_0 处取局部极值, 从而

$$\frac{\partial G}{\partial x_{m+1}}(N_0)=0,\ \frac{\partial G}{\partial x_{m+2}}(N_0)=0,\cdots,\frac{\partial G}{\partial x_n}(N_0)=0.$$

此即为:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{m+1}}(N_0)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0)\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{m+1}}(N_0)+\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}(M_0)=0.\\
&\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{m+2}}(N_0)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0)\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{m+2}}(N_0)+\frac{\partial f}{\partial x_{m+2}}(M_0)=0.\\
&\cdots\\
&\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(N_0)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}(N_0)+\frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)=0.
\end{aligned}$$

此方程组表明梯度向量 $\operatorname{grad} f(M_0)$ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{m+1}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}$ 正交, 因此 $\operatorname{grad} f(M_0)\in\boldsymbol{E}$, 从而存在唯一的 m 个常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使得

$$\operatorname{grad} f(M_0)=\lambda_1\operatorname{grad} g_1(M_0)+\lambda_2\operatorname{grad} g_2(M_0)+\cdots+\lambda_m\operatorname{grad} g_m(M_0),$$

此即等价于

$$\mathrm{d}f(M_0)=\lambda\mathrm{d}g_1(M_0)+\lambda_2\mathrm{d}g_2(M_0)+\cdots+\lambda_m\mathrm{d}g_m(M_0),$$

或

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)=\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_i}(M_0)+\lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial x_i}(M_0)+\cdots+\lambda_m\frac{\partial g_m}{\partial x_i}(M_0)\,(i=1,2,\cdots,n).$$

注 A 中满足方程组 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(M_0)\,(i=1,2,\cdots,n)$ 的点 M_0 称为 f 在 A 上的条件极值可疑点. 为了实际确定点 $M_0\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right)$, 我们可以解关于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m,x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0$ 的 $n+m$ 个联立方程组:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)=\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(M_0)+\lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(M_0)+\cdots+\lambda_m\frac{\partial g_m}{\partial x_1}(M_0)\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0)=\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(M_0)+\lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(M_0)+\cdots+\lambda_m\frac{\partial g_m}{\partial x_2}(M_0)\\ \cdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)=\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_n}(M_0)+\lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial x_n}(M_0)+\cdots+\lambda_m\frac{\partial g_m}{\partial x_n}(M_0)\\ g_1(M_0)=0\\ g_2(M_0)=0\\ \cdots\cdots\\ g_m(M_0)=0\end{cases}$$

由此即可求得条件极值可疑点 M_0.

例题 16.20 设 $U=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid x_i\geqslant 0\}$. $f:U\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\forall\,(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in U,\ f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1x_2\cdots x_n.$$

试求函数 f 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$ 的极值点与极值.

我们令 $g:U\to\mathbb{R}$ 为

$$\forall\,(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in U,\ g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1+x_2+\cdots+x_n-a,$$

则根据上述定理, f 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$ 的条件极值可疑点 $M_0\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right)$ 可由下述方程组确定:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)-\lambda\frac{\partial g}{\partial x_i}(M_0)=0,i=1,2,\cdots,n;\\ x_1^0+x_2^0+\cdots+x_n^0-a=0.\end{cases}$$

此即为

$$\begin{cases}x_1^0x_2^0\cdots\widehat{x_i^0}\cdots x_n^0-\lambda=0,i=1,2,\cdots,n;\\ x_1^0+x_2^0+\cdots+x_n^0-a=0.\end{cases}$$

消去 λ 得到

$$x_1^0=x_2^0=\cdots=x_n^0=\frac{a}{n}.$$

因此 f 只有唯一的条件极值可疑点 $M_0\left(\frac{a}{n},\frac{a}{n},\cdots,\frac{a}{n}\right)$. 另一方面, 由于在集合 $A=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in U\mid x_1+x_2+\cdots+x_n=a\}$ 的边界上 $f=0$, 而非负函数 $f:A\to\mathbb{R}$ 在紧集 A 上必取到它的最大值 (因 f 连续), 故 f 在 $M_0\left(\frac{a}{n},\frac{a}{n},\cdots,\frac{a}{n}\right)$ 处取最大值 $\left(\frac{a}{n}\right)^n$.

例题 16.21 设函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 及集 A 定义如下:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j,\forall(x_1,x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

$$A=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid x_1+x_2+\cdots+x_n=a\}(a>0).$$

试求 f 在 A 上的最大值.

我们定义函数 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 如下:

$$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n,g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1+x_2+\cdots+x_n-a,$$

则 f 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$ 的条件极值可疑点 $M_0\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right)$ 由下述方程组确定:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)-\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(M_0)=0,i=1,2,\cdots,n;\\ g(M_0)=0.\end{cases}$$

此即为

$$\begin{cases}x_1^0+x_2^0+\cdots+\widehat{x_i^0}+\cdots+x_n^0-\lambda=0,i=1,2,\cdots,n;\\ x_1^0+x_2^0+\cdots+x_n^0=a.\end{cases}$$

由此得到 $\lambda=-\dfrac{n-1}{n}-a$. 从而

$$x_i^0=a-\lambda=a-\frac{n-1}{n}-a=\frac{a}{n}(i=1,2,\cdots,n).$$

此即表明 f 在 A 上只有唯一的条件极值可疑点 $M_0\left(\dfrac{a}{n},\dfrac{a}{n},\cdots\dfrac{a}{n}\right)$. 由于 $f(0,0,\cdots,0)=0$, 故 f 在 M_0 处取最大值, 其值为

$$f(M_0)=(n-1)\left(\frac{a}{n}\right)^2+(n-2)\left(\frac{a}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{a}{n}\right)^2=\frac{(n-1)a^2}{2n}$$

例题 16.22 求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=x-1$ 之间的距离.

设 (x_1,y_1) 是抛物线 $y=x^2$ 上任意一点, 而 (x_2,y_2) 是直线 $y=x-1$ 上的任意一点. 这两点之间的距离的平方为 $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$. 令

$$f(x_1,x_2,y_1,y_2)=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$

$$g_1(x_1,x_2,y_1,y_2)=y_1-x_1^2$$

$$g_2(x_1,x_2,y_1,y_2)=y_2-x_2+1$$

则函数 $f,g_1,g_2:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^4$ 上是 C^1 类的.

因此求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=x-1$ 之间的距离就是求函数 f 在约束条件 $g_1=0,g_2=0$ 下的最小值.

根据上述定理, f 的条件极值可疑点 M_0 满足下述方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)-\lambda_1\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(M_0)-\lambda_2\dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}(M_0)=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(M_0)-\lambda_1\dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}(M_0)-\lambda_2\dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}(M_0)=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_1}(M_0)-\lambda_1\dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}(M_0)-\lambda_2\dfrac{\partial g_2}{\partial y_1}(M_0)=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_2}(M_0)-\lambda_1\dfrac{\partial g_1}{\partial y_2}(M_0)-\lambda_2\dfrac{\partial g_2}{\partial y_2}(M_0)=0, \\ g_1(M_0)=0, \\ g_2(M_0)=0, \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} 2\left(x_1^0-x_2^0\right)+2\lambda_1 x_1^0=0, \\ -2\left(x_1^0-x_2^0\right)+\lambda_2=0, \\ 2\left(y_1^0-y_2^0\right)-\lambda_1=0, \\ -2\left(y_1^0-y_2^0\right)-\lambda_2=0, \\ y_1^0-\left(x_1^0\right)^2=0, \\ y_2^0-x_2^0+1=0. \end{cases}$$

解这个方程组得到

$$M_0\left(x_1^0,x_2^0,y_1^0,y_2^0\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{7}{8},\frac{1}{4},-\frac{1}{8}\right).$$

因为抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=x-1$ 之间的距离存在, 而 $M_0\left(\frac{1}{2},\frac{7}{8},\frac{1}{4},-\frac{1}{8}\right)$ 又是 f 的唯一条件极值可疑点, 所以此距离为

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

✍ 习题 16.4

1. 设函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义如下:
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q,\ \left(p>0,q>0,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$
试求函数 f 在条件 $xy=1$ 下的极值.
2. 设 $U=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x>0,y>0,z>0\right\}$, 函数 $f:U\to\mathbb{R}$ 定义如下:
$$\forall (x,y,z)\in U,\ f(x,y,z)=x\log x+y\log y+z\log z.$$
试求函数 f 满足条件 $x+y+z=3a(a>0)$ 的极值.
3. 设函数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 定义如下:
$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3.$$
试求函数 f 在条件 $x+y+z=6,\ x^2+y^2+z^2=12$ 下的极值.
4. 1) 计算从点 $M_0(a_1,a_2,a_3)$ 到平面 $b_1x+b_2y+b_3z+b_0=0$ 的距离.

2) 在直线 $\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z + a_0 = 0, \\ b_1x + b_2y + b_3z + b_0 = 0 \end{cases}$ 上找与原点最近的点.

5. 设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是任意 n 个实数, 函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 定义如下：

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right|.$$

试求函数在满足条件 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ 下的最大值.

6. 设函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 定义如下：

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 x_2 \cdots x_n)^2.$$

1) 试求函数 f 在条件 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ 下的最大值.

2) 利用上述结论证明：$\forall a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 0$, 下述不等式成立：

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

第十七章 微分形式

这一章我们首先用纯规则的方法引进了外代数的概念. 利用外代数定义了微分形式及微分形式的外积. 其次我们还定义了外微分算子 d 并研究了外微分算子的若干性质. 这些内容是为下一章作准备的.

17.1 外代数

在未定义外代数之前, 让我们首先介绍代数概念.

1. 代数的概念

设 $K=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$.

定义 17.1

一个代数就是一个二元组 $(\mathscr{A},\tau)$, 这里

1. $\mathscr{A}$ 是一个 K-向量空间.
2. $\tau:\mathscr{A}\times\mathscr{A}\to\mathscr{A},(A,B)\mapsto A\tau B$ 是一个双线性映射, 它薄足结合律:

$$\forall A,B,C\in\mathscr{A},(A\tau B)\tau C=A\tau(B\tau C).$$

τ 称为代数积.

如果 $\forall A,B\in\mathscr{A},A\tau B=B\tau A$, 则称 τ 是可交换的.

如果存在 $e\in\mathscr{A}$ 使得 $\forall A\in\mathscr{A},A\tau e=e\tau A$, 则称 τ 有单位元 e .

♣

例题 17.1 考虑连续函数空间 $C^0([a,b],\mathrm{K})$.

1)$C^0([a,b],\mathrm{K})$ 是一个 K-向量空间.

2) 定义映射 $\tau:C^0([a,b],\mathrm{K})\times C^0([a,b],\mathrm{K})\to C^0([a,b],\mathrm{K})$ 为:

$$\forall f,g\in C^0([a,b],\mathrm{K}),\quad f\tau g=fg.$$

显然, τ 是一个双线性映射, 并且满足结合律:

$$\forall f,g,h\in C^0([a,b],\mathrm{K}),\quad (f\tau g)\tau h=f\tau(g\tau h)=fgh.$$

因此 $\left(C^0([a,b],\mathrm{K}),\tau\right)$ 是一个代数. 这个代数积 τ 是可交换的, 并且有单位元 1.

例题 17.2 考虑 $n\times n$ 实矩阵集合 $M(n,n)$.

1) $M(n,n)$ 是一个 $\mathbb{R}$-向量空间.

2) 定义映射 $\tau:M(n,n)\times M(n,n)\to M(n,n)$ 为:

$$\forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M(n,n),\boldsymbol{A}\tau\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B},$$

则 τ 是一个双线性映射, 并且满足结合律:

$$\forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in M(n,n),(\boldsymbol{A}\tau\boldsymbol{B})\tau\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\tau(\boldsymbol{B}\tau\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}.$$

因此 $(M(n,n),\tau)$ 是一个代数, 这个代数积 τ 不是可交换的, 但 τ 有单位元 $\boldsymbol{E}$ 即单位矩阵.

例题 17.3 考虑 n 个变量的系数在 K 中取值的多项式集合 $\mathrm{K}[X_1,X_2,\cdots,X_n]=\mathscr{P}$.

1)$\mathrm{K}[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ 是一个 K-向量空间.

2) 若我们用 $\mathscr{P}_k$ 表示变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的 k 次齐次多项式集合, 则 $\mathscr{P}_k$ 也是 K-向量空间.

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，这里 $a_i\in\{0,1,2,\cdots,k\},|\boldsymbol{\alpha}|\triangleq a_1+a_2+\cdots+a_n=k$．我们令

$$X^{\boldsymbol{\alpha}}=X_1^{a_1}X_2^{a_2}\cdots X_n^{a_n},$$

则所有这种形式的单项式 $\left\langle X^{\boldsymbol{\alpha}}\middle|\,|\boldsymbol{\alpha}|=k\right\rangle$ 形成 $\mathscr{P}_k$ 的一个基.

显然对于 $\mathscr{S}$，我们有下述直和：

$$\mathscr{P}=\bigoplus_{k=0}^{+\infty}\mathscr{P}_k.$$

3) 定义映射 $\tau:\mathscr{P}\times\mathscr{P}\to\mathscr{S}$ 为：

$$\forall P_n,P_m\in\mathscr{F},P_n\tau P_m=P_n\cdot P_m,$$

则 τ 显然是双线性映射，它满足结合律，

$$\forall P_n,P_m,P_k\in\mathscr{P},(P_n\tau P_m)\,\tau P_k=P_n\tau\,(P_m\tau P_k)=P_n\cdot P_m\cdot P_k$$

因此 $(\mathscr{S},\tau)$ 是一个代数，此代数积 τ 也是可交换的，并且有单位元 1.

有了代数的概念，现在我们可以来介绍外代数概念.

2. 外代数概念

首先我们证明关于双线性映射的下述引理.

引理 17.1

设 X,Y 是维数分别为 n 与 m 的两个 K-向量空间，它们的基分别为 $\langle a_i\rangle$ 与 $\langle b_j\rangle$．Z 是任一 K-向量空间，$f:X\times Y\to Z$ 是任一映射，则 f 是双线性的，当且仅当存在 $n\times m$ 个 $c_{ij}\in Z$ 使得

$$\forall x=\sum_{i=1}^{n}\xi_ia_i\in X,\forall y=\sum_{j=1}^{m}\mu_jb_j\in Y,f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\xi_i\mu_jc_{ij}.$$

如果 f 是双线性的，则 $c_{ij}=f\left(a_i,b_j\right)$.

证明 首先假设 f 是双线性映射. 于是

$$f(x,y)=f\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_ia_i,\sum_{j=1}^{n}\mu_jb_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\xi_i\mu_jf\left(a_i,b_j\right)$$

令 $c_{ij}=f\left(a_i,b_j\right)$ 即可.

反之，设存在 $n\times m$ 个 $c_{ij}\in Z$，使得 $\forall x=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_ia_i\in X,\forall y=\sum\limits_{j=1}^{n}\mu_jb_j\in Y,$

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\xi_i\mu_jc_{ij}.$$

我们来证明 f 是双线性的. 为此设

$$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_ia_i,x'=\sum_{i=1}^{n}\xi_i'a_i\in X,a_i\in K,$$

则 $x+x'=\sum_{i=1}^{n}(\xi_i+\xi_i')a_i, ax=\sum_{i=1}^{n}(c\xi_i)a_i$，于是

$$\begin{aligned}f(x+x',y)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\xi_i+\xi_i')\mu_j c_{ij}\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\xi_i\mu_j c_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\xi_i'\mu_j c_{ij}\\&=f(x,y)+f(x',y)\end{aligned}$$

$$f(\alpha x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\alpha\xi_i)\mu_j c_{ij}=\alpha\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\xi_i\mu_j c_{ij}=\alpha f(x,y)$$

因此 f 关于 x 是线性的. 同理可证 f 关于 y 也是线性的. 故 f 是双线性映射.

注 这个引理表明, 为了定义双线性映射 f，我们只需定义 $f(a_i,b_j)$ 即可. $c_{ij}=f(a_i,b_j)$ 称为双线性映射 f 关于基 $\langle a_i\rangle$ 与 $\langle b_j\rangle$ 的系数.

当 $X=Y$ 时, 我们可取 $\langle a_i\rangle=\langle b_j\rangle$, 于是 $c_{ij}=f(a_i,a_j)$.

此引理可推广到任一 k 重线性映射上去. 具体的叙述我们留给读者.

设 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正规正交基, 它的对偶基底为 $(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n)$. 我们令

$$G_0=\phi,\mathrm{d}x_\phi=1,$$

$$G_k=\{i=(i_1,i_2,\cdots,i_k)\mid 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n\}(1\leqslant k\leqslant n).$$

1)k 重线性形式 $\mathrm{d}x_i:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\,(i\in G_k)$,

设 $\mathrm{d}x_i\triangleq\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$. 我们定义 k 重线性形式 $\mathrm{d}x_i:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 如下:

$$\begin{aligned}&\forall\left(\boldsymbol{e}_{j_1},\boldsymbol{e}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{j_k}\right)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n\\&\mathrm{d}x_i\left(\boldsymbol{e}_{j_1},\boldsymbol{e}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{j_k}\right)=\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\left(\boldsymbol{e}_{j_1},\boldsymbol{e}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{j_k}\right)\\&=\begin{vmatrix}\mathrm{d}x_{i_1}(\boldsymbol{e}_{j_1})&\mathrm{d}x_{i_1}(\boldsymbol{e}_{j_2})&\cdots&\mathrm{d}x_{i_1}(\boldsymbol{e}_{j_k})\\\mathrm{d}x_{i_2}(\boldsymbol{e}_{j_1})&\mathrm{d}x_{i_2}(\boldsymbol{e}_{j_2})&\cdots&\mathrm{d}x_{i_2}(\boldsymbol{e}_{j_k})\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\mathrm{d}x_{i_k}(\boldsymbol{e}_{j_1})&\mathrm{d}x_{i_k}(\boldsymbol{e}_{j_2})&\cdots&\mathrm{d}x_{i_k}(\boldsymbol{e}_{j_k})\end{vmatrix}\\&=\det\mathrm{d}x_{i_l}\left(\boldsymbol{e}_{j_s}\right)\end{aligned}$$

2) 向量空间 $\wedge_k(\mathbb{R}^n)$:

若 $k=0$, 我们规定 $\wedge_0(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}$. 它的基为 $\mathrm{d}x_\phi=1$,

若 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$. 则由所有 k 重线性形式 $\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}$ $(\boldsymbol{i}\in G_k)$ 生成的 $\mathbb{R}$-向量空间记为 $\wedge_k(\mathbb{R}^n)$.

由 $\wedge_k(\mathbb{R}^n)$ 的定义可知, $\wedge_k(\mathbb{R}^n)$ 的维数 $\dim\left(\wedge_k(\mathbb{R}^n)\right)\leqslant C_n^k$.

下面我们来证明: $\dim\left(\wedge_k(\mathbb{R}^n)\right)=C_n^k$.

为此我们只需证明 $\{\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}\mid\boldsymbol{i}\in G_k\}$ 线性无关.

假设存在常数 $c_{\boldsymbol{i}}$ 使得

$$\sum_{\boldsymbol{i}\in G_k}c_{\boldsymbol{i}}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}=\sum_{\boldsymbol{i}\in G_k}c_{\boldsymbol{i}}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}=0.$$

则由 $\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}$ 的定义，$\forall\left(\boldsymbol{e}_{j_1},\boldsymbol{e}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{j_k}\right)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n$，我们有

$$0=\sum_{\boldsymbol{i}\in G_k}c_{\boldsymbol{i}}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\left(\boldsymbol{e}_{j_1},\boldsymbol{e}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{j_k}\right)=\sum_{\boldsymbol{i}\in G_k}c_{\boldsymbol{i}}\det\left(\mathrm{d}x_{i_l}\left(\boldsymbol{e}_{j_s}\right)\right)$$

由于

$$\mathrm{d}x_{i_l}\left(\boldsymbol{e}_{j_s}\right)=\begin{cases}1, & 若\ i_l=j_s,\\ 0, & 若\ i_l\neq j_s,\end{cases}$$

故

$$\det\left(\mathrm{d}x_{i_l}\left(\boldsymbol{e}_{j_s}\right)\right)=\begin{cases}1, & 若\ (i_1,i_2,\cdots,i_k)=(j_1,j_2,\cdots,j_k),\\ 0, & 若\ (i_1,i_2,\cdots,i_k)\neq(j_1,j_2,\cdots,j_k).\end{cases}$$

由此可知，若取 $(j_1,j_2,\cdots,j_k)=\boldsymbol{i}$，则

$$c_{\boldsymbol{i}}=0.$$

此即表明 $\langle\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}\mid\boldsymbol{i}\in G_k\rangle$ 线性无关.

注 若 $k>n$，则我们也可以类似地定义 k 重线性形式 $\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}=\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$，但这时由于 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 中至少有两个是相同的，故

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}\left(\boldsymbol{e}_{j_1},\boldsymbol{e}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{j_k}\right)=&\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\left(\boldsymbol{e}_{j_1},\boldsymbol{e}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{e}_{j_k}\right)\\=&\det\left(\mathrm{d}x_{i_l}\left(\boldsymbol{e}_{j_s}\right)\right)=0\end{aligned}$$

从而 $\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}=0$，因此由 $\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}$ 生成的向量空间 $\wedge_k\left(\mathbb{R}^n\right)=0$.

3) 向量空间 $\wedge\left(\mathbb{R}^n\right)$：

向量空间 $\wedge_k\left(\mathbb{R}^n\right)$ 的直和记为 $\wedge\left(\mathbb{R}^n\right)$，即

$$\wedge\left(\mathbb{R}^n\right)=\mathop{}\limits_{k=0}^{n}\wedge_k\left(\mathbb{R}^n\right).$$

$\wedge\left(\mathbb{R}^n\right)$ 的维数为：

$$\dim\left(\wedge\left(\mathbb{R}^n\right)\right)=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n.$$

$\wedge\left(\mathbb{R}^n\right)$ 的基为：$\{\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}\mid\boldsymbol{i}\in G_k,k=0,1,\cdots,n\}$，即

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}x_{\phi}=1,\\&\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n,\\&\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}\wedge\mathrm{d}x_{\boldsymbol{j}}\,(1\leqslant i<j\leqslant n),\\&\cdots\\&\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\,(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n),\\&\cdots\\&\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n.\end{aligned}$$

4) 双线性映射 $\overline{\wedge}:\wedge\left(\mathbb{R}^n\right)\times\wedge\left(\mathbb{R}^n\right)\to\wedge\left(\mathbb{R}^n\right)$：

$\forall\boldsymbol{i}\in G_k,\boldsymbol{j}\in G_m$，若 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{j}$ 不相交，则我们用 $\langle\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\rangle$ 表示向量

$$(\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\cdots,\boldsymbol{i}_k,\boldsymbol{j}_1,\boldsymbol{j}_2,\cdots,\boldsymbol{j}_m)$$

的逆序数. 而用 $\boldsymbol{i}\vee\boldsymbol{j}$ 表示对此向量重新按上升次序排列所得的 $k+m$ 维向量. 于是 $\boldsymbol{i}\vee\boldsymbol{j}\in G_{k+m}$.

现在我们定义一个双线性映射 $\overline{\bigwedge}: \bigwedge(\mathbb{R}^n)\times\bigwedge(\mathbb{R}^n)\to\bigwedge(\mathbb{R}^n)$ 为:

$$\forall \mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}\in\bigwedge_k(\mathbb{R}^n),\mathrm{d}x_{\boldsymbol{j}}\in\bigwedge_m(\mathbb{R}^n),$$

$$\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}\overline{\bigwedge}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{j}}=\begin{cases}0, & 若\ \boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\ 相交.\\ (-1)^{\langle\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\rangle}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}\vee\boldsymbol{j}}, & 若\ \boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\ 不相交.\end{cases}$$

关于此映射 $\overline{\bigwedge}$ 的性质，我们有下述定理.

定理 17.1

$\forall f,g,h\in\bigwedge(\mathbb{R}^n),\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

1. $(\alpha f)\overline{\bigwedge}g=f\overline{\bigwedge}(\alpha g)=\alpha(f\overline{\bigwedge}g)$.
2. $(f\overline{\bigwedge}g)\overline{\bigwedge}h=f\overline{\bigwedge}(g\overline{\bigwedge}h)$.
3. $g\overline{\bigwedge}f=(-1)^{km}f\overline{\bigwedge}g$，若 $f\in\bigwedge_k(\mathbb{R}^n),g\in\bigwedge_m(\mathbb{R}^n)$.
4. $f\overline{\bigwedge}1=1\overline{\bigwedge}f=f$.

证明 由 $\overline{\bigwedge}$ 的双线性性，我们只需对

$$f=\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}},g=\mathrm{d}x_{\boldsymbol{j}},h=\mathrm{d}x_{\boldsymbol{k}}$$

验证上述性质即可.

性质 1) 是显然的.

下面我们来证明 2)，即证明

$$\left(\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}\overline{\bigwedge}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{j}}\right)\overline{\bigwedge}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{k}}=\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}\overline{\bigwedge}\left(\mathrm{d}x_{\boldsymbol{j}}\overline{\bigwedge}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{k}}\right)$$

若 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 不是互不相交. 则由定义知，上式左右两边都等于 0.

若 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 互不相交，则

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}\overline{\bigwedge}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{j}}\right)\overline{\bigwedge}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{k}}&=(-1)^{\langle\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\rangle}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}\vee\boldsymbol{j}}\overline{\bigwedge}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{k}}\\&=(-1)^{\langle\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\rangle+\langle\boldsymbol{i}\vee\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle}\mathrm{d}x_{(\boldsymbol{i}\vee\boldsymbol{j})\vee\boldsymbol{k}}\\&=(-1)^{\langle\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}\vee\boldsymbol{j}\vee\boldsymbol{k}}\\ \mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}\overline{\bigwedge}\left(\mathrm{d}x_{\boldsymbol{j}}\overline{\bigwedge}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{k}}\right)&=\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}\overline{\bigwedge}\left((-1)^{\langle\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{j}\vee\boldsymbol{k}}\right)\\&=(-1)^{\langle\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}\overline{\bigwedge}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{j}\vee\boldsymbol{k}}\\&=(-1)^{\langle\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle+\langle\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\vee\boldsymbol{k}\rangle}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}\vee(\boldsymbol{j}\vee\boldsymbol{k})}\\&=(-1)^{\langle\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\rangle}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}\vee\boldsymbol{j}\vee\boldsymbol{k}}\end{aligned}$$

因此性质 2) 成立.

现在证明性质 3)，即证明

$$\mathrm{d}x_{\boldsymbol{j}}\overline{\bigwedge}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}=(-1)^{|\boldsymbol{i}||\boldsymbol{j}|}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}\overline{\bigwedge}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{j}}.$$

这里设 $\boldsymbol{i}\in G_k,\boldsymbol{j}\in G_m,|\boldsymbol{i}|=k,|\boldsymbol{j}|=m$.

若 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{j}$ 相交，则此等式显然成立，

若 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{j}$ 不相交，则由于

$$\mathrm{d}x_{\boldsymbol{j}}\overline{\bigwedge}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}=(-1)^{\langle\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}\rangle}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}\vee\boldsymbol{j}},$$

$$\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}\overline{\bigwedge}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{j}}=(-1)^{\langle\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\rangle}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}\vee\boldsymbol{j}},$$

故要证明的等式为

$$(-1)^{\langle \boldsymbol{j},\boldsymbol{i}\rangle}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}\vee\boldsymbol{j}} = (-1)^{|\boldsymbol{i}||\boldsymbol{j}|+\langle \boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\rangle}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}\vee\boldsymbol{j}}.$$

由此可知，我们只需证明

$$(|\boldsymbol{i}||\boldsymbol{j}| + \langle \boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\rangle) \bmod 2 = \langle \boldsymbol{j},\boldsymbol{i}\rangle.$$

(详细证明过程留给读者) 这个等式表明：从 $(\boldsymbol{j},\boldsymbol{i})$ 变换为 $\boldsymbol{i}\vee\boldsymbol{j}$ 的逆序数 $\langle \boldsymbol{j},\boldsymbol{i}\rangle$ 与首先从 $(\boldsymbol{j},\boldsymbol{i})$ 变换为 $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$ 的置换次数 $|\boldsymbol{i}||\boldsymbol{j}|$ 加上从 $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$ 变换为 $\boldsymbol{i}\vee\boldsymbol{j}$ 的逆序数 $\langle \boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\rangle$ 之和是模 2 同余的.

最后性质 4) 是显然的.

注

1) 此性质表明映射 $\overline{\wedge}$ 满足结合律 (它有单位元 1，但不是可交换的)，因此 $(\bigwedge(\mathbb{R}^n), \overline{\wedge})$ 形成一个代数.

2) 若我们取 $\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, \cdots, i_k), \boldsymbol{j} = (j_1, j_2, \cdots, j_m)$ 并且

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k < j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leqslant n.$$

则 $\boldsymbol{i}\vee\boldsymbol{j} = (i_1, i_2, \cdots, i_k, j_1, j_2, \cdots, j_m), \langle \boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\rangle = 0$，从而

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}\overline{\wedge}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{j}} &= (-1)^{\langle \boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\rangle}\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}\vee\boldsymbol{j}} = \mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}\vee\boldsymbol{j}}\\ &= \mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_m}.\end{aligned}$$

因此今后我们就改记 $\overline{\wedge}$ 为 $\wedge$.

定义 17.2

如上定义的双线性映射 $\wedge : \bigwedge(\mathbb{R}^n)\times\bigwedge(\mathbb{R}^n)\to\bigwedge(\mathbb{R}^n)$ 称为 $\bigwedge(\mathbb{R}^n)$ 的外积，$(\bigwedge(\mathbb{R}^n), \wedge)$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 上的外代数，通常简称 $\bigwedge(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的外代数或 Grassmann 代数．$f\in\bigwedge_k(\mathbb{R}^n)$ 称为一个 k-形式.

由 $\bigwedge(\mathbb{R}^n)$ 的定义可知，$\bigwedge(\mathbb{R}^n)$ 中的任一元素 f 具有下述一般形式：

$$f = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\boldsymbol{i}\in G_k} c_{\boldsymbol{i}}\,\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}}\ (c_{\boldsymbol{i}}\in\mathbb{R}).$$

特别地，若 $f\in\bigwedge_k(\mathbb{R}^n)$ ，则

$$f = \sum_{\boldsymbol{i}\in G_k} c_{\boldsymbol{i}}\,\mathrm{d}x_{\boldsymbol{i}} = \sum_{\boldsymbol{i}\in G_k} c_{\boldsymbol{i}}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}.$$

下面我们特别来看一看具体的外代数 $\bigwedge(\mathbb{R}^2)$ 与 $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$.

例题 17.4 外代数 $\bigwedge(\mathbb{R}^2) = \bigoplus_{k=0}^{2}\bigwedge_k(\mathbb{R}^2)$.

$\bigwedge_1(\mathbb{R}^2)$ ：它有基 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$. $\forall f, g\in\bigwedge_1(\mathbb{R}^2)$,

$$f = \alpha\mathrm{d}x + \beta\mathrm{d}y, g = \gamma\mathrm{d}x + \delta\mathrm{d}y(\alpha, \beta, \gamma, \delta\in\mathbb{R}).$$

由于

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x = 0, \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}y = 0, \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x = -\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

故

$$
\begin{aligned}
f \wedge f &= g \wedge g = 0 \\
f \wedge g &= (\alpha \mathrm{d}x + \beta \mathrm{d}y) \wedge (\gamma \mathrm{d}x + \delta \mathrm{d}y) \\
&= \alpha\gamma \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x + \alpha\delta \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \beta\gamma \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \beta\delta \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y \\
&= (\alpha\delta - \beta\gamma) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

$\bigwedge_2(\mathbb{R}^2)$：它有基 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. 于是

$$\forall h \in \bigwedge_2(\mathbb{R}^2), h = a \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

因此 $f \wedge g \in \bigwedge_2(\mathbb{R}^2)$.

例题 17.5 外代数 $\bigwedge(\mathbb{R}^3) = \bigoplus_{k=0}^{3} \bigwedge_k(\mathbb{R}^3)$.

$\bigwedge_1(\mathbb{R}^3)$：它有基 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$.

$\bigwedge_2(\mathbb{R}^3)$：它有基 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$.

$\bigwedge_3(\mathbb{R}^3)$：它有基 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.

因此若 $f, g \in \bigwedge_1(\mathbb{R}^3), h \in \bigwedge_2(\mathbb{R}^3), k \in \bigwedge_3(\mathbb{R}^3)$，则

$$
\begin{aligned}
f &= a \mathrm{d}x + b \mathrm{d}y + c \mathrm{d}z, g = \alpha \mathrm{d}x + \beta \mathrm{d}y + \gamma \mathrm{d}z, \\
h &= \lambda \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mu \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \xi \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x, \\
k &= \eta \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
f \wedge g =& (a \mathrm{d}x + b \mathrm{d}y + c \mathrm{d}z) \wedge (\alpha \mathrm{d}x + \beta \mathrm{d}y + \gamma \mathrm{d}z) \\
=& a\alpha \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x + a\beta \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + a\gamma \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + b\alpha \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \\
&+ b\beta \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y + b\gamma \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + c\alpha \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\
&+ c\beta \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y + c\gamma \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z \\
=& (a\beta - b\alpha) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + (b\gamma - c\beta) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (c\alpha - a\gamma) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\
f \wedge h =& (a \mathrm{d}x + b \mathrm{d}y + c \mathrm{d}z) \wedge (\lambda \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mu \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \xi \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x) \\
=& a\lambda \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + a\mu \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + a\xi \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\
&+ b\lambda \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + b\mu \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&+ b\xi \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + c\lambda \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&+ c\mu \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + c\xi \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\
=& (a\mu + b\xi + c\lambda) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

于是 $f \wedge g \in \bigwedge_2(\mathbb{R}^3), f \wedge h \in \bigwedge_3(\mathbb{R}^3)$.

显然，我们有

$$f \wedge f = g \wedge g = 0, h \wedge h = 0, k \wedge k = 0, f \wedge k = 0, h \wedge k = 0.$$

例题 17.6 设 $f=\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4\in\bigwedge\left(\mathbb{R}^4\right)$. 则

$$\begin{aligned}
f\wedge f=&(\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4)\wedge(\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4)\\
=&\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4\\
&+\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4\\
=&\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4+\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4\\
=&2\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4
\end{aligned}$$

3. 外代数的提升

设 $f\in\bigwedge\left(\mathbb{R}^m\right).T\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right)$ 是任一线性映射. 假设 T 在 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$ 的标准正规正交基下的矩阵为

$$\mathbb{M}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

$\forall\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，若令 $T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)\in\mathbb{R}^m$，则

$$y_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n(i=1,2,\cdots,m).$$

从而

$$\mathrm{d}y_i=a_{i1}\mathrm{d}x_1+a_{i2}\mathrm{d}x_2+\cdots+a_{in}\mathrm{d}x_n(i=1,2,\cdots,m).$$

现在设 $f\in\bigwedge\left(\mathbb{R}^m\right)$ 的表达式为

$$f=\sum_{k=0}^{m}\sum_{\boldsymbol{i}\in G_k}c_{\boldsymbol{i}}\mathrm{d}y_{i_1}\wedge\mathrm{d}y_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_{i_k}.$$

将 $\mathrm{d}y_{i_l}=a_{i_l1}\mathrm{d}x_1+a_{i_l2}\mathrm{d}x_2+\cdots+a_{i_ln}\mathrm{d}x_n$ 代入上式的右端得到

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{\boldsymbol{i}\in G_k}c_{\boldsymbol{i}}\left(\sum_{s=1}^{n}a_{i_1s}\mathrm{d}x_s\right)\wedge\left(\sum_{s=1}^{n}a_{i_2s}\mathrm{d}x_s\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{s=1}^{n}a_{i_ks}\mathrm{d}x_s\right)$$

利用外积的性质将为 0 的项删去，对非零项的脚标重新按上升次序排列后，我们将得到 $\bigwedge\left(\mathbb{R}^n\right)$ 中的一个元素.

定义 17.3

设映射 $T^*:\bigwedge\left(\mathbb{R}^m\right)\to\bigwedge\left(\mathbb{R}^n\right)$ 定义如下：

$$\forall f=\sum_{k=0}^{m}\sum_{\boldsymbol{i}\in G_k}c_{\boldsymbol{i}}\mathrm{d}y_{i_1}\wedge\mathrm{d}y_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_{i_k}$$

$$T^*f=\sum_{k=0}^{m}\sum_{\boldsymbol{i}\in G_k}c_{\boldsymbol{i}}\left(\sum_{s=1}^{n}a_{i_1s}\mathrm{d}x_s\right)\wedge\left(\sum_{s=1}^{n}a_{i_2s}\mathrm{d}x_s\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{s=1}^{n}a_{i_ks}\mathrm{d}x_s\right),$$

则映射 T^* 称为映射 T 的提升，而 T^*f 称为 f 关于 T 的提升. ♣

例题 17.7 设 $f = \mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}y_2 + 2\mathrm{d}y_2 \wedge \mathrm{d}y_3$. $T \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\right)$ 的矩阵

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

计算 f 关于 T 的提升 $T^* f$.

这时我们有:

$$\mathrm{d}y_1 = \mathrm{d}x_1,$$
$$\mathrm{d}y_2 = -\mathrm{d}x_2,$$
$$\mathrm{d}y_3 = 2\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2.$$

因此

$$\begin{aligned} T^* f &= \mathrm{d}x_1 \wedge (-\mathrm{d}x_2) + 2(-\mathrm{d}x_2) \wedge (2\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2) \\ &= -\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 - 4\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 - 2\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_2 \\ &= 3\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \end{aligned}$$

关于映射 T^* 的性质，我们有下述定理.

定理 17.2

$\forall T \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right), S \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p\right)$,

1)$T^* : \bigwedge\left(\mathbb{R}^m\right) \to \bigwedge\left(\mathbb{R}^n\right)$ 是线性映射.

2)$\forall f, g \in \bigwedge\left(\mathbb{R}^m\right), T^*(f \wedge g) = T^* f \wedge T^* g$.

3)$\forall f \in \bigwedge\left(\mathbb{R}^p\right), (S \circ T)^* f = T^*\left(S^* f\right)$.

证明 1) 由 T^* 的定义可知，T^* 是线性的.

2) 由 T^* 的线性性可知，我们只需证明，$\forall \mathrm{d}y_{\boldsymbol{i}}, \mathrm{d}y_{\boldsymbol{j}} \in \bigwedge\left(\mathbb{R}^m\right)$,

$$T^*\left(\mathrm{d}y_{\boldsymbol{i}} \wedge \mathrm{d}y_{\boldsymbol{j}}\right) = T^*\left(\mathrm{d}y_{\boldsymbol{i}}\right) \wedge T^*\left(\mathrm{d}y_{\boldsymbol{j}}\right)$$

这由 T^* 的定义知是显然的.

3) 同理由 T^* 与 S^* 的线性性，我们只需证明

$$\forall \mathrm{d}z_{\boldsymbol{l}} \in \bigwedge\left(\mathbb{R}^p\right), (S \circ T)^* \mathrm{d}z_{\boldsymbol{l}} = T^*\left(S^* \mathrm{d}z_{\boldsymbol{l}}\right).$$

为此设 $\mathrm{d}z_{\boldsymbol{l}} = \mathrm{d}z_{l_1} \wedge \mathrm{d}z_{l_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_{l_h}$.

$$\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$S(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{z} = \left(z_1, z_2, \cdots, z_p\right) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

则

$$\mathrm{d}y_j = a_{j1}\mathrm{d}x_1 + a_{j2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + a_{jn}\mathrm{d}x_n (j = 1, 2, \cdots, m),$$
$$\mathrm{d}z_s = b_{s1}\mathrm{d}y_1 + b_{s2}\mathrm{d}y_2 + \cdots + b_{sm}\mathrm{d}y_m (s = 1, 2, \cdots, p).$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z_s &= b_{s1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\mathrm{d}x_i\right) + b_{s2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{2i}\mathrm{d}x_i\right) + \cdots + b_{sm}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{mi}\mathrm{d}x_i\right)\\ &= \left(\sum_{j=1}^{m} b_{sj}a_{j1}\right)\mathrm{d}x_1 + \left(\sum_{j=1}^{m} b_{sj}a_{j2}\right)\mathrm{d}x_2 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{m} b_{sj}a_{jn}\right)\mathrm{d}x_n\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}(S\circ T)^*\mathrm{d}z_{\boldsymbol{l}} =&(S\circ T)^*\mathrm{d}z_{l_1}\wedge \mathrm{d}z_{l_2}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}z_{l_h}\\ =&\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} b_{l_1 j}a_{ji}\right)\mathrm{d}x_i\right)\wedge\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} b_{l_2 j}a_{ji}\right)\mathrm{d}x_i\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} b_{l_h j}a_{ji}\right)\mathrm{d}x_i\right)\\ =&\left(\sum_{j=1}^{m} b_{l_1 j}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\mathrm{d}x_i\right)\right)\wedge\left(\sum_{j=1}^{m} b_{l_2 j}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\mathrm{d}x_i\right)\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{j=1}^{m} b_{l_h j}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\mathrm{d}x_i\right)\right)\\ =&\left(\sum_{j=1}^{m} b_{l_1 j}T^*\mathrm{d}y_j\right)\wedge\left(\sum_{j=1}^{m} b_{l_2 j}T^*\mathrm{d}y_j\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{j=1}^{m} b_{l_h j}T^*\mathrm{d}y_j\right)\\ =&\left(T^*\left(\sum_{j=1}^{m} b_{l_1 j}\mathrm{d}y_j\right)\right)\wedge\left(T^*\left(\sum_{j=1}^{m} b_{l_2 j}\mathrm{d}y_j\right)\right)\wedge\cdots\wedge\left(T^*\left(\sum_{j=1}^{m} b_{l_h j}\mathrm{d}y_j\right)\right)\\ =&T^*\left(\left(\sum_{j=1}^{m} b_{l_1 j}\mathrm{d}y_j\right)\wedge\left(\sum_{j=1}^{m} b_{l_2 j}\mathrm{d}y_j\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{j=1}^{m} b_{l_h j}\mathrm{d}y_j\right)\right)\\ =&T^*\left(S^*\mathrm{d}z_{\boldsymbol{l}}\right).\end{aligned}$$

例题 17.8 设 $f = \mathrm{d}z_1\wedge \mathrm{d}z_2 - \mathrm{d}z_3\wedge \mathrm{d}z_4 \in \bigwedge_2\left(\mathbb{R}^4\right)$. 线性映射 $T\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3\right)$ 与 $S\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^4\right)$ 的矩阵分别为：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

试直接验证 $(S\circ T)^* f = T^*\left(S^* f\right)$.

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\\ 0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

是线性映射 $S \circ T$ 的矩阵. 从而

$$(\mathrm{d}z_1, \mathrm{d}z_2, \mathrm{d}z_3, \mathrm{d}z_4)^\top = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{d}z_1, \mathrm{d}z_2, \mathrm{d}z_3, \mathrm{d}z_4)^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}y_1 \\ \mathrm{d}y_2 \\ \mathrm{d}y_3 \end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{d}y_1, \mathrm{d}y_2, \mathrm{d}y_3)^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}z_1 = 2\mathrm{d}x_1 + 3\mathrm{d}x_2, \mathrm{d}z_2 = \mathrm{d}x_1 + 3\mathrm{d}x_2, \mathrm{d}z_3 = -\mathrm{d}x_2, \mathrm{d}z_4 = \mathrm{d}x_1 + 2\mathrm{d}x_2, \\ &\mathrm{d}z_1 = \mathrm{d}y_1 + \mathrm{d}y_3, \mathrm{d}z_2 = \mathrm{d}y_2 + \mathrm{d}y_3, \mathrm{d}z_3 = \mathrm{d}y_1 - \mathrm{d}y_3, \mathrm{d}z_4 = \mathrm{d}y_1 + \mathrm{d}y_2, \\ &\mathrm{d}y_1 = \mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}y_2 = \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}y_3 = \mathrm{d}x_1 + 2\mathrm{d}x_2. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} (S \circ T)^* f &= (2\mathrm{d}x_1 + 3\mathrm{d}x_2) \wedge (\mathrm{d}x_1 + 3\mathrm{d}x_2) + \mathrm{d}x_2 \wedge (\mathrm{d}x_1 + 2\mathrm{d}x_2) \\ &= 6\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + 3\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 \\ &= 2\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2, \\ S^* f &= (\mathrm{d}y_1 + \mathrm{d}y_3) \wedge (\mathrm{d}y_2 + \mathrm{d}y_3) - (\mathrm{d}y_1 - \mathrm{d}y_3) \wedge (\mathrm{d}y_1 + \mathrm{d}y_2) \\ &= \mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}y_2 + \mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}y_3 + \mathrm{d}y_3 \wedge \mathrm{d}y_2 - \mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}y_2 + \mathrm{d}y_3 \wedge \mathrm{d}y_1 + \mathrm{d}y_3 \wedge \mathrm{d}y_2 \\ &= -2\mathrm{d}y_2 \wedge \mathrm{d}y_3 \\ T^*\left(S^* f\right) &= -2\mathrm{d}x_2 \wedge (\mathrm{d}x_1 + 2\mathrm{d}x_2) \\ &= -2\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 \\ &= 2\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \end{aligned}$$

因此

$$(S \circ T)^* f = T^*(S^* f) = 2\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$$

习题 17.1

1. 考虑外代数 $\bigwedge\left(\mathbb{R}^3\right)$,

   1) 证明如下定义的线性映射 $T : \mathbb{R}^3 \to \bigwedge_1\left(\mathbb{R}^3\right)$,

   $$\boldsymbol{e}_i \to \mathrm{d}x_i \ (i = 1, 2, 3)$$

   是一个同构, 这个映射通常记为 $^{b} : \mathbb{R}^3 \to \bigwedge_1\left(\mathbb{R}^3\right)$:

   $$^{b}(\boldsymbol{e}_i) = \mathrm{d}x_i \ (i = 1, 2, 3) \left(\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^3, \mathrm{d}x_i \in \bigwedge_1\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$$

2) 证明如下定义的映射 $S:\bigwedge_1(\mathbb{R}^3)\to\bigwedge_2(\mathbb{R}^3)$,

$$dx\mapsto dy\wedge dz,\ dy\mapsto dz\wedge dx,\ dz\mapsto dx\wedge dy$$

也是一个同构, 这个同构通常记为 $*:\bigwedge_1(\mathbb{R}^3)\to\bigwedge_2(\mathbb{R}^3)$, 称为 Hodge 星形算子.

3) $\forall\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\in\mathbb{R}^3$, 令

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\boldsymbol{e}_1+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\boldsymbol{e}_2+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\boldsymbol{e}_3$$

称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的叉积, 证明

$$\left(*\circ^b\right)(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})={}^b(\boldsymbol{\alpha})\wedge{}^b(\boldsymbol{\beta})$$

2. 设 $\alpha=dx-dy+dz\in\bigwedge_1(\mathbb{R}^3),\beta=2dx\wedge dz-dy\wedge dz\in\bigwedge_2(\mathbb{R}^3)$, 试计算

$$\alpha\wedge\alpha,\beta\wedge\beta,\alpha\wedge\beta,\alpha\wedge\beta\wedge\alpha,\beta\wedge\alpha\wedge\beta.$$

3. 设 $f=\mathrm{d}y_1\wedge\mathrm{d}y_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_n\in\bigwedge_n(\mathbb{R}^n)$. 证明对任一坐标变换 $y=Ax$, 这里 $|A|=1$,

$$f=\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$$

4. 设 $f_1,f_2,\cdots,f_p$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的 $p\ (0<p<n)$ 个线性形式. 我们称 $f_1,f_2,\cdots,f_p$ 是线性无关的, 如果

$$a_1f_1+a_2f_2+\cdots+a_pf_p=0\to a_1=a_2=\cdots=a_p=0.$$

1) 证明: $f_1,f_2,\cdots,f_p$ 是线性相关的, 当且仅当 $f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_p=0$.

2) 设 $f_1,f_2,\cdots,f_p$ 是线性无关的, $g_1,g_2,\cdots,g_p$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 p 个线性形式使得

$$\sum_{i=1}^p f_i\wedge g_i=0.$$

证明: 存在实数 $a_{ij}\ (1\leqslant i\leqslant p,1\leqslant j\leqslant p)$ 使得 $\forall i=1,2,\cdots,p$,

$$g_i=\sum_{j=1}^p a_{ij}f_j,$$

并且 $a_{ij}=a_{ji}\ (1\leqslant i\leqslant p,1\leqslant j\leqslant p)$.

5. 设 ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 2-形式:

$$\omega=\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+dx_3\wedge dx_4+\cdots+dx_{2p-1}\wedge dx_{2p}\ (2p\leqslant n).$$

1) 计算 $\omega^p=\underbrace{\omega\wedge\omega\wedge\cdots\wedge\omega}_{p\text{个}}$.

2) 证明: $\omega^{p+1}=0$.

6. 设 $a_i\in\bigwedge_1(\mathbb{R}^5)\ (i=1,2,3,4,5)$, 令

$$\alpha=2a_1\wedge a_3+a_2\wedge a_5-3a_1\wedge a_4$$
$$\beta=a_2\wedge a_3\wedge a_5+2a_1\wedge a_3\wedge a_4$$

1) 计算 $\alpha\wedge\alpha,\alpha\wedge\beta$.

2) 设 $T\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^5)$ 在标准正交基底下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&2&1\\1&0&-1&0&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

计算 $T^*\alpha,T^*\beta,T^*(\alpha\wedge\beta)$.

7. 设映射 $\alpha : \bigwedge_{n-1}(\mathbb{R}^n) \to \bigwedge_1(\mathbb{R}^n)$ 定义如下：

$\forall \mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}y_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n(\widehat{\mathrm{d}y_i}$ 表示 $\mathrm{d}y_i$ 空缺$), \alpha\left(\mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}y_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n\right) = (-1)^{i-1}\mathrm{d}y_i$.

证明：若 $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ 且 $\det T = 1$，T 为正交变换，则

$$\begin{array}{ccc}
\bigwedge_{n-1}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\alpha} & \bigwedge_1(\mathbb{R}^n) \\
{\scriptstyle T^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle T^*} \\
\bigwedge_{n-1}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow[\alpha']{} & \bigwedge_1(\mathbb{R}^n)
\end{array}$$

这里 α' 是在新坐标 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 下与 α 类似定义的映射. 为此,

1) 证明：$\forall f \in \bigwedge_1(\mathbb{R}^n), \forall g \in \bigwedge_{n-1}(\mathbb{R}^n)$,

$$f \wedge g = \alpha g \cdot f\, \mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}y_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n.$$

这里 $\alpha g \cdot f$ 表示 αg 与 f 的内积.

2) 证明：$\alpha'(T^*g) \cdot (T^*f) = \alpha g \cdot f$.

3) 由此导出 $\alpha'(T^*g) = T^*(\alpha g)$.

17.2 微分形式

1. 微分形式的定义

定义 17.4

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是任一开集.

1)U 上的一个微分形式就是一个映射 $\omega : U \to \bigwedge(\mathbb{R}^n)$，于是

$$\forall \boldsymbol{x} \in U, \omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i \in G_k} c_i(x)\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k},$$

这里 $c_i : U \to \mathbb{R}$ 是一个依赖于 ω 的函数，称为微分形式 ω 的系数函数.

我们用 $\Omega(U)$ 表示 U 上的所有微分形式组成的集合.

2) 设 ω 是 U 上的一个微分形式. 若 $\omega(U) \subset \bigwedge_k(\mathbb{R}^n)$，则我们称 ω 是一个 k-微分形式. 于是

$$\forall \boldsymbol{x} \in U, \omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in c_k} c_i(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}.$$

我们用 $\Omega_k(U)$ 表示 U 上的所有 k-微分形式组成的集合.

♣

注 由微分形式的定义及外代数 $\bigwedge(\mathbb{R}^n)$ 的性质可知，若 $k > n$，则 $\Omega_k(U) = \{0\}$.

若 $k = 0$，则 $\Omega_0(U)$ 就是所有定义在 U 上的实值函数的集合.

定义 17.5

设 ω 是 U 上的任一微分形式，我们称 ω 在 U 上是 $C^p(p \geqslant 0)$ 类的，如果 ω 的系数函数 $c_i : U \to \mathbb{R}\,(i \in G_k, k = 0, 1, \cdots, n)$ 在 U 上是 C^p 类的.

♣

例题 17.9 如下定义的各微分形式 $\omega_i (i=1,2,3)$

$$\omega_1(x)=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2},(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$$

$$\omega_2(x)=x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;$$

$$\omega_3(x)=r\sin\theta\cos\varphi\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi(r,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$$

是在各自定义域上 C^∞ 类的 1-微分形式、2-微分形式与 3-微分形式.

例题 17.10 设 $f:U\to\mathbb{R}$ 是任一可微映射，由于

$$\forall x\in U,\mathrm{d}f(x)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\mathrm{d}x_n$$

故 $\mathrm{d}f(x)\in\bigwedge_1\left(\mathbb{R}^n\right)$，从而 f 的微分映射 $\mathrm{d}f$ 是 U 上的一个 1-微分形式.

因此微分形式是微分映射概念的推广.

2. 外微分形式代数

首先我们在 $\Omega(U)$ 上定义加法与数乘运算如下：

$\forall\omega,\widetilde{\omega}\in\Omega(U).\forall\alpha\in\mathbb{R}$, 令

$$\omega=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i\in G_k}c_i\mathrm{d}x_i,\widetilde{\omega}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i\in G_k}\widetilde{c}_i\mathrm{d}x_i,$$

则

$$\omega+\widetilde{\omega}\triangleq\sum_{k=0}^{n}\sum_{i\in G_k}\left(c_i+\widetilde{c_i}\right)\mathrm{d}x_i$$

$$\alpha\omega\triangleq\sum_{k=0}^{n}\sum_{i\in G_k}\left(\alpha c_i\right)\mathrm{d}x_i$$

于是 $\Omega(U)$ 关于这两个运算形成一个 $\mathbb{R}$-向量空间.

下面我们来定义一个映射 $\wedge$：$\Omega(U)\times\Omega(U)\to\Omega(U)$ 如下：

$$\forall\omega=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i\in G_k}c_i\mathrm{d}x_i,\widetilde{\omega}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i\in G_k}\widetilde{c}_i\mathrm{d}x_i\in\Omega(U),$$

$$\omega\wedge\widetilde{\omega}=\theta\in\Omega(U)\Leftrightarrow\forall x\in U,\theta(x)=\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{i\in G_k}c_i(x)\mathrm{d}x_i\right)\wedge\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{i\in G_k}\widetilde{c}_i(x)\mathrm{d}x_i\right).$$

根据外代数 $\bigwedge\left(\mathbb{R}^n\right)$ 上的外积的双线性性可知，上述映射 $\wedge:\Omega(U)\times\Omega(U)\to\Omega(U)$ 是双线性的. 并且满足结合律：

$$\forall\omega,\widetilde{\omega},\widetilde{\widetilde{\omega}}\in\Omega(U),(\omega,\widetilde{\omega})\wedge\widetilde{\widetilde{\omega}}=\omega\wedge(\widetilde{\omega}\wedge\widetilde{\widetilde{\omega}}).$$

因此 $(\Omega(U),\wedge)$ 形成一个代数.

定义 17.6

代数 $(\Omega(U),\wedge)$ 称为外微分形式代数. 或简称 $\Omega(U)$ 为外微分形式代数，$\wedge$ 称为 $Q(U)$ 上的外积.

由外代数 $\bigwedge\left(\mathbb{R}^n\right)$ 上的外积 $\wedge$ 的性质可直接推出 $\Omega(U)$ 上的外积的下述性质.

定理 17.3

$\forall \omega, \widetilde{\omega} \in \Omega(U), \forall f: U \to \mathbb{R}$,

1)$(f\omega) \wedge \widetilde{\omega} = \omega \wedge (f\widetilde{\omega}) = f(\omega \wedge \widetilde{\omega})$.

2) 若 $\omega \in \Omega_k(U), \widetilde{\omega} \in \Omega_m(U)$，则 $\omega \wedge \widetilde{\omega} = (-1)^{km}\widetilde{\omega} \wedge \omega$.

此定理的证明我们留给读者.

例题 17.11 设 $\omega = y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$，

$$\widetilde{\omega} = x^2\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

则

$$\begin{aligned}\omega \wedge \widetilde{\omega} =& (y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y) \wedge \left(x^2\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\right)\\ =& x^2y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + yz^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\\ & - x^8\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - xy^2\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x - xz^2\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\\ =& \left(x^2y - xy^2\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\end{aligned}$$

3. 微分形式的提升

设 $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ 是两个开集，$f: U \to V$ 是任一 C^p 类映射. 于是 $\forall x \in U, \mathrm{d}f(x) \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$.

定义 17.7

设映射 $f^*: \Omega(V) \to \Omega(U)$ 定义如下：

$$\forall \omega \in \Omega(V), f^*(\omega) \in \Omega(U) \Leftrightarrow \forall x \in U, f^*(\omega)(x) = (\mathrm{d}f(x))^*(\omega) \in \bigwedge\left(\mathbb{R}^n\right).$$

映射 f^* 称为 f 的提升，$f^*(\omega)$ 称为微分形式 ω 关于 f 的提升.

实际求 $f^*(\omega)$ 的方法是这样的：

设 $\omega = \sum\limits_{i \in G_k} c\mathrm{d}y_i \in \Omega_k(V)$，于是

$$\forall y \in V, \omega(y) = \sum_{i \in G_k} c_i(y)\mathrm{d}y_{i_1} \wedge \mathrm{d}y_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{i_k}.$$

现在设 $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$，则

$$\mathrm{d}y_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n (i = 1, 2, \cdots, m).$$

因此 ω 关于 f 的提升 $f^*(\omega)$ 为：

$$\forall x \in U, f^*(\omega)(x) = \sum_{i \in t_k} c_i(f(x))\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_j}(x)\mathrm{d}x_j\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\mathrm{d}x_j\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\mathrm{d}x_j\right).$$

例题 17.12 设 $f: U \to V$ 是任一 C^1 类映射，ω 是 V 上的任一 0-微分形式，则

$$\forall x \in U, f^*(\omega)(x) = \omega(f(x)) = (\omega \circ f)(x),$$

从而

$$f^*(\omega) = \omega \circ f$$

例题 17.13 设 $f: U \to V$ 是任一 C^1 类映射，$g: V \to \mathbb{R}$ 是任一 C^1 类函数. 于是 $\omega = \mathrm{d}g$ 是 V 上的

1-微分形式，并且

$$dg = \frac{\partial g}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial g}{\partial y_2}dy_2 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_m}dy_m.$$

从而 ω 关于 f 的提升 $f^*(\omega)$ 为：

$$\begin{aligned}\forall x \in U, f^*(\omega)(x) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(x)) \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) dx_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(x)) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right) dx_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(x) dx_j \\ &= d(g \circ f)(x),\end{aligned}$$

因此

$$f^*(\omega) = d(g \circ f).$$

例题 17.14 设 ω 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 1-微分形式，它定义为：

$$\omega(x, y) = x dy + y dx, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

φ $[0,\ 2] \to \mathbb{R}^2$ 是如下定义的 C^1 类映射：

$$\forall t \in [0, 2], \varphi(t) = \left(t, t^2\right).$$

则 ω 关于 φ 的提升 $\varphi^*(\omega)$ 为：

$$\forall t \in [0, 2], \varphi^*(\omega)(t) = t d\left(t^2\right) + t^2 d(t) = 3t^2 dt$$

例题 17.15 设 ω 是如下定义的 $\mathbb{R}^3$ 上 3-微分形式：

$$\omega = dx \wedge dy \wedge dz.$$

映射 $f : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ 定义为：

$$\forall (r, \theta, \varphi) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi], f(r, \theta, \varphi) = (r \sin\varphi \cos\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\varphi).$$

由于

$$\begin{aligned}dx &= d(r \sin\varphi \cos\theta) = \sin\varphi \cos\theta dr - r \sin\varphi \sin\theta d\theta + r \cos\varphi \cos\theta d\varphi \\ dy &= d(r \sin\varphi \sin\theta) = \sin\varphi \sin\theta dr + r \sin\varphi \cos\theta d\theta + r \cos\varphi \sin\theta d\varphi \\ dz &= \cos\varphi dr - r \sin\varphi d\varphi,\end{aligned}$$

故 ω 关于 f 的提升 $f^*(\omega)$ 为:

$$\begin{aligned}
&\forall(r,\theta,\varphi)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi],\\
&f^*(\omega)(r,\theta,\varphi)\\
=&(\sin\varphi\cos\theta\mathrm{d}r-r\sin\varphi\sin\theta\mathrm{d}\theta+r\cos\varphi\cos\theta\mathrm{d}\varphi)\wedge(\sin\varphi\sin\theta\mathrm{d}r+r\sin\varphi\cos\theta\mathrm{d}\theta+r\cos\varphi\sin\theta\mathrm{d}\varphi)\\
&\wedge(\cos\varphi\mathrm{d}r-r\sin\varphi\mathrm{d}\varphi)\\
=&(-r\sin\varphi\sin\theta)(r\cos\varphi\sin\theta)\cos\varphi\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}r+(r\cos\varphi\cos\theta)(r\sin\varphi\cos\theta)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}r\\
&+(\sin\varphi\cos\theta)(r\sin\varphi\cos\theta)(-r\sin\varphi)\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi+(-r\sin\varphi\sin\theta)(\sin\varphi\sin\theta)(-r\sin\varphi)\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\varphi\\
=&\left(-r^2\sin\varphi\cos^2\varphi\sin^2\theta-r^2\sin\varphi\cos^2\varphi\cos^2\theta-r^2\sin\varphi\sin^2\varphi\cos^2\theta-r^2\sin\varphi\sin^2\varphi\sin^2\theta\right)\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi\\
=&-\left(r^2\sin\varphi\cos^2\varphi+r^2\sin\varphi\sin^2\varphi\right)\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi\\
=&-r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi.
\end{aligned}$$

关于映射 f 的提升 f^* 的性质，可用下述定理来描述

定理 17.4

设 $f:U\to V$ 是任一 C^1 类映射，则

1) $f^*:\Omega(V)\to\Omega(U)$ 是线性映射.

2) $\forall\omega,\widetilde{\omega}\in\Omega(V), f^*(\omega\wedge\widetilde{\omega})=f^*(\omega)\wedge f^*(\widetilde{\omega})$.

3) 若 $g:V\to W\left(\subset\mathbb{R}^k\right)$ 是另一 C^1 类映射，则 $\forall\omega\in\Omega(W)$，$(g\circ f)^*(\omega)=f^*\left(g^*(\omega)\right)$.

证明 此定理可直接由提升 f^* 的定义及定理17.2推出.

例题 17.16 设 $\omega\in\Omega_2\left(\mathbb{R}^3\right)$ 定义如下:

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\omega(x,y)=y\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z.$$

映射 $f:[0,2\pi]\times[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$ 与 $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 定义为:

$$\forall(0,\varphi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi], f(\theta,\varphi)=(\cos\theta\cos\varphi,\sin\theta\cos\varphi),$$

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, g(x,y)=\left(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}\right).$$

试直接验证 $(g\circ f)^*(\omega)=f^*\left(g^*(\omega)\right)$.

由 g 与 f 的定义知,

$$\forall(\theta,\varphi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi],(x,y,z)=g\circ f(\theta,\varphi)=(\cos\theta\cos\varphi,\sin\theta\cos\varphi,\sin\varphi).$$

于是

$$x=\cos\theta\cos\varphi, y=\sin\theta\cos\varphi, z=\sin\varphi$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x&=-\sin\theta\cos\varphi\mathrm{d}\theta-\cos\theta\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\
\mathrm{d}y&=\cos\theta\cos\varphi\mathrm{d}\theta-\sin\theta\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\
\mathrm{d}z&=\cos\varphi\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

由此计算得到

$$\begin{aligned}
(g\circ f)^*(\omega)&=\sin\theta\cos\varphi(-\sin\theta\cos\varphi\mathrm{d}\theta-\cos\theta\sin\varphi\mathrm{d}\varphi)\wedge(\cos\varphi\mathrm{d}\varphi)\\
&=\sin^2\theta\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

另一方面，对映射 g，我们有

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,(x,y,z)=g(x,y)=\left(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}\right),$$

于是

$$x=x,y=y,z=\sqrt{1-x^2-y^2}\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right).$$

从而

$$\mathrm{d}z=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}y$$

因此

$$\begin{aligned}g^*(\omega)&=y\mathrm{d}x\wedge\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}y\right)\\&=-\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}f^*\left(g^*(\omega)\right)&=-\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\sin\varphi}(-\sin\theta\cos\varphi\mathrm{d}\theta-\cos\theta\sin\varphi\mathrm{d}\varphi)\wedge(\cos\theta\cos\varphi\mathrm{d}\theta-\sin\theta\sin\varphi\mathrm{d}\varphi)\\&=-\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\left(\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi-\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta\right)\\&=-\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\left(\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi+\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\right)\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi\\&=-\sin^2\theta\cos^3\varphi\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi\\&=\sin^2\theta\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

因此

$$(g\circ f)^*(\omega)=f^*\left(g^*(\omega)\right)=\sin^2\theta\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta$$

习题 17.2

1. 设 $f_i:U\left(\subset\mathbb{R}^5\right)\to\mathbb{R}\ (i=1,2,3,4)$ 是任意 4 个函数，2-微分形式 $\omega\in\Omega_2\left(\mathbb{R}^5\right)$ 定义如下：

$$\omega=f_1\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+f_2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+f_3\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}u+f_4\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v.$$

试计算 $\omega\wedge\omega$.

2. 设 $\omega_1,\omega_2\in\Omega_2\left(\mathbb{R}^4\right)$ 定义如下：

$$\begin{aligned}\omega_1&=yz\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+zx\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+yt\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}t\\\omega_2&=x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+t^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}t\end{aligned}$$

试计算 $\omega_1\wedge\omega_1,\omega_1\wedge\omega_2,\omega_2\wedge\omega_2$.

3. 设映射 $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 定义为：

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,f(x,y,z)=\frac{xyz}{x^2+y^2+1},g(x,y,z)=\frac{x+y+z}{1+x^2y^2z^2},$$

试计算 $\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}f,\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}g,\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}g$.

4. 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是任一开集，$f_i:U\to\mathbb{R}\ (i=1,2,\cdots,p)$ 是任意 p 个可微函数，

1) 证明：$\forall x \in U$，

$$\mathrm{d} f_1 \wedge \mathrm{d} f_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d} f_p(x)=\sum_{i \in G_p} \frac{D\left(f_1, f_2, \cdots, f_p\right)}{D\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_p}\right)}(x) \mathrm{d} x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d} x_{i_p}$$

2) 当 $p=n$ 时，$\mathrm{d} f_1 \wedge \mathrm{d} f_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d} f_n$ 的形式如何？

5. 设映射 $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ 定义如下：

$$\varphi(x, y, z, t)=(X, Y, Z, T) \ \left(\forall(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\right)$$

使得

$$\left(\begin{array}{cc}X & Y \\ Z & T\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ll}a & b \\ c & d\end{array}\right)\left(\begin{array}{ll}x & y \\ z & t\end{array}\right), \ a d-b c=1$$

证明：微分形式 $\mathrm{d} x \wedge \mathrm{d} z$ 关于 φ 不变，即证明

$$\mathrm{d} x \wedge \mathrm{d} z=\mathrm{d} X \wedge \mathrm{d} Z$$

6. 设映射 $\varphi: \mathbb{R}^{+} \times[0,2 \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 定义如下：

$$\forall(r, \theta) \in \mathbb{R}^{+} \times[0,2 \pi], \ \varphi(r, \theta)=(r \cos \theta, r \sin \theta) .$$

U 是包含 $\varphi\left(\mathbb{R}^{+} \times[0,2 \pi]\right)$ 的开集，$\omega_i \in \Omega_1(U)\ (i=1,2,3,4)$ 定义如下，试计算 $\varphi^*\left(\omega_i\right)$：

1) $\omega_1=\mathrm{d} x+\mathrm{d} y$,

2) $\omega_2=x \mathrm{d} x+y \mathrm{d} y$,

3) $\omega_3=\dfrac{y \mathrm{d} x+x \mathrm{d} y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$,

4) $\omega_4=\left(x^2+y^2\right) \mathrm{d} x+x y \mathrm{d} y$.

7. 设 $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 定义如下：

$$\begin{aligned} & \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x, y)=(x+y, x-y, x y), \\ & \forall(u, v, w) \in \mathbb{R}^3, \psi(u, v, w)=(u \cos v, u \sin v, w) .\end{aligned}$$

$U \subset \mathbb{R}^3$ 是包含 $\psi\left(\mathbb{R}^3\right)$ 的任一开集，$\omega_i\ (i=1,2,3,4)$ 定义如下：

$$\begin{aligned} & \omega_1=x \mathrm{d} x+y \mathrm{d} y+z \mathrm{d} z \\ & \omega_2=y z \mathrm{d} x-x z \mathrm{d} y+\left(x^2+y^2\right) \mathrm{d} z \\ & \omega_3=z \mathrm{d} x \wedge \mathrm{d} y+x \mathrm{d} x \wedge \mathrm{d} z+y \mathrm{d} y \wedge \mathrm{d} z \\ & \omega_4=x y z^2 \mathrm{d} x \wedge \mathrm{d} y+x y^2 z \mathrm{d} x \wedge \mathrm{d} z+x^2 y z \mathrm{d} y \wedge \mathrm{d} z\end{aligned}$$

试计算 $(\psi \circ \varphi)^*\left(\omega_i\right)\ (i=1,2,3,4)$，并直接验证 $(\psi \circ \varphi)^*\left(\omega_3\right)=\varphi^*\left(\psi^*\left(\omega_3\right)\right)$.

17.3 微分形式的外微分

从上一节知道，若 $f: U\left(\subset \mathbb{R}^n\right) \rightarrow \mathbb{R}$ 是 C^1 类函数，则 f 是 C^1 类的 0-微分形式，而 f 的微分映射 $\mathrm{d} f$ 是 U 上的 C^0 类的 1-微分形式. 下面我们将微分算子 d 推广到外微分形式代数 $\Omega(U)$ 的部分子集上去.

为此我们用 $\Omega^{(p)}(U)$ 表示 $\Omega(U)$ 的所有 $C^p(p \geqslant 1)$ 类的微分形式的集合.

1. 外微分算子的定义

定义 17.8

设映射 $\mathrm{d}:\Omega^{(p)}(U)\to\Omega(U)$ 定义如下：

$$\forall\omega=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i\in G_k}c_i\mathrm{d}x_i,\mathrm{d}\omega=\sum_{k=0}^{n}\sum_{k\in G_k}\mathrm{d}c_i\wedge\mathrm{d}x_i,$$

则 d 称为 $\Omega^{(p)}(U)$ 的外微分算子，$\mathrm{d}\omega$ 称为 ω 的外微分. ♣

由这个定义可知：

1) 若 ω 是 C^p 类的，则 $\mathrm{d}\omega$ 是 C^{p-1} 类的.

2) 若 $\omega\in\Omega_k(U)$，即 $\omega=\sum\limits_{i\in G_k}c_i\mathrm{d}x_i$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega&=\sum_{i\in G_k}\mathrm{d}c_i\wedge\mathrm{d}x_i\\&=\sum_{i\in G_k}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial c_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\right)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\\&=\sum_{i\in G_k}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial c_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}.\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{d}\omega\in\Omega_{k+1}(U)$. 特别地，当 $\omega\in\Omega_n(U)$ 时，$\mathrm{d}\omega=0$.

例题 17.17 设 $\omega=f\mathrm{d}x+g\mathrm{d}y$ 是 $U\subset\mathbb{R}^2$ 上的一个 C^p 类的 1-微分形式，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega&=\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}y\\&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}y\\&=\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

例题 17.18 设 $\omega=f\mathrm{d}x+g\mathrm{d}y+h\mathrm{d}z$ 是 $U\subset\mathbb{R}^3$ 上的一个 C^p 类的 1-微分形式，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega=&\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}y+\mathrm{d}h\wedge\mathrm{d}z\\=&\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial g}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial h}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}z\\=&\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial h}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\end{aligned}$$

例题 17.19 设 $\omega=f\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+g\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+h\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$ 是 $U\subset\mathbb{R}^3$ 上的一个 C^p 类的 2-微分形式. 则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega&=\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\mathrm{d}h\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\\&\quad\left(\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial g}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial h}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

2. 外微分算子 d 的性质

我们用 $\Omega_k^{(p)}(U)$ 表示 $U\ (\subset\mathbb{R}^n)$ 上的所有 C^p 类的 k-微分形式集合.

定理 17.5

$\forall p \in \mathbb{N}, \forall k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

1. 外微分算子 $\mathrm{d}: \Omega^{(p)}(U) \to \Omega^{(p-1)}(U)$ 是线性的.
2. 若 $\omega \in \Omega_k^{(p)}(U), \widetilde{\omega} \in \Omega_l^{(p)}(U)$，则
$$\mathrm{d}(\omega \wedge \widetilde{\omega}) = (\mathrm{d}\omega) \wedge \widetilde{\omega} + (-1)^k \omega \wedge (\mathrm{d}\widetilde{\omega})$$
3. 若 $p \geqslant 2$，则 $\mathrm{d}^2 = \mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$.

证明 1)d 的线性性直接由定义推出. 我们来证明 2). 由 d 的线性性可知，我们只需对

$$\omega = c_i \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k},$$
$$\widetilde{\omega} = \widetilde{c}_j \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_l}$$

进行证明即可. 根据外积的性质及定义

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \widetilde{\omega} &= c_i \mathrm{d}x_i \wedge \widetilde{c}_j \mathrm{d}x_j \\
&= c_i \widetilde{c}_j \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \\
&= \begin{cases} 0, & \text{若 } i \text{ 与 } j \text{ 相交}, \\ (-1)^{\langle i;\ \ j\rangle} c_i \widetilde{c}_j \mathrm{d}x_{i \vee j}, & \text{若 } i \text{ 与 } j \text{ 不相交}. \end{cases}
\end{aligned}$$

于是

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \widetilde{\omega}) = \begin{cases} 0, & \text{若 } i \text{ 与 } j \text{ 相交}, \\ (-1)^{\langle i;\ \ j\rangle} \mathrm{d}\left(c_i \widetilde{c}_j\right) \wedge \mathrm{d}x_{i \vee j}, & \text{若 } i \text{ 与 } j \text{ 不相交}. \end{cases}$$

另一方面

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{d}\omega) \wedge \widetilde{\omega} + (-1)^k \omega \wedge (\mathrm{d}\widetilde{\omega}) \\
&= (\mathrm{d}c_i \wedge \mathrm{d}x_i) \wedge \left(\widetilde{c}_j \mathrm{d}x_j\right) + (-1)^k \left(c_i \mathrm{d}x_i\right) \wedge \left(\mathrm{d}\widetilde{c}_j \wedge \mathrm{d}x_j\right) \\
&= \left(\mathrm{d}c_i \widetilde{c}_j\right) \wedge \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j + \left(\widetilde{c}_i \mathrm{d}\widetilde{c}_j\right) \wedge \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \\
&= \left(\mathrm{d}c_i \widetilde{c}_j + c_i \mathrm{d}\widetilde{c}_j\right) \wedge \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \\
&= \begin{cases} 0, & \text{若 } i \text{ 与 } j \text{ 相交}, \\ (-1)^{\langle i;\ \ j\rangle} \mathrm{d}\left(c_i \widetilde{c}_j\right) \wedge \mathrm{d}x_{i \vee j}, & \text{若 } i \text{ 与 } j \text{ 不相交}. \end{cases}
\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \widetilde{\omega}) = (\mathrm{d}\omega) \wedge \widetilde{\omega} + (-1)^k \omega \wedge (\widetilde{\mathrm{d}\omega})$$

3) 同理由 d 的线性性，我们只需证明

$$\forall \omega = c_i \mathrm{d}x_i, \mathrm{d}^2(\omega) = \mathrm{d} \cdot \mathrm{d}(\omega) = 0$$

根据外微分与外积的定义，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}c_i \wedge \mathrm{d}x_i \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial c_i}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j\right) \wedge \mathrm{d}x_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\begin{cases} 0, & \text{若 } j \text{ 与 } i \text{ 相交} \\ (-1)^{\langle j,i \rangle} \dfrac{\partial c_i}{\partial x_j} \mathrm{d}x_{j \vee i}, & \text{若 } j \text{ 与 } i \text{ 不相交} \end{cases} \right).
\end{aligned}$$

由此可知，不论 j 与 i 相交与否，下式总是成立的：

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial c_i}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$$

同理，我们又有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2(\omega) &= \mathrm{d}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial c_1}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}\left(\frac{\partial c_i}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 c_i}{\partial x_j \partial x_l} \mathrm{d}x_l \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i.
\end{aligned}$$

由于 ω 是 $C^p\ (p \geqslant 2)$ 类的，所以 c_i 在 U 上是 C^p 类的，从而 $\dfrac{\partial^2 c_i}{\partial x_j \partial x_l}$ 在 U 上连续. 根据偏导数的 Schwarz 定理，我们有

$$\frac{\partial^2 c_i}{\partial x_j \partial x_l} = \frac{\partial^2 c_i}{\partial x_l \partial x_j}, \forall j, l = 1, 2, \cdots, n.$$

因此由

$$\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_l = \begin{cases} 0, & \text{若 } l = j, \\ -\mathrm{d}x_l \wedge \mathrm{d}x_j, & \text{若 } l \neq j. \end{cases}$$

知 $\mathrm{d}^2(\omega) = 0$.

定理 17.6

设 $f: U \to V\ (\subset \mathbb{R}^m)$ 是任一 C^2 类映射，$\omega \in \Omega^{(p)}(V)$. 则

$$f^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}\left(f^*\omega\right).$$

特别地，下述交换图式成立：

$$\begin{array}{ccc}
\Omega_k^{(p)}(V) & \xrightarrow{f^*} & \Omega_k^{(p)}(U) \\
\Big\downarrow \mathrm{d} & & \Big\downarrow \mathrm{d} \\
\Omega_{k+1}^{(p-1)}(V) & \xrightarrow{f^*} & \Omega_{k+1}^{(p-1)}(U)
\end{array}$$

证明 由 f^* 与 d 的线性性，我们只需证明

$$\forall \omega = c_i \mathrm{d}y_i \in \Omega_k^{(p)}(V), f^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}\left(f^*\omega\right).$$

首先我们注意到 § 2 例17.12 的结论，若 $\varphi: V \to \mathbb{R}$ 是任一 C^1 类函数，则

$$f^*(\varphi) = \varphi \circ f.$$

下面我们来证明

$$\mathrm{d}\left(f^*(\varphi)\right) = f^*(\mathrm{d}\varphi). \tag{17.1}$$

事实上，

$$\begin{aligned}
f^*(\mathrm{d}\varphi) =& f^*\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\mathrm{d}y_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\mathrm{d}y_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial y_m}\mathrm{d}y_m\right) \\
=& \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y_1}\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\right) + \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y_2}\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_2}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\right) + \cdots + \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y_m}\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\right) \\
=& \left[\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_1}\right]\mathrm{d}x_1 \\
&+ \left[\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_2}\right]\mathrm{d}x_2 + \cdots \\
&+ \left[\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_n} + \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_n}\right]\mathrm{d}x_n \\
=& \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \\
=& \mathrm{d}(\varphi \circ f) \\
=& \mathrm{d}(f^*\varphi)
\end{aligned}$$

现在利用刚才所证明的式(17.1)得到

$$\begin{aligned}
f^*(\mathrm{d}\omega) &= f^*\left(\mathrm{d}c_i \wedge \mathrm{d}y_i\right) \\
&= f^*\left(\mathrm{d}c_i \wedge \mathrm{d}y_{i_1} \wedge \mathrm{d}y_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{i_k}\right) \\
&= f^*\left(\mathrm{d}c_i\right) \wedge f^*\left(\mathrm{d}y_{i_1}\right) \wedge f^*\left(\mathrm{d}y_{i_2}\right) \wedge \cdots \wedge f^*\left(\mathrm{d}y_{i_k}\right) \\
&= \mathrm{d}\left(f^* c_i\right) \wedge f^*\left(\mathrm{d}y_{i_1}\right) \wedge f^*\left(\mathrm{d}y_{i_2}\right) \wedge \cdots \wedge f^*\left(\mathrm{d}y_{i_k}\right)
\end{aligned}$$

另一方面，利用定理17.5的关系式 $\mathrm{d}(\omega \wedge \widetilde{\omega}) = (\mathrm{d}\omega) \wedge \widetilde{\omega} + (-1)^k \omega \wedge (\mathrm{d}\widetilde{\omega})$ 及 $\mathrm{d}f^*\left(\mathrm{d}y_{i_l}\right) = \mathrm{d}\left(\mathrm{d}\left(f^* y_{i_l}\right)\right) = 0 (l = 1, 2, \cdots, k)$ 我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(f^*\omega\right) &= \mathrm{d}\left(f^* c_i \wedge f^*\left(\mathrm{d}y_i\right)\right) \\
&= \mathrm{d}\left(f^* c_i \wedge f^*\left(\mathrm{d}y_{i_1}\right) \wedge f^*\left(\mathrm{d}y_{i_2}\right) \wedge \cdots \wedge f^*\left(\mathrm{d}y_{i_k}\right)\right) \\
&= \mathrm{d}\left(f^* c_i\right) \wedge f^*\left(\mathrm{d}y_{i_1}\right) \wedge f^*\left(\mathrm{d}y_{i_2}\right) \wedge \cdots \wedge f^*\left(\mathrm{d}y_{i_k}\right) \\
&\quad + \left(f^* c_i\right) \wedge \mathrm{d}\left(f^*\left(\mathrm{d}y_{i_1}\right) \wedge f^*\left(\mathrm{d}y_{i_2}\right) \wedge \cdots \wedge f^*\left(\mathrm{d}y_{i_k}\right)\right) \\
&= \mathrm{d}\left(f^* c_i\right) \wedge f^*\left(\mathrm{d}y_{i_1}\right) \wedge f^*\left(\mathrm{d}y_{i_2}\right) \wedge \cdots \wedge f^*\left(\mathrm{d}y_{i_k}\right).
\end{aligned}$$

因此

$$f^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}\left(f^*\omega\right)$$

例题 17.20 设 ω 是 $V\left(\subset \mathbb{R}^n\right)$ 上如下定义的 C^1 类的 $n-1$-微分形式：

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i \mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}y_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}y_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n,$$

这里 $f_i: V \to \mathbb{R} (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 n 个 C^1 类映射. 又设 $\varphi: U\left(\subset \mathbb{R}^n\right) \to V$ 是任一 C^1 类映射. 试计

算 $\varphi^*(\mathrm{d}\omega)$.

根据 φ^* 与 d 的定义，我们有

$$\begin{aligned}
\varphi^*(\mathrm{d}\omega) &= \varphi^*\left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\mathrm{d}f_i \wedge \mathrm{d}y_{i_1} \wedge \mathrm{d}y_{i_2} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}y_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n\right) \\
&= \varphi^*\left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_j}\mathrm{d}y_j\right) \wedge \mathrm{d}y_{i_1} \wedge \mathrm{d}y_{i_2} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}y_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n\right) \\
&= \varphi^*\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_i}\mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}y_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial (f_i \circ \varphi)}{\partial y_i}\varphi^*(\mathrm{d}y_1) \wedge \varphi^*(\mathrm{d}y_2) \wedge \cdots \wedge \varphi^*(\mathrm{d}y_n) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial (f_i \circ \varphi)}{\partial y_i}\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial (f_1 \circ \varphi)}{\partial y_i}\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.
\end{aligned}$$

因此，$\forall \boldsymbol{x} \in U$，

$$\varphi^*(\mathrm{d}\omega)(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_i}(\varphi(\boldsymbol{x}))\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$$

3. 微分形式的恰当性与闭性

我们知道，若 ω 是 U 上的 C^p 类 $k-1$-微分形式，则 $\mathrm{d}\omega$ 是 U 上的一个 C^{p-1} 类 k-微分形式. 现在研究的是它的逆问题：给定一个 U 上的 k-微分形式 ω，是否存在 U 上的一个 $k-1$-微分形式 θ 使得 $\mathrm{d}\theta = \omega$？如果存在，$\theta$ 是否唯一？

首先我们给出下述定义.

定义 17.9

设 $\omega \in \Omega^{(p)}(U)$.

1. 若 $\mathrm{d}\omega = 0$，则称 ω 是闭的.
2. 若存在 $\theta \in \Omega^{(p+1)}(U)$ 使得 $\mathrm{d}\theta = \omega$，则称 ω 是恰当的，并且 θ 称为 ω 的原微分形式.

♣

定理 17.7

设 $\omega \in \Omega^{(p)}(U)$.

1. 若 ω 是恰当的，则 ω 是闭的.
2. 若 ω 是恰当的，并且 $\mathrm{d}\theta = \omega$，则 $\forall \widetilde{\theta} \in \Omega^2(U)$，也有 $\mathrm{d}(\theta + \mathrm{d}\widetilde{\theta}) = \omega$.

♡

证明 1) 若 ω 是恰当的，则存在 $\theta \in \Omega^{(p+1)}(U)$ 使得 $\mathrm{d}\theta = \omega$，于是

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\mathrm{d}\theta) = \mathrm{d}^2\theta = 0$$

即 ω 是闭的.

2) 由于 ω 是恰当的，并且 $\mathrm{d}\theta = \omega$，故由 d 的线性性及 $\mathrm{d}^2 = 0$ 得到

$$\mathrm{d}(\theta + \mathrm{d}\widetilde{\theta}) = \mathrm{d}\theta + \mathrm{d}(\mathrm{d}\widetilde{\theta}) = \omega + \mathrm{d}^2\widetilde{\theta} = \omega$$

由这个定理可知，若 ω 的原微分形式存在，则它并不是唯一的.

关于使 $\mathrm{d}\theta=\omega$ 的 θ 的存在性问题. 一般说来，只能有局部存在性结论，即下述定理.

定理 17.8 (Poincare 引理)

设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是任一开集，$\omega\in\Omega^{(p)}(U)$ 是任一闭微分形式. 则 $\forall\boldsymbol{x_0}\in U$，存在 $\boldsymbol{x_0}$ 的一个邻域 $V\subset U$ 使得 $\omega|_V$ 是恰当的.

证明 由 d 的线性性，我们不妨假设 $\omega\in\Omega_k^{(P)}(U)$.

任取一点 $\boldsymbol{x_0}\in U$，由于 U 是开集，故存在 $\delta>0$，使得 $V=B(\boldsymbol{x_0},\delta)\subset U.\forall\boldsymbol{x}\in V,\boldsymbol{x}$ 可以表示成下述形式：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\in B(\boldsymbol{0},\delta).$$

设 $\boldsymbol{i}=(i_1,i_2,\cdots,i_k)\in G_k$. 考虑如下定义的 V 上的 $k-1$-微分形式 β_i：

$$\beta_i=\sum_{s=1}^{k}(-1)^{s-1}z_{i_s}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_{i_s}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$$

这里 $z_{i_s}=x_{i_s}-x_{0i_s}(s=1,2,\cdots,k)$.

直接计算得到

$$\mathrm{d}\beta_i=k\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}=k\mathrm{d}x_i.$$

现在我们定义映射 $I:\Omega_m^{(p)}(V)\to\Omega_{m-1}^{(p)}(V)$ 如下：

$$\forall\omega=\sum_{i\in O_m}c_i\mathrm{d}x_i\in\Omega_m^{(p)}(V),\forall\boldsymbol{x}\in V,I(\omega)(\boldsymbol{x})=\sum_{i\in G_m}\left(\int_0^1 t^{m-1}c_i\left(\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{z}\right)\mathrm{d}t\right)\beta_i$$

显然，I 是线性的，并且 $I(0)=0$.

下面我们分别计算 $\mathrm{d}\left(I\left(\omega|_V\right)\right)$ 与 $I\left(\mathrm{d}\left(\omega|_V\right)\right)$.

对于 $\mathrm{d}\left(I\left(\omega|_V\right)\right)$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(I\left(\omega|_V\right)\right)(\boldsymbol{x})&=\sum_{i\in G_k}\mathrm{d}\left(\int_0^1 t^{k-1}c_i\left(\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{z}\right)\mathrm{d}t\right)\wedge\beta_i+\sum_{i\in G_k}\left(\int_0^1 t^{k-1}c_i\left(\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{z}\right)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\beta_i\\&=\sum_{i\in G_k}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\int_0^1 t^{k-1}c_i\left(\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{z}\right)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_j\right)\wedge\beta_i+\sum_{i\in G_k}\left(\int_0^1 t^{k-1}c_i\left(\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{z}\right)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\beta_i\\&=\sum_{i\in G_k}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^{k-1}\frac{\partial}{\partial x_j}c_i\left(\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{z}\right)\mathrm{d}t\right)\cdot\mathrm{d}x_j\wedge\beta_i+\sum_{i\in G_k}\left(k\int_0^1 t^{k-1}c_i\left(\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{z}\right)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_i\end{aligned}\tag{17.2}$$

对于 $I\left(\mathrm{d}\left(\omega|_V\right)\right)$，由于 $\mathrm{d}\omega=0$，我们有

$$0=I(d(\omega|_V))=I\left(\sum_{i\in G_k}\mathrm{d}c_i\wedge\mathrm{d}x_i\right)=I\left(\sum_{i\in G_k}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial c_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i\right).$$

若 j 与 i 相交，则 $\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i=0$，故我们不妨假设 $\forall j=1,2,\cdots,\ n,j$ 与 i 不相交，于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i=&(-1)^{\langle j,i\rangle}\mathrm{d}x_{j\vee i}\\=&(-1)^{m_j}\mathrm{d}x_{l_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{l_{m_j+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{l_{k+1}},(0\leqslant m_j\leqslant k),\end{aligned}$$

这里 $\mathrm{d}x_{l_{m_j+1}}=\mathrm{d}x_j(j=1,2,\cdots,n)$. 由 I 的定义，我们有

$$
\begin{aligned}
0=&I\left(\sum_{i\in G}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n_j}\frac{\partial c_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}x_{l_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{l_{m_j}+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{l_{k+1}}\right)\\
=&\sum_{i\in G_k}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^k\frac{\partial c_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}t\right)(-1)^{m_j}\beta_l\left(l=(l_1,\cdots,l_{n_j+1},\cdots,l_{k+1})\right).
\end{aligned}
$$

但是

$$
\begin{aligned}
(-1)^{m_j}\beta_l&=(-1)^{m_j}\sum_{s=1}^{k+1}(-1)^{s-1}z_{l_s}\mathrm{d}x_{l_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_{l_s}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{l_{k+1}}\\
&=(-1)^{m_j}\cdot(-1)^{m_j+l-1}z_{l_{m_j+1}}\mathrm{d}x_{l_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_{l_{m_j}+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{l_{k+1}}\\
&\quad+(-1)^{m_j}\cdot\sum_{\substack{s=1\\ s\neq m_j+1}}^{k+1}(-1)^{s-1}z_{l_s}\mathrm{d}x_{l_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_{l_s}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{l_{k+1}}\\
&=z_j\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}-\mathrm{d}x_j\wedge\sum_{s=1}^{k}(-1)^{s-1}z_{i_s}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_{i_s}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\\
&=z_j\mathrm{d}x_i-\mathrm{d}x_j\wedge\beta_i,
\end{aligned}
$$

因此

$$
0=\sum_{i\in G_k}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^k\frac{\partial c_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}t\right)\left(z_j\mathrm{d}x_i-\mathrm{d}x_j\wedge\beta_i\right)\tag{17.3}
$$

将(17.2)与(17.3)两式相加得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(I\left(\omega|_V\right)\right)(\boldsymbol{x})=&\sum_{i\in G_k}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^k\frac{\partial c_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_j\wedge\beta_i+\sum_{i\in G_k}\left(k\int_0^1 t^{k-1}c_i(\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_i\\
&+\sum_{i\in G_k}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^k\frac{\partial c_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}t\right)\cdot\left(z_j\mathrm{d}x_i-\mathrm{d}x_j\wedge\beta_i\right)\\
=&\sum_{i\in G_k}\left[\int_0^1\left(kt^{k-1}c_i(\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{z})+t^k\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial c_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{z})z_j\right)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x_i\\
=&\sum_{i\in G_k}\left[\int_0^1\left(kt^{k-1}c_i(\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{z})+t^k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c_i(\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{z})\right)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x_i\\
=&\sum_{i\in G_k}\left[\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^kc_i(\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{z})\right)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x_i\\
=&\sum_{i\in G_k}c_i(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}x_i\\
=&\omega|_V(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

由此可知，若令 $\theta=I\left(\omega|_V\right)$，则 $\mathrm{d}\theta=\omega|_V$.

注 如果 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是一星形区域，则存在定义在整个 U 上的 C^{p+1} 类微分形式 θ 使得 $\mathrm{d}\theta=\omega$.

事实上，由于 U 是星形区域，故存在一点 $\boldsymbol{x_0}\in U$ 使得 $\forall\boldsymbol{x}\in U$，$(1-t)\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{x}\in U(\forall t\in[0,1])$,

现在将上述定理证明过程中的 $k-1$-微分形式 β_i 改为

$$\beta_i = \sum_{s=1}^{k}(-1)^{s-1}\left(x_{i_s} - x_{0_is}\right)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx}_{i_s}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k},$$

而线性映射 $I:\Omega_m^{(p)}(U)\to\Omega_{m-1}^{(p)}(U)$ 的定义改为

$$\forall\omega=\sum_{i\in G_m}c_i\mathrm{d}x_i\in\Omega_m^{(p)}(U),\forall\boldsymbol{x}\in U,I(\omega)(\boldsymbol{x})=\sum_{i\in G_m}\left(\int_0^1 t^{k-1}c_i\left((1-t)\boldsymbol{x_0}+t\boldsymbol{x}\right)\mathrm{d}t\right)\beta_i$$

然后重复上述论证过程即可证得

$$\mathrm{d}(I(\omega))=\omega.$$

下面我们特别来研究 1-微分形式的恰当性.

4. 1-微分形式的恰当性

定理 17.9

设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是一开集，并且

$$\omega=f_1\mathrm{d}x_1+f_2\mathrm{d}x_2+\cdots+f_n\mathrm{d}x_n$$

是定义在 U 上的 $C^p(p\geqslant 1)$ 类的 1-微分形式. 我们考虑下述条件：

1. 存在 C^{p-1} 类的 0-数分形式 θ 使得 $\mathrm{d}\theta=\omega$.
2. $\mathrm{d}\omega=0$.
3. $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i},\forall i,j=1,2,\cdots,n$.

则有：1)$\Rightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3) . 特别地，若 U 是星形区域，则 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3).

证明 1)$\Rightarrow$ 2) 由定理17.7推出.

2)$\Leftrightarrow$ 3)，由外微分 d 的定义有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega=&\mathrm{d}f_1\wedge\mathrm{d}x_1+\mathrm{d}f_2\wedge\mathrm{d}x_2+\cdots+\mathrm{d}f_n\wedge\mathrm{d}x_n\\=&\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\right)\wedge\mathrm{d}x_1+\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_2}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\right)\wedge\mathrm{d}x_2+\cdots+\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_n}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\right)\wedge\mathrm{d}x_n\\=&\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}-\frac{\partial f_1}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j.\end{aligned}$$

因此

$$0=\mathrm{d}\omega\Leftrightarrow\frac{\partial f_i}{\partial x_j}-\frac{\partial f_j}{\partial x_i}=0,\forall i,j=1,2,\cdots,n.$$

当 U 是星形区域时，由定理17.8的附注知 2)$\Rightarrow$ 1). 因此 1)$\Leftrightarrow$ 2)$\Leftrightarrow$ 3).

下面一个定理指出了 1-微分形式的任意两个原微分形式 (如果存在的话) 之间的关系.

定理 17.10

设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是体一侔通开集，

$$\omega=f_1\mathrm{d}x_1+f_2\mathrm{d}x_2+\cdots+f_n\mathrm{d}x_n$$

是定义在 U 上的 C^p 类的 1-微分形式，若 Θ,θ 是 ω 的两个原微分形式，则存在常数 C 使得

$$\Theta-\theta=C.$$

证明 因为 ω 是 U 上的 1-微分形式，所以 θ 与 θ 是定义在 U 上的可微函数.

设 $x_0 \in U$，令 $\Theta(x_0) - \theta(x_0) = C$，我们来证明

$$\forall x \in U, \Theta(x) - \theta(x) = C.$$

为此我们注意到 U 是道路连通的，于是存在连续映射 $\varphi : [0,\ 1] \to U$ 使得 $\varphi(0) = x_0, \varphi(1) = x$.

定义映射 $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\forall t \in [0,1], \psi(t) = (\Theta - \theta) \circ \varphi(t),$$

我们有

$$\psi(0) = (\Theta - \theta) \circ \varphi(0) = \Theta(x_0) - \theta(x_0) = C,$$
$$\psi(1) = (\Theta - \theta) \circ \varphi(1) = \Theta(x) - \theta(x).$$

令

$$a = \sup\{t \in [0,1] \mid \psi(t) = C\},$$

则 $0 \leqslant a \leqslant 1$. 由 ψ 的连续性知，$\psi(a) = C$，即 $C = (\Theta - \theta) \circ \varphi(a)$.

若 $a < 1$. 则由 U 的开性，存在 $\delta > 0$ 使得 $B(\varphi(a), \delta) \subset U'$，$B(\varphi(a), \delta)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸集，并且由于在 U 上，$\mathrm{d}(\Theta - \theta) = 0$，故由有限增量定理16.11我们有：$\forall x \in B(\varphi(a), \delta)$，

$$\|(\Theta - \theta)(x) - (\Theta - \theta)(\varphi(a))\| \leqslant \sup_{z \in \varphi(a)x} \|\mathrm{d}(\Theta - \theta)(z)\| \|x - \varphi(a)\|$$

即

$$\forall x \in B(\varphi(a), \delta), (\Theta - \theta)(x) = (\Theta - \theta)(\varphi(a)) = C.$$

另一方面，因为 $a < 1$，所以存在 $\eta > 0$ 使得

$$[a, a + \eta] \subset [0,1], \varphi([a, a + \eta]) \subset B(\varphi(a), \delta),$$

因此

$$\forall t \in [a, a + \eta]. \psi(t) = (\Theta - \theta)(\varphi(t)) = C.$$

特别地我们有 $\psi(a + \eta) = C$，这与 a 的定义矛盾，故必有 $a = 1$，此即表明

$$C = \psi(1) = (\Theta - \theta)(\varphi(1)) = \Theta(x) - \theta(x).$$

推论 17.1

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是任一星形开集，ω 是 U 上的任一 $C^p (p \geqslant 1)$ 类的闭 1-微分形式，则

1. ω 是恰当的，
2. ω 的任意两个原微分形式相差一个常数.

证明 星形开集 U 必是连通的. 因此此推论就是定理17.9与定理 17.10的直接结论.

最后我们用具体例子介绍求原微分形式的方法.

5. 求原微分形式的方法

例题 17.21 设 $\omega \in \Omega_1(\mathbb{R}^2)$ 定义如下：

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \omega(x, y) = \left(3x^2 + 2xy + y^2\right) \mathrm{d}x + \left(x^2 + 2xy + 3y^2\right) \mathrm{d}y.$$

试证明 ω 的原微分形式 θ 存在，并求出 θ.

事实上，由于 $\mathbb{R}^2$ 是星形区域，并且满足

$$\frac{\partial\left(3x^2+2xy+y^2\right)}{\partial y}=2x+2y=\frac{\partial\left(x^2+2xy+3y^2\right)}{\partial x},$$

故根据定理17.9 知，1-微分形式 ω 在 $\mathbb{R}^2$ 上有原微分形式 θ 存在，

设 $\mathrm{d}\theta=\omega$．于是我们有：$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$，

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x+\frac{\partial\theta}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y=\left(3x^2+2xy+y^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^2+2xy+3y^2\right)\mathrm{d}y.$$

由此得到方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\theta}{\partial x}(x,y)=3x^2+2xy+y^2,\\[2mm] \dfrac{\partial\theta}{\partial y}(x,y)=x^2+2xy+3y^2.\end{cases}$$

由第一个方程得到

$$\theta(x,y)=\int\left(3x^2+2xy+y^2\right)\mathrm{d}x+\varphi(y)=x^3+x^2y+xy^2+\varphi(y)\tag{17.4}$$

这里 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是任一 C^1 类的函数.

为了确定 φ，将 θ 的表达式代入上述方程组的第 2 个方程得到

$$x^2+2xy+\varphi'(y)=x^2+2xy+3y^2$$

因此

$$\varphi'(y)=3y^2\text{ 或 }\varphi(y)=y^3+C,$$

这里 C 为任一常数. 最后将 φ 代入式(17.4)即得到我们所求的 ω 的原微分形式 θ 的表达式：

$$\theta(x,y)=x^3+x^2y+xy^2+y^3+C,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

例题 17.22 设在 $U=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ 上的 1-微分形式 ω 定义为：

$$\omega(x,y)=\left(y^2-x^2+2xy\right)\mathrm{d}x+\left(y^2-x^2-2xy\right)\mathrm{d}y,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}.$$

试证明：

1) 在 U 上不存在 ω 的任何原微分形式.

2) 存在关于 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 的 C^1 类函数 $\varphi:\mathbb{R}_*^+\to\mathbb{R}$ 使得 1-微分形式 $\Omega=\varphi\omega$ 在 U 上有原微分形式存在.

事实上，如果在 U 上 ω 有原微分形式 θ 存在，即 $\mathrm{d}\theta=\omega$，那么由 ω 是 C^∞ 类性知，θ 也是 C^∞ 类的，于是 $\mathrm{d}\omega=d^2\theta=0$，但是直接计算得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega=&\mathrm{d}\left(y^2-x^2+2xy\right)\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}\left(y^2-x^2-2xy\right)\wedge\mathrm{d}y\\=&[(-2x+2y)\mathrm{d}x+(2y+2x)\mathrm{d}y]\wedge\mathrm{d}x+[(-2x-2y)\mathrm{d}x+(2y-2x)\mathrm{d}y]\wedge\mathrm{d}y\\=&(2y+2x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x+(-2x-2y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\=&-4(x+y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因此在 U 上 $\mathrm{d}\omega\neq 0$，此矛盾说明 ω 在 U 上不存在任何的原微分形式.

为了证明存在关于 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 的 C^1 类函数 $\varphi:\mathbb{R}_*^+\to\mathbb{R}$ 使得 $\Omega=\varphi\omega$ 在 U 上有原微分形式

存在，我们设 $d\theta = \Omega$. 由此得到

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}(x,y) = \varphi(r)\left(y^2 - x^2 + 2xy\right),$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial y}(x,y) = \varphi(r)\left(y^2 - x^2 - 2xy\right).$$

由于 φ 是 C^1 类的，故 θ 也是 C^1 类的，从而 $\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial x}$ ，此即为

$$\begin{aligned}&\varphi'(r)\frac{y}{r}\left(y^2 - x^2 + 2xy\right) + \varphi(r)(2y + 2x)\\ =&\varphi'(r)\frac{x}{r}\left(y^2 - x^2 - 2xy\right) + \varphi(r)(-2x - 2y).\end{aligned}$$

整理后得到

$$r\varphi'(r) + 1\varphi(r) = 0.$$

解此一阶微分方程得

$$\varphi(r) = \frac{C}{r^4}(C\text{ 为常数 }).$$

取 $C = 1$ ，则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\theta}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{r^4}\left(y^2 - x^2 + 2xy\right),\\ \dfrac{\partial\theta}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{r^4}\left(y^2 - x^2 - 2xy\right).\end{cases}$$

由第 1 个方程对 x 积分得到

$$\begin{aligned}\theta(x,y) &= \int\frac{1}{r^4}\left(y^2 - x^2 + 2xy\right)dx + h(y)\\ &= \int\frac{y^2 - x^2 + 2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}dx + h(y)\\ &= \frac{x - y}{x^2 + y^2} + h(y)\end{aligned}$$

这里 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一 C^1 类函数.

现在将 θ 代入 $\frac{\partial\theta}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{r^4}\left(y^2 - x^2 - 2xy\right)$ 中以确定函数 h. 直接计算得到

$$\frac{y^2 - x^2 - 2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} + h'(y).$$

于是

$$h'(y) = 0, \forall y \in \mathbb{R},$$

或 $h(y) = C, \forall y \in \mathbb{R}$. 因此最后我们求得

$$\theta(x,y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2} + C, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}.$$

这就是我们希望求的 1-微分形式 $\Omega = \varphi\omega$ 的一族原微分形式. 这里的函数 φ 通常称为 ω 的积分因子.

注 由这两个例子可以看出，求一个 1-微分形式的原微分形式相当于计算某些函数的原函数. 而我们知道，计算原函数往往不是一件容易的事情. 如果我们只需要知道 1-微分形式的原微分形式的存在性，那么除了应用前面的定理 17.9外，还可以应用后面第 21 毫的定理??进行判断.

习题

1. 计算下列各微分形式 $\omega_i(i=1,2)$ 的外微分 $\mathrm{d}\omega_i$；
   1) $\omega_1(x,y)=2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$,
   2) $\omega_2(x,y,z)=x^2z\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2z\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-xy^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.
2. 设 $\omega\in\mathcal{Q}_k^{(p)}(U),\widetilde{\omega}\in\mathcal{Q}_l^{(p)}(U)$. 证明：
   1) 若 $\omega,\widetilde{\omega}$ 是闭的, 则 $\omega\wedge\widetilde{\omega}$ 也是闭的.
   2) 若 ω 是闭的, $\widetilde{\omega}$ 是恰当的, 则 $\omega\wedge\widetilde{\omega}$ 是恰当的.
3. 设 $U=\{(r,\theta,u)\mid r>0,-\pi<\theta<\pi\}$, $V=\{(x,y,z)\mid x>0$ 或 $y\neq 0\}$, 映射 $\varphi:U\to V$ 定义如下：

$$\forall(r,\theta,u)\in U,\varphi(r,\theta,u)=(r\cos\theta,r\sin\theta,u).$$

   $\omega\in\Omega_2(V)$ 定义为

$$\forall(x,y,z)\in V,\omega(x,y,z)=x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

   1) 计算 $\varphi^*(\omega)$.
   2) 确定函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得 $\mathrm{d}\big(f(u)\cdot\varphi^*(\omega)\big)=0$.
4. 设 $r=\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2},\omega=\displaystyle\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}\frac{x_i}{r^k}\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$, $k\in\mathbb{R}$.
   1) 确定 k, 使 $\mathrm{d}\omega=0$.
   2) 对所选择的 k, 对 $n=2,3$, 确定 θ 使得 $\mathrm{d}\theta=\omega$.
5. 设映射 $\varphi:\mathbb{R}_*^+\times[0,2\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}^3$ 定义如下：

$$\varphi(r,\theta,a)=(x,y,z)=(r\sin a\cos\theta,r\sin\alpha\sin\theta,r\cos a)$$

   $\big(\forall(r,\theta,a)\in\mathbb{R}_*^+\times[0,2\pi]\times[0,\pi]\big)$. U 是包含 φ 的值域的开集, ω 是 U 上的2-微分形式:$\forall(x,y,z)\in U$,

$$\omega(x,y,z)=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\frac{yz}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z-\frac{xz}{x^2+y^2}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.$$

   1) 计算 $\varphi^*(\omega)$.
   2) 确定 1-微分形式 f 使得 $\mathrm{d}f=\varphi^*(\omega)$.
   3) 由此推出存在 $V=\varphi\left(\mathbb{R}_*^+\times[0,2\pi]\times[0,\pi]\right)$ 上的 1-微分形式 F 使得 $\mathrm{d}f=\omega$.
6. 设 $U=\{(x,y)\mid x>0,y>0\},\omega_i\in\Omega_1(U)$：

$$\omega_1(x,y)=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2},\omega_2(x,y)=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{xy}.$$

   1) 计算 $\mathrm{d}\omega_i$.
   2) 证明：ω_i 是恰当的. 并求出 ω_i 的原微分形式 $(i=1,2)$.
7. 设 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是两个 C^1 类的函数. $\mathbb{R}^3$ 上的 1-微分形式 ω 定义如下：$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$\omega(x,y,z)=2xz\mathrm{d}x+f(y)g(z)\mathrm{d}y+\left(x^2+\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}z.$$

   1) 确定 f,g 使得 ω 是闭的.
   2) 找出所有的函数 $G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 使得 $\mathrm{d}G=\omega$.
8. 设 $U,V\subset\mathbb{R}^3$ 是如下定义的两个开集：

$$U=\left\{(r,\theta,\varphi)\mid r>0,-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2},0<\varphi<\pi\right\},$$

$$V=\{(x,y,z)\mid x\neq 0 \text{ 或 } y>0\}.$$

映射 $\Phi:U\to V$ 定义如下：

$$\Phi(r,\theta,\varphi)=(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi),\forall(r,\theta,\varphi)\in U.$$

在 V 上的 1-微分形式 $\omega,\widetilde{\omega}$ 定义为：

$$\begin{aligned}\omega(x,y,z)&=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z,\\ \widetilde{\omega}(x,y,z)&=\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\forall(x,y,z)\in V.\end{aligned}$$

1) 计算 $\Phi^*(\omega)$ 与 $\Phi^*(\widetilde{\omega})$.
2) 证明：ω 与 $\widetilde{\omega}$ 是闭的.
3) 找出所有的函数 $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 使得 $\mathrm{d}f=\omega,\mathrm{d}g=\widetilde{\omega}$.

第十八章 含参数的积分

这一章我们研究正常的或广义的积分 $\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 关于参数 λ 的连续性、可导性与可积性.

18.1 含参数的正常积分

设 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 是一有限闭区间, (X,d) 是一度量空间. f ： $[a,b]\times X\to\mathbb{R}$ 是任一连续函数.

$\forall\lambda\in X$, 函数 $x\longmapsto f(x,\lambda), x\in[a,b]$ 在 $[a,b]$ 上连续, 于是积分 $\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 存在. 从而我们得到一个定义在度量空间 (X,d) 上的函数 $F:X\to\mathbb{R}$：

$$\forall\lambda\in X, F(\lambda)=\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x.$$

下面我们研究函数 F 的性质.

1. 函数 F 的连续性

引理 18.1

对连续函数 $f:[a,b]\times X\to\mathbb{R}$, 若 $\lambda_0\in X$, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists V\in\mathscr{N}(\lambda_0)$, 使得

$$(\forall\lambda\in V)(\forall x\in[a,b])\Longrightarrow f(x,\lambda)-f\left(x,\lambda_0\right)|<\varepsilon.$$

证明 因为 f 在 $[a,b]\times X$ 上连续, 故 $\forall y\in[a,b]$, 存在 y 的一个开区间 I_y 及 λ_0 的一个邻域 $V_y\in\mathscr{N}(\lambda_0)$ 使得

$$\left(\forall x\in I_y\cap[a,b]\right)\left(\forall\lambda\in V_y\right)\Longrightarrow\left|f(x,\lambda)-f\left(x,\lambda_0\right)\right|<\varepsilon.$$

开区间族 $\left\{I_y\right\}_{y\in[a,b]}$ 覆盖了 $[a,b]$, 由 $[a,b]$ 的紧性知, 存在有限开子覆盖 $\left\{I_{y_1},I_{y_2},\cdots,I_{y_m}\right\}$. 令

$$V=\bigcap_{i=1}^{m}V_{y_i},$$

则 $V\in\mathscr{N}(\lambda_0)$.

现在设 $(x,\lambda)\in[a,b]\times V$, 于是存在 I_{y_i} 使得 $x\in I_{y_i},\lambda\in V\subset V_{y_i}$, 由 I_{y_i} 及 V_{y_i} 的定义知

$$\left|f(x,\lambda)-f\left(x,\lambda_0\right)\right|<\varepsilon.$$

定理 18.1

若函数 $f:[a,b]\times X\to\mathbb{R}$ 连续, 则函数 $F:X\to\mathbb{R}$ 在 X 上连续.

证明 任取一点 $\lambda_0\in X$. 根据上述引理, $\forall\varepsilon>0,\exists V\in\mathscr{N}(\lambda_0)$, 使得

$$(\forall x\in[a,b])(\forall\lambda\in V)\Longrightarrow\left|f(x,\lambda)-f\left(x,\lambda_0\right)\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

于是

$$\begin{aligned}\forall\lambda\in V,\left|F(\lambda)-F\left(\lambda_0\right)\right|&=\left|\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x-\int_a^b f\left(x,\lambda_0\right)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_a^b\left|f(x,\lambda)-f\left(x,\lambda_0\right)\right|\mathrm{d}x<\varepsilon\end{aligned}$$

此即表明 F 在 λ_0 处连续. 由 λ_0 的任意性知 F 在 X 上连续.

这个定理告诉我们, 当 f 连续时, 可以对参变元 λ 在积分号下取极限, 即

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\lim_{\lambda\to\dot{x}_0} f(x,\lambda)\right)\mathrm{d}x=\int_a^b f\left(x,\lambda_0\right)\mathrm{d}x$$

这个性质常常被用来计算某些函数的 Riemann 积分值. 为此我们必须对被积函数添加适当的参数 λ(有时不止一个参数), 使得新的函数的积分易于计算, 然后对所计算的积分值的参数 λ 取适当极限即可.

例题 18.1 计算积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x$.

首先定义函数 $f:[0,1]\times\mathbb{R}_*^+\to\mathbb{R}$ 如下:

$$\forall(x,\lambda)\in[0,1]\times\mathbb{R}_*^+, f(x,\lambda)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+\lambda^2\right)}.$$

显然 f 在 $[0,1]\times\mathbb{R}_*^+$ 上连续, 故由上述定理我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x&=\int_0^1\left(\lim_{\lambda\to1}\frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+\lambda^2\right)}\right)\mathrm{d}x\\&=\lim_{\lambda\to1}\int_0^1\frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+\lambda^2\right)}\mathrm{d}x\\&=\lim_{\lambda\to1}\frac{1}{\lambda^2-1}\left[\int_0^1-\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{1}{x^2+\lambda^2}\mathrm{d}x\right]\\&=\lim_{\lambda\to1}\frac{1}{\lambda^2-1}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\lambda}\arctan\frac{1}{\lambda}\right)\\&=\lim_{\lambda\to1}\frac{\frac{1}{\lambda^2}\arctan\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda(\lambda^2+1)}}{2\lambda}\\&=\frac{2+\pi}{8}.\end{aligned}$$

下面我们进一步研究当积分 $\displaystyle\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 的上下限 a,b 也是参数 λ 的函数时的连续性. 首先证明下述定理.

定理 18.2

若函数 $f:[a,b]\times X\to\mathbb{R}$ 连续, 则如下定义的函数 $G:[a,b]\times[a,b]\times X\to\mathbb{R}$:

$$\forall(u,v,\lambda)\in[a,b]\times[a,b]\times X, G(u,v,\lambda)=\int_u^v f(x,\lambda)\mathrm{d}x$$

在 $[a,b]\times[a,b]\times X$ 上连续.

证明 首先说明一下, 这里所谓 G 在 $[a,b]\times[a,b]\times X$ 上连续, 是对 $[a,b]\times[a,b]\times X$ 上如下定义的度量 ρ 而言的:

$$\forall(u,v,\lambda),\left(u',v',\lambda'\right)\in[a,b]\times[a,b]\times X,$$

$$\rho\left((u,v,\lambda),\left(u',v',\lambda'\right)\right)=\left|u-u'\right|+\left|v-v'\right|+d\left(\lambda,\lambda'\right).$$

现在我们任取一点 $(u_0,v_0,\lambda_0)\in[a,b]\times[a,b]\times X$. 于是 $\forall(u,v,\lambda)\in[a,b]\times[a,b]\times X$, 我们有

$$\begin{aligned}G(u,v,\lambda)-G(u_0,v_0,\lambda_0)=&G(u,v,\lambda)-G(u,v,\lambda_0)+G(u,v,\lambda_0)-G(u_0,v_0,\lambda_0)\\&=\int_u^v[f(x,\lambda)-f(x,\lambda_0)]\,\mathrm{d}x+\int_u^v f(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x-\int_{u_0}^{v_0} f(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x\\&=\int_u^v[f(x,\lambda)-f(x,\lambda_0)]\,\mathrm{d}x+\int_{v_0}^v f(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x-\int_{u_0}^{u} f(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令 $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x,\lambda_0)|$, 则 $M<+\infty$, 并且

$$\left|\int_{v_0}^v f(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant M|v-v_0|$$
$$\left|\int_{u_0}^u f(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant M|u-u_0|$$

从而 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1=\dfrac{\varepsilon}{3(M+1)}>0$, 使得

$$\forall u,v\in[a,b],|u-u_0|+|v-v_0|<\delta_1\Longrightarrow\left|\int_{u_0}^u f(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon/3,\left|\int_{v_0}^v f(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon/3$$

另一方面, 根据上述引理, 存在 $\delta_2>0$, 使得

$$\begin{aligned}(\forall x\in[a,b])\,(\forall\lambda\in B(\lambda_0,\delta_2))\Longrightarrow&|f(x,\lambda)-f(x,\lambda_0)|<\varepsilon/3(b-a)\\\Longrightarrow&\left|\int_u^v[f(x,\lambda)-f(x,\lambda_0)]\,\mathrm{d}x\right|\\\leqslant&\left|\int_u^v|f(x,\lambda)-f(x,\lambda_0)|\,\mathrm{d}x\right|\\<&\frac{\varepsilon}{3(b-a)}\cdot(b-a)\\=&\frac{\varepsilon}{3}(\forall u,v\in[a,b]).\end{aligned}$$

现在我们令 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, 则 $\delta>0$, 于是

$$\begin{aligned}&\forall(u,v,\lambda)\in[a,b]\times[a,b]\times X\text{ 且 }\rho((u,v,\lambda),(u_0,v_0,\lambda_0))<\delta\\\Longrightarrow&|G(u,v,\lambda)-G(u_0,v_0,\lambda_0)|\\\leqslant&\left|\int_u^v[f(x,\lambda)-f(x,\lambda_0)]\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{v_0}^v f(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{u_0}^u f(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x\right|\\<&\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon\end{aligned}$$

此即表明 G 在 (u_0,v_0,λ_0) 处连续. 从而由 (u_0,v_0,λ_0) 的任意性推知, G 在 $[a,b]\times[a,b]\times\mathrm{X}$ 上连续.

推论 18.1

设函数 $f:[a,b]\times X\to\mathbb{R}$ 连续. 若函数 $u,v:X\to[a,b]$ 连续, 则函数

$$H:X\to\mathbb{R},\forall\lambda\in X,H(\lambda)=\int_{u(\lambda)}^{v(\lambda)}f(x,\lambda)\mathrm{d}x$$

在 X 上连续.

证明 $\forall\lambda\in X,H(\lambda)=G(u(\lambda),v(\lambda),\lambda)$, 而函数 G 关于 (u,v,λ) 连续, 函数 u,v 关于 λ 连续, 故由复合函数的连续性知, H 关于 λ 连续.

2. 函数 F 的可导性

定理 18.3

设 $I\subset\mathbb{R}$ 是一开集，函数 $f:[a,b]\times I\to\mathbb{R}$ 连续，若偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial\lambda}:[a,b]\times I\to\mathbb{R}$ 连续，则函数

$$F:I\to\mathbb{R},\forall\lambda\in I,F(\lambda)=\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x$$

在 I 上是 C^1 类的，并且

$$F'(\lambda)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda)\mathrm{d}x,\forall\lambda\in I.$$

证明 任取一点 $\lambda_0\in I,\forall\lambda\in I$，考虑差式

$$\begin{aligned}F(\lambda)-F(\lambda_0)&=\int_a^b[f(x,\lambda)-f(x,\lambda_0)]\mathrm{d}x\\&=\left(\int_a^b\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda_0+\theta(\lambda-\lambda_0))\mathrm{d}x\right)(\lambda-\lambda_0)\ (0<\theta<1)\end{aligned}$$

定义函数 $\varphi:I\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\forall\lambda\in I,\varphi(\lambda)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda_0+\theta(\lambda-\lambda_0))\mathrm{d}x.$$

于是

$$F(\lambda)-F(\lambda_0)=\varphi(\lambda)(\lambda-\lambda_0),\forall\lambda\in\boldsymbol{I}.$$

下面证明 φ 在 λ_0 处连续. 因为 $\dfrac{\partial f}{\partial\lambda}$ 连续，由定理18.1知，函数 $\lambda\mapsto\displaystyle\int_a^b\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda)\mathrm{d}x,\lambda\in I$ 连续，特别在 λ_0 处连续. 于是

$$(\forall\varepsilon>0),(\exists\delta>0)(\forall\lambda\in I,|\lambda-\lambda_0|<\delta)\Longrightarrow\left|\int_a^b\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda)\mathrm{d}x-\int_a^b\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda_0)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon_0$$

因为 $|\lambda_0+\theta(\lambda-\lambda_0)-\lambda_0|=|\theta(\lambda-\lambda_0)|<|\lambda-\lambda_0|<\delta$，所以

$$|\varphi(\lambda)-\varphi(\lambda_0)|=\left|\int_a^b\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda_0+\theta(\lambda-\lambda_0))\mathrm{d}x-\int_a\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda_0)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,$$

此即表明 φ 在 λ_0 处连续. 根据定理**??**知，函数 F 在 λ_0 处可导，并且

$$F'(\lambda_0)=\varphi(\lambda_0)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda_0)\mathrm{d}x$$

由 λ_0 的任意性知，F 在 $\boldsymbol{I}$ 上可导，并且

$$\forall\lambda\in I,F'(\lambda)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda)\mathrm{d}x$$

最后由 $\dfrac{\partial f}{\partial\lambda}$ 的连续性及定理18.1知，F' 在 I 上连续. 因此 F 在 I 上是 C^1 类的.

这个定理表明，只要 $\dfrac{\partial f}{\partial\lambda}$ 连续，就可在积分号下对参数 λ 求导. 利用这一性质可以计算某些函数的积分.

例题 18.2 计算积分

$$F_n(a)=\int_0^1\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x\,(n\in\mathbb{N},a\neq0)$$

这里 $f(x,a)=\dfrac{1}{(x^2+a^2)^n}, \dfrac{\partial f}{\partial a}(x,a)=-\dfrac{2na}{(x^2+a^2)^{n+1}}$ 满足上述定理的全部条件 ($(x,a)\in[0,1]\times\mathbb{R}-\{0\}$)，故我们有

$$F_n'(a)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right)\mathrm{d}x=-2na\int_0^1\frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x=-2naF_{n+1}(a)$$

从而

$$F_{n+1}(a)=-\frac{1}{2na}F_n'(a)$$

由 $F_1(a)=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\frac{1}{a}$ 出发，可逐步求得 $F_2(a),F_3(a),\cdots$

例如，

$$F_2(a)=\int_0^1\frac{1}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2a}F_1'(a)=\frac{1}{2a^3}\left(\arctan\frac{1}{a}+\frac{a}{a^2+1}\right).$$

特别地，当 $a=1$ 时，我们又一次得到

$$\int_0^1\frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=F_2(1)=\frac{2+\pi}{8}$$

例题 18.3 设 $I\subset\mathbb{R}$ 是包含 0 的一开区间. 函数 $\varphi:I\to\mathbb{R}$ 在 I 上是 C^{n+1} 类的，并且 $\varphi(0)=0$，证明：

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)^{(k)}=\frac{1}{k+1}\varphi^{(k+1)}(0),\forall k=0,1,\cdots,n.$$

为此我们定义函数 $f_k:[0,1]\times I\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\forall(t,x)\in[0,1]\times I, f_k(t,x)=\varphi^{(k)}(xt)t^{k-1}(k=1,2,\cdots,n-1).$$

显然 f_k 在 $[0,1]\times I$ 上连续 ($\forall k=1,2,\cdots,n-1$)，并且由

$$\frac{\partial f_k}{\partial x}(t,x)=\varphi^{(k+1)}(xt)t^k(\forall(t,x)\in[0,1]\times I,\forall k=1,2,\cdots,n-1)$$

知，$\dfrac{\partial f_k}{\partial x}$ 在 $[0,1]\times I$ 上连续.

现在设 $x\in I-\{0\}$，则由 Newton-Leibnit 公式得

$$\frac{\varphi(x)}{x}=\int_0^1\varphi'(xt)\mathrm{d}t.$$

对 $k=1,2,\cdots,n$ 逐次应用定理18.3，即在积分号下对 x 求 k 次偏导数得到

$$\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)^{(k)}=\int_0^1\varphi^{(k+1)}(xt)t^k\mathrm{d}t(k=1,2,\cdots,n)$$

再令 $x\to0$，右边可在积分号下取极限，故

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)^{(k)}&=\lim_{x\to0}\int_0^1\varphi^{(k+1)}(xt)t^k\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\lim_{x\to0}\varphi^{(k+1)}(xt)t^k\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\varphi^{(k+1)}(0)t^k\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{k+1}\varphi^{(k+1)}(0)(k=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

定理 18.4

设 $I \subset \mathbb{R}$ 是任一开集, 函数 $f:[a,b]\times I \to \mathbb{R}$ 及 $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}:[a,b]\times I \to \mathbb{R}$ 都连续, 若函数 $u,v: I \to [a,b]$ 在 I 上可导或 C^1 类的, 则函数

$$H: I \to \mathbb{R}, \forall \lambda \in I, H(\lambda) = \int_{u(\lambda)}^{v(\lambda)} f(x,\lambda)\mathrm{d}x$$

在 I 可导或 C^1 类的, 并且

$$H'(\lambda) = \int_{u(\lambda)}^{v(\lambda)} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\mathrm{d}x + f(v(\lambda),\lambda)v'(\lambda) - f(u(\lambda),\lambda)u'(\lambda)(\forall \lambda \in I)$$

证明 首先, 函数

$$G:[a,b]\times[a,b]\times I \to \mathbb{R}, G(u,v,\lambda) = \int_u^v f(x,\lambda)\mathrm{d}x$$

的偏导函数 $\dfrac{\partial G}{\partial u}, \dfrac{\partial G}{\partial v}, \dfrac{\partial G}{\partial \lambda}$ 存在, 并且

$\forall (u,v,\lambda) \in [a,b]\times[a,b]\times I$,

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u,v,\lambda) = -f(u,\lambda)$$
$$\frac{\partial G}{\partial v}(u,v,\lambda) = f(v,\lambda)$$
$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(u,v,\lambda) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\mathrm{d}x$$

将 $u = u(\lambda), v = v(\lambda)$ 代入 $G(u,v,\lambda)$ 中得到

$$\forall \lambda \in I, H(\lambda) = G(u(\lambda), v(\lambda), \lambda).$$

由此可知, 若 $u,v: I \to [a,b]$ 在 I 上可导或 C^1 类, 则 H 在 I 上也可导或 C^1 类, 并且由复合函数求导法则得到

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in I, H'(\lambda) =& \frac{\partial G}{\partial \lambda}(u(\lambda),v(\lambda),\lambda) + \frac{\partial G}{\partial u}(u(\lambda),v(\lambda),\lambda)u'(\lambda) + \frac{\partial G}{\partial v}(u(\lambda),v(\lambda),\lambda)v'(\lambda) \\ =& \int_{u(\lambda)}^{v(\lambda)} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\mathrm{d}x + f(v(\lambda)\lambda)v'(\lambda) - f(u(\lambda),\lambda)u'(\lambda)\end{aligned}$$

例题 18.4 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是任一连续函数. 证明函数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_a^b f(x+t)\cos t\mathrm{d}t$$

在 $\mathbb{R}$ 上是 C^1 类的, 并计算它的导数 $F'(x)$.

首先作变元替换 $y = x+t$ 得到

$$F(x) = \int_{a+x}^{b+x} f(y)\cos(y-x)\mathrm{d}y$$

等式右边可应用定理18.4, 故 F 在 $\mathbb{R}$ 上是 C^1 类的, 并且

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_{a+x}^{b+x} f(y)\sin(y-x)\mathrm{d}y + f(b+x)\cos b - f(a+x)\cos a$$

3. 函数 F 的可积性

定理 18.5

设函数 $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 连续，(这里 $-\infty<c<d<+\infty$) 那么函数

$$F:[c,d]\to\mathbb{R},\forall\lambda\in[c,d],F(\lambda)=\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x$$

在 $[c,d]$ 上可积，并且

$$\int_a^a F(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x$$

证明 因为函数 f 连续，故由定理18.1知，函数 F 在 $[c,d]$ 上连续. 从而 F 在 $[c,d]$ 上可积.

为了证明上述等式，我们注意到函数 $y\longmapsto\int_0^y f(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda$，$y\in[c,d]$ 在 $[c,d]$ 上是 C^1 类的，若定义函数

$$\Phi:[c,d]\to\mathbb{R},\forall y\in[c,d],\Phi(y)=\int_o^y\left(\int_d^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda$$

$$\Psi:[c,d]\to\mathbb{R},\forall y\in[c,d],\Psi(y)=\int_a^b\left(\int_c^y f(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x$$

则 Φ 与 Ψ 在 $[c,d]$ 上是 C^1 类的，并且 $\forall y\in[c,d]$，

$$\Phi'(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$\Psi'(y)=\int_a^b\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_a^y f(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

从而存在常数 M 使得

$$\Phi(y)=\Psi(y)+M,\forall y\in[e,d].$$

由于 $\Phi(c)=\Psi(c)=0$，故 $M=0$，因此 $\Phi(y)\equiv\Psi(y),\forall y\in[c,\ d]$. 特别地，取 $y=d$，我们得到

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x$$

这个定理表明，只要函数 f 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则可以交换对 λ 与对 x 的积分顺序.

利用这一性质，可以使某些积分的计算变得容易.

例题 18.5 计算积分 $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\log x}\mathrm{d}x\,(0<a\leqslant b)$.

首先我们将表达式 $\frac{x^b-x^a}{\log x}$ 表示成下述形式：

$$\frac{x^b-x^a}{\log x}=\int_a^b x^\lambda\mathrm{d}\lambda$$

由于函数 $(x,\lambda)\longmapsto x^\lambda,(x,\lambda)\in[0,1]\times[a,b]$ 在 $[0,1]\times[a,b]$ 上连续，故根据定理 18.5，我们可以交换

此函数对 λ 与对 x 的积分顺序. 于是

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\int_a^b x^\lambda \mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \left(\int_0^1 x^\lambda \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_a^b \frac{1}{\lambda+1}\mathrm{d}\lambda \\ &= \log\frac{b+1}{a+1}\end{aligned}$$

注 这个积分也可以利用定理18.3来计算. 为此把 a 固定, 则函数 $(x,b) \longmapsto \dfrac{x^b - x^a}{\log x}, (x,b) \in [0,1] \times [a,+\infty)$ 满足定理 18.3的全部条件, 从而

$$\left(\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\mathrm{d}x\right)'_{(b)} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{x^b - x^a}{\log x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^b \mathrm{d}x = \frac{1}{b+1}$$

由此得到

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\mathrm{d}x = \log(b+1) + C(C \text{ 为常数 }).$$

当 $b = a$ 时, $0 = \log(a+1) + C$, 故 $C = -\log(a+1)$, 因此

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\mathrm{d}x = \log\frac{b+1}{a+1}$$

✍ 习题

1. 计算下列各极限:
   1) $\displaystyle\lim_{(a,b)\to(0,0)} \int_0^1 \frac{ax^2+b}{x^2+1}\arctan x\,\mathrm{d}x$,
   2) $\displaystyle\lim_{(a,b)\to(0,0)} \int_1^2 \log\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right]\frac{1}{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x$,
   3) $\displaystyle\lim_{a\to 0} \int_0^2 x^2 \cos ax\,\mathrm{d}x$,
   4) $\displaystyle\lim_{a\to 0} \int_a^{1+a} \frac{1}{1+x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$.
2. 设函数 $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ 定义如下:
   $$\forall x \in [-1,1], f(x) = \int_{\arccos x}^{\arcsin x} \frac{\cos y}{(a+\cos y)(b+\cos y)}\,\mathrm{d}y.$$
   计算 $f'(x)$.
3. 设 $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 是任一连续函数, 令
   $$F(x) = \int_0^x f(y)(x-y)^n\,\mathrm{d}y \,(n \in \mathbb{N}),$$
   试计算 $F^{(n+1)}(x), \forall x \in [0,+\infty)$.
4. 函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义如下:
   $$\forall a \in \mathbb{R}, \; f(a) = \int_0^{a^2}\left(\int_{x-a}^{x+a} \cos\left(x^2+y^2-a^2\right)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$
   证明: f 在 $\mathbb{R}$ 上是 C^1 类的, 并计算 $f'(a)\,(\forall a \in \mathbb{R})$.

5. 设函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$\forall x\in[0,1],\ f(x)=\int_0^1 \mathrm{e}^{|x-y|}|\sin(x-y)|\,\mathrm{d}y.$$

证明：f 在 $[0,1]$ 上可导，并计算 $f'(x)\ (x\in[0,1])$.

6. 设 $a>0$，函数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 定义为：

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^1 t^a\sin tx\,\mathrm{d}t.$$

证明：F 在 $\mathbb{R}$ 上可导，并且满足方程

$$xF'(x)+(a+1)F(x)=\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

7. 解下述"积分方程"

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)+\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t=1$$

8. 利用积分号下求导法则计算下列积分：

1) $I(r)=\displaystyle\int_0^{\pi}\log\left(1-2r\cos\theta+r^2\right)\mathrm{d}\theta$,

2) $I(a,b)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\log\left(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta(a>0,b>0)$,

3) $I(a)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x(a>0)$.

9. 利用交换积分顺序法则计算下列积分：

1) $I(a,b)=\displaystyle\int_0^1\sin\left(\log\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\log x}\mathrm{d}x$,

$(a>0,b>0)$

2) $J(a,b)=\displaystyle\int_0^1\cos\left(\log\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\log x}\mathrm{d}x$.

18.2 含参数的广义积分

设 $[a,b)\subset\mathbb{R}(-\infty<a<b\leqslant+\infty)$, (X,d) 是一度量空间. $f:[a,b)\times X\to\mathbb{R}$ 是任一连续函数. 当 $b<+\infty$ 时 b 是 f 的瑕点.

我们假设 $\forall\lambda\in X$, f 关于 x 的广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 收敛. 于是我们可定义一个函数

$$F:X\to\mathbb{R},\forall\lambda\in X,F(\lambda)=\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x$$

与 §1 一样，这里也是研究函数 F 的连续性、可导性与可积性. 但这些性质是与下面要介绍的广义积分关于参数的一致收敛性密切相关的. 为此我们首先引进下述概念.

1. 函数的一致收敛

设 $A,D\subset\mathbb{R}$ 是任意两个非空集合，$b\in\mathbb{R}$ 是 A 的左侧聚点，$F:A\times D\to\mathbb{R}$ 是任一函数. 我们假设：

$$\forall\lambda\in D,\ \lim_{x\to b^-}F(x,\lambda)=\varphi(\lambda).$$

用 ε-语言来描述它就是：

$$(\forall\lambda\in D)(\forall\varepsilon>0)(\exists B(\lambda)<b)(\forall x\in A\cap[B(\lambda),b))\Longrightarrow|F(x,\lambda)-\varphi(\lambda)|<\varepsilon.$$

这里 $B(\lambda)$ 一般说来与参数 $\lambda \in D$ 有关. 不一定存在与 λ 无关的数 B 使得下述关系式成立:

$$(\forall x \in A \cap [B,b))(\forall \lambda \in D) \Longrightarrow F(x,\lambda)-\varphi(\lambda)\ |< \varepsilon.$$

如果这种性质的 B 存在, 则我们说函数 F 当 x 趋于 b 时收敛于 φ 有 "一致性". 准确地描述就是下面的定义.

定义 18.1

对于上述函数 $F: A \times D \to \mathbb{R}$, 我们称 F 当 $x \to b$-时关于 $\lambda \in D$ 一致收敛于 φ, 如果下述性质成立:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists B < b)(\forall x \in A \cap [B,b))(\forall \lambda \in D) \Longrightarrow |F(x,\lambda)-\varphi(\lambda)| < \varepsilon.$$

♣

由这个定义可知, 当 $A = \mathbb{N}, b = +\infty$ 时, 若记 $F(n,\lambda) = F_n(\lambda)$, 则上述一致收敛定义就是我们在第 12 章中研究过的函数项序列的一致收敛定义.

类似地我们还可以定义当 a 是 A 的右侧聚点时函数 F 当 $x \to a^+$ 时关于 $\lambda \in D$ 的一致收敛性.

现在我们特别地来考虑开头所提的广义积分 $\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x$. 若令

$$F(u,\lambda) = \int_a^u f(x,\lambda)\mathrm{d}x, \forall u \in [a,b)$$

则

$$\lim_{u\to b^-} F(u,\lambda) = \int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x$$

由此可知, 此函数 $F: [a,b) \times X \to \mathbb{R}$ 当 $u \to b^-$ 时存在关于参数 $\lambda \in X$ 一致收敛的问题.

为明确起见, 我们特作下述定义.

定义 18.2

我们称广义积分 $\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda \in X$ 一致收敛, 如果下述性质成立:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists B \geqslant a)(\forall u \in [B,b))(\forall \lambda \in X)$$
$$\Longrightarrow \left|F(u,\lambda) - \int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_u^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

♣

例题 18.6 研究广义积分 $\int_0^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$ 关于参数 $\lambda \geqslant 0$ 的一致收敛性.

首先直接计算得到

$$\int_0^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \lambda = 0 \\ 1, & \lambda > 0 \end{cases}$$

因此广义积分 $\int_0^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$ 对 $\lambda \geqslant 0$ 收敛.

现在设 $\lambda > 0. \forall u > 0$, 我们有

$$\left|\int_u^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{\lambda u}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\right| = \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

由 $\mathrm{e}^{-\lambda u} < \varepsilon$ 得到 $u > B(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}\log\dfrac{1}{\varepsilon}$.

由于 $\lambda\to 0$ 时 $B(\lambda)\to+\infty$，故广义积分 $\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx$ 关于 $\lambda\geqslant 0$. 不是一致收敛的.

但如果我们限制 $\lambda\in[\lambda_0,+\infty)(\lambda_0>0)$，则由

$$\left|\int_u^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx\right|=e^{-\lambda u}\leqslant e^{-\lambda_0 u}<\varepsilon$$

得到 $u>B=\dfrac{1}{\lambda_0}\log\dfrac{1}{\varepsilon}$. 这里 B 只与 ε 有关而与参数 λ 无关. 因此广义积分 $\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx$ 关于参数 $\lambda\in[\lambda_0,+\infty)$ 又是一致收敛的.

注 类似地，我们可以定义当 a $=-\infty$ 或 a 为 f 的瑕点时，广义积分 $\int_a^b f(x,\lambda)dx$ 关于参数 $\lambda\in X$ 的一致收敛性. 具体的叙述我们留给读者.

以下我们的研究都是对 $b=+\infty$ 或 b 为 f 的瑕点时的广义积分 $\int_a^b f(x,\lambda)dx$ 所进行的，对 $a=-\infty$ 或 a 为 f 的瑕点时，也有类似的结论成立.

2. 广义积分的一致收敛准则

定理 18.6 (Cauchy 收敛准则)

广义积分 $\int_a^b f(x,\lambda)dx$ 关于 $\lambda\in X$ 一致收敛的充分必要条件是：

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists B\geqslant a)(\forall u,v\in[B,b))(\forall\lambda\in X)\Longrightarrow\left|\int_u^v f(x,\lambda)dx\right|<\varepsilon.$$

证明 (必要性) 设 $\int_a^b f(x,\lambda)dx$ 关于 $\lambda\in X$ 一致收敛. 于是由定义，我们有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists B\geqslant a)(\forall u\in[B,b))(\forall\lambda\in X)\Longrightarrow\left|\int_u^b f(x,\lambda)dx\right|<\varepsilon/2,$$

从而 $\forall v\in[B,b)$，我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_u^v f(x,\lambda)dx\right|&=\left|\int_u^b f(x,\lambda)dx-\int_v^b f(x,\lambda)dx\right|\\&\leqslant\left|\int_u^b f(x,\lambda)dx\right|+\left|\int_v^b f(x,\lambda)dx\right|\\&<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon\end{aligned}$$

(充分性) 设定理的条件满足，

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists B\geqslant a)(\forall u,v\in[B,b))(\forall\lambda\in X)\Longrightarrow\left|\int_u^v f(x,\lambda)dx\right|<\varepsilon,$$

则由广义积分的 Cauchy 收敛准则知，$\forall\lambda\in X$，广义积分 $\int_a^b f(x,\lambda)dx$ 收敛.

现在我们固定 u 使得 $B\leqslant u<b$. 令 $v\to b^-$ 则我们得到

$$(\forall u\in[B,b))(\forall\lambda\in X)\Longrightarrow\left|\int_u^b f(x,\lambda)dx\right|\leqslant\varepsilon$$

此即表明广义积分 $\int_a^b f(x,\lambda)dx$ 关于 $\lambda\in X$ 一致收敛.

定理 18.7 (Weierstrass 判别法)

假设对函数 $f:[a,b)\times X\to\mathbb{R}$ 存在一个函数 $\varphi:[a,b)\to\mathbb{R}^+$ 使得

1. $|f(x,\lambda)|\leqslant\varphi(x),\forall x\in[a,b),\forall\lambda\in X$,
2. 广义积分 $\displaystyle\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x$ 收敛,

则广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda\in X$ 一致收敛.

证明 由于积分 $\displaystyle\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x$ 不含参数 λ，故由它的收敛性知

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists B\geqslant a)(\forall u\in[B,b))\Longrightarrow\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x<\varepsilon$$

从而由 $|f(x,\lambda)|\leqslant\varphi(x)(\forall\lambda\in X)$ 推得

$$(\forall u\in[B,b))(\forall\lambda\in X),\left|\int_u^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_u^b\varphi(x)\mathrm{d}x<\varepsilon$$

因此积分 $\displaystyle\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda\in X$ 一致收敛.

例题 18.7 广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{1+x^2}\mathrm{d}x\ 与\ \int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}\mathrm{d}x(a\in\mathbb{R})$$

关于 $a\in\mathbb{R}$ 一致收敛. 这是因为

$$\left|\frac{\sin ax}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2},\left|\frac{\cos ax}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2}(\forall a\in\mathbb{R}).$$

而积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

定理 18.8 (Abel 判别法)

设连续函数 $f,g:[a,b)\times X\to\mathrm{R}$ 满足下述条件:

1. 广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda\in X$ 一致收敛,
2. $\forall\lambda\in X$，函数 $x\longmapsto g(x,\lambda),x\in[a,b)$ 在 $[a,b)$ 上单调并且连续可导,
3. 存在 $M>0$ 使得
$$|g(x,\lambda)|\leqslant M,\forall(x,\lambda)\in[a,b)\times X,$$

则广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x,\lambda)g(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda\in X$ 一致收敛.

证明 设 $u,v\in[a,b)$ 且 $u<v,\forall\lambda\in X$，令

$$F(x,\lambda)=\int_a^x f(y,\lambda)\mathrm{d}y,x\in[u,v]$$

则函数 $x \longmapsto F(x,\lambda), x \in [u,v]$ 连续，由分部积分法及积分中值定理得到

$$\begin{aligned}
&\int_u^v f(x,\lambda)g(x,\lambda)\mathrm{d}x \\
=&\int_u^v \frac{\partial F}{\partial x}(x,\lambda)g(x,\lambda)\mathrm{d}x \\
=&[F(x,\lambda)g(x,\lambda)]_u^v - \int_u^v F(x,\lambda)\frac{\partial g}{\partial x}(x,\lambda)\mathrm{d}x \\
=&F(v,\lambda)g(v,\lambda) - F(u,\lambda)g(u,\lambda) - F(\xi,\lambda)\int_u^v \frac{\partial g}{\partial x}(x,\lambda)\mathrm{d}x (u \leqslant \xi \leqslant v) \\
=&F(v,\lambda)g(v,\lambda) - F(u,\lambda)g(u,\lambda) - F(\xi,\lambda)[g(v,\lambda) - g(u,\lambda)] \\
=&[F(v,\lambda) - F(\xi,\lambda)]g(v,\lambda) - [F(u,\lambda) - F(\xi,\lambda)]g(u,\lambda).
\end{aligned}$$

由于 $\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda \in X$ 一致收敛，故我们有

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > a)(\forall u,v \in [B,b))(\forall \lambda \in X) \Longrightarrow \left|\int_u^v f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

由此推得

$$\begin{aligned}
&\forall u,v \in [B,b), \\
&|F(v,\lambda) - F(\xi,\lambda)| = \left|\int_\xi^v f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon, \\
&|F(u,\lambda) - F(\xi,\lambda)| = \left|\int_\xi^u f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

于是，$\forall u,v \in [B,b)$，

$$\begin{aligned}
&\left|\int_u^v f(x,\lambda)g(x,\lambda)\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant&|F(v,\lambda) - F(\xi,\lambda)||g(v,\lambda)| + |F(u,\lambda) - F(\xi,\lambda)||g(u,\lambda)| \\
<&\varepsilon M + \varepsilon M = 2\varepsilon M
\end{aligned}$$

故由 Cauchy 一致收敛准则知，广义积分 $\int_a^b f(x,\lambda)g(u,\lambda)\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda \in \mathrm{X}$ 一致收敛.

例题 18.8 证明广义积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 关于 $a \in [0,+\infty)$ 一致收敛.

为此，令 $f(x,a) = \frac{\sin x}{x}, g(x,a) = \mathrm{e}^{-ax}$. 则 $\int_0^{+\infty} f(x,a)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 关于 $a \in [0,+\infty)$ 一致收敛.

$\forall a \geqslant 0$，函数 $x \longmapsto g(x,a) = \mathrm{e}^{-ax}, x \in [0,+\infty)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调下降，并且连续可导.

$$\forall (x,a) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty), |g(x,a)| = |\mathrm{e}^{-ax}| \leqslant 1.$$

因此由 Abel 判别法知，广义积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 关于 $a \in [0,+\infty)$ 一致收敛.

定理 18.9 (Dirichlet 判别法)

设连续函数

$$f,g : [a,b) \times X \to \mathbb{R} \text{ 满足下述条件:}$$

1. 存在 $M>0$ 使得
$$\left|\int_a^u f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right| \leqslant M, \forall (u,\lambda)\in[a,b)\times X.$$
2. $\forall\lambda\in X$，函数 $x\longmapsto g(x,\lambda), x\in[a,b)$ 在 $[a,b)$ 上单调下降并且连续可导.
3. $\lim\limits_{x\to b} g(x,\lambda)=0$ 关于 $\lambda\in X$ 是一致的.

则广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x,\lambda)g(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda\in X$ 一致收敛.

证明 首先像上一定理一样，$\forall u,v\in[a,b)$ 且 $u\leqslant v$，我们有
$$\int_u^v f(x,\lambda)g(x,\lambda)\mathrm{d}x=[F(v,\lambda)-F(\xi,\lambda)]g(v,\lambda)-[F(u,\lambda)-F(\xi,\lambda)]g(u,\lambda).$$
由于 $\lim\limits_{x\to b} g(x,\lambda)=0$ 关于 $\lambda\in X$ 是一致的，故
$$(\forall\varepsilon>0)(\exists B>a)(\forall u,v\in[B,b))(\forall\lambda\in X)\Longrightarrow |g(u,\lambda)|<\varepsilon, |g(v,\lambda)|<\varepsilon.$$
于是，$\forall u,v\in[B,b)$，
$$\begin{aligned}&\left|\int_u^v f(x,\lambda)g(x,\lambda)\mathrm{d}x\right|\\ \leqslant&(|F(v,\lambda)|+|F(\xi,\lambda)|)|g(v,\lambda)|+(|F(u,\lambda)|+|F(\xi,\lambda)|)|g(u,\lambda)|\\ <&2M\varepsilon+2M\varepsilon=4M\varepsilon.\end{aligned}$$
故由 Cauchy 一致收敛准则知，广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x,\lambda)g(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda\in X$ 一致收敛.

例题 18.9 证明广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 关于 $a\in[a_0,+\infty)$（$a_0>0$）一致收敛.

事实上，令 $f(x,a)=\sin ax, g(x,a)=\dfrac{x}{1+x^2}$，则
$$\left|\int_0^u f(x,a)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^u \sin ax\mathrm{d}x\right|=\frac{1-\cos au}{a}\leqslant\frac{2}{a_0}(\forall u\geqslant 0).$$
函数 $x\longmapsto g(x,a)=\dfrac{x}{1+x^2}, x\in[0,+\infty)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调下降并且连续可导.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x,a)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$ 关于 $a\in[a_0,+\infty)$ 一致收敛.

因此由 Dirichlet 判别法知，广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{1+x^3}\mathrm{d}x$ 关于 $a\in[a_0,+\infty)(a_0>0)$ 一致收敛.

下面转入到对函数
$$F: X\to\mathbb{R}, \forall\lambda\in X, F(\lambda)=\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x$$
的性质的研究.

3. 函数 F 的连续性

定理 18.10

若函数 $f:[a,b)\times X\to\mathbb{R}$ 连续，并且广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda\in X$ 一致收敛，则函数 F 在 X 上连续.

证明 任取 $\lambda_0 \in X$. 考虑差式

$$|F(\lambda) - F(\lambda_0)| = \left| \int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x \right|.$$

由于 $\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda \in X$ 一致收敛，故

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > a)(\forall \lambda \in X) \Longrightarrow \left| \int_B^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon/3,$$

从而

$$\left| \int_B^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x - \int_B^b f(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \left| \int_B^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x \right| + \left| \int_B^b f(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x \right| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

另一方面，对含参数 λ 的正常积分 $\int_a^B f(x,\lambda)\mathrm{d}x$, 由定理18.1 知，函数 $\lambda \longmapsto \int_a^B f(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 在 X 上连续，故

$$(\exists \delta > 0)\,(\forall \lambda \in X, d\,(\lambda,\lambda_0) < \delta) \Longrightarrow \left| \int_a^B f(x,\lambda)\mathrm{d}x - \int_a^B f(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon/3.$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\forall \lambda \in X,\ \mathrm{d}\,(\lambda,\lambda_0) < \delta \\
&\Longrightarrow |F(\lambda) - F(\lambda_0)| \leqslant \left| \int_a^B f(x,\lambda)\mathrm{d}x - \int_a^B f(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_B^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x - \int_B^b f(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x \right| \\
&\qquad < \varepsilon/3 + 2\varepsilon/3 = \varepsilon
\end{aligned}$$

此即表明 F 在 λ_0 处连续. 再由 $\lambda_0 \in X$ 的任意性知 F 在 X 上连续.

例题 18.10 设函数 $F : (2,+\infty) \to \mathbb{R}$ 定义如下：

$$\forall \lambda \in (2,+\infty), F(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{2+x^2}\mathrm{d}x$$

证明 F 在 $(2,+\infty)$ 上连续.

由于广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{2+x^\lambda}\mathrm{d}x$ 关于参数 $\lambda \in (2,+\infty)$ 不一致收敛，故我们不能直接应用定理18.10 为此任取 $\lambda_0 \in (2,+\infty)$. 我们来证明 F 在 λ_0 处连续. 取 μ 使得 $2 < \mu < \lambda_0$, 在 $[\mu,+\infty)$ 上

$$\frac{x}{2+x^\lambda} \leqslant \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & \forall x \in [0,1] \\ \dfrac{1}{x^{\mu-1}}, & \forall x \in (1,+\infty). \end{cases}$$

显然积分 $\int_0^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$ 收敛，故由 Weierstrass 判别法知，广义和分 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{2+x^\lambda}\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda \in [\mu,+\infty)$ 一致收敛. 因此由定理 18.10知，函数 F 在 $[\mu,+\infty)$ 上连续. 特别在 λ_0 处连续. 再由 λ_0 的任意性推得函数 F 在 $(2,+\infty)$ 上连续.

4. 函数 F 的可导性

定理 18.11

设 $I \subset \mathbb{R}$ 是任一非空开集，函数 $f : [a,b) \times I \to \mathbb{R}$ 连续，并且满足下述条件：

1. 偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda} : [a,b) \times I \to \mathbb{R}$ 存在并且连续.

2. $\forall \lambda \in I$，广义积分 $\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 收敛.

3. 广义积分 $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda \in I$ 一致收敛.

则函数 F 在 I 上是 C^1 类的，并且

$$F'(\lambda) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\mathrm{d}x, \forall \lambda \in I$$

证明 在 I 上任取一点 λ_0. 考虑差式

$$\begin{aligned} F(\lambda) - F(\lambda_0) &= \int_a^b [f(x,\lambda) - f(x,\lambda_0)]\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda_0+\theta(\lambda-\lambda_0))\,\mathrm{d}x\right)(\lambda-\lambda_0)\ (0<\theta<1) \end{aligned}$$

定义函数 $\varphi : I \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\forall \lambda \in I, \varphi(\lambda) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda_0+\theta(\lambda-\lambda_0))\,\mathrm{d}x,$$

则

$$\begin{aligned} F(\lambda) - F(\lambda_0) &= \varphi(\lambda)(\lambda-\lambda_0)\ (\forall \lambda \in I), \\ \varphi(\lambda_0) &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

下面证明 φ 在 λ_0 处连续.

事实上，由 $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda \in I$ 的一致收敛性.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > a)(\forall \lambda \in I) \Longrightarrow \left|\int_B^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda_0+\theta(\lambda-\lambda_0))\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon/3.$$

对于函数 $\lambda \longmapsto \int_a^B \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda_0+\theta(\lambda-\lambda_0))\,\mathrm{d}x, \lambda \in I$，由定理18.3的证明过程可知 (取 b 为 B)，它在 λ_0 处连续，故

$$(\exists \delta > 0)(\forall \lambda \in I, |\lambda-\lambda_0| < \delta) \Longrightarrow \left|\int_a^B \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda_0+\theta(\lambda-\lambda_0))\,\mathrm{d}x - \int_a^B \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon/3$$

于是 $\forall \lambda \in I, |\lambda-\lambda_0| < \delta$ 有

$$\begin{aligned} |\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0)| &= \left|\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda_0+\theta(\lambda-\lambda_0))\,\mathrm{d}x - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \left|\int_a^B \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda_0+\theta(\lambda-\lambda_0))\,\mathrm{d}x - \int_a^B \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\quad + \left|\int_B^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda_0+\theta(\lambda-\lambda_0))\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_B^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x\right| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

此即表明 φ 在 λ_0 处连续，由定理16.2知 F 在 λ_0 处可导，并且

$$F'(\lambda_0) = \varphi(\lambda_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x$$

再由 $\lambda_0 \in I$ 的任意性知. F 在 I 上可导, 并且

$$F'(\lambda)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\mathrm{d}x, \forall \lambda \in I.$$

现在由此表达式及 $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ 的连续性及 $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda \in I$ 的一致收敛性知 F' 在 I 上连续, 从而 F 在 I 上是 C^1 类的.

例题 18.11 计算广义积分

$$I_n(a)=\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}\mathrm{d}x\,(n \in \mathbb{N}, a>0)$$

首先任取 $a_0>0$，设 $\alpha>0, \beta>0$ 使得 $\alpha_0 \in(\alpha, \beta)$. 令

$$f(x,a)=\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n} \forall(x,a) \in[0,+\infty) \times(\alpha, \beta).$$

我们来验证函数 $f:[0,+\infty) \times(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ 满足定理18.11的全部条件:

i) f 在 $[0,+\infty) \times(\alpha, \beta)$ 上连续是显然的.

ii) $\forall n \in \mathbb{N}, a>0$，广义积分

$$I_n(a)=\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+a^2\right)^n}$$

收敛是显然的.

iii) $\forall(x,a) \in[0,+\infty) \times(a, \beta)$，由于

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x,a)=-\frac{2na}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}},$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial a}(x,a)\right| \leqslant \frac{2n\beta}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}},$$

故偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial a}:[0,+\infty) \times(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 并且广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial a}(x,a)\mathrm{d}x$ 关于 $a \in(\alpha, \beta)$ 一致收敛.

因此根据定理18.11, 函数 $I_n:(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ 在 (α, β) 上可导, 特别地在 a_0 处可导, 并且

$$\begin{aligned}
I_n'\left(a_0\right) &=\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial a}\left(x, a_0\right)\mathrm{d}x \\
&=-\int_0^{+\infty} \frac{2na_0}{\left(x^2+a_0^2\right)^{n+1}}\mathrm{d}x \\
&=-2na_0 I_{n+1}\left(a_0\right)
\end{aligned}$$

由 $a_0>0$ 的任意性知, $\forall a>0$，我们有

$$I_n'(a)=-2na I_{n+1}(a),$$

或

$$I_n(a)=-\frac{1}{2(n-1)a} I_{n-1}'(a)(n \geqslant 2).$$

现在从 $I_1(a)=\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2a}$ 出发, 可求得

$$I_2(a)=-\frac{1}{2a} \cdot\left(-\frac{\pi}{2a^2}\right)=\frac{\pi}{4a^3}.$$

由此不难用数学归纳法推得：

$$I_n(a)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n-2)}\cdot\frac{1}{a^{2n-1}}(\forall n\in\mathbb{N}).$$

例题 18.12 计算广义积分

$$I(a)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\,(a\geqslant 0).$$

在例18.8 中我们已经证明了 $I(a)$ 是 (一致) 收敛的. 现在令

$$f(x,a)=\mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin x}{x},\forall(x,a)\in(0,+\infty)\times[0,+\infty),$$
$$f(0,a)=1,\forall a\in[0,+\infty),$$

则函数 $f:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 连续, 并且由于

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x,a)=-\mathrm{e}^{-ax}\sin x,\forall(x,a)\in(0,+\infty)\times[0,+\infty)$$
$$\frac{\partial f}{\partial a}(0,a)=0$$

故偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial a}:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 连续.

由于 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial a}(x,0)\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$ 发散, 故我们对 $a=0$, 不能在 $I(a)$ 的积分号下求导. 为了解决这一矛盾, 我们来研究对 $a_0>0$, 在 $I(a)$ 的积分号下求导的可能性.

为此取 $\alpha>0$ 使得 $a_0\in(a,+\infty)$.

下面证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial a}(x,a)\mathrm{d}x$ 关于 $a\in(a,+\infty)$ 一致收敛. 事实上, 我们有

$$\left|\frac{\partial f}{\partial a}(x,a)\right|=|-\mathrm{e}^{-ax}\sin x|\leqslant\mathrm{e}^{-ax},\forall(x,a)\in[0,+\infty)\times(\alpha,+\infty),$$

而积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法知, 广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial a}(x,a)\mathrm{d}x$ 关于 $a\in(a,+\infty)$ 一致收敛. 因此由定理18.11知, I 在 $(\alpha,+\infty)$ 上可导, 特别地在 a_0 处可导, 并且

$$I'(a_0)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial a}(x,a_0)\,\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a_0x}\sin x\mathrm{d}x=-\frac{1}{1+a_0^2}.$$

由 $a_0>0$ 的任意性知, 函数 I 在 $(0,+\infty)$ 上可导, 并且.

$$I'(a)=-\frac{1}{1+a^2},\forall a\in(0,+\infty).$$

由此得到

$$I(a)=-\arctan a+C,\forall a\in(0,+\infty).$$

为了确定常数 C, 我们注意到函数 I 在 $[0,+\infty)$ 上连续 (因为 $I(a)$ 关于 $a\in[0,+\infty)$ 一致收敛). 因此

$$C=\lim_{a\to0}I(a)+\lim_{a\to0}\arctan a=I(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

从而我们得到 $\forall a>0$,

$$I(a)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\arctan a.$$

显然此等式对 $a=0$ 仍然成立.

5. 函数 F 的可积性

定理 18.12

设 $[c,d]\subset\mathbb{R}$ 是一有限闭区间，函数 $f:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 连续，并且广义积分 $\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda\in[c,d]$ 一致收敛，那么函数 F 在 $[c,d]$ 上可积，并且

$$\int_c^d F(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x$$

证明 首先由 f 的连续性及 $\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda\in[c,d]$ 的一致收敛性知，函数 F 在 $[c,d]$ 上连续，从而 F 在 $[c,d]$ 上可积.

另一方面，又由 $\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x$ 关于 $\lambda\in[c,d]$ 的一致收敛性，我们有

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists B\geqslant a)(\forall u\in[B,b))(\forall\lambda\in[c,d])\Longrightarrow\left|\int_u^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{d-c}.$$

现在任意固定 $u\in[B,b)$，因为

$$\begin{aligned}\int_c^d\left(\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda&=\int_c^d\left(\int_a^u f(x,\lambda)\mathrm{d}x+\int_u^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda\\&=\int_c^d\left(\int_a^u f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda+\int_c^d\left(\int_u^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

而根据定理18.5,

$$\int_c^d\left(\int_a^u f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda=\int_a^u\left(\int_c^d f(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x$$

所以

$$\begin{aligned}\left|\int_c^d\left(\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda-\int_a^u\left(\int_c^d f(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_c^d\left(\int_u^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda\right|\\&\leqslant\int_c^d\left|\int_u^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}\lambda\\&<\int_c^d\frac{\varepsilon}{d-c}\mathrm{d}\lambda=\varepsilon.\end{aligned}$$

由此令 $u\to b$ 即得到

$$\lim_{u\to b}\int_a^u\left(\int_c^d f(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda,$$

或

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x$$

上述定理通常称为交换积分顺序定理.

在附加适当的条件下，我们还可以将上述定理推广到 d 也是 $+\infty$ 或为 f 的瑕点的情形上去，即下面的定理.

定理 18.13

设连续函数 $f:[a,b)\times[c,d)\to\mathbb{R}$ 满足下面三个条件:

1. 广义积分 $\displaystyle\int_a^b |f(x,\lambda)|\mathrm{d}x$ 在 $[c,d)$ 的每一有限区间上一致收敛,
2. 广义积分 $\displaystyle\int_c^d |f(x,\lambda)|\mathrm{d}\lambda$ 在 $[a,b)$ 的每一有限区间上一致收敛,
3. 积分 $\displaystyle\int_c^d\left(\int_a^b |f(x,\lambda)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda$ 与 $\displaystyle\int_a^b\left(\int_c^d |f(x,\lambda)|\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x$ 中有一个收敛,

则 3) 中另一个积分也收敛, 并且

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x$$

证明 首先假设 $f\geqslant 0$, 并且积分 $\displaystyle\int_c^d\left(\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda$ 收敛. 任取 $u\in[a,b)$, 由定理18.12知, 我们有

$$\begin{aligned}\int_a^u\left(\int_c^d f(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x&=\int_c^d\left(\int_a^u f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda\\&\leqslant\int_c^d\left(\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda<+\infty(f\geqslant 0)\end{aligned}$$

此即表明

$$\lim_{u\to b}\int_a^u\left(\int_c^d f(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x$$

存在且

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x\leqslant\int_c^d\left(\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda$$

既然积分 $\displaystyle\int_a^b\left(\int_c^d f(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x$ 收敛, 故由对称性

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda\leqslant\int_a^b\left(\int_c^d f(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x$$

因此

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x.$$

现在设 f 为一般情形. 令

$$h=\max(0,f),k=\max(0,-f),$$

则 $h\geqslant 0,k\geqslant 0,f=h-k,h\leqslant|f|,k\leqslant|f|$. 很容易验证, 函数 h,k 满足定理的全部条件. 因此由第一步所证知, 对于 h,k 定理的结论成立, 即

$$\int_c^d\left(\int_a^b h(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda=\int_a^b\left(\int_c^d h(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x,$$

$$\int_c^d\left(\int_a^b k(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda=\int_a^b\left(\int_c^d k(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x,$$

于是

$$\begin{aligned}
&\int_c^d\left(\int_a^b f(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda\\
=&\int_c^d\left(\int_a^b h(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda-\int_c^d\left(\int_a^b k(x,\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda\\
=&\int_a^b\left(\int_c^d h(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x-\int_a^b\left(\int_c^d k(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x\\
=&\int_a^b\left(\int_c^d f(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

例题 18.13 计算 Euler-Poisson 积分

$$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

设 $a\geqslant 0$，作变元替换 $x=at$，则

$$I=a\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2t^2}\mathrm{d}t$$

两边同乘以 e^{-a^2}，并对 a 从 0 到 $+\infty$ 积分后得

$$\begin{aligned}
I^2&=I\cdot\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2}\mathrm{d}a\\
&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2}\left(\int_0^{+\infty}a\mathrm{e}^{-a^2t^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}a\\
&=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}a\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}a
\end{aligned}$$

如果我们能证明右边积分的顺序可交换，则

$$I^2=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}a\mathrm{e}^{-\,a^2(1+t^2)}\mathrm{d}a\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$$

因此

$$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

我们首先证明 $\forall a_0>0$，下述等式成立：

$$\int_{a_0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}a\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}a=\int_0^{+\infty}\left(\int_{a_0}^{+\infty}a\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\mathrm{d}a\right)\mathrm{d}t.\tag{18.1}$$

为此我们来验证定理18.13的条件满足：

i) 函数 $(t,a)\longmapsto a\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}$ 在 $[0,+\infty)\times[a_0,+\infty)$ 上连续.

ii) 积分 $\displaystyle\int_{a_0}^{+\infty}a\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\mathrm{d}a$ 关于 $t\geqslant 0$ 一致收敛. 因为

$$0<a\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\leqslant a\mathrm{e}^{-a^2},\forall t\geqslant 0.$$

而广义积分 $\displaystyle\int_{a_0}^{+\infty}a\mathrm{e}^{-a^2}\mathrm{d}a$ 收敛.

iii) 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}a\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\mathrm{d}t$ 关于 $a\geqslant a_0$ 一致收敛，因为

$$0<a\mathrm{e}^{-a^2(1+i^2)}\leqslant\mathrm{e}^{-a_0^2t^2},\forall a\geqslant a_0$$

而广义积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a_0^2 t^2}\mathrm{d}t$ 收敛.

iv) 广义积分 $\int_0^{+\infty}\left(\int_{a_0}^{+\infty} a\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\mathrm{d}a\right)\mathrm{d}t$ 收敛, 因为

$$0<\int_0^{+\infty}\left(\int_{a_0}^{+\infty} a\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\mathrm{d}a\right)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty}\left(\int_{0}^{+\infty} a\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\mathrm{d}a\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$$

因此根据定理18.13, 等式(18.1)成立.

在式(18.1)中令 $a_0\to 0^+$, 我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} a\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}a &= \lim_{a_0-0^+}\int_{a_0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} a\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}a\\ &=\lim_{a_0\to 0^+}\int_0^{+\infty}\left(\int_{a_0}^{+\infty} a\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\mathrm{d}a\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

最后, 我们证明等式右边可在积分号下取极限, 即

$$\begin{aligned}&\lim_{a_0\to 0^+}\int_0^{+\infty}\left(\int_{a_0}^{+\infty} a\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\mathrm{d}a\right)\mathrm{d}t\\ =&\int_0^{+\infty}\left(\lim_{a_0\to 0^+}\int_{a_0}^{+\infty} a\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\mathrm{d}a\right)\mathrm{d}t\\ =&\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} a\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\mathrm{d}a\right)\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{18.2}$$

为此我们注意到函数 $(t,a_0)\longmapsto \int_{a_0}^{+\infty} a\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\mathrm{d}a$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续 (为什么？) 而广义积分

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_{a_0}^{+\infty} a\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\mathrm{d}a\right)\mathrm{d}t$$

关于 $a_0\geqslant 0$ 一致收敛, 因此由定理18.10知式(18.2)成立. 此即表明

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} a\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}a=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} a\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\mathrm{d}a\right)\mathrm{d}t.$$

习题

1. 研究下列各广义积分在参数所指范围内的一致收敛性.

   1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^\lambda}\mathrm{d}x, \lambda\in[0,+\infty).$

   2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}\frac{\sin x}{x^p}dx$：

      i) $\lambda\in[0,+\infty), p>0$ 为常数；

      ii) $\lambda\in[0,+\infty), p\in[p_0,+\infty), p_0>0.$

   3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-\lambda)^2}\mathrm{d}x$：

      i) $\lambda\in(a,b), a,b\in\mathbb{R}$；

      ii) $\lambda\in(-\infty,+\infty).$

2. 证明下列广义积分关于所指参数的不一致收敛性.

1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx, \lambda \in [0, a](a > 0)$.

2) $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sin x dx, \lambda \in [0, +\infty)$.

3) $\int_0^{+\infty} \sqrt{\lambda} e^{-\lambda x^2} dx, \lambda \in [0, +\infty)$.

3. 设函数 $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 连续并且有界，试问极限

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda f(x)}{\lambda^2 + x^2} dx$$

存在吗？

4. 设函数 $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}_+^*$ 连续，并且广义积分 $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛，试问极限

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1 + \lambda g(x)} dx$$

存在吗？

5. 证明：函数 $\lambda \mapsto F(\lambda) = \int_0^1 \frac{\sin \lambda x}{\sqrt{|x - \lambda|}} dx, \lambda \in [0, 1]$ 在 $[0, 1]$ 上连续.

6. 设函数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义为：

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t} e^{-x^2 t}}{1 + t^2} dt.$$

1) 证明：F 在 $\mathbb{R}$ 上连续，并计算 $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

2) 证明：F 在 $x \neq 0$ 处可导，在 $x = 0$ 处的左、右导数 $F'_-(0), F'_+(0)$ 存在.

3) 画出函数 F 的图形.

7. 考虑如下积分

$$F(x) = \int_0^1 \frac{1}{t\sqrt{1 - t^2}} \log\left(\frac{1 + tx}{1 - tx}\right) dt, x \in [-1, 1].$$

1) 证明：F 在 $[-1, 1]$ 上有定义并在 $(-1, 1)$ 上连续.

2) 证明：F 在 $(-1, 1)$ 上可导.

3) 计算 $F'(x)$，由此导出 $F(x)$ 的值.

8. 利用积分号下求导或交换积分顺序的法则计算下列各积分：

1) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2} - e^{-x^a t^2}}{t} dt \, (a > 0, x > 0)$.

2) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t^2} - e^{-\beta t^2}}{t} dt \, (\alpha > 0, \beta > 0)$.

3) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t^2} - e^{-\beta t^2}}{t} \sin kt dt$, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t^2} - e^{-\beta t^2}}{t} \cos kt dt \; (\alpha > 0, \beta > 0)$.

4) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} \sin kt dt$, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} \cos kt dt \, (\alpha > 0, \beta > 0)$.

5) $\int_0^{+\infty} t e^{-\lambda t^2} \sin at dt \, (\lambda > 0)$.

9. 利用 Euler-Poisson 积分计算下列各积分：

1) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx$.

2) $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$.

3) $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\mathrm{d}x.$

10. 设 $a>0$，函数 $J_n:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$\forall x\in[a,+\infty), J_n(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t\sin t}{(t^2+x^2)^n}\mathrm{d}t\,(n\in\mathbb{N}).$$

1) 证明：$\forall n\geqslant 2$，函数 J_n 在 $[a,+\infty)$ 上连续.

2) 利用分部积分法证明：J_1 在 $[a,+\infty)$ 上连续.

3) 证明：$\forall n\geqslant 1$，函数 J_n 在 $[a,+\infty)$ 上是 C^∞ 类的，且

$$J_n'(x)=-2nxJ_{n+1}(x), \forall x\in[a,+\infty).$$

4) 利用分部积分法证明：$\forall n\geqslant 1, \forall x\geqslant a$,

$$J_n(x)+2n(2n-1)J_{n+1}(x)-4x^2n(n+1)J_{n+2}(x)=0,$$
$$xJ_n''(x)+2(n-1)J_n'(x)-xJ_n(x)=0.$$

11. 设 $a>0$，函数 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 满足下述条件：

$$\forall x\in\mathbb{R}\text{ 且 }|x|>a, \varphi(x)=0, \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_{-a}^{+a}\varphi(t)\mathrm{d}t=1,$$

函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界，并且在任一有限闭区间上 Riemann 可积. $\forall n\in\mathbb{N}$，令

$$F_n(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\varphi_n(x-t)\mathrm{d}t\quad(\varphi_n(y)=n\varphi(ny)).$$

1) 证明：若 x 是 f 的连续点，则

$$\lim_{n\to+\infty}F_n(x)=f(x).$$

如果 f 在有限开区间 (a,b) 上连续，则对任一闭区间 $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$，$\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(x)=f(x)$ 关于 $x\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛.

2) 假设 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，φ 在 $\mathbb{R}$ 上是 C^k 类的，证明函数 F_n 在 $\mathbb{R}$ 上也是 C^k 类的.

3) 利用函数 $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\psi(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{1-x^2}} & ,|x|<1,\\ 0 & ,|x|\geqslant 1\end{cases}$$

的 C^∞ 类性，证明：任意一个定义在有限闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，可以用一个 C^∞ 类的函数序列一致逼近.

18.3 Euler 积分

Euler 积分指的是下面两个广义积分

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x\,(a,b\in\mathbb{R})$$
$$\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\,(a\in\mathbb{R})$$

由于

$$x^{a-1}(1-x)^{b-1}\sim x^{a-1}\left(x\to 0^{+}\right)$$
$$x^{a-1}(1-x)^{b-1}\sim(1-x)^{b-1}\left(x\to 1^{-}\right)$$
$$x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\sim x^{a-1}\left(x\to 0^{+}\right),x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\Big/\frac{1}{x^{2}}\to 0(x\to+\infty),$$

故我们推得

$$\int_{0}^{1}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x\text{ 收敛 }\Longleftrightarrow a-1>-1,b-1>-1\Longleftrightarrow a>0,b>0,$$
$$\int_{0}^{+\infty}x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\text{ 收敛 }\Longleftrightarrow a-1>-1\Longleftrightarrow a>0.$$

因此如下定义的两个函数

$$(a,b)\longmapsto B(a,b)=\int_{0}^{1}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x\,(a,b)\in(0,+\infty)\times]0,+\infty)$$
$$a\longmapsto\Gamma(a)=\int_{0}^{+\infty}x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,a\in(0,+\infty)$$

分别称为 B(Beta) 函数与 Γ(Gamma) 函数.

下面我们来研究这两个函数的基本性质.

1. B 函数的性质

1) 对称性　$B(a,b)=B(b,a)$.

为此作变元代换 $x=1-y$ ，于是

$$\begin{aligned}B(a,b)&=\int_{0}^{1}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x\\&=-\int_{1}^{0}(1-y)^{a-1}y^{b-1}\mathrm{d}y\\&=\int_{0}^{1}y^{b-1}(1-y)^{a-1}\mathrm{d}y\\&=B(b,a)\end{aligned}$$

2) 递推性

$$B(a,b)=\frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)(b>1)=\frac{a-1}{a+b-1}B(a-1,b)(a>1).$$

事实上，当 $b>1$ 时，由分部积分法得到

$$\begin{aligned}B(a,b)&=\int_{0}^{1}(1-x)^{b-1}\left(\frac{x^{a}}{a}\right)^{\prime}\mathrm{d}x\\&=\left[\frac{x^{a}(1-x)^{b-1}}{a}\right]_{0}^{1}+\frac{b-1}{a}\int_{0}^{1}x^{a}(1-x)^{b-2}\mathrm{d}x\\&=\frac{b-1}{a}\int_{0}^{1}x^{a-1}(1-x)^{b-2}\mathrm{d}x-\frac{b-1}{a}\int_{0}^{1}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x\\&=\frac{b-1}{a}B(a,b-1)-\frac{b-1}{a}B(a,b)\end{aligned}$$

或

$$B(a,b)=\frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)$$

再由对称性，推得当 $a>1$ 时，

$$\begin{aligned}B(a,b)&=B(b,a)\\&=\frac{a-1}{a+b-1}B(b,a-1)\\&=\frac{a-1}{a+b-1}B(a-1,b)\end{aligned}$$

特别，若 $b=n\in\mathbb{N}$，则

$$B(a,n)=\frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{a+1}B(a,1).$$

而 $B(a,1)=\int_0^1 x^{a-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}$，故

$$B(a,n)=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n-1)}{a(a+1)(a+2)\cdot\cdots\cdot(a+n-1)}$$

如果 $a=m\in\mathbb{N}$，则

$$B(m,n)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

3)C^∞ 类性　B 函数在 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 是 C^∞ 类的，且

$$\frac{\partial^n B}{\partial a^n}(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}(\log x)^n\mathrm{d}x,$$
$$\frac{\partial^n B}{\partial b^n}(a,b)=(-1)^n\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}(\log(1-x))^n\mathrm{d}x.(\forall n\in\mathbb{N})$$

为此我们令

$$f(x,a,b)=x^{a-1}(1-x)^{b-1},\forall(x,a,b)\in(0,1)\times(0,+\infty)\times(0,+\infty)$$

则函数 $f:(0,1)\times(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 连续，并且

$$\frac{\partial^n f}{\partial a^n}(x,a,b)=x^{a-1}(1-x)^{b-1}(\log x)^n$$
$$\frac{\partial^n f}{\partial b^n}(x,a,b)=(-1)^n x^{a-1}(1-x)^{b-1}(\log(1-x))^n(\forall n\in\mathbb{N})$$

于是 $\frac{\partial^n f}{\partial a^n},\frac{\partial^n f}{\partial b^n}:(0,1)\times(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 也是连续的.

现任取 $(a_0,b_0)\in(0,+\infty)\times(0,+\infty)$．于是存在 $a>0$ 使得 $a<a_0,a<b_0$，下面我们来证明广义积分

$$\int_0^1\frac{\partial^n f}{\partial a^n}(x,a,b)\mathrm{d}x \text{ 与 } \int_0^1\frac{\partial^n f}{\partial b^n}(x,a,b)\mathrm{d}x$$

关于参数 $(a,b)\in(a,+\infty)\times(a,+\infty)$ 一致收敛.

事实上，我们有

$$\frac{\partial^n f}{\partial a^n}(x,a,b)=\left|x^{a-1}(1-x)^{b-1}(\log x)^n\right|\leqslant x^{a-1}(1-x)^{a-1}|\log x|^n$$
$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^n f}{\partial b^n}(x,a,b)\right|&=\left|(-1)^n x^{a-1}(1-x)^{b-1}(\log(1-x))^n\right|\\&\leqslant x^{\sigma-1}(1-x)^{a-1}|\log(1-x)|^n.\end{aligned}$$

取 $\lambda \in (0,1)$ 使得 $\alpha - 1 + \lambda > 0$ 则

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^{a-1}(1-x)^{a-1}|\log x|^n}{\frac{1}{x^\lambda}} = \lim_{x\to 0+} x^{a-1+\lambda}|\log x|^n = 0,$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^{a-1}(1-x)^{a-1}|\log(1-x)|^n}{\frac{1}{x^\lambda}} = \lim_{x\to 0+} x^{a-1+\lambda}|\log(1-x)|^n = 0,$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{x^{a-1}(1-x)^{a-1}|\log x|^n}{\frac{1}{(1-x)^\lambda}} = \lim_{x\to 1-} (1-x)^{a-1+\lambda}|\log x|^n = 0,$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{x^{a-1}(1-x)^{a-1}|\log(1-x)|^n}{\frac{1}{(1-x)^n}} = \lim_{x\to 1-} (1-x)^{a-1+\lambda}|\log(1-x)|^\lambda = 0.$$

而积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^\lambda}\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\lambda}\mathrm{d}x$ 收敛，由 Weierstrass 判别法知广义积分 $\int_0^1 \frac{\partial^n f}{\partial a^n}(x,a,b)\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 \frac{\partial^n f}{\partial b^n}(x,a,b)\mathrm{d}x$ 关于参数 $(a,b)\in(a,+\infty)\times(a,+\infty)$ 一致收敛.

根据定理18.10知，B 函数在 $(a,+\infty)\times(\alpha,+\infty)$ 上是 n 次连续可导的，即是 C^n 类的. 由 (a_0,b_0) 的任意性推知，B 函数在 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上是 C^n 类的. 因此在 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上是 C^∞ 类的，并且

$$\frac{\partial^n B}{\partial a^n}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{2-1}(\log x)^n \mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial^n B}{\partial b^n} - (a,b) = (-1)^n\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}(\log(1-x))^n \mathrm{d}x$$

$$(\forall n\in\mathbb{N}, \forall(a,b)\in(0,+\infty)\times(0,+\infty))$$

2. Γ 函数的性质

1) 递推性　$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)(\forall a>0)$.

为此由分部积分法得到

$$\begin{aligned}\Gamma(a+1) &= \int_0^{+\infty} x^a \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\ &= \left[-x^a\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty} + a\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\ &= a\Gamma(a)\end{aligned}$$

特别地，若 $a = n\in\mathbb{N}$，则我们得到

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1\Gamma(1).$$

由于 $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1$，故

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

由此可知，$\Gamma(a+1)$ 是 $n!$ 的自然推广.

2)C^∞ 类性　Γ 函数在 $(0,+\infty)$ 上是 C^∞ 类的，并且

$$\Gamma^{(n)}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}(\log x)^n\mathrm{d}x(\forall a>0, \forall n\in\mathbb{N})$$

为此令

$$f(x,a) = x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}, \forall(x,a)\in(0,+\infty)\times(0,+\infty),$$

则函数 $f:(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 连续，并且

$$\frac{\partial^n f}{\partial a^n}(x,a)=x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}(\log x)^n(\forall n\in\mathbb{N}).$$

于是 $\dfrac{\partial^n f}{\partial a^n}:(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 也是连续的.

现任取 $(\alpha,\beta)\subset(0,+\infty)$ 我们证明广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial^n f}{\partial a^n}(x,a)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}(\log x)^n\mathrm{d}x$$

关于参数 $a\in(\alpha,\beta)$ 一致收敛.

事实上，我们有：

在 $(0,1)$ 上：取 $\lambda\in(0,1)$ 使得 $\lambda+a-1>0$，于是

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial a^n}(x,a)\right|=\left|x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}(\log x)^n\right|\leqslant x^{a-1}|\log x|^n,$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^{a-1}|\log x|^n}{\frac{1}{x^{\lambda}}}=\lim_{x\to0+}x^{\lambda+a-1}|\log x|^n=0.$$

在 $[1,+\infty)$ 上：

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial a^n}(x,a)\right|=\left|x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}(\log x)^n\right|\leqslant x^{\beta-1}\mathrm{e}^{-x}(\log x)^n.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\beta-1}\mathrm{e}^{-x}(\log x)^n}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}x^{\beta+1}\mathrm{e}^{-x}(\log x)^n=0.$$

由于 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^{\lambda}}\mathrm{d}x$ 及 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，故广义积分 $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}|\log x|^n\mathrm{d}x$ 及 $\displaystyle\int_1^{+\infty}x^{\beta-1}\mathrm{e}^{-x}(\log x)^n\mathrm{d}x$ 收敛. 从而由 Weierstrass 判别法知，广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}(\log x)^n\mathrm{d}x$ 关于参数 $a\in(\alpha,\beta)$ 一致收敛.

根据定理18.10,Γ 函数在 (α,β) 上是 C^n 类的，再由 $(\alpha,\ \beta)\subset(0,+\infty)$ 的任意性知，Γ 在 $(0,+\infty)$ 上是 C^n 类的，从而在 $(0,+\infty)$ 上是 C^∞ 类的. 并且

$$\frac{\partial^n\Gamma}{\partial a^n}(a)=\int_0^{+\infty}x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}(\log x)^n\mathrm{d}x(\forall n\in\mathbb{N},\forall a>0).$$

3) 凸性　Γ 函数在 $(0,+\infty)$ 上是凸的. 这是因为由性质 2)，我们有

$$\Gamma''(a)=\int_0^{+\infty}x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}(\log x)^2\mathrm{d}x>0(\forall a>0)\tag{18.3}$$

4) 图形　由于 $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$，故存在 $a_0\in(1,2)$ 使得 $\Gamma'(a_0)=0$，从而

$$\Gamma'(a)<0,\forall a\in(0,a_0);\quad\Gamma'(a)>0,\forall a>a_0.$$

于是由 Taylor 公式及式(18.3)得到：$\forall a>a_0+1$，

$$\begin{aligned}\Gamma(a)&=\Gamma(a_0+1)+\Gamma'(\xi)(a-a_0-1)\\&>\Gamma(a_0+1)+\Gamma'(a_0+1)(a-a_0-1).\end{aligned}$$

这里 $\xi\in(a_0+1,a)$. 因此 $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\Gamma(a)=+\infty$.

另一方面，由 $\Gamma(a)=\dfrac{\Gamma(a+1)}{a}$ 及 Γ 的连续性推得 $\displaystyle\lim_{a\to0+}\Gamma(a)=+\infty$. 因此 Γ 当 $a\to0^+$ 的无穷远分支以正 y 轴为其垂直渐近线. 下面是 Γ 函数的大致图形.

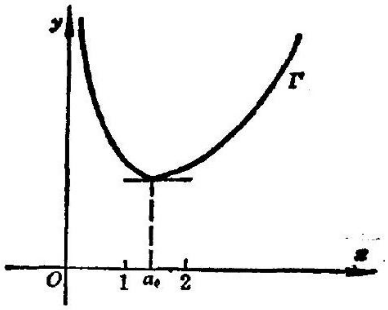


图 18.1

3. Γ 函数与 B 函数的关系

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

首先设 $a>1,b>1$.

在 $\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 中作变元代换 $x=ty(t>0)$ 得到

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a}=\int_0^{+\infty}y^{a-1}\mathrm{e}^{-ty}\mathrm{d}y(t>0)$$

由此用 $a+b$ 代换 $a,1+t$ 代换 t 又得到

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}}=\int_0^{+\infty}y^{a+b-1}\mathrm{e}^{-(1+b)y}\mathrm{d}y$$

再将上式两边同乘以 t^{a-1}，然后对 t 从 0 到 $+\infty$ 积分得到

$$\Gamma(a+b)\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}t^{a-1}y^{a+b-1}\mathrm{e}^{-(1+b)v}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t$$

等式左边的积分 $\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\mathrm{d}t=B(a,b)$，这只需对 $B(a,b)=\int_0^1x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}t$ 作变元替换 $x=\frac{t}{1+t}$ 即可.

等式右边，如果我们能证明它可以交换积分顺序，则我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}t^{a-1}y^{a+b-1}\mathrm{e}^{-(1+b)y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t\\
=&\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}t^{a-1}y^{a+b-1}\mathrm{e}^{-(1+b)y}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\\
=&\int_0^{+\infty}y^{a+b-1}\mathrm{e}^{-y}\left(\int_0^{+\infty}t^{a-1}\mathrm{e}^{-by}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\\
=&\int_0^{+\infty}y^{a+b-1}\mathrm{e}^{-y}\frac{\Gamma(a)}{y^a}\mathrm{d}y\\
=&\Gamma(a)\int_0^{+\infty}y^{b-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\\
=&\Gamma(a)\Gamma(b)\end{aligned}$$

从而

$$\Gamma(a+b)B(a,b)=\Gamma(a)\Gamma(b)$$

或

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

下面我们就来证明积分顺序可交换性：

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} t^{a-1}y^{a+b-1}\mathrm{e}^{-(1+t)y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} t^{a-1}y^{a+b-1}\mathrm{e}^{-(1+b)y}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y.$$

为此验证定理18.12的条件全部满足. 令

$$f(y,t)=t^{a-1}y^{a+b-1}\mathrm{e}^{-(1+b)y},\forall(t,y)\in(0,+\infty)x]0,+\infty),$$

则函数 $f:(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 连续. 其次

1) 广义积分 $\int_0^{+\infty} t^{a-1}y^{a+b-1}\mathrm{e}^{-(1+t)y}\mathrm{d}y$ 关于 $t\in[\alpha,\beta](\subset]0,\ +\infty)$) 一致收敛. 因为

$$t^{a-1}y^{a+b-1}\mathrm{e}^{-(1+b)y}\leqslant\beta^{a-1}y^{a+b-1}\mathrm{e}^{-(1+t)y},\forall t\in[\alpha,\beta],$$

而广义积分 $\int_0^{+\infty}\beta^{a-1}y^{a+b-1}\mathrm{e}^{-(1+b)}\mathrm{d}y$ 收敛.

2) 广义积分 $\int_0^{+\infty} t^{a-1}y^{a+b-1}\mathrm{e}^{-(1+t)y}\mathrm{d}t$ 关于 $y\in[c,d](\subset(0,+\infty)$) 一致收敛. 因为

$$t^{a-1}y^{a+b-1}\mathrm{e}^{-(1+b)y}\leqslant t^{a-1}d^{a+b-1}\mathrm{e}^{-(1+t)c},\forall y\in[c,d],$$

而广义积分 $\int_0^{+\infty} t^{a-1}d^{a+b-1}\mathrm{e}^{-(1+t)}\mathrm{d}t$ 收敛.

3) 广义积分 $\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} t^{a-1}y^{a+b-1}\mathrm{e}^{-(1+t)y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t=\Gamma(a)\Gamma(b)$ 收敛.

因此根据定理18.12知，上述的交换积分顺序成立.

现在考虑一般的 $a>0,b>0$ 的情形.

根据上面所证之结论，我们有

$$B(a+1,b+1)=\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}$$

由 Γ 及 B 的递推公式，

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{1(a+b+2)}&=\frac{a\Gamma(a)b\Gamma(b)}{(a+b+1)(a+b)\Gamma(a+b)},\\ B(a+1,b+1)&=\frac{a}{a+b+1}B(a,b+1)\\ &=\frac{a}{a+b+1}\cdot\frac{b}{a+b}B(a,b)\\ &=\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)}B(a,b).\end{aligned}$$

由此立即推得

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

这就完全证明了我们的结论.

作为这一节的结束，我们举两个利用 B 函数与 Γ 函数来表示广义积分的例子.

例题 18.14 考虑广义积分

$$\int_0^1 x^{p-1}\left(1-x^m\right)^{q-1}\mathrm{d}x(p,q,m>0)$$

作变元代换 $y=x^m$，则

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{p-1}\left(1-x^m\right)^{q-1}\mathrm{d}x &= \int_0^1 y^{\frac{p-1}{m}}(1-y)^{q-1}\cdot\frac{1}{m}y^{\frac{1-m}{m}}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{m}\int_0^1 y^{\frac{p}{m}-1}(1-y)^{q-1}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{m}B\left(\frac{p}{m},q\right) \\
&= \frac{1}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}
\end{aligned}$$

例题 18.15 考虑广义积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\theta\cos^{b-1}\theta\mathrm{d}\theta(a>0,b>0)$$

令 $x=\sin\theta$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\theta\cos^{b-1}\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^2 x^{a-1}\left(1-x^2\right)^{\frac{b}{2}-1}\mathrm{d}x$$

利用例18.14的结果，我们得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\theta\cos^{b-1}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}B\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

特别地

1) 若 $a=2m,b=2k$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2k-1}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(m)\Gamma(k)}{\Gamma(m+k)}=\frac{(m-1)!(k-1)!}{2(m+k-1)!}$$

2) 若 $a=1,b=1$，则

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}$$

由于 $\Gamma(1)=1$，故我们得到

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=\pi,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

此即

$$\int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}.$$

再令 $x=t^2$，我们又一次得到

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

习题

1. 证明：$\forall a>0,$

$$B(a,a)=2^{1-2a}B\left(a,\frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma(2a)=\frac{2^{2a-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right).$$

2. 证明：$\forall a \in (0,1)$,
$$B(a,1-a)=\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin\pi a}$$
为此,

1) 作变元代换 $t=\dfrac{x}{1-x}$，证明：
$$B(a,b)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\mathrm{d}t$$

2) 利用 1) 的结果，证明：
$$B(a,b)=\int_0^{1}\frac{t^{a-1}+t^{b-1}}{(1+t)^{a+b}}\mathrm{d}t$$

3) 利用函数项级数的一致收敛判别法证明：
$$\int_0^{1-\delta}\frac{t^{a-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{a+k}(1-\delta)^{a+k},\quad \forall\delta\in(0,1)$$
$$\int_0^{1}\frac{t^{a-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{(-1)^k}{a+k}(1-\delta)^{a+k}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{a+k}$$

4) 证明：$\displaystyle\int_0^{1}\frac{t^{(1-a)-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{a-k}$

5) 最后利用 $\dfrac{\pi}{\sin a\pi}$ 的级数表达式 (见第 14 章 §3 习题 3) 推出所要证明的结论.

3. 用 B 函数或 Γ 函数表示下列各广义积分.

1) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}}\,\mathrm{d}x\quad(n>0)$,　　2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$,

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,\mathrm{d}x\quad(b>a>0)$,　　4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}\log x}{1+x}\,\mathrm{d}x\quad(0<a<1)$

第十九章 重积分

这一章我们在 $\mathbb{R}^n(n \geqslant 1)$ 中研究定义在有界集上的实值函数的 Riemann 积分–重积分–它是第 5 章介绍的一元实值函数 Riemann 积分在高维空间上的推广. 利用积分定义了 $\mathbb{R}^n$ 的可测集及其 Jordan 测度, 详细介绍了重积分计算的几个典型方法.

19.1 $\mathbb{R}^n$ 中的长方体

1. 长方体的定义及测度

定义 19.1

设 $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ 并且 $a_i \leqslant b_i(i=1,2,\cdots,n)$.

1) 集合

$$P=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i=1,2,\cdots,n\}$$

称为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个以 $[a_i,b_i]\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为边的闭长方体.

2) 集合

$$\mathring{P}=\prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i, i=1,2,\cdots,n\}$$

称为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个以 $(a_i,b_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 为边的开长方体.

3) 实数 $(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n)$ 称为闭长方体 $P=\prod\limits_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$ 的 n-维测度, 记为 $m(P)$. 于是

$$m(P)=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n).$$

♣

由上述定义可知:

$n=1: P=[a,b](\mathring{P}=(a,b))$ 就是 $\mathbb{R}$ 上的闭 (开) 区间. P 的 1-维测度 $m(P)=b-a$ 就是闭区间 $[a,b]$ 的长度.

$n=2: P=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2](\mathring{P}=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2))$ 就是 $\mathbb{R}^2$ 上的闭 (开) 长方形. P 的 2-维测度 $m(P)=(b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)$ 就是此闭长方形的面积.

$n=3: P=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]\,(\mathring{P}=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times(a_3,b_3)\,)$ 就是 $\mathbb{R}^3$ 中的闭 (开) 立方体. P 的 3-维测度 $m(P)=(b_1-a_1)(b_2-a_2)(b_3-a_3)$ 就是此闭立方体的体积.

对于 $P=\prod\limits_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$, 下述两个结论容易验证:

1. 若 $a_i<b_i(i=1,2,\cdots,n)$, 则 P 的内部等于 $\mathring{P}$(这也就是上面定义中用 $\mathring{P}$ 记开长方体 $\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i,b_i)$ 的缘故).
2. $m(P)=0 \iff$ 存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $a_i=b_i \iff P$ 的内部 $\mathring{P}$ 为空集.

2. 闭长方体的分割

定义 19.2

设 $P=\prod\limits_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的任一闭长方体，并且 $\mathring{P}\neq\varnothing$. 令 $\sigma_i=\left(a_{i0},a_{i1},\cdots,a_{ih_i}\right)$ 是 $[a_i,b_i]$ 的任一分割 $(i=1,2,\cdots,n)$. 我们记

$$
\begin{aligned}
&\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n),\\
&P_{k_1k_2\cdots k_n}=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_{ik_i-1}\leqslant x_i\leqslant a_{ik_i} i=1,2,\cdots,n\right\},\\
&\delta(\sigma)=\max d\left(P_{k_1k_2\cdots k_n}\right)\left(d\left(P_{k_1k_2\cdots k_n}\right) \text{ 为 } P_{k_1k_2\cdots k_n} \text{ 的直径}\right).
\end{aligned}
$$

我们称 σ 为 P 的一个分割，$P_{k_1k_2\cdots k_n}$ 称为分割 σ 的一个单元，而 $\sigma(\sigma)$ 称为分割 σ 的跨距.

显然，我们有

$$
P=\bigcup_{k_1=1}^{k_1}\bigcup_{k_2=1}^{h_2}\cdots\bigcup_{k_n=1}^{h_n}P_{k_1k_2\cdots k_n}
$$

下图描绘的是 $n=2$ 时 $P=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ 的一个分割 σ：

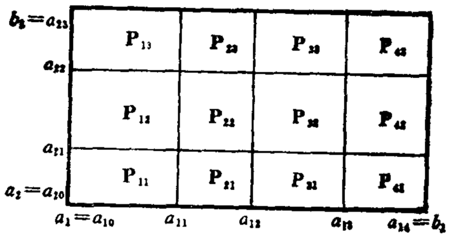


图 19.1

定理 19.1

设 $P=\prod\limits_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的任一闭长方体，σ 是 P 的任一分割，$P_{k_1k_2\cdots k_n}$ 是 σ 的分割单元，则

$$
m(P)=\sum_{k_1=1}^{k_1}\sum_{k_2=1}^{h_2}\cdots\sum_{k_n=1}^{h_n}m\left(P_{k_1k_2\cdots k_n}\right).
$$

证明 由分割单元 $P_{k_1k_2\cdots k_n}$ 的定义我们有

$$
P_{k_1k_2\cdots k_n}=\left[a_{1k_1-1},a_{1k_1}\right]\times\left[a_{2k_2-1},a_{2k_2}\right]\times\cdots\times\left[a_{nk_n-1},a_{nk_n}\right].
$$

因此

$$
m\left(P_{k_1k_2\cdots k_n}\right)=\left(a_{1k_1}-a_{1k_1-1}\right)\left(a_{2k_2}-a_{2k_2-1}\right)\cdots\cdot\left(a_{nk_n}-a_{nk_n-1}\right)
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\sum_{k_1=1}^{k_1}\sum_{k_2=1}^{k_2}\cdots\sum_{k_n=1}^{k_n}m\left(P_{k_1k_2\ldots k_n}\right)&=\sum_{k_1=1}^{h_1}\sum_{k_2=1}^{h_2}\cdots\sum_{k_n=1}^{h_n}\left(a_{1k_1}-a_{1k_1-1}\right)\cdot\left(a_{2k_2}-a_{2k_2-1}\right)\cdots\left(a_{nk_n}-a_{nk_n-1}\right)\\
&=\sum_{k_1=1}^{h_1}\left(a_{1k_1}-a_{1k_1-1}\right)\cdot\sum_{k_2=1}^{h_2}\left(a_{2k_2}-a_{2k_2-1}\right)\cdots\cdot\sum_{k_n=1}^{h_n}\left(a_{nk_n}-a_{nk_n-1}\right).
\end{aligned}
$$

由于 $\sigma_i=\left(a_{i0},a_{i1}\cdots,a_{ih_i}\right)$ 是 $[a_i,b_i]$ 的分割，故

$$\sum_{n_i=1}^{n_i}\left(a_{ik_i}-a_{ik_i-1}\right)=b_i-a_i(i=1,2,\cdots,n).$$

因此我们得到

$$\sum_{k_1=1}^{h_1}\sum_{k_2=1}^{h_2}\cdots\sum_{k_n=1}^{h_n}m\left(P_{k_1k_2\cdots k_n}\right)=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n)=m(P).$$

对于闭长方体 $P\subset\mathbb{R}^n$ 的任一分割 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$，若我们用 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 表示此分割 α 的全部分割单元，则今后更经常地用

$$\sigma=(P_1,P_2,\cdots,P_k)$$

来表示 P 的分割 σ.

定义 19.3

设 P 是 $\mathbb{R}^n$ 的任一闭长方体，$\sigma=(P_1,P_2,\cdots,P_k)$ 与 $\sigma'=(Q_1,Q_2,\cdots,Q_m)$ 是 P 的两个分割，如果每一个 P_i 是若干个 Q_j 的并，则我们称 σ' 比 σ 细.

例题 19.1 对 P 的任意两个分割

$$\sigma=(P_1,P_2,\cdots,P_k),\sigma'=(Q_1,Q_2,\cdots,Q_m),$$

所有非空交集 $P_i\cap Q_j$ 组成的集族形成 P 的一个新的分割，记为 $\sigma\vee\sigma'$, 显然 $\sigma\vee\sigma'$ 既比 σ 细，又比 σ' 细.

习题

1. 设 $P=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$，证明下述结论等价：

$$m(P)=0\iff\exists i\in\{1,2,\cdots,n\},a_i=b_i\iff\mathring{P}=\varnothing.$$

2. 设 $P=[0,1]\times[0,1]$，$\sigma_1=\left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)$,$\sigma_2=\left(0,\frac{1}{2},1\right)$ 是区间 $[0,1]$ 的两个分割，写出 P 的分割 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)$ 及 σ 的跨度 $\delta(\sigma)$. (注:σ_2 缺少一个)
3. 设 P 是 $\mathbb{R}^n$ 的一闭长方体，$P_1,P_2,\cdots,P_m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的 m 个闭长方体. 我们称 $\sigma=(P_1,P_2,\cdots,P_m)$ 是 P 的一个广义分割，如果下述性质成立：
   i) $\forall i=1,2,\cdots,m,P_i\neq\varnothing$
   ii) $\forall i,j=1,2,\cdots,m,i\neq j,\mathring{P}_i\cap\mathring{P}_j=\varnothing$
   iii) $\bigcup_{i=1}^{m}P_i=P$.

   证明：存在 P 的一个分割 $\gamma=(Q_1,Q_2,\cdots,Q_k)$ 使得
   1) γ 比 σ 细，即 σ 的每一个 P_i 是若干个 Q_j 的并；
   2) 包含在 $P_i\,(i=1,2,\cdots,m)$ 中的所有 Q_j 形成 P_i 的一个分割.

19.2 闭长方体上的可积函数

1. 闭长方体上的阶梯函数的积分

定义 19.4

设 $P \subset \mathbb{R}^n$ 是任一闭长方体，$\mathring{P} \neq \varnothing, f: P \to \mathbb{R}$ 是任一函数，我们称 f 是阶梯函数，如果存在 P 的一个分割 $\sigma = (P_1, P_2 \cdots, P_k)$ 及一个向量 $\xi = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k]$ 使得

$$f(x) = \xi_i \forall x \in \mathring{P}_i (i = 1, 2, \cdots, k).$$

$[\sigma;\ \xi] \triangleq [P_1, P_2, \ldots, P_k;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k]$ 称为适合于 f 的二元组.

显然若 $[\sigma;\ \xi]$ 与 $\left[\sigma';\ \xi'\right]$ 适合于 f，则存在一个向量 η 使得 $\left[\sigma \vee \sigma';\ \boldsymbol{\eta}\right]$ 适合于 f.

我们用 $\mathscr{E}(P)$ 表示所有定义在 P 上的阶梯函数的集合.

容易验证：若 $f, g \in \mathscr{E}(P)$，则 $f \pm g, fg, |f| \in \mathscr{E}(P)$.

下面一个命题是我们定义阶梯函数积分时需要的.

命题 19.1

设 $f \in \mathscr{E}(P), [\sigma;\ \boldsymbol{a}] = [P_1, P_2, \cdots, P_k;\ a_1, a_2, \cdots, a_k]$ 及 $\left[\sigma';\ \boldsymbol{b}\right] = [Q_1, Q_2, \cdots, Q_m;\ b_1, b_2, \cdots, b_m]$ 是适合于 f 的任意两个二元组，则

$$\sum_{i=1}^{k} a_i m\left(P_i\right) = \sum_{j=1}^{m} b_j m\left(Q_j\right).$$

证明 考虑与 σ, σ' 对应的分割 $\sigma \vee \sigma'$，记

$$\sigma \vee \sigma' = (S_1, S_2, \ldots, S_l).$$

于是存在一个向量 $\boldsymbol{c} = [c_1, c_2, \ldots, c_l]$ 使得 $\left[\sigma \vee \sigma';\ \boldsymbol{c}\right]$ 适合于 f. 我们来证明

$$\sum_{i=1}^{k} a_i m\left(P_i\right) = \sum_{i=1}^{l} c_i m\left(S_i\right) = \sum_{j=1}^{m} b_j m\left(Q_j\right).$$

事实上，每一个 P_i 是若干个 S_t 的并，若令 $P_i = S_{t_{i1}} \cup S_{t_{i2}} \bigcup \cdots \cup S_{i_{ik_i}}$，则 $a_i = c_{i_{i1}} = c_{i_{i2}} = \cdots = c_{t_{ik_i}}$. 从而

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} a_i m\left(P_i\right) &= \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{j=1}^{h_i} m\left(S_{t_{ij}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{h_i} a_i m\left(S_{t_{ij}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{h_i} c_{t_{ij}} m\left(S_{t_{ij}}\right) \\
&= \sum_{t=1}^{l} c_t m\left(S_t\right)
\end{aligned}$$

同理可证 $\sum\limits_{j=1}^{m} b_j m\left(Q_j\right) = \sum\limits_{\iota=1}^{l} c_\iota m\left(S_\iota\right)$. 因此上述等式成立.

此命题表明实数 $\sum_{i=1}^{k} a_i m(P_i)$ 只与 f 及 P 有关而与适合于 f 的二元组 $[\sigma;\ \boldsymbol{a}]$ 的选择无关. 因此我们可以引入下述定义.

定义 19.5

设 $f \in \mathscr{E}(P).[\sigma;\ \boldsymbol{a}] = [P_1, P_2, \ldots, P_k;\ a_1, a_2, \cdots, a_k]$ 是适合于 f 的任一二元组, 则我们称实数 $\sum_{i=1}^{k} a_i m(P_i)$ 为 f 在 P 上的积分, 记为 $\int_P f$ 或 $\int_P f(x)\mathrm{d}x$, 于是

$$\int_P f = \int_P f(x)\mathrm{d}x \triangleq \sum_{i=1}^{m} a_i m(P_i)$$

关于积分 $\int_P f$ 的基本性质, 我们综合成下述定理.

定理 19.2

设 $f, g \in \mathscr{E}(P), a, \beta \in \mathbb{R}$, 则

1. $\int_P (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_P f + \beta \int_P g$;
2. $\int_P 1 = m(P)$;
3. 若 $f \geqslant 0$, 则 $\int_P f \geqslant 0$;
4. 若 $f \geqslant g$, 则 $\int_P f \geqslant \int_P g$;
5. $\left|\int_P f\right| \leqslant \int_P |f|$;
6. 若 $\sigma = (P_1, P_2, \cdots, P_k)$ 是 P 的任一分割, 则
$$\int_P f = \int_{P_1} f + \int_{P_2} f + \cdots + \int_{P_k} f.$$

这些性质的证明完全可以仿照一元实值阶梯函数相应性质的证明方法进行. 我们留给读者作为练习.

下面我们来研究一般函数的积分.

2. 闭长方体上的一般函数积分

1) 可积函数及其积分的定义

定义 19.6

设 $P \subset \mathbb{R}^n$ 是任一闭长方体, $\mathring{P} \neq \varnothing, f : P \to \mathbb{R}$ 是任一函数, 我们称 f 在 P 上是 Riemann 可积的 (简称为可积), 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists \varphi, \psi \in \mathscr{E}(P)$ 使得

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x), \forall x \in P, \int_P (\psi - \varphi) < \varepsilon.$$

例题 19.2 $\forall f \in \mathscr{E}(P), f$ 在 P 上 Riemann 可积.

为此只需取 $\varphi = \psi = f$.

例题 19.3 设函数 $f: P=[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 若\quad x,y\in Q\cap[0,1];\\ 0, & 若\quad x\in Q^c\cap[0,1] 或\ y\in Q^c\cap[0,1].\end{cases}$$

则 f 在 P 上不是 Riemann 可积的.

证明的思想方法与证明 Dirichlet 函数在 $[0,1]$ 上不可积完全类似. 我们留给读者去完成.

直接由 Riemann 可积性定义可知, 任何一个 Riemann 可积函数 $f: P\to\mathbb{R}$ 在 P 上有界.

下面我们给出函数 Riemann 可积的下述等价命题.

定理 19.3

设 $f: P\to\mathbb{R}$ 是任一有界函数, 则下述结论等价:

1. f 在 P 上 Riemann 可积.
2. $\forall\varepsilon>0,\exists h,k\in\mathscr{E}(P)$ 使得
$$|f(x)-h(x)|\leqslant k(x),\forall x\in P,\int_P k<\varepsilon.$$
3. 存在阶梯函数序列 $\langle h_n,k_n\rangle, h_n,k_n\in\mathscr{E}(P)$, 使得
$$|f(x)-h_n(x)|\leqslant k_n(x),\forall x\in P,\forall n\in\mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty}\int_P k_n=0.$$

(此阶梯函数序列 $\langle h_n,k_n\rangle$ 称为适合于 f 的阶梯函数序列)

此定理与定理 **??**的证明完全一样, 只需将 $[a,b]$ 改为 P 即可. 证明从略.

现在设 $f: P\to\mathbb{R}$ 是任一 Riemann 可积函数, $\langle h_n,k_n\rangle$ 与 $\left\langle\widetilde{h}_n,\widetilde{k}_n\right\rangle$, 是适合于 f 的任意两个阶梯函数序列, 仿照定理**??**后面引理的证明方法一样可证:

1. 实数序列 $\left\langle\int_P h_n\right\rangle$ 与 $\left\langle\int_P \widetilde{h}_n\right\rangle$ 都收敛,
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_P h_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_P\widetilde{h}_n$.

因此我们可以引入下面的定义.

定义 19.7

设 $f: P\to\mathbb{R}$ 是任一 Riemann 可积函数, $\langle h_n,k_n\rangle$ 是适合于 f 的任一阶梯函数序列, 则实数序列 $\left\langle\int_P h_n\right\rangle$ 的极限称为 f 在 P 上的 Riemann 积分 (简称为积分), 记为 $\int_P f$ 或 $\int_P f(x)\mathrm{d}x$. 于是

$$\int_P f=\int_P f(x)\mathrm{d}x\triangleq\lim_{n\to+\infty}\int_p h_n.$$

由定义可知, 阶梯函数 $f\in\mathscr{E}(P)$ 的积分与作为 Riemann 可积函数的 Riemann 积分是一致的. 正因为这样, 我们使用了同一记号 $\int_P f$ 来表示它们的共同积分值.

以下我们用 $\mathscr{R}(P)$ 表示所有定义在闭长方体 $P\subset\mathbb{R}^n$ 上的 Riemann 可思函数的集合.

2) 可积函数的性质

定理 19.4

设 $f,g\in\mathscr{R}(P),a,\beta\in\mathbb{R}$ 则

1. $\alpha f+\beta g\in\mathscr{R}(P)$, 并且 $\int_P(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_P f+\beta\int_P g$;

2. 若 $f \geqslant 0$, 则 $\int_P f \geqslant 0$；
3. 若 $f \geqslant g$, 则 $\int_P f \geqslant \int_P g$；
4. $|f| \in \mathscr{R}(P)$, 并且 $\left|\int_P f\right| \leqslant \int_P |f|$；
5. $fg \in \mathscr{R}(P)$.

定理 19.5

设 $\sigma = (P_1, P_2, \cdots, P_k)$ 是 $P \subset \mathbb{R}^n$ 的任一分割, $f : P \to \mathbb{R}$ 是任一有界函数, $f|_{P_i}$ 表示 f 在 P_i 上的限制 $(i = 1, 2, \cdots, k)$. 那么 f 在 P 上可积的充分必要条件是 $f|_{P_i}$ 在 P_i 上可积 $(i = 1, 2, \cdots, k)$, 并且这时

$$\int_P f = \sum_{i=1}^{k} \int_{P_i} f|_{P_i}$$

这两个定理列出了定义在闭长方体 P 上的 Riemann 可积函数的基本性质, 它们的证明也与一元实值 Riemann 可积函数相应性质的证明类似. 具体的证明过程我们留给读者.

3) 可积函数类

定理 19.6

任何一个连续函数 $f : P \to \mathbb{R}$ 在 P 上是 Riemann 可积的.

证明 因为 P 是紧集, 故 f 在 P 上一致连续, 从而

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\forall x, y \in P, \|x - y\| < \eta) \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

现在设 $\sigma = (P_1, P_2, \cdots, P_k)$ 是 P 的任一分割使得 $\delta(\sigma) < \eta$, 在每一个 $\mathring{P}_i$ 上任取一点 x_i, 构造两个阶梯函数 $\varphi, \psi : P \to \mathbb{R}$ 如下:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x_i) - \varepsilon, & x \in \mathring{P}_i, \\ f(x), & x \in \partial P_i; \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} f(x_i) + \varepsilon, & x \in \mathring{P}_i, \\ f(x), & x \in \partial P_i. \end{cases}$$

则我们有

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x) \quad \forall x \in P, 0 \leqslant \int_P (\psi - \varphi) = 2\varepsilon m(P)$$

根据定义可知, f 在 P 上 Riemann 可积.

定理 19.7

设 $f_n \in \mathscr{R}(P)(n \in \mathbb{N})$, 并且 $\langle f_n \rangle$ 在 P 上一致收敛于 $f : P \to \mathbb{R}$, 则 $f \in \mathscr{R}(P)$, 并且

$$\int_P f = \lim_{n \to +\infty} \int_P f_n.$$

证明 因为 $\langle f_n\rangle$ 在 P 上一致收敛于 f, 故

$$\sup_{x\in P}|f_n(x)-f(x)|\to 0(n\to+\infty).$$

从而

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall x\in P)\Longrightarrow f_N(x)-\varepsilon<f(x)<f_N(x)+\varepsilon.$$

由于 $f_N\in\mathscr{R}(P)$, 故存在 $\widetilde{\varphi},\widetilde{\varphi}\in\mathscr{E}(P)$ 使得

$$\widetilde{\varphi}(x)\leqslant f_N(x)\leqslant\widetilde{\psi}(x),\forall x\in P,\int_P(\widetilde{\psi}-\widetilde{\varphi})<\varepsilon.$$

现在我们令

$$\varphi(x)=\widetilde{\varphi}(x)-\varepsilon,\psi(x)=\widetilde{\psi}(x)+\varepsilon,\forall x\in P,$$

则 $\varphi,\psi\in\mathscr{E}(P)$, 并且

$$\varphi(x)<f(x)\leqslant\psi(x),\forall x\in P,\int_P(\psi-\varphi)=\int_P(\widetilde{\psi}-\widetilde{\varphi})+2\varepsilon m(P)<\varepsilon(1+2m(P)).$$

根据定义知，f 在 P 上可积.

最后，由

$$\left|\int_P f_n-\int_P f\right|=\left|\int_P(f_n-f)\right|\leqslant\int_P|f_n-f|\leqslant\sup_{x\in P}|f_n(x)-f(x)|\cdot m(P)$$

知

$$\lim_{n\to+\infty}\int_P f_n=\int_P f.$$

习题

1. 设 $f:P\to\mathbb{R}$ 是任一阶梯函数，证明：若二元组 $[\sigma;\ \boldsymbol{a}]$ 与 $[\sigma';\ \boldsymbol{b}]$ 适合于 f，则存在向量 ξ 使得 $[\sigma\vee\sigma';\ \xi]$ 也适合于 f,
2. 证明：若 $f,g\in\mathscr{E}(P)$，则 $f+g,fg,|f|\in\mathscr{E}(P)$.
3. 证明：例19.2中的函数 f 不是 Riemann 可积的.
4. 证明定理19.5.
5. 设 $P\subset\mathbb{R}^n$ 是任一闭长方体，且 $\mathring{P}\neq\varnothing$，$f\in\mathscr{R}(P)$. 设 $\sigma=(P_1,P_2,\cdots,P_k)$ 是 P 的任一广义分割. 证明：$f|_{P_i}\in\mathscr{R}(P_i),(i=1,2,\cdots,k)$，且
$$\int_P f=\sum_{i=1}^k\int_{P_i}f|_{P_i}$$
6. 设 $P\subset\mathbb{R}^n$ 是任一闭长方体，且 $\mathring{P}\neq\varnothing$，$f:P\to\mathbb{R}$ 是任一有界函数. 定义下面两个集合：
$$\Phi(f)=\{\varphi\in\mathscr{E}(P)\mid\varphi\leqslant f\},$$
$$\Psi(f)=\{\psi\in\mathscr{E}(P)\mid f\leqslant\psi\},$$
及
$$I(f)=\sup_{\varphi\in\Phi(f)}\int_P\varphi,\quad S(f)=\inf_{\psi\in\Psi(f)}\int_P\psi$$
$I(f)$ 与 $S(f)$ 分别称为 f 在 P 上的下积分与上积分，记为
$$I(f)={}_*\int_P f,\quad S(f)={}^*\int_P f$$

1) 证明:$_*\int_P f \leqslant {}^*\int_P f$;

2) 证明:$f \in \mathscr{R}(P)$ 当且仅当 $_*\int_P f = {}^*\int_P f$, 并且这时

$$\int_P f = {}_*\int_P f = {}^*\int_P f$$

19.3 有界集上的可积函数

1. 有界集上的可积函数定义

定义 19.8

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是任一有界非空集合, $f : A \to \mathbb{R}$ 是任一有界函数. $P \subset \mathbb{R}^n$ 是一闭长方体使得 $A \subset P$. 定义函数 $\widetilde{f}_P : P \to \mathbb{R}$ 如下:

$$\widetilde{f}_P(x) = \begin{cases} f(x), & 若\ x \in A, \\ 0, & 若\ x \in P - A, \end{cases}$$

则我们称 $\widetilde{f}_P$ 为函数 f 在 P 上的标准延拓.

现在设 $\widetilde{f}_Q$ 是 f 的另一个标准延拓.

下面我们来研究 f 的两个标准延拓 $\widetilde{f}_P$ 与 $\widetilde{f}_Q$ 的可积性之间的关系.

命题 19.2

$\widetilde{f}_P$ 在 P 上可积当且仅当 $\widetilde{f}_Q$ 在 Q 上可积, 并且这时

$$\int_P \widetilde{f}_P = \int_Q \widetilde{f}_Q.$$

证明 设 $\widetilde{f}_P$ 在 P 上可积, 令 $S = P \cap Q$, 则 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的闭长方体, 并且 $A \subset S$.

设 $\sigma = (P_1, P_2, \cdots, P_k)$ 为 P 的一个分割使得 $P_1 = S$, $\sigma' = (Q_1, Q_2, \cdots, Q_m)$ 为 Q 的一个分割使得 $Q_1 = S$(如下图所示).

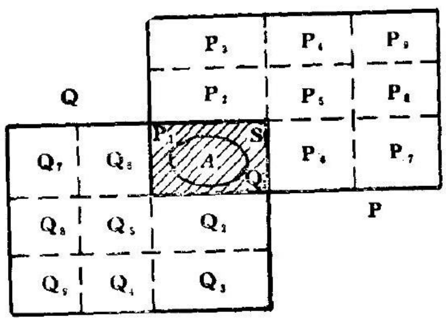


图 19.2

根据定理 19.5 知 $\widetilde{f}_P$ 在 S 上的限制在 S 上可积. 由于 $\widetilde{f_Q}(x) = \widetilde{f_P}(x), \forall x \in S$, 故 $\widetilde{f_Q}$ 在 S 上的限制在 S 上也是可积的.

另一方面, 由于 $\widetilde{f}_Q(x) = 0, \forall x \in \bigcup\limits_{i=2}^{m} Q_i$, 故 $\widetilde{f}_Q$ 在 $\bigcup\limits_{i=2}^{m} Q_i$ 上的限制在 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} Q_i$ 上可积, 从而根据同一定理 19.5知, $\widetilde{f_Q}$ 在 $\mathbb{C}$ 可积.

同理可证，若 $\widetilde{f}_Q$ 在 Q 上可积，则 $\widetilde{f}_P$ 在 P 上可积，

现在我们有

$$\int_P \widetilde{f}_P = \int_S \widetilde{f}_P + \int_{\bigcup_{i=2}^k P_i} \widetilde{f}_P = \int_S \widetilde{f}_P,$$

$$\int_Q \widetilde{f}_Q = \int_S \widetilde{f}_Q + \int_{\bigcup_{i=2}^m Q_i} \widetilde{f_Q} = \int_S \widetilde{f_Q} = \int_S \widetilde{f_P},$$

因此

$$\int_P \widetilde{f_P} = \int_Q \widetilde{f_Q}.$$

这个命题表明积分值 $\int_P \widetilde{f}_P$ 是一个只与 f 有关而与 f 的标准延拆的选择无关的定数.

根据这一事实，我们可以作下述定义.

定义 19.9

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是任一有界集合，$f: A \to \mathbb{R}$ 是任一有界函数. 我们称 f 在 A 上是 Riemann 可积的 (简称为可积)，如果 f 的一个标准延拓 $\widetilde{f}$ 任 P 上是 Riemann 可积的，而 $\widetilde{f_P}$ 在 P 上的 Riemann 积分 $\int_P \widetilde{f}_P$ 称为 f 在 A 上的 Riemann 积分 (简称为积分)，记为 $\int_A f$ 或 $\int_A f(x)\mathrm{d}x$，于是

$$\int_A f = \int_A f(x)\mathrm{d}x \triangleq \int_P f_P$$

若 $A = \varnothing$，则我们约定 $\int_A f = 0$.

2. 可测集及其 Jordan 测度

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是任一有界集合，我们用 χ_A 表示 A 的特征函数，即

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & 若 \ \ x \in A, \\ 0, & 若 \ \ x \in \mathbb{R}^n - A. \end{cases}$$

由上述命题可知，若 $P, Q \subset \mathbb{R}^n$ 是任意两个闭长方体，使得 $\boldsymbol{A} \subset P, A \subset Q$，则 χ_A 在 P 上的限制 $\chi_A|_P$ 与 χ_A 在 Q 上的限制 $\chi_A|_Q$ 具有相同的可积性与相间的积分值.

定义 19.10

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是任一有界集合.

1. 我们称 χ_A 在 A 上可积，如果存在一个闭长方体 $P \subset \mathbb{R}^n$ 使得 $A \subset P$，并且 $\chi_A|_P$ 在 P 上可积. 积分 $\int_P \chi_A|_P$ 称为 χ_A 在 A 上的积分，记为 $\int_A \chi_A$.
2. 我们称 A 是可测的，如果 χ_A 在 A 上可积，χ_A 在 A 上的积分 $\int_A X_A$ 称为 A 的 Jordan 测度 (简称为测度)，记为 $m(A)$. 于是

$$m(A) \triangleq \int_A \chi_A.$$

若 $A = \varnothing$，则我们约定 $m(A) = 0$.

由上述定义我们可以得出下述三个简单结论：

1) 若 $A = P$，则 P 的 Jordan 测度与它的 n-维测度相等. 这也就是为什么用 $m(A)$ 来表示 A 的 Jordan 测度的缘故.

2) 对闭长方体 $P \subset \mathbb{R}^n$, 开长方体 $\mathring{P}$ 也是可测的, 并且它们的测度相等, 即

$$m(P) = m(\mathring{P})$$

这是因为若 $P = \varnothing$, 则 $\mathring{P} = \varnothing$, 从而

$$m(P) = m(\mathring{P}) = 0$$

若 $P \neq \varnothing$, 则特征函数 χ_P 与 $\chi_{\mathring{P}}$ 只在 P 的边界 ∂P 上的值不同. 根据定义在 $\mathbb{R}^n$ 的闭长方体上的阶梯函数的积分定义可知, $\mathring{P}$ 是可测的, 并且

$$m(P) = \int_P \chi_P = \int_P \chi_P,$$
$$m(\mathring{P}) = \int_{\mathring{P}} \chi_{\mathring{P}} = \int_P \chi_{\mathring{P}},$$

因此 $m(P) = m(\mathring{P})$.

3) 在 $\mathbb{R}^n$ 中存在不可测集. 例如集合

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in Q \cap [0, 1]\right\},$$

因为 A 的特征函数 χ_A 在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的限制就是 §2 例 219.2的函数 f.

现在我们记 $\mathscr{M}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的所有可测集的集合.

3. 可测集的性质

1) 可测集的运算性质

定理 19.8

$\forall A, B \in \mathscr{M}$, 下述结论成立:

1. 若 $A \subset B$, 则 $m(A) \leqslant m(B)$.
2. $A \cap B \in \mathscr{M}, A \cup B \in \mathscr{M}, A - B \in \mathscr{M}$, 并且

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B),$$

特别地, 若 $A \cap B = \varnothing$, 则

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B).$$

证明 1) 设 $P \subset \mathbb{R}^n$ 是任一闭长方体, 使得 $B \subset P$. 于是 $A \subset P$. 因此

$$\chi_A|_P(x) \leqslant \chi_B|_P(x), \forall x \in P.$$

从而 $\int_A \chi_A \leqslant \int_B \chi_B$. 此即为 $m(A) \leqslant m(B)$.

2) 对 $A \cap B$: 我们有

$$\chi_{A \cdot B} = \chi_A \cdot \chi_B.$$

现设 $P \subset \mathbb{R}^2$ 是任一闭长方体, 使得 $A \cup B \subset P$. 那么 $A \cap B \subset P, A \subset P, B \subset P$, 从而 $\chi_A|_P$ 与 $\chi_B|_P$ 在 P 上可积, 根据定理19.4知 $\chi_{A\cap B}\big|_P = \chi_A|_P \cdot \chi_B|_P$ 在 P 上可积, 因此 $A \cap B \in \mathscr{M}$.

对 $A \cup B$: 我们有

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$$

因为 $\chi_{A \cap B}|_P$ 在 P 上可积, 从而 $A \cup B \in \mathscr{M}$.

对 $A - B$: 我们有

$$\chi_{A-B} = \chi_A - \chi_{A \cap B}.$$

故 $\chi_{A-B}|_P$ 在 P 上可积，从而 $A-B$ 上，

最后由等式 $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}$ 得到

$$\int_P \chi_{A\cup B}|_P=\int_P \chi_A|_P+\int_P \chi_B|_P-\int_P x_{A\cap B}|_P,$$

因此

$$m(A\cup B)=m(A)+m(B)-m(A\cap B).$$

特别地，若 $A\cap B=\varnothing$, 则 $m(A\cap B)=0$, 从而

$$m(A\cup B)=m(A)+m(B)$$

推论 19.1

若 $A_1,A_2,\cdots,A_k\in\mathscr{M}$, 则 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\in\mathscr{N}$, 并且

$$m\left(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\right)\leqslant m\left(A_1\right)+m\left(A_2\right)+\cdots+m\left(A_k\right),$$

特别地，若 $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$, 则

$$m\left(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\right)=m\left(A_1\right)+m\left(A_2\right)+\cdots+m\left(A_k\right).$$

2）可测集的特征性质

首先我们给出下述定义.

定义 19.11

我们称 $\mathbb{R}^n$ 的可测集 E 是简单可测集，如果它是 $\mathbb{R}^n$ 的有限多个闭长方体的并.

显然，若 E 是简单可测集，则存在有限多个 $\mathbb{R}^n$ 的闭长方体 $P_1,P_2,\cdots P_k$ 使得

$$\mathring{P}_i\cap\mathring{P}_j=\varnothing(i\neq j),E=\bigcup_{i=1}^{k}P_i$$

以而 $m(E)=\sum\limits_{i=1}^{n}m(P_i)$, 例如对下图所示，我们有

$$E=\bigcup_{i=1}^{3}E_i=\bigcup_{j=1}^{12}P_j$$

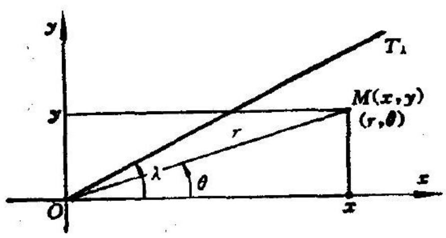


图 19.3

定理 19.9 (可测集的穿一特征性定理)

设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是任一有界集合，则下述结论等价：

1. A 是可测的，

2. $\forall \varepsilon > 0$, 存在两个简意可测集 E 与 F 使得
$$E \subset A \subset F, m(F-E) < \varepsilon.$$

证明 1)$\Longrightarrow$ 2). 设 A 是可测集, $P \subset \mathbb{R}^n$ 是一闭长方体, 使得 $A \subset P$. 由于 $\chi_A|_P$ 在 P 上可积, 故存在 $\varphi, \psi \in \mathscr{E}(P)$, 使得
$$\varphi(x) \leqslant x_A|_P(x) < \psi(x), \forall x \in P, \int_P (\psi - \varphi) < \varepsilon.$$

设 $\sigma = (P_1, P_2, \cdots, P_m)$ 是同时适合于 φ 与 ψ 的 P 的一个分割. $E = \bigcup\limits_{l=1}^{k} P_{i_l}$ 为所有包含在 A 的 P 的分割单元 P_{i_l} 的并, $F = \bigcup\limits_{s=1}^{h} P_{j_s}$ 为所有与 A 相交的 P 的分割单元 P_{j_s} 的并. 于是 E 与 F 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个简单可测集, 并且 $E \subset A \subset F$.

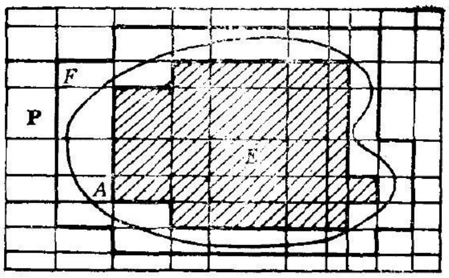


图 19.4

下面我们构造函数 $h, k: P \to \mathbb{R}$ 如下:
$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \in E, \\ 0, & \text{若 } x \in P - E; \end{cases} \qquad k(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \in F, \\ 0, & \text{若 } x \in P - F. \end{cases}$$
显然 $h, k \in \mathscr{E}(P)$, 并且满足
$$\varphi(x) \leqslant h(x) \leqslant x_A|_P(x) \leqslant k(x) \leqslant \psi(x), \forall x \in P,$$
$$\int_P (k-h) \leqslant \int_P (\psi - \varphi) < \varepsilon,$$
$$m(E) = \int_P h, m(F) = \int_P k.$$
因此
$$m(F-E) = m(F) - m(E) = \int_P (k-h) < \varepsilon$$

2) $\Longrightarrow$ 1). 假设 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 的两个简单可测集 E 与 F 使得 $E \subset A \subset F$, 并且 $m(F-E) < \varepsilon$. 由于 F 有界, 故存在闭长方体 $P \subset \mathbb{R}^n$ 使得 $E \subset P, F \subset P$. 定义函数 $\varphi, \psi: P \to \mathbb{R}$ 如下:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \in E, \\ 0, & \text{若 } x \in P - E; \end{cases} \qquad \psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \in F, \\ 0, & \text{若 } x \in P - F, \end{cases}$$

则 $\varphi, \psi \in \mathscr{E}(P)$, 并且 $m(E) = \int_P \varphi, m(F) = \int_P \psi$, 以及

$$\varphi(x) \leqslant \chi_A|_P(x) \leqslant \psi(x), \forall x \in P,$$
$$\int_P (\psi - \varphi) = m(F) - m(E) = m(F - E) < \varepsilon,$$

此即表明 $\chi_A|_P$ 在 P 上可积, 从而 A 是可测集.

定理 19.10 (可测集的第二特征性定理)

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是任一有界集, 则下述结论等价:

1. A 是可测的.
2. $m(A) = \sup\{m(E) \mid E \subset A, E$ 为简单可测集 $\} = \inf\{m(F) \mid A \subset F, F$ 为简单可测集 $\}$.

并且这时

$$\begin{aligned} m(A) &= \sup\{m(E) \mid E \subset A, E \text{ 为简单可测集 }\} \\ &= \inf\{m(F) \mid A \subset F, F \text{ 为简单可测集 }\}. \end{aligned}$$

证明 1) $\Longrightarrow$ 2). 设 A 是可测集. 由定理19.9知, $\forall \varepsilon > 0$, 存在简单可测集 E 与 F 使得

$$E \subset A \subset F, m(F - E) < \varepsilon.$$

由此推得

$$\begin{aligned} &m(E) \leqslant m(A) \leqslant m(F) \\ &m(A) - m(E) \leqslant m(F) - m(E) = m(F - E) < \varepsilon \\ &m(F) - m(A) \leqslant m(F) - m(E) = m(F - E) < \varepsilon \end{aligned}$$

或

$$m(E) > m(A) - \varepsilon, m(F) < m(A) + \varepsilon$$

此即表明

$$\begin{aligned} m(A) &= \sup\{m(E) \mid E \subset A, E \text{ 是简单可测集 }\} \\ &= \inf\{m(F) \mid A \subset F, F \text{ 是简单可测集 }\}. \end{aligned}$$

2) $\Longrightarrow$ 1). 假设条件成立, 令

$$\begin{aligned} L &= \sup\{m(E) \mid E \subset A, E \text{ 是简单可测集 }\} \\ &= \inf\{m(F) \mid A \subset F, F \text{ 是简单可测集 }\}, \end{aligned}$$

由上确界与下确界性质知, $\forall \varepsilon > 0$, 存在简单可测集 E, F 使得

$$E \subset A \subset F, L - \varepsilon/2 < m(E), m(F) < L + \varepsilon/2,$$

由此得到

$$\begin{aligned} E \subset A \subset F, m(F - E) &= m(F) - m(E) \\ &< L + \varepsilon/2 - (L - \varepsilon/2) = \varepsilon. \end{aligned}$$

根据定理 19.9知, A 是可测集. 从而由 1) 所证, $L = m(A)$.

注 1) 对 $\mathbb{R}^n$ 的任一有界集 A, 我们令

$$\underline{m}(A) = \sup\{m(E) : E \subset A, B \text{ 是简单可测集 }\},$$
$$\overline{m}(A) = \inf\{m(F) \mid A \subset F, F \text{ 是简单可测集 }\},$$

则 $\underline{m}(A)$ 与 $\overline{m}(A)$ 分别称为 A 的内测度与外测度.

因此定理19.10表明：A 是可测集的充分必要条件是 $\underline{m}(A)=\overline{m}(A)$, 并且这时，此公共值就是 A 的 Jordan 测度，即

$$m(A)=\underline{m}(A)=\overline{m}(A)$$

显然我们也可以采用这种方法定义 $\mathbb{R}^n$ 的有界集的可测性及其 Jordan 测度.

2) 具有零测度的可测集对于一个集的可测性判断起着十分重要的作用，下面我们就在给出可测集的第三个特征性定理之前，先研究一下零测度集的性质.

定理 19.11

$\mathbb{R}^n$ 的有界集 A 是零测度集的充分必要条件是：$\forall \varepsilon>0$, 存在简单可测集 F 使得

$$A\subset F, m(F)<\varepsilon.$$

证明 (必要性) 假设 A 是零测度集，即 A 可测，并且 $m(A)=0$. 由第一特征性定理知，$\forall \varepsilon>0$, 存在两个简单可测集 E 与 F 使得

$$E\subset A\subset F, m(F-E)<\varepsilon.$$

由于 $m(E)\leqslant m(A)$, 故 $m(E)=0$, 从而

$$m(F)=m(E)+m(F-R)<\varepsilon$$

(充分性) 设 $\forall \varepsilon>0$, 存在简单可测集 F 使得

$$A\subset F, m(F)<\varepsilon.$$

若 $A=\varnothing$, 则当然 A 是可测集并且 $m(A)=0$.

若 $A\neq\varnothing$, 则令 $x\in A, E=\{x\}$. 则 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的闭长方体，$m(E)=0$, 并且

$$E\subset A\subset F, m(F-E)=m(F)-m(E)=m(F)<\varepsilon.$$

根据定理19.9知 A 是可测集，并且由于

$$m(A)\leqslant m(F)<\varepsilon$$

及 $\varepsilon>0$ 的任意性推得 $m(A)=0$. 从而 A 是零测度集.

推论 19.2

设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是任一有界集.

1. 若 A 是零测度集，则 A 的任一子集 B 也是零测度集.
2. 若 A 是零测度集，则 $\overline{A}$ 也是零测度集.
3. A 是零测度集的充分必要条件是:$\forall \varepsilon>0$, 存在有限多个 $\mathbb{R}^n$ 的开长方体的并 F^*, 使得

$$A\subset F^*, m\left(F^*\right)<\varepsilon.$$

证明 1),2) 的证明是平凡的，我们来证明 3).

设 A 是零测度集. 于是 $\forall \varepsilon>0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个简单可测集 F 使得 F 是 k 个内部不相交的闭长方

体 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 的并，即 $F = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$，并且

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} P_i, \sum_{i=1}^{k} m(P_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对每一个闭长方体 P_i，我们用一个开长方体 Q_i 包含 P_i，使得 $m(Q_i) = 2m(P_i)$. 于是

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} Q_i, m\left(\bigcup_{i=1}^{k} Q_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} m(Q_i) = 2\sum_{i=1}^{k} m(P_i) < \varepsilon.$$

反之，设存在 k 个开长方体，使行

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} Q_i, m\left(\bigcup_{i=1}^{k} Q_i\right) < \varepsilon.$$

我们令 $P_i = Q_i$，则显然有

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} P_i, m\left(\bigcup_{i=1}^{k} P_i\right) = m\left(\bigcup_{i=1}^{k} Q_i\right) < \varepsilon,$$

因此 A 是零测度集.

推论 19.3

$\mathbb{R}^n$ 的任意有限多个零测度集的并仍然是零测度集.

证明简单，我们留给读者.

注 $\mathbb{R}^n$ 的无限可数多个零测度集的并不一定是零测度集.

例如，$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in Q \cap [0,1]\right\} = \bigcup_{x,y \in Q \cap [0,1]} \{(x,y)\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个无限可数个零测度集的并，但 A 不是可测集.

下面我们考虑几个零测度集的例子.

例题 19.4 闭长方体 $P \subset \mathbb{R}^n$ 的每一个面是 $\mathbb{R}^n$ 的零测度集，从而 ∂P 是零测度集，

为此设 $P = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]\,(a_i < b_i, i = 1, 2, \cdots, \pi)$.$P$ 义共有 $2n$ 个面，对应于每一个 i 的两个面 $H_i^{(1)}$ 与 $H_i{}^2$) 为：

$$H_i^{(1)} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times \{a_i\} \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$
$$H_i^{(2)} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times \{b_i\} \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

$\forall \varepsilon > 0$, 令

$$F_i^{(1)} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times \left[a_i - \frac{\varepsilon}{2}, a_i + \frac{\varepsilon}{2}\right] \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$
$$F_i^{(2)} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times \left[b_i - \frac{\varepsilon}{2}, b_i + \frac{\varepsilon}{2}\right] \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

则 $F_i^{(1)}, F_i^{(2)}$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 的闭长方体，并且

$$H_i^{(1)} \subset F_i^{(1)}, H_i^{(2)} \subset F_i^{(2)},$$
$$m\left(F_i^{(1)}\right) = m\left(F_i^{(2)}\right) = \varepsilon\,(b_1 - a_1) \cdots (b_{i-1} - a_{i-1})\,(b_{i+1} - a_{i+1}) \cdots (b_n - a_n)\,.$$

因此 $H_i^{(1)}, H_i^{(2)}$ 是零测度集，从而 $\partial P = \bigcup_{i=1}^{n} \left(H_i^{(1)} \bigcup H_i^{(2)}\right)$ 是零测度集.

例题 19.5 设 $A \subset \mathbb{R}^{n-1}(n \geqslant 2)$ 是任一有界集，$\varphi : A \to \mathbb{R}^n$ 是任一可积函数. 那么 φ 的图形

$$\mathrm{Gr}(\varphi) = \{(x, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x \in A, x_n = \varphi(x)\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一个零测度集.

为此任取 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的一闭长方体 P 使得 $A \subset P$. $\widetilde{\varphi}_P$ 是 φ 在 P 上的标准延坧. 于是 $\widetilde{\varphi}_P$ 在 P 上可积，我们记

$$m = \inf_{x \in P} \widetilde{\varphi}_P(x), M = \sup_{x \in P} \widetilde{\varphi}_P(x),$$

于是 m,M 都是有限实数.

由于 $\mathrm{Gr}(\varphi) \subset \mathrm{Gr}\left(\widetilde{\varphi}_p\right)$, 收我们只需证明 $\mathrm{Gr}\left(\widetilde{\varphi}_P\right)$ 是零测度集即可,

$\forall \varepsilon > 0$, 由 $\widetilde{\varphi}_P$ 的可积性知，存在两个阶梯函数 $h, k : P \to \mathbb{R}$ 使得

$$h \leqslant \widetilde{\varphi}_P \leqslant k, \int_p (k - h) < \varepsilon/2$$

设 $\sigma = (P_1, P_2, \cdots, P_m)$ 是同时适合于 h, k 的 P 的分割，于是存在常数 $\xi_i, \eta_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 使得

$$\forall x \in \mathring{P}_i, h(x) = \xi_i, k(x) = \eta_i (i = 1, 2, \cdots, m).$$

$\widetilde{\varphi}_P$ 在 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathring{P}_i$ 上的限制的图形 G_1 显然有

$$G_1 \subset \bigcup_{i=1}^{m} P_i \times [\xi_i, \eta_i] \Longrightarrow m\left(\bigcup_{i=1}^{m} P_i \times [\xi_i, \eta_i]\right) = \int_P (k - h) < \varepsilon/2$$

$\widetilde{\varphi_P}$ 在 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \partial P_i$ 上的限制的图形 G_2 显然有

$$G_2 \subset \bigcup_{i=1}^{m} \partial \left(P_i \times [m, M]\right),$$

根据例19.4 所证，$\partial \left(P_i \times [m, M]\right)$ 是零测度集，从而 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \partial(P_i \times [m, M])$ 也是零测度集，于是存在一简单可测集 F 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \partial \left(P_i \times [m, M]\right) \subset F, m(F) < \varepsilon/2$ 因此

$$\mathrm{Gr}\left(\widetilde{\varphi}_P\right) = G_1 \cup G_2 \subset \left(\left(\bigcup_{i=1}^{m} P_i \times [\xi_i, \eta_i]\right) \cup F\right), m\left(\left(\bigcup_{i=1}^{m} P_i \times [\xi_i, \eta_i]\right) \cup F\right) < \varepsilon,$$

此即表明 $\mathrm{Gr}\left(\widetilde{\varphi_P}\right)$ 是零测度集.

因此 $\mathrm{Gr}\left(\varphi\right)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的零测度集.

例题 19.6 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是任一开集，$\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ 是任一 C^1 类映射，若 $K \subset U$ 是零测度紧集，则 $\varphi(K)$ 也是零测度紧集.

事实上，首先 $\forall x \in K \subset U$, 存在 $\delta_x > 0$, 使得 $B\left(x, \delta_x\right) \subset U$, 于是 $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B\left(x, \delta_x\right)$. 由 K 的紧性，存在与开覆盖 $\{B\left(x, \delta_x\right)\}$ 对应的 Lebesgue 数 $\beta > 0$ 使得

$$\forall x \in K, B(x, \beta) \subset U.$$

令

$$K^* = \left\{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in K \text{ 使得 } d(x, y) \leqslant \frac{\beta}{2}\right\}.$$

易证 K^* 也是 $\mathbb{R}^n$ 的紧集，并且 $K \subset K^* \subset U$.

设 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$. 由于 φ 是 C^1 类的, 故每一个 $\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}$ 在 U 上连续, 因此

$$M=\sup_{x\in K^*}\left(\sup_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(x)\right|\right)<+\infty.$$

现在设 E 是包含在 K^* 中的一个边长为 l 的立方体, $\forall\,(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in E$, 我们有

$$\varphi_i(y)-\varphi_i(x)=\sum_{j=1}^{n}(y_j-x_j)\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\left(z^j\right)(i=1,2,\cdots,n),$$

这里 $z^j\in E(j=1,2,\cdots,n)$. 因此

$$|\varphi_i(y)-\varphi_i(x)|\leqslant Ml,\forall i=1,2,\cdots,n$$

此即表明 $\varphi(E)$ 包含在 $\mathbb{R}^n$ 中所一个边长为 Ml 的立方体 D 内且 $m(E)=M^nl^n$.

另一方面, 由于 K 是是测度集, 不失一般性, 我们假设:$\forall\varepsilon>0$, 存在有限 k 个边长分别为 $l_1,l_2,\cdots,l_k$ 的闭立方体 $E_1,E_2,\cdots,E_k$ 使得

$$K\subset\bigcup_{i=1}^{k}E_i,l_i\leqslant\frac{\beta}{2\sqrt{n}}(i=1,2,\cdots,k),\sum_{i=1}^{k}m\left(E_i\right)<\frac{\varepsilon}{(M+1)^n}.$$

那么我们有 $E_i\subset K^*(i=1,2,\cdots,k)$, 从而由前面所证知, $\varphi\left(E_i\right)$ 包含在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个边长为 Ml_i 的立方体 D_i 内, 其 $m\left(D_i\right)=M^nl_i^n(i=1,2,\cdots,k)$. 因此

$$\varphi(K)\subset\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{k}E_i\right)\subset\bigcup_{i=1}^{k}\varphi\left(E_i\right)\subset\bigcup_{i=1}^{k}D_i.$$

从而

$$\begin{aligned}m\left(\bigcup_{i=1}^{k}D_i\right)&\leqslant\sum_{i=1}^{k}m\left(D_i\right)=\sum_{i=1}^{k}M^nl_i^n\\&=M^n\sum_{i=1}^{k}m\left(E_i\right)<M^n\frac{\varepsilon}{(M+1)^n}<\varepsilon\end{aligned}$$

此即表明 $\varphi(K)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的零测度集. $\varphi(K)$ 的紧性显然.

定理 19.12 (可测集的第三特征性定理)

设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是任一有界集, 则下述结论等价:

1. A 是可测的,
2. A 的边界 ∂A 是零测度集.

证明 1) $\Rightarrow$ 2). 设 A 是可测集. 由可测集的第一特征性定理知, $\forall\varepsilon>0$, 存在两个简单可测集 E 与 F 使得

$$E\subset A\subset F,m(F-E)<\varepsilon.$$

显然我们有

$$\mathring{E}\subset\mathring{A}\subset F,E\subset\overline{A}\subset F.$$

另一方面, 由于 $\partial A=\overline{A}-\mathring{A}$, 故

$$\partial A\subset F-\mathring{E},m(F-\mathring{E})=m(F)-m(\mathring{E})=m(F)-m(E)=m(F-E)<\varepsilon.$$

而 $F-\mathring{E}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个简单可测集，故由定理19.11知，∂A 是零测度集.

2) $\Rightarrow$ 1). 设 ∂A 是零测度集. 由定理19.11的推论 19.2 知， $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 的开长方体的有限并 F^*, 使得

$$\partial A\subset F^*, m\left(F^*\right)<\varepsilon.$$

若 $\mathring{A}=\varnothing$, 则由 $\overline{A}=\mathring{A}\cup\partial A$ 知， $\overline{A}=\partial A$, 因此 $A\subset\overline{A}$ 也是零测度集.

若 $\mathring{A}\neq\varnothing$. 任取 $x\in\mathring{A}$, 于是存在 x 的两个开长方体 $B(x), Q(x)$ 使得 $\overline{Q(x)}\subset B(x)\subset\mathring{A}$. 由此我们得到紧集 $\overline{A}=\mathring{A}\cup\partial A$ 的开覆盖 $\left\{Q(x), x\in\mathring{A};\quad F^*\right\}$. 令 $\overline{A}$ 的有限开子覆盖为：

$$\left\{Q\left(x_1\right), Q\left(x_2\right),\cdots, Q\left(x_k\right), F^*\right\},$$

及

$$E=\bigcup_{i=1}^{k}\overline{Q\left(x_i\right)}, F=\left(\bigcup_{i=1}^{k}\overline{Q\left(x_i\right)}\right)\bigcup\overline{F^*}$$

显然 E 与 F 郊是 $\mathbb{R}^n$ 的简单可测集，并且 $F-E\subset\overline{F^*}$ 以及

$$E\subset A\subset F, m(F-E)<m\left(\overline{F^*}\right)=m\left(F^*\right)<\varepsilon,$$

由可测集的第一特征性定理知，A 是可测集.

例题 19.7 设 $a<b, q,\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是两个连续函数，并且 $\varphi(x)\leqslant\psi(x),\forall x\in[a,b]$, 令

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\in[a,b],\varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)\right\},$$

则 A 是 $\mathbb{R}^2$ 的可测集.

为此，根据上述可测集的第三特征性定理，我们只需证明 ∂A 是零测度集即可.

如图19.5所示，我们有

$$\partial A=\operatorname{Gr}(\psi)\cup\operatorname{Gr}(\varphi)\cup\overline{AB}\cup\overline{CD}.$$

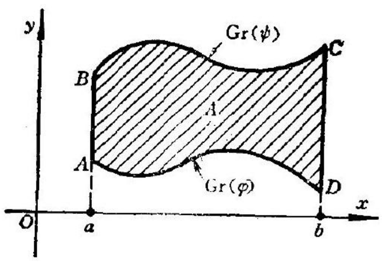


图 19.5

在例19.5中已证 $\operatorname{Gr}(\psi)$ 与 $\operatorname{Gr}(\varphi)$ 都是 $\mathbb{R}^2$ 的零测度集，而线段 $\overline{AB}$ 与 $\overline{CD}$ 显然是 $\mathbb{R}^2$ 的零测度集 (因 $\overline{AB},\overline{CD}$ 可分别看作 $\mathbb{R}^2$ 中一个长方形 P 的两条边的一部分，由例19.4所证知，它们是零测度集). 因此 ∂A 是零测度集，从而 A 是可测集,

类似地，我们可以考虑集合

$$B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y\in[c,d], h(y)\leqslant x\leqslant k(y)\right\},$$

$$C=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2\mid(x,y)\in P\subset\mathbb{R}^2, f(x,y)\leqslant z\leqslant g(x,y)\right\},$$

这里 $h,k:[c,d]\to\mathbb{R}$ 及 $f,g:P\to\mathbb{R}$ 都是连续函数， $P\subset\mathbb{R}^2$ 是一闭长方体. 与例19.7一样的可证，B 是 $\mathbb{R}^2$ 的可测集，C 是 $\mathbb{R}^3$ 的可测集.

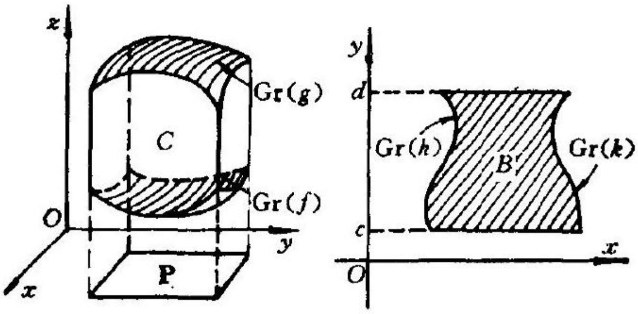


图 19.6

例题 19.8 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一开集，$D \subset U$ 是任一紧可测集，$\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ 是一 C^1 类映射，使得 φ 在 $\mathring{D}$ 上的限制为开映射，则 $\varphi(D)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧可测集.

首先，由于 D 是紧集，φ 连续，故 $\varphi(D)$ 也是紧集.

下面我们来证明 $\varphi(D)$ 是可测集. 为此只需证明 $\partial\varphi(D)$ 是零测度集.

事实上，由于 φ 在 $\mathring{D}$ 上的限制是开映射，所以 $\varphi(\mathring{D}) \subset \widehat{\varphi(D)}^{\circ}$, 从而

$$\partial\varphi(D) = \varphi(D) - \widehat{\varphi(D)}^{\circ} \subset \varphi(D) - \varphi(\mathring{D}) \subset \varphi(D - \mathring{D}) = \varphi(\partial D).$$

而 D 是紧可测集，所以 ∂D 是紧的零测度集，由上面的例 19.6 所证之结论知，$\varphi(\partial D)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的零测度集，从而由包含关系 $\partial\varphi(D) \subset \varphi(\partial D)$ 推知 $\partial\varphi(D)$ 也是零测度集，因此 $\varphi(D)$ 是可测集.

利用上面定理的结论，我们来研究可积函数类.

4. 可积函数类

定理 19.13

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是任一可测集，$f : A \to \mathbb{R}$ 是任一有界函数，若 f 的不连续点集是零测度集，则 f 在 A 上可积.

证明 首先我们假设 A 是一个闭长方体 P.

因为 f 在 P 上有界，所以

$$M = \sup_{x \in P} |f(x)| < +\infty.$$

我们用 D 表示 f 的不连续点集，由假设 D 是零测度集. 从而 $\forall \varepsilon > 0$, 存在有限多个开长方体 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$ 使得

$$D \subset \bigcup_{i=1}^{k} Q_i, \sum_{i=1}^{k} m(Q_i) < \frac{\varepsilon}{4(M+1)}.$$

令 $S = P - \bigcup\limits_{i=1}^{k} Q_i$, 则 S 是闭集，并且可以表示成有限个内部不相交的闭长方体 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 的并. 即 $S = \bigcup\limits_{j=1}^{m} P_j, \mathring{P}_l \cap \mathring{P}_j = \varnothing (l \neq j)$.

在每一个 P_j 上 f 是连续的，故 $\forall \varepsilon > 0$, 存在两个阶梯函数 $\varphi_j, \psi_j : P_j \to \mathbb{R}$ 使得

$$\varphi_j(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_j(x), \psi_j(x) - \varphi_j(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2m(P)}, \forall x \in P_j.$$

现在我们在 P 上定义阶梯函数 φ,ψ 如下：

$$\varphi(x)=\left\{\begin{array}{lll}\varphi_j(x), & \left(若\ x\in \mathring{P}_j\right), & \psi,(x)\\ f(x), & \left(若\ \ x\in\partial P_j\right), & f(x)\\ -M, & \left(若\ \ x\in\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}Q_i\right)\cap P\right), & M\end{array}\right\}=\psi(x)$$

则 φ 与 ψ 满足下述不等式

$$\begin{aligned}&\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x),\forall x\in P,\\ \int_P(\psi-\varphi)&=\int_S(\psi-\varphi)+\int_{(\bigcup_{i=1}^{k}Q_i)\cap P}(\psi-\varphi)\\ &\leqslant\frac{\varepsilon}{2m(P)}m(S)+2M\cdot m\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k}Q_i\right)\cap P\right)\\ &<\frac{\varepsilon}{2m(P)}m(P)+2M\cdot\frac{\varepsilon}{4(M+1)}\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

因此 f 在 P 上可积.

现在考虑 A 是一般可测集情形.

设 $P\subset\mathbb{R}^n$ 是一闭长方体，使得 $A\subset P,\widetilde{f}_P$ 是 f 在 P 上的标准延拓. 若我们用 $\widetilde{D}$ 表示 $\widetilde{f}_P$ 在 P 上的连续点集，D 为 f 在 A 上的不连续点集，则我们有：$\widetilde{D}\subset\partial A\cup D$.

由于 A 是可测集，故 $\partial 4$ 是零测度集，D 由假设是零测度集，所以 $\partial A\cup D$ 是零测度集，从而 $\widetilde{D}$ 是零测度集.

根据第一步所证，有界函数 $\widetilde{f}_P$ 在 P 上可积，因此 f 在 A 上可积.

推论 19.4

没 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是任一可测集. $f:A\to\mathbb{R}$ 是任一连续函数，若 f 在 A 上有界，则 f 在 A 上可負，特别地，若 A 是紧的，则 f 在 A 上可积.

证明 因为这时 f 的不连续点集 $D=\varnothing$, 所以有界连续函数 f 在 A 上可积. 特别地，当 A 是紧可测集时，连续函数 f 在 A 上有界. 故 f 在 A 上可积.

注 上述定理的逆不成立，也就是说，可积函数 $f:A\to\mathbb{R}$ 的不连续点集不一定是 Jordan 零测度集，例如，$n=1$ 时定义在 $[0,1]$ 上的 Riemann 函数就是一例. 究其原因是因为这种零测度集还不足以完全包含 f 的全部不连续点.

因此如果我们适当修改零测度集的定义，使得新的零测度集的容量更大，则可以猜想得到有界函数 $f:A\to\mathbb{R}$ 在 A 上可积的充要条件是 f 的不连续点集是新意义下的零测度集.

下面我们就来介绍新的零测度集概念.

从定理19.11知， $\mathbb{R}^n$ 的有界集 A 是 Jorda n 零测度集当且仅当：$\forall\varepsilon>0$, 存在有限多个闭长方体 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 使得

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{k}P_i,\sum_{i=1}^{k}m\left(P_i\right)<\varepsilon.$$

现在我们将 “有限” 换成 “可数” 就得到我们所需要的概念，即下面定义.

定义 19.12

我们称集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是 Lebesgue 零测度集 (简称为 L-零测度集)，如果 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\mathbb{R}^*$ 的一闭长方体序列 (P_b) 使得

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k \text{ 并且 } \sum_{k=1}^{+\infty} m\left(P_k\right) - \varepsilon$$

由此定义可知，$\mathbb{R}^n$ 的 Jordan 零测度集 (简称为 J-零测度集). 一定是 L-零测度集，(但反之则不然. 例如 $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ 就是 $\mathbb{R}$ 中的 L-零测度集而不是 J-零测度集.

L-零测度集的另外两个重要性质是：

1. 若 $A_k (k \in \mathbb{N})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一列 L-零测度集，则它们的并 $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$ 也是 L-零测度集.
2. $A \subset \mathbb{R}^n$ 是 L-零测度集当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\mathbb{R}^n$ 的一列开长方体 $\langle S_k \rangle$ 使得
$$A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} S_k \text{ 并且 } \sum_{k=1}^{+\infty} m\left(S_k\right) \lessdot \varepsilon$$

这两个性质的证明都不难由 L-零测度集的定义推出，我们把它们留给读者作为练习.

现在我们可以用 L-零测度集的术语来表述函数 Riemann 可积的一个充分必要条件，即下述定理，

定理 19.14

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是任一可测集，$f: A \to \mathbb{R}$ 是任一有界函数. 则 f 在 A 上 (Riemann) 可积的充分必要条件是：f 的不连续点集 $\mathrm{D}(f)$ 是 L-零测度集.

证明 取 $\mathbb{R}^*$ 的闭长方体 P 使得 $\overline{A} \subset \mathring{P}$. 于是

$$f \text{ 在 } A \text{ 上可积 } \Longleftrightarrow \widetilde{f_P} \text{ 在 } P \text{ 上可积.}$$

我们记 $\widetilde{f}_P$ 在 P 上的不连续点集为 $D\left(\widetilde{f}_P\right)$，则

$$D(f) \subset D\left(\widetilde{f}_P\right) \subset \partial A \cup D(f).$$

因为 A 是可测集，所以 ∂A 是 J-零测度集. 从而由上述包含关系知

$$D(f) \text{ 为 } L\text{-零测度集 } \Longleftrightarrow D\left(\widetilde{f}_P\right) \text{ 为 } L\text{-零测度集.}$$

因此定理等价于证明：

$$\widetilde{f}_P \text{ 在 } P \text{ 上可积 } \Longleftrightarrow D\left(\widetilde{f}_P\right) \text{ 为 } L-\text{零测度集.}$$

于是下面为了书写简单起见，不妨就设 $A = P, f: P \to \mathbb{R}$ 为有界函数.

(必要性) 设 f 在 P 上可积. $\forall x \in P$，令

$$\omega(f, x) = \inf_{U \in \mathscr{H}(x)} d(f(U)) \inf_{U \in \mathscr{H}(x)} \left(\sup_{y, z \in U} |f(y) - f(z)| \right)$$

$\omega(f, x)$ 称为 f 在 x 处的振幅.

显然，$x \in D(f)$ 当且仅当 $\omega(f, x) > 0$，记

$$D_k = \left\{ x \in P \,\middle|\, \omega(f, x) \geqslant \frac{1}{k} \right\} (k \in \mathbb{N}),$$

则

$$D(f) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} D_k$$

下面证明：$\forall k \in \mathbb{N}, D_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的 J-零测度集.

由假设 f 在 P 上可积知，$\forall \varepsilon > 0$, 存在两个阶梯函数 $h, k : P \to R$ 使得

$$|f(x) - h(x)| \leqslant k(x), \forall x \in P, \int_P k(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{6k}.$$

设 $\sigma = (P_1, P_2, \cdots, P_m)$ 是同时适合于 h, k 的 P 的一个分割，令

$$I = \left\{i \in \{1, 2, \cdots, m\} \mid \forall x \in \mathring{P}_i, k(x) \leqslant \frac{1}{3k}\right\},$$

$$J = \left\{i \in \{1, 2, \cdots, m\} \mid \forall x \in \mathring{P}_i, k(x) > \frac{1}{3k}\right\},$$

于是

$$I \cap J = \varnothing, I \cup J = \{1, 2, \cdots, m\}$$

i) 若 $i \in I$, 则 $\forall y, z \in \mathring{P}_i$,

$$|f(y) - f(z)| \leqslant |f(y) - h(y)| + |h(z) - f(z)| \leqslant k(y) + k(z) = 2k(y) < \frac{2}{3k}.$$

由此推知

$$\forall x \in \mathring{P}_i, \omega(f, x) \leqslant \frac{2}{3k} \Longrightarrow x \notin D_k$$

ii) 若 $j \in J$. 则

$$\frac{1}{3k} \bigcup_{j \in J}^{m} m\left(P_j\right) < \int_P k(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{6k}$$

或

$$\sum_{j \in j} m\left(P_j\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面，由于 $\bigcup\limits_{i \in I}^{m} \partial P_i$ 是 J-零测度集，故存在有限个闭长方体 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_l$ 使得

$$\bigcup_{i \in I} \partial P_i \subset \bigcup_{i=1}^{l} Q_i, \text{并且} \sum_{i=1}^{l} m\left(Q_i\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$D_k \subset \left(\bigcup_{i \in I} \partial P_i\right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} P_j\right) \subset \left(\bigcup_{i=1}^{l} Q_i\right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} P_j\right),$$

$$\sum_{i=1}^{l} m\left(Q_i\right) + \sum_{j \in J} m\left(P_j\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

此即表明 D_k 是 J-零测度集. 从而 $D(f) = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} D_k$ 是 L-零测度集.

(充分性) 设 $D(f)$ 是 L-零测度集. 因 f 在 P 上有界，故存在 $M > 0$ 使得

$$|f(x)| \leqslant M, \forall x \in P.$$

由于 $D(f)$ 为 L-零测度集，故 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 的一列开长方体 $\langle S_k \rangle$ 使得

$$D(f) \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} S_k, \text{并且} \sum_{k=1}^{+\infty} m\left(S_k\right) < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

$\forall x \in P - \bigcup_{k=1}^{+\infty} S_k$, 由 f 在 x 处连续知，存在 $\mathbb{R}^n$ 的含 x 的开长方体 Q_x 使得

$$\forall y \in P \cap Q_x, |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(m(P)+1)}.$$

由此我们得到 P 的一个开覆盖

$$\left\{S_k, Q_x \mid k \in \mathbb{N}, x \in P - \bigcup_{k=1}^{+\infty} S_k\right\},$$

由 P 的紧性知，存在有限开子覆盖

$$S_{k_1}, S_{k_2}, \cdots, S_{k_l}, Q_{k_1}, Q_{x_2}, \cdots, Q_{x_s}\}$$

令 β 为与此有限开子覆盖对应的 Lebesgue 数，并取 P 的一个分割 $\sigma = \{P_1, P_2, \cdots, P_m\}$, 使得 P_i 的直径

$$d(P_i) < \beta (i = 1, 2, \cdots, m),$$

于是

$$P_i \subset S_{k_j} (j = 1, 2, \cdots, l) \text{ 或 } P_i \subset Q_{x_t} (t = 1, 2, \cdots, s).$$

令

$$I = \left\{i \in \{1, 2, \cdots, m\} \mid \text{ 存在 } j = 1, 2, \cdots, l \text{ 使得 } P_i \subset S_{k_j}\right\},$$
$$J = \left\{i \in \{1, 2, \cdots, m\} \mid \text{ 存在 } t = 1, 2, \cdots, s \text{ 使得 } P_i \subset Q_{x_t}\right\},$$

则

$$I \cap J = \varnothing, I \cup J = \{1, 2, \cdots, m\}.$$

现在我们定义阶梯函数 $\varphi, \psi : P \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\varphi(x) = \left\{\begin{array}{ll} \inf\limits_{x \in P_i} f(x), \left(\text{若 } x \in \mathring{P}_{i_m}\right), & \sup\limits_{x \in P_i} f(x) \\ f(x), \left(\text{若 } x \in \bigcup\limits_{i=1} \partial P_i\right), & f(x) \end{array}\right\} = \psi(x).$$

显然

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x), \forall x \in P, \\
\int_P (\psi - \varphi) = &\sum_{i=1}^{m} \left[\sup_{x \in P_i} f(x) - \inf_{x \in P_i} f(x)\right] m(P_i) \\
= &\sup_{x \in P_i} \left[\sup_{x \in P_i} f(x) - \inf_{x \in P_i} f(x)\right] m(P_i) + \sum_{i \in J} \left[\sup_{x \in P_i} f(x) - \inf_{x \in P_i} f(x)\right] m(P_i) \\
\leqslant &2M \sum_{i \in I} m(P_i) + \frac{2\varepsilon}{4(m(P)+1)} m(P) \\
\leqslant &2M \sum_{k=1}^{+\infty} m(S_k) + \frac{\varepsilon}{2} \\
< &2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此 f 在 P 上可积.

定理 19.15

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是任一有界集，函数 $f_n: A \to \mathbb{R}$ 在 A 上可积 $(n \in \mathbb{N})$，若 $\langle f_n \rangle$ $\left(\text{或} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n\right)$ 在 A 上一致收敛于函数 $f: A \to \mathbb{R}$，则 f 在 A 上可积，且

$$\int_A f = \lim_{n \to +\infty} \int_A f_n \left(\int_A f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_A f_n\right).$$

证明 只需对函数序列的情形进行证明.

设 $P \subset \mathbb{R}^n$ 是一闭长方体使得 $A \subset P$，于是

$$\sup_{x \in P} \left|\widetilde{(f_n)_P}(x) - \widetilde{f_P}(x)\right| = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|.$$

由此可知 $\left\langle \left(\widetilde{f_n}\right)_P \right\rangle$ 在 P 上一致收敛于 $\widetilde{f}_P$.

因为 $\forall n \in \mathbb{N}$，$\left(\widetilde{f_n}\right)_P$ 在 P 上可积，故由定理19.7知，$\widetilde{f_P}$ 在 P 上可积，并且

$$\int_P \widetilde{f}_P = \lim_{n \to -\infty} \int_P \left(\widetilde{f_n}\right)_P$$

此即等价于 f 在 A 上可积，并且

$$\int_A f = \lim_{n \to +\infty} \int_A f_n$$

5. 可积函数的性质

下面我们用 $\mathscr{H}(A)$ 表示所有定义在可测集 A 上的可积函数的集合.

定理 19.16

设 $f, g \in \mathscr{R}(A), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$，则下述结论成立：

1. $\alpha f + \beta g \in \mathscr{R}(A)$，并且 $\displaystyle\int_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_A f + \beta \int_A g$.
2. $fg \in \mathscr{R}(A)$.
3. 若 $f \geqslant 0$，则 $\displaystyle\int_A f \geqslant 0$.
4. 若 $f \geqslant g$，则 $\displaystyle\int_A f \geqslant \int_A g$.
5. $|f| \in \mathscr{R}(A)$，并且
$$\left|\int_A f\right| \leqslant \int_A |f| \leqslant m(A) \sup_{x \in A} |f(x)|.$$
6. 存在 $\mu \in \mathbb{R}$ 使得 $\displaystyle\int_A f = \mu \cdot m(A)$，特别地若 f 在 A 上连续，并且 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的连通紧集，则存在 $\overline{x} \in A$ 使得
$$\int_A f = f(\overline{x}) m(A)$$

证明 如果我们注意到下列事实；对任一闭长方体 $P \subset \mathbb{R}^n$ 且 $A \subset P$，

$$\widetilde{(f+g)}_P = \widetilde{f}_P + \widetilde{g}_P, \widetilde{(af)} = a\widetilde{f}_P, \widetilde{(fg)}_P = \widetilde{f}_P \cdot \widetilde{g}_P,$$

$$f \geqslant g \Rightarrow \widetilde{f}_P \geqslant \widetilde{g}_P,$$

则上述性质 1)-5) 可由积分 $\displaystyle\int_A f = \int_P \widetilde{f_P}$ 的定义及定理19.4推出，

下面我们来证明性质 6).

首先由于 f 是有界的，故存在蓠数 α,β 使得

$$\alpha\chi_A(x)\leqslant f(x)\leqslant\beta\chi_A(x),\forall x\in A.$$

由性质 3) 得到

$$\alpha\int_A\chi_A\leqslant\int_A f\leqslant\beta\int_A\chi_A \text{ 或 } \alpha m(A)\leqslant\int_A f\leqslant\beta m(A).$$

若 $m(A)=0$，则 $\int_A f=0$，从而 $\forall\mu\in\mathbb{R}$，$\int_A f=\mu m(A)$.

若 $m(A)\neq 0$，则 $\alpha\leqslant\frac{1}{m(A)}\int_A f\leqslant\beta$. 令 $\mu=\frac{1}{m(A)}\int_A f$，则 $\int_A f=\mu m(A)$.

当 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的连通紧集，且函数 $f:A\to\mathbb{R}$ 连续. 则我们可以取

$$\alpha=\inf_{x\in A}f(x)=f\left(x_*\right),$$

$$\beta=\sup_{x\in A}f(x)=f\left(x^*\right),x_*,x^*\in A.$$

从而 $f\left(x_*\right)\leqslant\frac{1}{m(A)}\int_A f\leqslant f\left(x^*\right)$. 由于 $f(A)\subset\mathbb{R}$ 是连通的，故 $f(A)=\left[f\left(x_*\right),f\left(x^*\right)\right]$，从而存在一点 $\bar{x}\in A$ 使得

$$f(\bar{x})=\frac{1}{m(A)}\int_A f,$$

或

$$\int_A f=f(\bar{x})m(A).$$

定理 19.17

设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是任一可测集，$f:A\to\mathbb{R}$ 是任一有界函数. 并且存在有限个可测集 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 使得:

$$A=\bigcup_{i=1}^k A_i,A_i\cap A_j(i\neq j)\text{ 是 }L\text{-零测度集},$$

则 f 在 A 上可积的充分必要条件是 f 在每一个 A_i 上可积，并且这时成立下述等式:

$$\int_A f=\sum_{i=1}^k\int_{A_i}f$$

证明 我们只对 $k=2$ 的情形证明，对一般的 $k>2$，可由数学归纳法证明，

(必要性) 设 f 在 $A=A_1\cup A_2$ 上可积，$P\subset\mathbb{R}^n$ 是一闭长方体使得 $A\subset P$，于是 $A_1\subset P,A_2\subset P$. f 在 P 上的标准延拓 $\widetilde{f_P}$ 与 $f|_{A_i}$ 在 P 上的标准延拓 $(\widetilde{f|_{Ai}})_P$ 满足下述关系式:

$$\left(\widetilde{f|_{A_i}}\right)_P=\widetilde{f_P}\cdot\chi_{A_i},i=1,2.$$

由于 A_1,A_2 可测，故 χ_{A_i} 在 P 上可积，从而乘积 $\widetilde{f_P}\cdot\chi_{A_i}$ 在 P 上可积，此即 $(\widetilde{f|_{Ai}})_P$ 在 P 上可积，或 $f|_{A_i}$ 在 P 上可积.

(充分性) 设 f 在 A_1 与 A_2 上可积. 由于 $A_1\cap A_2$ 是 L-零制度集，故由定理19.14知，f 在 $A_1\cap A_2$ 上可积.

现设 $P\subset\mathbb{R}^n$ 是一闭长方体使得 $A_1\cup A_2\subset P$，那么下述标准延拓的关系式成立:

$$\widetilde{f_P}=\left(\widetilde{f|_{A_1}}\right)_P+\left(\widetilde{f|_{A_2}}\right)_P-\left(\widetilde{f|_{A_1\cap A_2}}\right)_P$$

根据定理19.4知，$\widetilde{f_P}$ 在 P 上可积，也即 f 在 A 上可积，并且

$$\begin{aligned}\int_A f &= \int_P \widetilde{f_P} = \int_P \left(\widetilde{f|_{A_1}}\right)_P + \int_P \left(\widetilde{f|_{A_2}}\right)_P - \int_P \left(\widetilde{f|_{A_1\cap A_2}}\right)_P \\ &= \int_{A_1} f + \int_{A_2} f - \int_{A_1\cap A_2} f\end{aligned}$$

由于 $m\left(A_1 \cap A_2\right) = 0$, 故 $\displaystyle\int_{A_1\cup A_2} f = 0$, 从而

$$\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f$$

推论 19.5

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是任一可测集，$f, g : A \to \mathbb{R}$ 是任意两个有界函数，并且

$$B = \{x \in A \mid f(x) \neq g(x)\}$$

是一个 L-零测度集，则 f 与 g 在 A 上有相同的可积性. 当它们可积时，其积分值相等，即

$$\int_A f = \int_A g.$$

(换句话说，任意改变一个有界函数 $f : A \to \mathbb{R}$ 在一个 L 一零测度集上的定义 (保持有界性)，并不影响 f 的可积性及其积分值.)

证明 由对称性，我们只需证明若 f 可积，则 g 可积，并且

$$\int_A f = \int_A g.$$

由假设 B 是可测集知，$A - B$ 也是可测集，且

$$A = B \cup (A - B), \cap(A - B) = \varnothing.$$

于是根据上述定理，f 在 $A - B$ 上可积，f 在 B 上可积，并且

$$\int_A f = \int_{A-B} f + \int_B f = \int_{A-B} f.$$

另一方面，由于 $g|_{A-B} = f|_{A-B}, m(B) = 0$, 故 g 在 $A - B$ 上可积，$\displaystyle\int_{A-B} g = \int_{A-B} f$；$g$ 在 B 上可积，$\displaystyle\int_B g = 0$, 根据同一定理，$g$ 在 A 上可积，并且

$$\int_A g = \int_{A-B} g + \int_B g = \int_{A-B} g = \int_{A-B} f,$$

因此

$$\int_A f = \int_A g.$$

注 如果我们在定理19.17 中将 A_1 的条件改为：

$A = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i, A_i \cap A_j (i \neq j)$ 为 L-零测度集，但 A_i 不一定可测，则我们只能得出下述结论：

若 f 在每一个 A_i 上可积，则 f 在 A 可积，并且 $\displaystyle\int_A f = \sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} f.$

其证明方法与定理19.17 的充分性证明完全类似，一般说来，f 在 A 上可积并不能推断出 f 在每

一个 A_i 上可积. 例如, 我们考虑

$$\begin{aligned}
A &= [0,1]\times[0,1],\\
A_1 &= \{(x,y)\in A \mid x\in\mathbb{Q}, y\in\mathbb{Q}\},\\
A_2 &= \{(x,y)\in A \mid x\notin\mathbb{Q} \text{ 或 } y\notin\mathbb{Q}\},\\
f &: A\to\mathbb{R} \text{ 定义为 } f(x)=1, \forall x\in A.
\end{aligned}$$

显然 f 在 A 上可积, 但 f 在 A_1 上的限制 $f|_{A_1}$ 在 A_1 上不可积.

然而, 当 $k=2$ 时, 若 f 在 $A=A_1\cup A_2$ 上可积, 并且 f 在 A_1(或 A_2) 上可积, 则 f 在 A_2 或 A_1) 上必可积, 并且

$$\int_A f=\int_{A_1} f+\int_{A_2} f.$$

这是因为, 由假设 $A=A_1\cup A_2$ 得到

$$\begin{aligned}
\chi_A &= \chi_{A_1}+\chi_{A_2}-\chi_{A_1\cap A_2},\\
f\chi_{A_2} &= f\left(\chi_A-\chi_{A_1}+\chi_{A_1\cap A_2}\right)\\
&= f\chi_A-f\chi_{A_1}+f\chi_{A_1\cap A_2}.
\end{aligned}$$

于是对 $\mathbb{R}^n$ 的任一闭长方体 P, 并且 $A\subset P$, 我们有

$$\left(\widetilde{f|_{A_2}}\right)_P=\widetilde{f}_P-\left(\widetilde{f|_{A_1}}\right)_P+\left(\widetilde{f|_{A_1}\cap A_2}\right)_P.$$

由假设, 等式右边三个函数在 P 上都是可积的, 因此 $\left(\widetilde{f|_{A_2}}\right)_P$ 在 P 上可积, 从而 $f|_{A_2}$ 在 A_2 上可积, 并且

$$\int_A f=\int_{A_1} f+\int_{A_2} f$$

✍ 习题

1. 设 $P\subset\mathbb{R}^n$ 是任一闭长方体. 证明: P 是可测集, 并且它的 Jordan 测度与 P 的 n-维测度相等.
2. 证明: 集合 $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y\in\mathbb{Q}\cap[a,b]\right\}$ $(a,b\in\mathbb{R})$ 是不可测集.
3. 设 $A=\{0\}\cup\left\{\dfrac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$, $E=A\times[0,1]$. 证明: E 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个可测集, 并计算其 Jordan 测度 $m(E)$.
4. 证明: $\mathbb{R}^n$ 中以原点为中心, 以 r 为半径的球 $B(0,r)$ 是可测集.
5. 证明: 对 $\mathbb{R}^n$ 的任一简单可测集 $E, m(E)=m(\mathring{E})$.
6. 设映射 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 定义如下:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ 若 } x\notin\mathbb{Q},\\ \dfrac{1}{p}, \text{ 若 } x\in\mathbb{Q}\cap[0,1] \text{ 且 } x=\dfrac{q}{p}, p,q \text{ 互质},\\ 1, \text{ 若 } x=0.\end{cases}$$

   1) 证明: $\forall\alpha>0$, 集 $A=\{x\in[0,1] \mid f(x)\geqslant\alpha\}$ 是有限集.
   2) 证明: f 的不连续点集 F 是不可测集.
   3) 令 $G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,1], 0\leqslant y\leqslant f(x)\right\}$. 证明: G 是可测集.
   4) $\forall x\in[0,1]$, 令 $G_x=\{y\in[0,1] \mid (x,y)\in G\}, X=\{x\in[0,1] \mid m(G_x)\neq 0\}$. 证明: X 是不可测集.

7. 设 d 是 $\mathbb{R}^n$ 的任一基本度量, $D\subset\mathbb{R}^n$ 是一有界集, ∂D 是 D 的边界, $\forall\alpha>0$, 令 $E_\alpha=\bigcup\limits_{x\in\partial D}B(x,\alpha)$.

   1) 假设 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的开长方体使得 $\partial D\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m}Q_i$. 令 $G=\partial\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m}Q_i\right)$. 证明: $\partial D\cap G=\varnothing$, 并且 $\exists\alpha>0$ 使得

   $$(\forall x\in\partial D)(\forall y\in G)\Longrightarrow d(x,y)\geqslant\alpha.$$

   2) 证明: 若 D 是可测集, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0$ 使得 E_α 包含在测度小于 ε 的可测集中.

8. 设 d 是 $\mathbb{R}^n$ 的任一基本度量, $\forall h>0$,

   $$P=\prod_{i=1}^{n}[a_i,a_i+h]\quad(a_i\in\mathbb{R})$$

   称为 $\mathbb{R}^n$ 的一个边长为 h 的立方体.

   1) 设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是任一有界集, 其直径记为 $d(A)$. 证明: 存在边长为 $d(A)$ 的立方体 P 使得 $A\subset P$.

   2) 设 $\langle A_k\rangle$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一列有界可测集, 证明:

   $$\lim_{k\to+\infty}d\left(A_k\right)=0\Longrightarrow\lim_{k\to+\infty}m\left(A_k\right)=0.$$

   3) 举出 $\mathbb{R}^n$ 的一列可测集 $\langle A_k\rangle$ 使得

   $$\lim_{k\to+\infty}m\left(A_k\right)=0\ \text{但}\ \lim_{k\to+\infty}d\left(A_k\right)=+\infty.$$

9. 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是任一有界开集, $f:U\to\mathbb{R}$ 是任一 C^1 类映射, $h\in f(U)$. 令

   $$A=\{x\in U\mid f(x)=h\},$$

   我们假设 $\forall x\in A$, f 在 x 处的 Jacobi 矩阵的秩等于 1.

   1) 证明: $\forall x\in A$, 存在 x 的一个邻域 V_x 使得 $m\left(V_x\cap A\right)=0$.

   2) 证明: $m(A)=0$.

10. 设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的一可测集, $f:A\to\mathbb{R}$ 是任一可积函数, $\overline{f}$ 是 f 在 $\overline{A}$ 上的一个有界延拓. 证明: 对 $\mathbb{R}^n$ 的任一集合 B 使得 $\mathring{A}\subset B\subset\overline{A}$, $\overline{f}$ 在 B 上可积, 并且 $\displaystyle\int_B\overline{f}=\int_A f$.

11. 设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是任一 J-零测度集, $\varphi:A\to\mathbb{R}^m(m\geqslant n)$ 是任一 Lipschitz 映射. 证明: $\varphi(A)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的 J-零测度集.

12. 设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是任一紧可测集. 证明下述结论等价:

    1) $\mathring{A}=\varnothing$.

    2) A 是 J-零测度集.

    3) A 是 L-零测度集.

13. 设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是任一有界集, 证明下述结论等价:

    1) A 是可测集.

    2) ∂A 是 L-零测度集.

    试利用此结论证明: 第 2 题中的集合 A 是不可测集.

14. 证明 L-零测度集的下述各性质:

    1) L-零测度集的任何子集是 L-零测度集.

    2) 若 $A_k(k\in\mathbb{N})$ 是一列 L-零测度集, 则 $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}A_k$ 也是 L-零测度集.

3) A 是 L-零测度集，当且仅当 $\forall \varepsilon>0$，存在 $\mathbb{R}^n$ 的一列开长方体 $\langle S_k\rangle$ 使得

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} S_k,\ \text{并且}\ \sum_{k=1}^{+\infty} m\left(S_k\right)<\varepsilon .$$

4) 设 $U \subset \mathbb{R}^m$ 为一开集，$f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 C^1 类的，若 $m<n$，则 $f(U)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的 L-零测度集；若 $m=n$，则对 U 的任一 L-零测度集 A, $f(A)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的 L-零测度集.

15. 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是任一可测集，$f: A \rightarrow \mathbb{R}^{+}$ 是任一可积函数. 证明：$\displaystyle\int_A f(x) \mathrm{d} x=0$ 当且仅当

$$E=\{x \in A \mid f(x) \neq 0\}$$

是 L-零测度集.

16. 试利用定理19.14证明：若 $f, g \in \mathscr{R}(A)$，则 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha f+\beta g \in \mathscr{R}(A),|f| \in \mathscr{R}(A), f \cdot g \in \mathscr{R}(A)$.

17. (Sard 定理) 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一开集，$f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是任一 C^1 类映射，令

$$A=\{x \in U \mid \mathrm{d} f(x)\ \text{不可逆}\},$$

则 A 是 L-零测度集.

19.4 Riemann 和

1. 可测集的 L-分割

定义 19.13

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是任一可测集，如果存在 A 的有限 k 个连通的可测子集 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 使得

$$A=\bigcup_{i=1}^k A_i, A_i \cap A_j(i \neq j)\ \text{是}\ L-\ \text{零测度集},$$

则我们称 $\sigma=\left(A_1, A_2, \cdots, A_k\right)$ 是 A 在 Lebesgue 意义下的一个分割 (简称为 A 的 L-分割).

$\forall i=1,2, \cdots, k, A_i$ 称为 L-分割 σ 的分割单元.

$\delta(\sigma)=\max\limits_{1 \geqslant i \geqslant k} d\left(A_i\right)$ 称为 L-分割 σ 的跨距.

♣

由这个定义可以看出，若
$sigma=\left(P_1, P_2, \cdots, P_k\right)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的闭长方体 P 在 §1 意义下的分割，则 σ 也是 P 的 L 一分割，但反之则不然.

定义 19.14

设 $\sigma=\left(A_1, A_2, \cdots, A_k\right)$ 是可测集 A 的 L-分割，$\xi=\left(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k\right)$, 这里 $\xi_i \in A_i(i=1,2, \cdots, k)$
则 (σ, ξ) 称为 A 的一个带点 L-分割.

我们用 $\mathscr{B}$ 表示 A 的所有带点 L-分割的集合.

♣

2. Riemann 和

定义 19.15

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是任一可测集，$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 是任一函数，$(\sigma, \xi) \in \mathscr{B}$. 令

$$S(f, \sigma, \xi)=\sum_{i=1}^k f\left(\xi_i\right) m\left(A_i\right)$$

我们称 $S(f,\sigma,\xi)$ 为 f 关于 (σ,ξ) 的 Riemann 和.
如果存在常数 l, 它具有下述性质:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\eta>0)(\forall(\sigma,\xi)\in\mathscr{B},\delta(\sigma)<\eta)\Longrightarrow|S(f,\sigma,\xi)-l|<\varepsilon,$$

则我们称 l 是函数 f 的 Riemann 和关于 $\mathscr{B}$ 的极限, 记作

$$\lim_{\mathscr{B}}S(f,\sigma,\xi)=l.$$

定理 19.18

设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是任一可测集, $f:A\to\mathbb{R}$ 是任一可积函数, 则

$$\lim_{\mathscr{B}}S(f,\sigma,\xi)=\int_A f.$$

证明 设 $P\subset\mathbb{R}^n$ 是一闭长方体使得 $A\subset P$, 由于 f 在 A 上可积, 故 $\widetilde{f_P}$ 任 P 上可积, 从而 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\varphi,\psi\in\mathscr{E}(P)$ 使得

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x),\forall x\in P,\int_P(\psi-\varphi)<\varepsilon/2.$$

记 $\sigma_0=(P_1,P_2,\cdots,P_m)$ 是同时适合于 φ 与 ψ 的 P 的一个分割, 令 $D=P-\sum\limits_{i=1}^m\mathring{P}_i$. 则 $m(D)=0$. 下是存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个简单可测集 F 使得

$$D\subset\mathring{F},m(F)<\frac{\varepsilon}{4(M+1)},\text{ 这里 }M=\sup_{x\in P}\left|\widetilde{f}_P(x)\right|<+\infty.$$

令 $\eta=d(D,\partial F)$, 则 $\eta>0$.

现在设 $(\sigma,\xi)\in\mathscr{B}$ 是 A 的任一带点 L-分割, 使得 $\delta(\sigma)<\eta$. 令 $\sigma=(A_1,A_2,\cdots,A_k)$.

由于每一个 A_i 可测, 故 f 在 A_i 可积.

又因为每一个 A_i 是连通的, 所以 σ 的所有分割单元 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 可以分为两类:

一类是由与 D 相交的分割单元组成, 不失一般性, 可以假设是 $\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}$.

另一类是由与 D 不相交的分割单元组成, 这时它们就是 $\{A_{s+1},A_{s+2},\cdots,A_k\}$.

下面我们分别对这两类估计差式

$$\left|\sum_{i=1}^s f(\xi_i)m(A_i)-\sum_{i=1}^s\int_{A_i}f\right|\text{ 与 }\left|\sum_{i=s+1}^k f(\xi_i)m(A_i)-\sum_{i=s+1}^k\int_{A_i}f\right|.$$

对 $i=1,2,\cdots,s$: 由于 $|f(x)|\leqslant M,\forall x\in A$, 故我们有

$$-M\sum_{i=1}^s m(A_i)\leqslant\sum_{i=1}^s f(\xi_i)m(A_i)\leqslant M\sum_{i=1}^s m(A_i)$$

$$-M\sum_{i=1}^s m(A_i)\leqslant\sum_{i=1}^s\int_{A_i}f\leqslant M\sum_{i=1}^s m(A_i),$$

从而

$$\left|\sum_{i=1}^s f(\xi_i)m(A_i)-\sum_{i=1}^s\int_{A_i}f\right|\leqslant 2M\sum_{i=1}^s m(A_i)$$

由于 $\delta(\sigma)<\eta$, 所以 $\bigcup_{i=1}^{s} A_i \subset F$, 从而

$$\sum_{i=1}^{s} m\left(A_i\right)=m\left(\bigcup_{i=1}^{s} A_i\right) \leqslant m(F)<\frac{\varepsilon}{4(M+1)}$$

因此

$$\left|\sum_{i=1}^{s} f\left(\xi_i\right) m\left(A_i\right)-\sum_{i=1}^{s} \int_{A_i} f\right|<2 M \cdot \frac{\varepsilon}{4(M+1)}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对 $i=s+1, s+2, \cdots, k$: 这时对每一个 A_i, 存在一个 $P_{j(i)}$ 使得 $A_i \subset \mathring{P}_{j(i)}$, 由于 φ 与 ψ 在 $\mathring{P}_{j(i)}$ 上取常值并且 $\xi_i \in A_i$, 故我们有

$$\varphi\left(\xi_i\right) \leqslant f(x) \leqslant \psi\left(\xi_i\right), \forall x \in \mathring{P}_{j(i)}(i=s+1, s+2, \cdots, k)$$

因此

$$\sum_{i=s+1}^{k} \int_{A_i} \varphi=\sum_{i=s+1}^{k} \varphi\left(\xi_i\right) m\left(A_i\right) \leqslant \sum_{i=s+1}^{k} f\left(\xi_i\right) m(A)<\sum_{i=s+1}^{k} \psi\left(\xi_i\right) m\left(A_i\right)=\sum_{i=s+1}^{k} \int_{A_i} \psi$$

$$\sum_{i=s+1}^{k} \int_{A_i} \varphi \leqslant \sum_{i=s+1}^{k} \int_{A_i} f \leqslant \sum_{i=s+1}^{k} \int_{A_i} \psi$$

从而

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=s+1}^{k} f\left(\xi_i\right) m\left(A_i\right)-\sum_{i=s+1}^{k} \int_{A_i} f\right| & \leqslant \sum_{i=s+1}^{k} \int_{A_i}(\psi-\varphi) \\ & \leqslant \int_A(\psi-\varphi) \leqslant \int_P(\psi-\varphi)<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

结合这两个差式的估计式及 $\int_A f=\sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} f$ 得到:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{k} f\left(\xi_i\right) m\left(A_i\right)-\int_A f\right| & \leqslant\left|\sum_{i=1}^{s} f\left(\xi_i\right) m\left(A_i\right)-\sum_{i=1}^{s} \int_{A_i} f\right|+\left|\sum_{i=s+1}^{k} f\left(\xi_i\right) m\left(A_i\right)-\sum_{i=s+1}^{k} \int_{A_i} f\right| \\ & <\varepsilon / 2+\varepsilon / 2=\varepsilon.\end{aligned}$$

此即表明

$$\lim_{\mathscr{B}} S(f, \sigma, \xi)=\int_A f$$

注 1) 上述定理的逆也是成立的, 即:

若存在常数 l 使得 $\lim_{\mathscr{B}} S(f, \sigma, \xi)=l$, 则 f 在 A 上可积, 并且

$$\int_A f=l=\lim_{\mathscr{B}} S(f, \sigma, \xi).$$

此结论的证明与定理 **??**的 2) $\Longrightarrow$ 1) 的证明类似, 我们留给读者作为练习.

2) 在实际利用 Riemann 和极限计算可积函数 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 的积分 $\int_A f$ 时, 我们可以任取一类特殊的 A 的带点 L-分割子集 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$, 然后求相应于 $\mathscr{B}'$ 的 Riemann 和极限 $\lim_{\mathscr{B}'} S(f, \sigma, \xi)$. 于是

$$\lim_{\mathscr{B}'} S(f, \sigma, \xi)=\int_A f$$

例题 19.9 设函数 $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ 定义为：

$$\forall (x,y)\in[0,1]\times[0,1],\ f(x,y)=x^2y^2.$$

证明：f 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上可积，并计算其积分 $\int_{[0,1]\times[0,1]} f$.

函数 f 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续，并且 $[0,1]\times[0,1]$ 是闭正方形，故 f 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上可积.

下面我们利用 Riemann 和极限来计算 $\int_{[0,1]\times[0,1]} f$. $\forall n\in\mathbb{N}$, 将 $[0,1]n$ 等分，于是我们得到 $[0,1]\times[0,1]$ 的一个特殊正方形分割

$$\sigma_n=\left(\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]\times\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right],i,j=0,1,2,\cdots,n-1,\right).$$

对每一个分割单元 $P_{ij}^{(n)}=\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]\times\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right]$, 取 $\xi_{ij}^{(n)}=\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)$, 于是

$$\xi_n=\left(\xi_{ij}^{(n)},i,j=0,1,\cdots,n-1\right).$$

由此我们得到 $[0,1]\times[0,1]$ 的一个特殊的带点 L-分割序列 $\langle(\sigma_n,\xi_n)\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, 对应于它的 f 的 Riemann 和

$$\begin{aligned}S\left(f,\sigma_n,\xi_n\right)&=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}f\left(\xi_{ij}^{(n)}\right)m\left(P_{ij}^{(n)}\right)\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\left(\frac{j}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n^2}\\&=\frac{1}{n^6}\left[\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]^2.\end{aligned}$$

因此根据定理19.18我们有

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]\times[0,1]} f&=\lim_{n\to+\infty}S\left(f,\sigma_n,\xi_n\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^6}\left[\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]^2\\&=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

✍ 习题

1. 利用 Riemann 和极限计算积分 $\int_{[0,1]\times[0,1]} x^8y^2$.
2. 证明定理19.18后的附注 1.

19.5 重积分的计算

前面几节我们着重研究了有界函数 $f:A\to\mathbb{R}$ 的 Riemann 积分理论，现在我们转入介绍可积函数 f 的积分 $\int_A f$ 的实际计算方法.

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的积分 $\int_A f$, 我们还采用下面的一个记号：

$$\int_A f=\int_A f(x)\mathrm{d}x=\int_A\cdots\int f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

并称它为 f 在 A 上的 n 重积分.

特别地当 $n=2,3$ 时我们有:

$$\int_A f=\int_A f(u)\mathrm{d}u=\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\int_A f=\int_A f(u)\mathrm{d}u=\iiint_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

它们自然分别称为 f 在 $A(\subset\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3)$ 上的二重积分或三重积分.

1. 重积分的降维法

1)Fubini 定理

以下我们设 $P\subset\mathbb{R}^m, S\subset\mathbb{R}^k$ 是两个闭长方体, $f:P\times S\left(\subset\mathbb{R}^{m+k}\right)\to\mathbb{R}$ 是任一可积函数.

$\forall x\in P,\forall y\in S$, 定义函数 $f_x:S\to\mathbb{R}$ 及 $f^y:P\to\mathbb{R}$ 为

$$f_x(y)=f(x,y)(\forall y\in S),$$

$$f^y(x)=f(x,y)(\forall x\in P).$$

一般说来, 很难保证 $\forall x\in P$, 或 $\forall y\in S$, 函数 $f_x:S\to\mathbb{R}$ 或函数 $f^y:P\to\mathbb{R}$ 都可积. 为此我们令

$$P_f=\left\{x\in P\mid f_x \text{ 在 } S \text{ 上可积}\right\},$$

$$S_f=\left\{y\in S\mid f^y \text{ 在 } P \text{ 上可积}\right\}.$$

现在我们定义函数 $F:P\to\mathbb{R}$ 与 $G:S\to\mathbb{R}$ 为:

$$F(x)=\int_S f_x(y)\mathrm{d}y\ \text{ 若 }\ x\in P_f;\qquad F(x)=0 \text{ 若 } x\notin P_f.$$

$$G(y)=\int_P f^y(x)\mathrm{d}x\ \text{ 若 }\ y\in S_f;\qquad G(y)=0\ \text{ 若 }\ y\notin S_f.$$

自然, 这里有三个问题需要研究:

1. $P-P_f$ 与 $S-S_f$ 是否为 Jordan 零测度集?
2. 函数 $F:P\to\mathbb{R}$ 与 $G:S\to\mathbb{R}$ 是否可积?
3. 如果 F 与 G 可积, 是否有

$$\int_P F=\int_{P\times S} f=\int_S G?$$

当 f 为阶梯函数时, 回答是肯定的, 即有下述引理.

引理 19.1

设 $f:P\times S\to\mathbb{R}$ 是任一阶梯函数. 则

1. $m\left(P-P_s\right)=m\left(S-S_f\right)=0$.
2. F 在 P 上可积, G 在 S 上可积, 并且

$$\int_P F=\int_{P\times S} f=\int_S G.$$

证明 我们只对 $P-P_f$ 及 F 进行证明, 对 $S-S_f$ 及 G 的证明完全类似. 证明分两步.

第一步: 设 $P'\subset P, S'\subset S$ 是两个闭长方体,

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{若 } (x,y)\in\left(P'\times S'\right)^{\circ},\\ 0, & \text{若 } (x,y)\notin P'\times S'.\end{cases}$$

我们来证明：对这种形式的阶梯函数 f, 结论成立.

事实上，由 f 的定义可知,

$$\int_{P\times S} f = m\left(P'\times S'\right) = m\left(P'\right)m\left(S'\right).$$

为了确定 $P-P_f$, 我们有：

$\forall x\in\left(P-P'\right), f_x=0$, 因此 f_x 在 S 上可积，并且 $\int_S f_x = 0$.

$\forall x\in \overset{\circ}{P}{}', f_x(y)=\begin{cases}1, \text{若 } y\in \overset{\circ}{S}{}' \\ 0, \text{若 } y\in\left(S-S'\right)\end{cases}$ 因此 f_x 是阶梯函数，从而 f_x 在 S 上可积，并且 $\int_S f_x = m\left(S'\right)$.

由于 $\partial P' = P' - \overset{\circ}{P}{}'$, 故上述讨论推知

$$P-P_f\subset\partial P', m\left(P-P_f\right)=m\left(\partial P'\right)=0.$$

因此 1) 成立.

为了证明 2), 我们注意到 F 在 P 上有界，且

$$F(x)=\begin{cases}0, \forall x\in P-P', \\ m\left(S'\right), \forall x\in \overset{\circ}{P}{}'.\end{cases}$$

因此 $F: P\to\mathbb{R}$ 是阶梯函数，从而 F 在 P 上可积，并且

$$\int_P F = \int_{P-P'} F + \int_{P'} F = \int_{P'} F = \int_{P'} m\left(S'\right) = m\left(P'\right)m\left(S'\right)$$

因此

$$\int_{P\times S} f = \int_P F$$

第二步：对一般的阶梯函数 $f: P\times S\to\mathbb{R}$, 证明引理成立.

我们设 $[P_1\times S_1, P_2\times S_2, \cdots, P_l\times S_l;\ c_1, c_2, \cdots, c_l]$ 是适合于 f 的一个二元组. 令

$$f_i: P\times S\to\mathbb{R}, f_i(x,y)=\begin{cases}1, & \text{若 } (x,y)\in(P_i\times S_i)^\circ, \\ 0, & \text{若 } (x,y)\notin P_i\times S_i,\end{cases}$$

则 f 具有下述分解式：

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{l} c_i f_i(x,y) \forall (x,y)\in\left(P_j\times S_j\right)^\circ (j=1,2,\cdots,l)$$

由第一步所证，对每一个阶梯函数 f_i, 我们有 $P-P_{fi}\subset\partial P_i$, 因此对 f,

$$P-P_f\subset\bigcup_{i=1}^{l}\partial P_i,$$

从而 $m\left(P-P_f\right)=0$.

此即表明结论 1) 成立.

为了证明结论 2), 我们有

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \begin{cases} \displaystyle\int_S f(x.y)\mathrm{d}y, & \forall x \in P_f \\ 0, & \forall x \notin P_f \end{cases} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_S \left(\sum_{i=1}^{l} c_i f_i(x,y)\right)\mathrm{d}y, & \forall x \in \mathring{P}_f \\ 0, & \forall x \notin P_f \end{cases} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{l} c_i \int_S f_i(x,y)\mathrm{d}y, & \forall x \in \mathring{P}_f \\ 0, & \forall x \notin P_f \end{cases} \\
&= \begin{cases} \displaystyle c_j \int_S f_j(x,y)\mathrm{d}y, & \forall x \in \mathring{P}_j \\ 0, & \forall x \notin P_f \end{cases} \\
&= \begin{cases} c_j m\left(S_j\right), & \forall x \in \mathring{P}_f; \\ 0, & \forall x \notin P_f. \end{cases}
\end{aligned}
$$

由此可知 $F' : P \to \mathbb{R}$ 是阶梯函数, 因此 F 在 P 上可积, 并且

$$
\begin{aligned}
\int_P F = \sum_{i=1}^{l} \int_{P_i} F = \sum_{i=1}^{l} \int_{P_i} c_i m\left(S_i\right) &= \sum_{i=1}^{l} c_i m\left(P_i\right) m\left(S_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{l} c_i m\left(P_i \times S_i\right) = \sum_{i=1}^{l} c_i \int_{P\times S} f_i \\
&= \int_{P\times S} \sum_{i=1}^{l} c_i f_i \\
&= \int_{P\times S} f.
\end{aligned}
$$

注 如果 $f : P \times S \to \mathbb{R}$ 不是阶梯函数, 则一般说来, $P - P_f$ 与 $S - S_f$ 不再是 Jordan 零测度集, 而是一个 L-零测度集.

下面我们在 $P_f = P, S_f = S$ 的假设下证明下述重要定理 (实际上在 $P - P_f$ 与 $S - S_f$ 为 Jordan 锋测度集的假设下, 定理也不难证明, 见习题第 6 题)

定理 19.19 (Fubini 定理)

设 $f : P\times S \to \mathbb{R}$ 是任一可积函数, $P, S, f_x, f^y, P_f, S_f, F$ 及 G 如前所定义, 如果 $P_f = P, S_f = S$, 则

1. $F : P \to \mathbb{R}$ 与 $G : S \to \mathbb{R}$ 都是可积函数.
2. 下述等式成立:

$$\int_P F = \int_{P\times S} f = \int_S G.$$

证明 我们也只对 F 进行证明. 对 G 的证明完全类似, 留给读者作为练习.

首先因为 f 在 $P \times S$ 上可积, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, 存在两个阶梯函数 $\varphi, \psi : P \times S \to \mathbb{R}$ 使得

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi, \int_{P\times S} (\psi - \varphi) < \varepsilon$$

于是

$$\forall x \in P, \varphi_x \leqslant f_x \leqslant \psi_x.$$

现在我们设 $\sigma = (P_1 \times S_1, P_2 \times S_2, \cdots, P_l \times S_l)$ 是同时适合于 φ 与 ψ 的 $P \times S$ 的一个分割.

由引理19.1知, 对阶梯函数 φ 与 ψ, 若我们令 $\Phi, \Psi : P \to \mathbb{R}$ 为

$$\Phi(x) = \int_S \varphi_x(y)\mathrm{d}y, \forall x \in P_\varphi; \quad \Phi(x) = 0, \forall x \notin P_\varphi.$$

$$\Psi(x) = \int_S \psi_x(y)\mathrm{d}y, \forall x \in P_\psi; \quad \Psi(x) = 0, \forall x \notin P_\psi$$

则 Φ 与 Ψ 都是阶梯函数, 并且

$$\int_P \Phi = \int_{P\times S} \varphi, \int_P \Psi = \int_{P\times S} \psi,$$

$$P - P_\varphi \subset \bigcup_{i=1}^{l} \partial P_i, P - P_\psi \subset \bigcup_{i=1}^{l} \partial P_i$$

此即表明 $\bigcup\limits_{i=1}^{l} \mathring{P}_i \subset P_\phi, \bigcup\limits_{i=1}^{j} \mathring{P}_i \subset P_\psi$.

于是由函数 $F : P \to \mathbb{R}$ 的定义

$$F(x) = \int_S f_x(y)\mathrm{d}y, \forall x \in P_f = P,$$

知,

$$\forall x \in \bigcup_{i=1}^{l} \mathring{P}_i, \Phi(x) \leqslant F(x) \leqslant \Psi(x).$$

另一方面, 由于 f 位 $P \times S$ 上有界, 故由

$$|F(x)| \leqslant \int_S |f(x,y)|\mathrm{d}y \leqslant m(S) \cdot \sup_{(x,y)\in P\times S} |f(x,y)|$$

$$< +\infty (x \in P)$$

知, 函数 F 在 P 上有界, 因此, 若我们定义函数

$$\Phi^* : P \to \mathbb{R} : \Phi^*(x) = \Phi(x), \forall x \in \bigcup_{i=1}^{l} \mathring{P}_i; \quad \Phi^*(x) = F(x), \forall x \notin \bigcup_{i=1}^{l} \mathring{P}_i.$$

$$\Psi^* : P \to \mathbb{R} : \Psi^*(x) = \Psi(x), \forall x \in \bigcup_{i=1}^{l} \mathring{P}_i; \quad \Psi^*(x) = F(x), \forall x \notin \bigcup_{i=1}^{l} \mathring{P}_i.$$

则 Φ^* 与 Ψ^* 是阶梯函数, 并且

$$\Phi^*(x) \leqslant F(x) \leqslant \Psi^*(x), \forall x \in P,$$

$$\int_P \left(\Psi^* - \Phi^*\right) = \int_P (\Psi - \Phi) = \int_{P\times S} (\psi - \varphi) < \varepsilon.$$

此即表明函数 $F : P \to \mathbb{R}$ 在 P 上可积, 于是

$$\int_{P\times S} \varphi = \int_P \Phi = \int_P \Phi^* \leqslant \int_P F \leqslant \int_P \Psi^* = \int_P \Psi = \int_{P\times S} \psi$$

最后由不等式 $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ 两边积分得到

$$\int_{P\times S} \varphi \leqslant \int_{P\times S} f \leqslant \int_{P\times S} \psi$$

由此推得

$$\left|\int_{P\times S} f - \int_P F\right| \leqslant \int_{P\times S} (\psi - \varphi) < \varepsilon$$

再由 $\varepsilon>0$ 的任意性知

$$\int_P F=\int_{P\times S} f.$$

推论 19.6

若函数 $f: P\times S\to\mathbb{R}$ 连续, 并且 $P\times S=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$, 则

$$\begin{aligned}\int_{P\times S} f&=\int_P\left(\int_S f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_S\left(\int_P f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\&=\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}\cdots\left(\int_{a_n}^{b_n} f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\mathrm{d}x_n\right)\cdots\right)\mathrm{d}x_2\right)\mathrm{d}x_1\\&=\int_{a_n}^{b_n}\left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\cdots\left(\int_{a_1}^{b_1} f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\mathrm{d}x_1\right)\cdots\right)\mathrm{d}x_{n-1}\right)\mathrm{d}x_n\end{aligned}$$

特别地, 当 $n=2$, 且 $P\times S=[a,b]\times[c,d]$, 则

$$\begin{aligned}\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

证明 因为 f 在 $P\times S$ 上连续, 故 f 在 $P\times S$ 上可积. $\forall x\in P, \forall y\in S$.

$$f_x: S\to\mathbb{R} \text{ 与 } f^y: P\to\mathbb{R}$$

都是连续函数. 故它们都是可积的, 从而 $P_f=P, S_f=S$, 因此 Fubini 定理成立, 即

$$\int_{P\times S} f=\int_P\left(\int_S f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_S\left(\int_P f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

由于 $P\times S=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$, 故若取

$$P=[a_1,b_1], S=\prod_{i=2}^{n}[a_i,b_i]$$

则上述等式变为:

$$\begin{aligned}\int_{P\times S} f&=\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{\prod_{i=2}^{n}[a_i,b_i]} f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n\right)\mathrm{d}x_1\\&=\int_{\prod_{i=2}^{n}[a_i,b_i]}\left(\int_{a_1}^{b_1} f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n\end{aligned}$$

重复应用 Fubini 定理, 即可准知推论中的积分等式成立.

特形地, 当 $n=2$ 时, 我们得到上面所指的积分等式. 此积分等式同时再一次证明了定理18.5的对连续函数的积分顺序可交换性:

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

例题 19.10 试计算二重积分

$$I=\iint_{[0,a]\times[0,b]} y\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里函数 $f:[0,a]\times[0,b]\to\mathbb{R}$

$$\forall(x,y)\in[0,a]\times[0,b],\ f(x,y)=y\mathrm{e}^{-xy}$$

是连续的，因此由上述推论得到

$$I=\int_0^b\left(\int_0^a y\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_0^a\left(\int_0^b y\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

显然计算第一个积分比计算第二个积分容易，故

$$I=\int_0^b\left(1-\mathrm{e}^{-ay}\right)\mathrm{d}y=b+a^{-1}\left(\mathrm{e}^{-ab}-1\right)$$

推论 19.7

设函数 $f:P\times S\left(\subset\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}$ 是变元分离的，即具有下述形式：

$$\forall(x,y)\in P\times S,\ f(x,y)=h(x)k(y),$$

这里常数 $h:P\to\mathbb{R}$ 与 $k:S\to\mathbb{R}$ 可负，则

1. f 在 $P\times S$ 上可积，
2. $\displaystyle\int_{P\times S}f=\left(\int_P h\right)\left(\int_S k\right)$.

证明 首先我们定义两个函数 $H,K:P\times S\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\forall(x,y)\in P\times S,\ H(x,y)=h(x),\ K(x,y)=k(y).$$

显然，$f=H\cdot K$. 为了证明 f 可积，我们只需证明 H 与 K 可积即可.

由假设 h 在 P 上可积，故存在两个阶梯函数 $\varphi,\psi:P\to\mathbb{R}$ 使得

$$\varphi\leqslant h\leqslant\psi,\ \int_P(\psi-\varphi)<\frac{\varepsilon}{m(S)}.$$

定义函数 $\Phi,\Psi:P\times S\to\mathbb{R}$ 为：

$$\forall(x,y)\in P\times S,\ \Phi(x,y)=\varphi(x),\ \Psi(x,y)=\psi(x),$$

则 Φ 与 Ψ 都是阶梯函数，并且满足

$$\Phi\leqslant H\leqslant\Psi$$

$$\begin{aligned}\int_{P\times S}(\Psi-\Phi)&=\int_S\left(\int_P(\Psi-\Phi)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\&=\int_S\left(\int_P(\psi-\varphi)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\&<\frac{\varepsilon}{m(S)}\cdot m(S)=\varepsilon\end{aligned}$$

因此函数 H 在 $P\times S$ 上可积.

同理可证 K 在 $P\times S$ 上可积.

因而 f 在 $P\times S$ 上可积.

现在由于 $\forall x \in P, f_x(y) = h(x)k(y)(\forall y \in S)$, 故函数 f_x 在 S 上可积, 从而由 Fubini 定理得到

$$\begin{aligned}\int_{P\times S} f &= \int_P \left(\int_S h(x)k(y)\right) \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \\ &= \left(\int_P h(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_S k(y)\mathrm{d}y\right)\end{aligned}$$

注 若 $P\times S = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i], f: P\times S \to \mathbb{R}$ 连续, 且

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n),$$

则每一个函数 $f_i: [a_i, b_i] \to \mathbb{R}$ 连续, 从而由上述推论19.7知,

$$\begin{aligned}\int_{P\times S} f &= \int_{\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]} \cdots \int f \\ &= \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{a_2}^{b_2} f_2(x)\mathrm{d}x\right)\cdots\left(\int_{a_n}^{b_n} f_n(x)\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

例题 19.11 设 $A\subset\mathbb{R}^m, B\subset\mathbb{R}^k$ 是两个可测集, 证明 $A\times B\subset\mathbb{R}^{m+k}$ 也是可测集, 并且

$$m(A\times B) = m(A)m(B).$$

为此设 $P\subset\mathbb{R}^m, S\subset\mathbb{R}^k$ 是两个闭长方体使得 $A\subset P, B\subset S$, 于是 $A\times B\subset P\times S$. 因为下述特征函数关系式成立

$$\chi_{A\times B} = \chi_A \cdot \chi_B,$$

故由上述附注及可测集定义推知 $A\times B$ 可测, 并且

$$m(A\times B) = \int_{P\times S} \chi_{A\times B} = \int_P \chi_A \cdot \int_S \chi_B = m(A)m(B).$$

2) 纤维法

定理 19.20

设 $D\subset\mathbb{R}^{n-1}$ 是任一紧可测集, $\varphi,\psi: D\to\mathbb{R}$ 是两个连续函数且 $\varphi\leqslant\psi$. 令

$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R} \mid x\in D, \varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)\right\},$$

$f: A\to\mathbb{R}$ 是任一连续函数, 那么

1)A 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧可测集, 它的测度

$$m(A) = \int_D (\psi-\varphi).$$

2) 函数 $f: A\to\mathbb{R}$ 与 $x\longmapsto \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y(\forall x\in D)$ 可积, 且

$$\int_A f = \int_D \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

证明 首先证明 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧集. 为此令

$$m = \inf_{x\in D}\varphi(x), M = \sup_{x\in D}\psi(x).$$

则由 D 的紧性及 φ,ψ 的连续性知, m, M 为有限实数. 现设 $P\subset\mathbb{R}^{n-1}$ 是一闭长方体使得 $D\subset P$, 则

$$A\subset P\times[m,M],$$

因此 A 是有界集.

另一方面设 $(x_n, y_n) \in A(n \in \mathbb{N})$ 并且 $(x_n, y_n) \to (\overline{x}, \overline{y})$. 于是 $\varphi(x_n) \leqslant y_n \leqslant \psi(x_n), x_n \in D(\forall n \in \mathbb{N})$, 再由 D 的紧性及 φ, ψ 的连续性, 令 $n \to +\infty$ 取极限得到

$$x_n \to \widetilde{x} \in D, \varphi(\overline{x}) \leqslant \overline{y} \leqslant \psi(\vec{x}),$$

此即表明 $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$, 从而 A 是闭集.

因此 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧集.

下面证明 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的可测集.

根据可测集的第三特征性定理, 我们只需证明 ∂A 是 J-零测度集. 为此我们来证明:

$$\partial A \subset \mathrm{Gr}(\varphi) \cup \mathrm{Gr}(\psi) \cup \partial D \times [m, M].$$

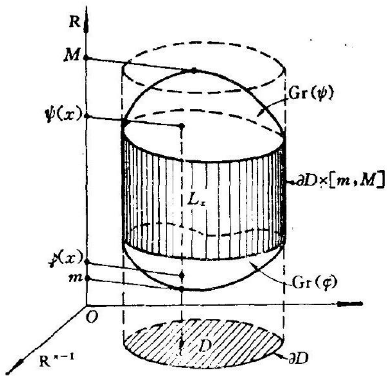


图 19.7

任取 $(x, y) \in \partial A$, 于是 $x \in D, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$.

若 $x \notin \mathring{D}$. 则由于 $\hat{\partial} D = D - \mathring{D}$ 知 $x \in \partial D$, 于是 $(x, y) \in \partial D \times [m, M]$.

若 $x \in \mathring{D}$, 但 $y \neq \varphi(x)$ 且 $y \neq \psi(x)$. 则 $\varphi(x) < y < \psi(x)$. 于是存在 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 使得 $\varphi(x) < \alpha < y < \beta < \psi(x)$. 现在由 φ, ψ 的连续性知, 存在 x 在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的一个邻域 V 使得

$$V \subset \mathring{D}, \forall z \in V, \varphi(z) < \alpha < y < \beta < \varphi(z).$$

此即表明开集 $V \times (\alpha, \beta) \subset A$. 因为 $(x, y) \in V \times (\alpha, \beta)$, 所以 $(x, y) \in \mathring{A}$, 这与 $(x, y) \in \partial A$ 矛盾. 因此 $y = \varphi(x)$ 或 $y = \psi(x)$. 也就是说 $(x, y) \in \mathrm{Gr}(\varphi)$ 或 $(x, y) \in \mathrm{Gr}(\psi)$.

总之 $(x, y) \in \mathrm{Gr}(\varphi) \cup \mathrm{Gr}(\psi) \cup \partial D \times [m, M]$.

现在根据 §3 例19.5的结论知, $\mathrm{Gr}(\varphi)$ 与 $\mathrm{Gr}(\psi)$ 都是零测度集.

对于 $\partial D \times [m, M]$, 由于 D 是可测集, 所以 ∂D 是零测度案, 于是 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的有限多个闭长方体 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$ 使得

$$\partial D \subset \bigcup_{i=1}^{k} Q_i, \sum_{i=1}^{k} m(Q_i) < \frac{\varepsilon}{M - m + 1}.$$

令 $P_i = Q_i \times [m, M]$, 则 P_i 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭长方体, 并且

$$\partial D \times [m, M] \subset \left(\bigcup_{i=1}^{k} Q_i\right) \times [m, M] = \bigcup_{i=1}^{k} P_i,$$

$$\sum_{i=1}^{k} m(P_i) = \sum_{i=1}^{k} m(Q_i)(M - m) < (M - m) \cdot \frac{\varepsilon}{M - m + 1} < \varepsilon,$$

从而 $\partial D \times [m, M]$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 J-零测度集.

因此 ∂A 是 J-零测度集. 故 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的可测集.

最后证明定理的共他结论.

由于函数 $f : A \to \mathbb{R}$ 连续, A 是紧可测集, 数 f 在 A 上可积, 设 P 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的闭长方体使得 $D \subset P$, 则 $P \times [m, M]$ 是包含 A 的 $\mathbb{R}^n$ 中的闭长方体, 并且

$$\int_A f = \int_{P\times[m,M]} \widetilde{f},$$

这里 $\widetilde{f}$ 表示 f 在 $P \times [m, M]$ 上的标准延拓.

对任意的 $x \in P$, 函数 $\widetilde{f}_x : [m, M] \to \mathbb{R}(\widetilde{f}_x(y) = \widetilde{f}(x, y)(\forall y \in [m, M])$ 最多只有两个不连续点 $y = \varphi(x)$ 与 $y = \psi(x)$, 因此 $\widetilde{f_x}$ 在 $[m, M]$ 上可积, 从而 $P_{\widetilde{f}} = P$, 根据 Fubini 定理, 函数 $x \longmapsto \int_m^M \widetilde{f}(x, y)\mathrm{d}y, x \in P$ 可积, 并且

$$\begin{aligned}
\int_A f = \int_{P\times[m,M]} \widetilde{f} &= \int_P \left(\int_m^M \widetilde{f}(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_P \left(\int_m^{\varphi(x)} \widetilde{f}(x, y)\mathrm{d}y + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \widetilde{f}(x, y)\mathrm{d}y + \int_{\psi(x)}^{M} \widetilde{f}(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_P \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \widetilde{f}(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_D \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

特别地令 $f \equiv 1$, 则由上述积分等式得到

$$\begin{aligned}
m(A) = \int_A 1 &= \int_D \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} 1\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_D (\psi - \varphi)
\end{aligned}$$

注 1) 从几何上来理解积分等式

$$\int_A f = \int_D \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

就更清楚了. 事实上, D 就是积分区域 A 在坐标超平面 $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ 上的投影区域. 过 D 的每一点 x 作一直线段 L_x–纤维段–它与 A 最多交于两点, 下端点为 $(x, \varphi(x))$, 上端点为 $(x, \psi(x))$(当 $\varphi(x) = \psi(x)$ 时, 退化为一点), 让 x 取遍 D, 则这些纤维段 L_x 就织成了区域 A.

f 在 A 上积分, 即先将 f 沿纤维段 L_x 求积分 $\int_{\varphi(x)}^{(x)} f(x, y)\mathrm{d}y$, 然后将这些积分值沿 D 求和, 即求积分 $\int_D \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$, 就得到积分等式

$$\int_A f = \int_A \left(\int_{\varphi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

这也就是我们称这种积分法为纤维积分法的缘故.

2) 当 $n=2$ 时，二重积分 $\int_A f$ 的积分区域 A 有两种最简单的类型：

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b],\varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)\right\},$$
$$A'=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in[c,d],h(y)\leqslant x\leqslant k(y)\right\}.$$

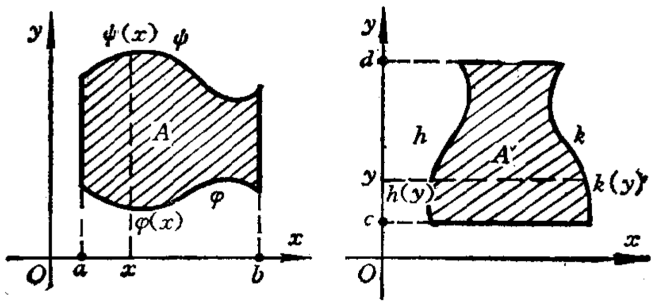


图 19.8

对于第一种类型的积分区域 A, 定理证明了：

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

对于第二种类型的积分区域 A', 我们也可以类似地证明：

$$\iint_{A'} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\left(\int_{h(y)}^{k(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

如果积分区域 A 不是上述两种类型的，但可以用适当的方法分割成若干个这种简单类型的子区域 $A_1,A_2,\cdots,A_m$, 这时可先计算每一个积分 $\iint_{A_i} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 然后利用积分对积分区域的可加性得到

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{m}\iint_{A_i} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

3) 当 $n=3$ 时，三重积分 $\iiint_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的积分区域 A 也有下列 3 种最简单的类型：

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in D,\varphi(x,y)\leqslant z\leqslant\psi(x,y)\},$$
$$A'=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (y,z)\in D',h(y,z)\leqslant x\leqslant k(y,z)\},$$
$$A''=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (z,x)\in D'',a(z,x)\leqslant y\leqslant\beta(z,x)\},$$

这里 D,D',D'' 分别是 A 在 xOy 平面上, yOz 平面上, zOx 平面上的投影区域.

对于第一种类型的积分区域 A, 定理 19.20 证明了：

$$\iiint_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_D\left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

对于第二, 三两种类型的积分区域 A' 与 A'', 我们也可以类似地证明：

$$\iiint_{A'} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D'}\left(\int_{h(y,z)}^{k(y,z)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\iint_{A''}\int_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D'}\left(\int_{\alpha(z;\quad x)}^{\beta(z,x)} f(x)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

如果积分区域 A 不是上述三种类型的，但可以适当地分割成若干个这种简单类型的子区域 $A_1,A_2,\cdots,A_m$,

这时也可以利用积分对积分区域的可加性求得

$$\iiint_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{m} \iiint_{A_i} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

例题 19.12 设 A 是由抛物线 $y^2 = 2p_x$ 与直线 $x = \frac{p}{2}(p > 0)$ 所围成的平面区域, 试计算二重积分

$$I = \iint_A xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

首先, 函数 $f : A \to \mathbb{R}$

$$\forall (x,y) \in A,\ f(x,y) = xy^2$$

在 A 上连续, 因此 f 在 A 上可积.

抛物线 $y^2 = 2px$ 与直线 $x = \frac{p}{2}$ 的交点为 $M_1\left(\frac{p}{2}, -p\right)$ 与 $M_2\left(\frac{p}{2}, p\right)$(如图19.9所示). 于是

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in \left[0, \frac{p}{2}\right], -\sqrt{2px} \leqslant y \leqslant \sqrt{2px}\right\},$$

从而

$$\begin{aligned}
I &= \iint_A xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{p/2}\left(\int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} xy^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^{p/2} 2x\left(\int_0^{\sqrt{2px}} y^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2^{\frac{5}{2}}p^{\frac{3}{2}}}{3}\int_0^{p/2} x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{p^5}{21}
\end{aligned}$$

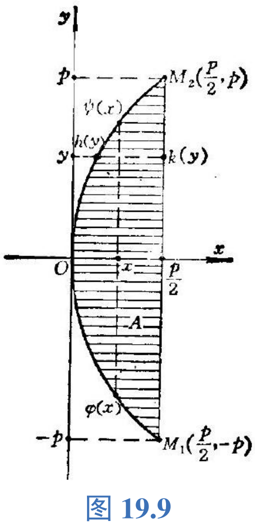


图 19.9

如果我们将 A 表示成下述形状:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [-p,p], \frac{y^2}{2p} \leqslant x \leqslant \frac{p}{2}\right\},$$

同样可计算得到

$$\begin{aligned}
I &= \iint_A xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-p}^{p}\left(\int_{y^2/2p}^{p/2} xy^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{-p}^{p} y^2\left(\int_{y^2/2p}^{p/2} x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^p\left(\frac{p^2y^2}{8} - \frac{y^6}{8p^2}\right)\mathrm{d}y \\
&= -\frac{p^5}{21}.
\end{aligned}$$

例题 19.13 设 A 是由圆周 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ 与圆周 $(x-1)^2+y^2=1$ 所围的平面区域, 试计算二重积分

$$I = \iint_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里函数 $f : A \to \mathbb{R}$

$$\forall (x, y) \in A, f(x, y) = xy$$

在 A 上连续, 故 f 在 A 上可积.

显然积分区域 A 不是附注中所指的简单类型, 但如果用直线 $x = 1$ 分割 A, 则我们得到 A 的一个简单类型区域的分割 $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

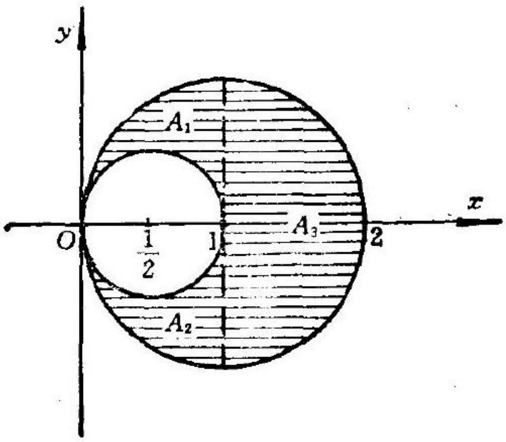


图 19.10

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1], \sqrt{x - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2x - x^2}\right\}, \\
A_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1], -\sqrt{2x - x^2} \leqslant y \leqslant -\sqrt{x - x^2}\right\}, \\
A_3 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, 2], -\sqrt{2x - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2x - x^2}\right\}.
\end{aligned}$$

分别计算 $\iint_{A_i} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 得到:

$$\begin{aligned}\iint_{A_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} xy\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{A_2} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{-\sqrt{x-x^2}} xy\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{2x-x^2}}^{-\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{A_3} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_1^2 \left(\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} xy\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x \\ &= 0\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\iint_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{A_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{A_2} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{A_3} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

例题 19.14 设 A 是由平面 $x+y+z=1$ 及坐标平面 $x=0, y=0$ 与 $z=0$ 所围成的空间区域. 试计算三重积分

$$I = \iiint_A \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

由于函数 $f: A \to \mathbb{R}$

$$\forall (x,y,z) \in A, f(x,y,z) = \frac{1}{(1+x+y+z)^3}$$

在 A 上连续, 故 f 在 A 上可积.

平面 $x+y+z=1$ 与坐标平面 $z=0$ 的交线为 xOy 平面上的直线 $x+y=1$. 于是 A 在 xOy 平面上的投影 D 就是由直线 $x=0, y=0$ 与 $x+y=1$ 所围的平面区域 (如图19.11所示).

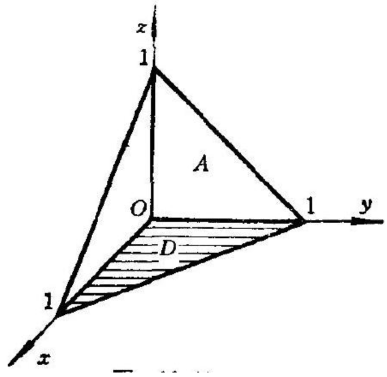


图 19.11

区域 A 可表示为下述形式：

$$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid(x,y)\in D,0\leqslant z\leqslant 1-x-y\right\}$$
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\in[0,1],0\leqslant y\leqslant 1-x\right\}$$

因此

$$\begin{aligned}
I&=\iiint_A\frac{1}{(1+x+y+z)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\iint_D\left(\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{1}\right]\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}-\frac{1-x}{4}\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\left(\log 2-\frac{5}{8}\right)
\end{aligned}$$

例题 19.15 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是任一连续函数. 证明下述 Dirichlet 积分公式成立：

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R},\int_{x_n=0}^{x}\cdots\int_{x_2=0}^{x_3}\int_{x_1=0}^{x_2}f(x_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\
=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x(x-t)^{n-1}f(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

我们对 n 用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时，Dirichlet 积分公式为

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{(1-1)!}\int_0^x(x-t)^{1-1}f(t)\mathrm{d}t$$

显然成立.

假设当 $n=k$ 时，Dirichlet 积分公式成立，那么对 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}
&\int_{x_{k+1}=0}^{x}\cdots\int_{x_2=0}^{x_0}\int_{x_1=0}^{x_2} f(x_1)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{k+1}\\
=&\int_{x_{k+1}=0}^{x}\left(\int_{x_k=0}^{x_{k+1}}\cdots\int_{x_2=0}^{x_3}\int_{x_1=0}^{x_2} f(x_1)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_k\right)\mathrm{d}x_{k+1}\\
=&\int_{x_{k+1}=0}^{x}\left(\frac{1}{(k-1)!}\int_0^{x_{k+1}}(x_{k+1}-t)^{k-1}f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_{k+2}\\
=&\int_0^x\left(\int_0^{x_{k+1}}\frac{1}{(k-1)!}(x_{k+1}-t)^{k-1}f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_{k+1}
\end{aligned}$$

若我们记 (这里我们假设 $x\geqslant 0$).

$$A=\left\{(x_{k+1},t)\in\mathbb{R}^2 \mid x_{k+1}\in[0,x],0\leqslant t\leqslant x_{k+1}\right\},$$

则上述积分可变换为

$$\begin{aligned}
&\int_{x_{k+1}}^{x}\cdots\int_{x_2=0}^{x_3}\int_{x_1=0}^{x_2} f(x_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{k+1}\\
=&\iint_A\frac{1}{(k-1)!}(x_{k+1}-t)^{k-1}f(t)\mathrm{d}x_{k+1}\mathrm{d}t\\
=&\int_0^x\left(\int_t^x\frac{1}{(k-1)!}(x_{k+1}-t)^{k-1}f(t)\mathrm{d}x_{k+1}\right)\mathrm{d}t\\
=&\int_0^x\frac{1}{k(k-1)!}f(t)\left[(x_{k+1}-t)^k\right]_t^x\mathrm{d}t\\
=&\frac{1}{k!}\int_0^x(x-t)^k f(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

此即表明 Dirichlet 积分公式当 $n=k+1$ 时成立. 因此由数学归纳法知，$\forall n\in\mathbb{N}$,Dirichlet 积分公式成立.

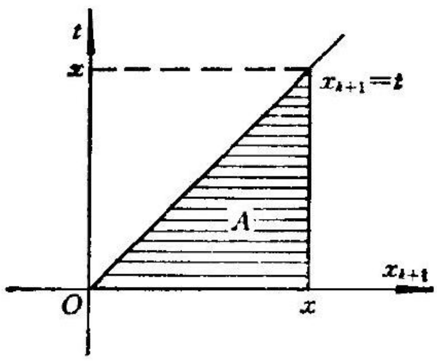


图 19.12

3) 截面法

定理 19.21

设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是任一有界集，$f:A\to\mathbb{R}$ 是任一可积函数，并且满足下列条件：

1. A 包含在两个超平面 $\mathbb{R}^{n-1}\times\{a\}$ 与 $\mathbb{R}^{n-1}\times\{b\}$ 之间 (这里 $a,b\in\mathbb{R},a<b$).
2. $\forall z\in[a,b]$, 超平面 $\mathbb{R}^{n-1}\times\{z\}$ 与 A 的交在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上的投影为 $A(z)$, 并且函数

$$f_z:A(z)\to\mathbb{R},\forall x\in A(z),f_z(x)=f(x,z)$$

在 $A(z)$ 上可积.

我们定义函数 $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为:

$$\forall z\in[a,b], G(z)\triangleq\int_{A(z)} f_z(x)\mathrm{d}x=\int_{A(z)} f(x,z)\mathrm{d}x,$$

则

1) 函数 G 在 $[a,b]$ 上可积.

2) 下述等式成立:

$$\int_A f=\int_a^b G(z)\mathrm{d}z=\int_a^b\left(\int_{A(z)} f(x,z)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}z$$

证明 设 $P\subset\mathbb{R}^{n-1}$ 是一闭长方体, 使得 $A\subset P\times[a,b]\subset\mathbb{R}^n$.

令 $\widetilde{f}$ 为 f 在 $P\times[a,b]$ 上的标准延拓. 由于 f 在 A 上可积, 故 $\widetilde{f}$ 在 $P\times[a,b]$ 上可积, 并且

$$\int_A f=\int_{P\times[a,b]}\widetilde{f}$$

下面我们来证明: $\forall z\in[a,b]$, 函数 $(\widetilde{f})_z:P\to\mathbb{R}$ 在 P 上可积 (这里 $(\widetilde{f})_z(x)=\widetilde{f}(x,z),\forall x\in P$).

为此设 $\widetilde{(f_z)}$ 为 f_z 在 P 上的标准延拓, 于是由定义我们有

$$\forall x\in P,(\widetilde{f})_z(x)=\widetilde{f}(x,z)=\begin{Bmatrix} f(x,z), & 若\ x\in A(z)\\ 0, & 若\ x\notin A(z)\end{Bmatrix}=\widetilde{(f_z)}(x).$$

而的假设 $f_z:A(z)\to\mathbb{R}$ 在 $A(z)$ 上可积, 故 $\widetilde{(f_z)}$ 在 P 上可积, 从而 $(\widetilde{f})_z$ 在 P 上可积.

因此由 Fubini 定理知, 函数 $G:[a,b]\to\mathbb{R}$

$$\forall z\in[a,b], G(z)=\int_P(\widetilde{f})_z(x)\mathrm{d}x=\int_{A(z)} f(x,z)\mathrm{d}x$$

在 $[a,b]$ 上可积, 并且

$$\int_A f=\int_{P\times\{a,b\}}\widetilde{f}=\int_a^b\left(\int_P\widetilde{f}(x,z)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}z=\int_a^b\left(\int_{A(z)} f(x,z)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}z$$

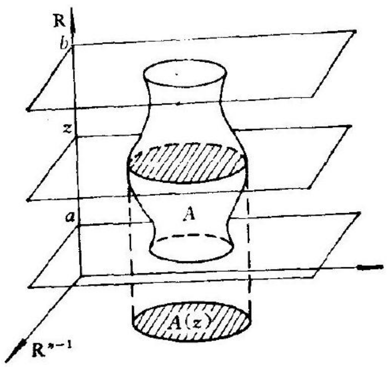


图 19.13

注 正像定理19.20一样, 我们也可以从几何上来进一步理解积分等式

$$\int_A f=\int_a^b\left(\int_{A(z)} f(x,z)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}z$$

的意义.

事实上，这里 $A(z)$ 就是超平面 $\mathbb{R}^{n-1}\times\{z\}$ 截 A 所得截面. 当 z 取遍 $[a,b]$ 时，所有这些截面 $A(z)$ 就“叠合”成积分区域 A .

显然，在 A 上求积分 $\int_A f$, 应该先求 f 在 $A(z)$ 上的积分 $\int_{A(z)} f(x,z)\mathrm{d}x$, 然后将这些积分值沿 $[a,b]$ 求和，也即求积分 $\int_a^b\left(\int_{A(z)} f(x,z)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}z$, 结果就得到上述积分等式

$$\int_A f=\int_a^b\left(\int_{A(z)} f(x,z)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}z$$

我们的截面法名称就是这样产生的.

例题 19.16 设 $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leqslant a^2\right\}$, 计算三重积分

$$I=\iiint_A z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

这里 A 就是 $\mathbb{R}^3$ 中以原点为中心以 a 为半径的球体，它是紧可测集. 函数

$$f:A\to\mathbb{R},\forall(x,y,z)\in A,\ f(x,y,z)=z^2$$

在 A 上连续，故 f 在 A 上可积.

A 包含在平面 $z=-a$ 与 $z=a$ 之间，用平面 $\mathbb{R}^2\times\{z\}$ 截球体 A 所得截面 $A(z)$ 就是 $\mathbb{R}^2$ 上以原点为中心以 $\sqrt{a^2-z^2}$ 为半径的闭圆盘，因此 $A(z)$ 也是紧可测集.

$\forall z\in[-a,a]$, 函数 $f_z:A(z)\to\mathbb{R}\left(f_z(x,y)=z^2,\forall(x,\ y)\in A(z)\right)$ 是连续函数 (实际上为常值函数)，故 f_z 在 $A(z)$ 上可积.

根据定理19.21，我们有

$$\begin{aligned}\iiint_A z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_{-a}^a\left(\int_{A(z)} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)d\\&=\int_{-a}^a z^2\cdot\left(\int_{A(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z\\&=\int_{-a}^a \pi z^2\left(a^2-z^2\right)\mathrm{d}z\\&=-\frac{4\pi}{15}a^5\end{aligned}$$

这个积分如果用纤维法去做，计算要复杂得多，读者不妨试一试以作比较.

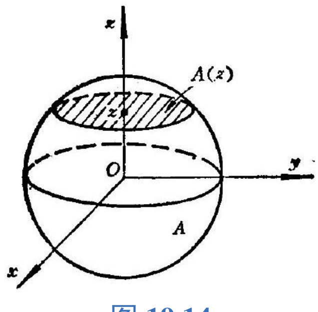


图 19.14

例题 19.17 计算 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为中心以 a 为半径的闭球 $\overline{B}_n(0,a)$ 的体积 $V_n(a)$.

$$\overline{B}_n(0,a)=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2\right\},$$

它包含在超平面 $\mathbb{R}^{n-1}\times\{-a\}$ 与 $\mathbb{R}^{n-1}\times\{a\}$ 之间，并且超平面 $\mathbb{R}^{n-1}\times\{x_n\}$ 截 $\overline{B}_n(0,a)$ 的截面为

$$\overline{B}_{n-1}\left(0,\sqrt{a^2-x_n^2}\right)=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}\middle|x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant\left(\sqrt{a^2-x_n^2}\right)^2\right\}$$

于是

$$\begin{aligned}V_n(a)&=\int_{\overline{B}_n(0,a)}1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\&=\int_{-a}^{a}\left(\int_{B_{n-1}\left(0,\sqrt{a^2-x_n^2}\right)}1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\right)\mathrm{d}x_n\\&=\int_{-a}^{a}V_{n-1}\left(\sqrt{a^2-x_n^2}\right)\mathrm{d}x_n\end{aligned}$$

我们假设 $\forall r>0$,

$$V_n(r)=c_nr^n(n\in\mathbb{N}),$$

这里 c_n 是待定的比例系数，当 $n=1,2$ 时，$c_1=2,c_2=\pi$. 那么

$$V_n(a)=\int_{-a}^{a}c_{n-1}\left(\sqrt{a^2-x_n^2}\right)^{n-1}\mathrm{d}x_n$$

作变元替换 $x_n=a\sin\theta$, 则

$$V_n(a)=2c_{n-1}a^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\mathrm{d}\theta$$

此即归纳地验证了假设 $V_n(r)=c_nr^n$ 的正确性. 于是

$$c_n=2c_{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\mathrm{d}\theta$$

由第 7 章 § 2 例**??**的 Wallis 积分公式得

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\mathrm{d}\theta=\begin{cases}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot2k}\cdot\dfrac{\pi}{2},(n=2k)\\\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2k}{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k+1)},(n=2k+1)\end{cases}$$

从而

$$c_n=2^nI_2I_3\cdots I_n=\begin{cases}\dfrac{\pi^k}{k!},n=2k\\\dfrac{2^{k+1}k!\pi^k}{(2k+1)!},n=2k+1\end{cases}$$

因此

$$V_n(a)=c_na^n=\begin{cases}\dfrac{\pi^ka^{2k}}{k!},n=2k\\\dfrac{(2a)^{2k+1}k!\pi^k}{(2k+1)!},n=2k+1\end{cases}$$

特别地，当 $n=1,2,3$ 时，我们得到

$$V_1(a)=2a.\text{(区间长度)}$$

$$V_2(a)=\pi a^2.\text{(圆的面积)}$$

$$V_3(a)=\frac{4a^3\pi}{3}.\text{(球的体积)}$$

2. 重积分的对称计算法

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是任一可测集，它具有某种几何上的对称关系 . (例如在 $n = 1$ 时 A 有关于实轴原点的对称性，在 $n = 2$ 时，A 有关于某一坐标轴或原点的对称性，在 $n = 3$ 时 A 有关于某一坐标平面或原点的对称性等等).

A_1, A_2 是 A 的两个可测子集，我们称 (A_1, A_2) 是 A 的具有对称关系 $\mathscr{P}$ 的一个 L-分割，如果：

$A_1 \cup A_2 = A, A_1 \cap A_2$ 为 L-零测度集，$A_1 \mathscr{P} A_2$.

定理 19.22

设 $f : A \to \mathbb{R}$ 是任一可积函数，(A_1, A_2) 是 A 的具有对称关系 $\mathscr{S}$ 的一个 L-分割.

1. 若 $x, y \in A$ 且 $x\mathscr{P}y \Longrightarrow f(x) = f(y)$，则
$$\int_{A_1} f = \int_{A_2} f, \int_A f = 2\int_{A_1} f$$
2. 若 $x, y \in A$ 且 $x\mathscr{P}y \Longrightarrow f(x) = -f(y)$，则
$$\int_{A_1} f = -\int_{A_2} f, \int_A f = 0$$

证明 设 $(\sigma_1;\ \xi_1) = (A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{1k};\ \xi_{11}, \xi_{12}, \cdots, \xi_{1k})$ 是可测集 A_1 的任一带点 L-分割.

记 $\mathscr{S}_1$ 为 A_1 的所有带点 L-分割的集合.

令
$$(\sigma_2;\ \xi_2) = (A_{21}, A_{22}, \cdots, A_{2k};\ \xi_{21}, \xi_{22}, \cdots, \xi_{2k}),$$
这里
$$A_{2i} \subset A_2, \xi_{2i} \in A_{2i}, A_{2i}\mathscr{P}A_{1i}, \xi_{2i}\mathscr{P}\xi_{1i} (i = 1, 2, \cdots, k)$$
显然 $(\sigma_2;\ \xi_2)$ 是 A_2 的一个带点 L 一分割，并且
$$m(A_{2i}) = m(A_{1i}) (i = 1, 2, \cdots, k).$$

记 $\mathscr{B}_2$ 为 A_2 的所有这种带点 L-分割的集合.

现在我们令
$$\sigma \triangleq \sigma_1 \cup \sigma_2 = (A_{11}, A_{21}, A_{12}, A_{22}, \cdots, A_{1k}, A_{2k}),$$
$$\xi \triangleq \xi_1 \cup \xi_2 = (\xi_{11}, \xi_{21}, \xi_{12}, \xi_{22}, \cdots, \xi_{1k}, \xi_{2k}),$$
则 $(\sigma;\ \xi)$ 形成 A 的一个具有对称关系 $\mathscr{P}$ 的带点 $\boldsymbol{L}$-分割. 由所有这种带点 L-分割组成的集合记为 $\mathscr{B}$.

根据假设 f 在 A 上可积，A_1 与 A_2 是可测集，故 f 在 A_1 与 A_2 上可积，从而由可积函数的 Riemann

和极限定理，我们有

$$\begin{aligned}\int_A f &= \lim_{\mathscr{B}} S(f,\sigma,\xi)\\ &= \lim_{\mathscr{B}} \sum_{i=1}^{k} [f(\xi_{1i})m(A_{1i}) + f(\xi_{2i})m(A_{2i})]\\ &= \lim_{\mathscr{B}} \sum_{i=1}^{k} [f(\xi_{1i}) + f(\xi_{2i})]m(A_{1i})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{A_1} f &= \lim_{\mathscr{B}} S(f,\sigma_1,\xi_1)\\ &= \lim_{\mathscr{B}_1} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_{1i})m(A_{1i})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{A_2} f &= \lim_{\mathscr{B}_2} S(f,\sigma_2,\xi_2)\\ &= \lim_{\mathscr{B}_2} \sum_{i=i}^{k} f(\xi_{2i})m(A_{2i})\\ &= \lim_{\mathscr{B}_2} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_{2i})m(A_{1i})\end{aligned}$$

1) 若 $x,y \in A, x\mathscr{P}y \Longrightarrow f(x) = f(y)$, 则

$$\xi_{11}\mathscr{P}\xi_{2i} \Longrightarrow f(\xi_{1i}) = f(\xi_{2i})\,(i = 1,2,\cdots,k).$$

于是

$$\int_{A_1} f = \lim_{\mathscr{B}1} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_{1i})m(A_{1i}) = \int_{A_2} f,$$

$$\int_A f = \lim_{\mathscr{B}} \sum_{i=1}^{k} 2f(\xi_{1i})m(A_{1i}) = 2\int_{A_1} f.$$

2) 若 $x,y \in A, x\mathscr{F}y \Longrightarrow f(x) = -f(y)$, 则

$$\xi_{1i}\mathscr{P}\xi_{2i} \Longrightarrow f(\xi_{1i}) = -f(\xi_{2i})\,.$$

从而

$$\int_{A_1} f = \lim_{\mathscr{B}_1} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_{1i})m(A_{1i}) = -\int_{A_2} f,$$

$$\int_A f = \lim_{\mathscr{B}} \sum_{i=1}^{k} [f(\xi_{1i}) - f(\xi_{1i})]m(A_{1i}) = 0.$$

利用上述定理可以简化许多重积分的计算.

例题 19.18 重新计算上面例19.13的二重积分

$$I = \iint_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由于积分区域 A 有关于 x 轴的对称关系 $\mathscr{P}$, 并且 $f(x,y) = xy$ 满足条件：

$$(x,y)\mathscr{P}(x,-y) \Longrightarrow f(x,y) = -f(x,-y),$$

故由定理19.22知

$$I=\iint_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

例题 19.19 计算二重积分

$$I=\iint_A\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里 $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\}$.

由于函数 $f:A\to\mathbb{R}$

$$\forall(x,y)\in A,f(x,y)=x^2-y^2$$

在 A 上连续, 并且 A 是紧可测集, 故 f 在 A 上可积.

现在积分区域 A 是平面上的一个椭圆盘, 它既有关于 x 轴的对称关系 $\mathscr{P}_x$, 又有关于 y 轴的对称关系 $\mathscr{P}_y$, 并且 $f(x,y)=x^2-y^2$ 满足条件:

1) 若 $(x,y)\mathscr{P}_x(x,-y)$, 则 $f(x,y)=f(x,-y)$,

2) 若 $(x,y)\mathscr{P}_y(-x,y)$, 则 $f(x,y)=f(-x,y)$.

因此根据定理 19.22, 我们得到

$$I=4\iint_{A_1}\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里 A_1 为椭圆盘 A 位于第一象限的部分, 即

$$\begin{aligned}A_1&=\{(x,y)\in A\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0\}\\&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\in[0,a],0\leqslant y\leqslant b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right\}.\end{aligned}$$

由纤维法我们得到

$$\begin{aligned}I=&4\int_0^a\left(\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\=&4\int_0^a\left[x^2y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\mathrm{d}x\\=&4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\left[\left(1+\frac{b^2}{3a^2}\right)x^2-\frac{b^2}{3}\right]\mathrm{d}x\\=&4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\left[\left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)\sin^2\theta-\frac{b^2}{3}\right]\mathrm{d}\theta(x=a\sin\theta)\\=&ab\left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)\int_0^{\pi/2}(2\sin\theta\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta-\frac{ab^3}{3}\int_0^{\pi/2}4\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\\=&ab\left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4\theta}{2}\mathrm{d}\theta-\frac{ab^3}{3}\int_0^{\pi/2}2(1+\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta\\=&\frac{\pi ab}{4}\left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)-\frac{\pi ab^3}{3}\\=&\frac{1}{4}\pi ab\left(a^2-b^2\right)\end{aligned}$$

例题 19.20 计算三重积分

$$I=\iiint_A z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

这里 $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\}$.

由于函数 $f:A\to\mathbb{R}$

$$\forall(x,y,z)\in A, f(x,y,z)=z$$

在 A 上连续, 并且 A 为紧可测集, 故 f 在 A 上可积.

积分区域 A 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个椭球体, 它有关于 xO_y 平面对称关系 $\mathscr{P}$, 并且 $f(x,y,z)=z$ 满足条件:

$$(x,y,z)\mathscr{P}(x,y,-z)\Longrightarrow f(x,y,z)=-f(x,y,-z),$$

故由定理19.22知,

$$I=\iiint_A z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

3. 重积分的变元替换法

像一元实值函数的定积分一样, n 重积分 $\int_A f\ (A\subset\mathbb{R}^n)$ 也有变元替换积分公式.

1) 一个引理

在叙述并证明重积分的变元替换积分公式之前, 我们首先来证明下述的重要引理.

引理 19.2

设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是任一可测集, $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是任一线性映射. 若 T 在 $\mathbb{R}^n$ 的标准基底下的矩阵的行列式 $\det T\neq 0$, 则

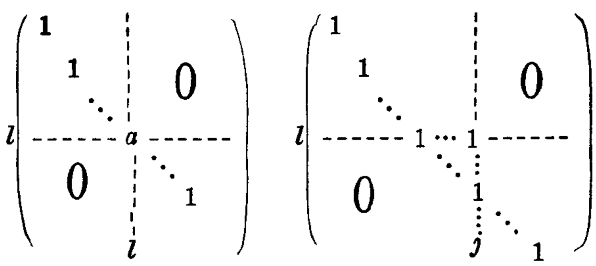
1. $T(A)$ 也是可测集.
2. 它的测度

$$m(T(A))=|\det T|m(A).$$

证明 我们用 M 表示此线性映射 T 在 $\mathbb{R}^n$ 的标准基底下所对应的矩阵. 于是 M 是满秩矩阵. 根据线性代数理论可知, M 在经过若干列变换后可化为单位矩阵, 因此 M 可以表示成下述乘积的形式:

$$M=M_1M_2\cdots M_k.$$

这里每一个 M_i 是下述两种类型的矩阵之一:



(第 1 型) (第 2 型)

图 19.15

若令 T_i 是与 M_i 对应的线性映射, 则 T 有下述相应的分解表示:

$$T=T_1\circ T_2\circ\cdots\circ T_k.$$

下面我们来证明: $\forall i=1,2,\cdots,k$,

$$m\left(T_i(A)\right)=|\det T_i|\,m(A).$$

1) 假设 M_i 是第 1 型矩阵：

这时 $\forall\,(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 我们有

$$T_i\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_l\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\ax_l\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

由此可知，若 $P=\prod\limits_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$, 则 P 的每一条边在 T_i 变换下除了第 l 条边伸长为 $|a|$ 倍外，其他边不变. 例如当 $a>0$ 时

$$T_i(P)=[a_1,b_1]\times\cdots\times[aa_l,ab_l]\times\cdots\times[a_n,b_n],$$

因此 $T_1(P)$ 仍然是 $\mathbb{R}^n$ 的一个闭长方体，并且

$$m\,(T_i(P))=|a|m(P)=|\det T_i|\,m(P).$$

现在设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的任一可测集，于是由可测集的第一特征性定理知，$\forall\varepsilon>0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 的两个简单可测集 E 与 F 使得

$$\begin{aligned}&E=P_1\cup P_2\cup\cdots\cup P_m,\ \mathring{P}_i\cap\mathring{P}_j=\varnothing(i\neq j),\\&F=Q_1\cup Q_2\cup\cdots\cup Q_s,\ \mathring{Q}_i\cap\overset{Q}{\mathring{Q}}_j=\varnothing(i\neq j),\\&E\subset \boldsymbol{A}\subset F,0\leqslant m(F)-m(E)<\varepsilon.\end{aligned}$$

由此得到

$$m(F)-\varepsilon<m(A)<m(E)+\varepsilon \tag{19.1}$$

另一方面，由于 $T_i(E)\subset T_i(A)\subset T_i(F)$ 故

$$\begin{aligned}&\bigcup_{j=1}^{m}T_i\left(P_j\right)\subset T_i(A)\subset\bigcup_{j=1}^{s}T_i\left(Q_j\right),\\&m\left(\bigcup_{j=1}^{s}T_i\left(Q_j\right)-\bigcup_{j=1}^{m}T_i\left(P_j\right)\right)\\&=\sum_{j=1}^{s}m\left(T_i\left(Q_j\right)\right)-\sum_{j=1}^{m}m\left(T_i\left(P_j\right)\right)\\&=|\det T_i|\left(\sum_{j=1}^{s}m\left(Q_j\right)-\sum_{j=1}^{m}m\left(P_j\right)\right)\\&=|\det T_i|\,(m(F)-m(E))\\&<\varepsilon\,|\det T_1|,\end{aligned}$$

此即表明 $T_i(A)$ 是可测集.

最后由式(19.1)得到

$$
\begin{aligned}
m\left(T_i(A)\right) &\leqslant m\left(\bigcup_{j=1}^{s} T_i\left(Q_j\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{s} m\left(T_i\left(Q_j\right)\right) = |\det T_i| \sum_{j=1}^{s} m\left(Q_j\right) \\
&= |\det T_i|\, m(F) < |\det T_i|\,(m(A)+\varepsilon) \\
m\left(T_i(A)\right) &\geqslant m\left(\bigcup_{j=1}^{m} T_i\left(P_j\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} m\left(T_i\left(P_j\right)\right) \\
&= |\det T_i| \sum_{j=1}^{m} m\left(P_j\right) \\
&= |\det T_i|\, m(E) > |\det T_i|\,(m(A)-\varepsilon)
\end{aligned}
$$

或

$$
|\det T_i|\,(m(A)-\varepsilon) < m\left(T_i(A)\right) < |\det T_i|\,(m(A)+\varepsilon)
$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性，立即推得

$$
m\left(T_i(A)\right) = |\det T_i|\, m(A)
$$

2) 假设 M_1 是第 2 型矩阵：

由于这时 $|\det T_i| = |\det M_i| = 1$，故实际上我们应该证朋

$$
m\left(T_i(A)\right) = m(A)
$$

$\forall\,(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 我们有

$$T_i\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&&&&&&\\&1&&&&&&&\\&&\ddots&&&&&&\\&&&1&\cdots&1&&&\\&&&&\ddots&\vdots&&&\\&&&&&1&&&\\&&&&&&\ddots&&\\&&&&&&&1&\\&&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_l+x_j\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

像 1) 一样, 我们首先证明对闭长方体 $P=\prod\limits_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$ 成立 $m\left(T_i(P)\right)=m(P)$. 为此令

$$\begin{aligned}P_1=&[a_l,b_l]\times\left[a_j,b_j\right],\\P_2=&[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{l-1},b_{l-1}]\times[a_{l+1},b_{l+1}]\\&\times\cdots\times\left[a_{j-1},b_{j-1}\right]\times\left[a_{j+1},b_{j+1}\right]\times\cdots\times[a_n,b_n].\end{aligned}$$

在映射 T_i 作用下, P_2 不变, 但 P_1 变换为 $\mathbb{R}^2$ 中的一个平行四边形 P_1^*(如图 19 − 15 所示). 显然 $m\left(P_1^*\right)=m\left(P_1\right)$. 因此

$$m\left(T_i(P)\right)=m\left(P_1^*\right)m\left(P_2\right)=m\left(P_1\right)m\left(P_2\right)=m(P)$$

对于一般的可测集 A, 可以和 1) 一样地证明

$$m\left(T_i(A)\right)=m(A)=|\det T_i|\,m(A).$$

最后综合 1) 与 2) 所证, 我们得到

$$\begin{aligned}m(T(A))&=m\left(T_1\circ T_2\circ\cdots\circ T_k(A)\right)\\&=|\det T_1|\cdot m\left(T_2\circ\cdots\circ T_k(A)\right)\\&=|\det T_1|\cdot|\det T_2|\,m\left(T_3\circ\cdots\circ T_k(A)\right)\\&\cdots\\&=|\det T_1|\cdot|\det T_2|\cdots\cdot|\det T_k|\,m(A)\\&=|\det\left(T_1\circ T_2\circ\cdots\circ T_k\right)|\,m(A)\\&=|\det T|m(A).\end{aligned}$$

2)n 重积分的变元替换积分公式

现在我们可以来叙述并证明 n 重积分的变元替换积分公式，即下述定理.

定理 19.23

设 $U, V \subset \mathbb{R}^n$ 是两个开集，$\varphi: U \to V$ 是任一 C^1 类映射. 此外假没

1. $D \subset U$ 是一紧可测集使得 φ 在 $\mathring{D}$ 上的限制 $\varphi|_{\mathring{D}}: \mathring{D} \to \varphi(\mathring{D})$ 是微分同胚.
2. $f: A = \varphi(D) \to \mathbb{R}$ 是任一连续函数.
1. 函数 $f: A \to \mathbb{R}$ 在 A 上可积.
2. 函数 $y \mapsto f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|, y \in D$ 在 D 上可积，并且

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x = \int_D f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y. \tag{19.2}$$

那么这里 $\Delta_\varphi(y)$ 表示映射 φ 在 $y \in D$ 处的 Jacobi 行列式.

证明 首先由 φ 的 C^1 类性及函数 f 的连续性知，函数 $y \longmapsto f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|, y \in D$ 在紧可测集 D 上是可积的.

为了证明 f 在 A 上可积，由 f 的连续性可知，我们只需证明 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是紧可测集.

这可由 §3 例19.8的结论推出. 因为这时 φ 在 $\mathring{D}$ 上的限制是微分同胚，当然也是开映射.

现在由 $\partial\mathring{D} \subset \partial D, \partial\varphi(\mathring{D}) \subset \partial\varphi(D)$ 推知 $\partial\mathring{D}$ 与 $\partial\varphi(\mathring{D})$ 都是零测度集，从而 $\mathring{D}$ 与 $\varphi(\mathring{D})$ 也是可测集，并且由

$$\varphi(D) - \varphi(\mathring{D}) \subset \varphi(D - \mathring{D}) = \varphi(\partial D)$$

及 § 3 例19.6推知 $\varphi(\partial D)$ 从而 $\varphi(D) - \varphi(D)$ 是零测度集. 于是我们有：

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\mathring{D})} f(x)\mathrm{d}x + \int_{A-\varphi(\mathring{D})} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\mathring{D})} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int_D^\infty f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y &= \int_{\mathring{D}} f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y + \int_{D-\mathring{D}} f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathring{D}} f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y\end{aligned}$$

由此可知式(19.2)成立，当且仅当

$$\int_{\varphi(\dot{D})} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\ddot{D}} f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y.$$

因此不失一般性，以下我们可以假设映射 $\varphi: D \to \varphi(D)$ 是微分同际.

下面我们用逐步化简的方法来证明式(19.2)(这里我们参考了 B. Calvo，J. Doyen，A. Calvo，F. Boschet《Cours d'Analyse》V. Armand COLIN，1977,83-89)

第 1 步化简　我们只需证明 $f \geqslant 0$ 时 (1) 式成立.

事实上，若令

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), f^-(x) = \max(-f(x), 0), \forall x \in A,$$

则 $f^+ \geqslant 0, f^- \geqslant 0$ 并且 $f = f^+ - f^-$. 如果式(19.2)对非负函数成立，则由积分的线性得到

$$\begin{aligned}\int_A f(x)\mathrm{d}x &= \int_A f^+(x)\mathrm{d}x - \int_A f^-(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_D f^+(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y - \int_D f^-(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y \\ &= \int_D \left[f^+(\varphi(y)) - f^-(\varphi(y))\right]\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y \\ &= \int_D f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y\end{aligned}$$

因此以下我们假设 $f \geqslant 0$.

第 2 步化简　为了证明式(19.2)，我们只需证

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_D f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y. \tag{19.3}$$

事实上，如果式(19.3)成立，因 $g(y) = f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right| \geqslant 0(\forall y \in D)$，若令 $\psi = \varphi^{-1} : A \to D$，则 ψ 也是微分同胚，从而对函数 $g : D \to \mathbb{R}$ 作变元替换 $y = \psi(x)(x \in A)$，我们得到

$$\int_D f(\varphi(y))|\Delta_\varphi(y)|\mathrm{d}y \geqslant \int_A f(\varphi(\psi(x))) \mid \Delta_\varphi(\psi(x)| \cdot |\Delta_\psi(x) \mid \mathrm{d}x$$

由于 $\varphi \circ \psi = id_A$，故 $\forall x \in A, \mathrm{d}\varphi(\psi(x)) \circ d\psi(x) = id_{\mathbb{R}^n}$，从而 $\left|\Delta_\varphi(\psi(x))\right| \cdot \left|\Delta_\psi(x)\right| = 1(\forall x \in A)$，因此

$$\int_D f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y \geqslant \int_A f(x)\mathrm{d}x.$$

由此并结合式(19.3)即推得式(19.2)成立.

第 3 步化简　为了证明式(19.3)对紧可测集 D 成立，我们只需证明式(19.3)对包含在 D 中的 $\mathbb{R}^n$ 的简单可测集 D' 成立，即证明

$$\int_{A'} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{D'} f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y, \tag{19.4}$$

这里 $A' = \varphi\left(D'\right)$.

事实上，假设式(19.4)成立. 由于 D 是紧集，函数 $y \longmapsto f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|, y \in D$ 在 D 上连续，故存在常数 $M > 0$ 使得

$$0 \leqslant f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right| \leqslant M(\forall y \in D).$$

另一方面，由于 D 是可测集，故 $\forall \varepsilon > 0$，存在包含在 D 中的简单可测集 D' 使得 $m\left(D - D'\right) < \dfrac{\varepsilon}{M+1}$. 于是我们有

$$\int_D f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y = \int_{D'} f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y + \int_{D-D'} f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y$$

及

$$\begin{aligned}\int_{D-D'} f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y &\leqslant Mm\left(D - D'\right) \\ &< M\frac{\varepsilon}{M+1} < \varepsilon\end{aligned}$$

因此根据假设式(19.4)成立，我们得到

$$\begin{aligned}\int_D f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y &< \int_{D'} f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y + \varepsilon \\ &\leqslant \int_{\varphi(D')} f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon\end{aligned}$$

又因为 $f \geqslant 0$, 所以 $\int_{\varphi(D)-\varphi(D')} f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$, 从而

$$\begin{aligned}\int_D f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y &< \int_{\varphi(D')} f(x) + \int_{\varphi(D)-\varphi(D')} f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon \\ &= \int_{\varphi(D)} f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon \\ &= \int_A f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon\end{aligned}$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 立即推得式(19.3)成立.

第 4 步化简　为了证明式(19.4)成立, 我们只需证明对包含在 D 中的任何一个闭长方体 $P \subset \mathbb{R}^n$ 成立下式:

$$\int_{\varphi(P)} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_P f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y. \tag{19.5}$$

事实上, 假设式(19.5)成立, 设 D' 是包含在 D 中的简单可测集:

$$D' = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_k, \mathring{P}_i \cap \mathring{P}_j = \varnothing (i \neq j).$$

对每一个 P_i, 应用式(19.5)我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(D')} f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^k \int_{\varphi(P_i)} f(x)\mathrm{d}x \\ &\geqslant \sum_{i=1}^k \int_{P_i} f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y \\ &= \int_{D'} f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y\end{aligned}$$

此即表明式(19.4)成立.

第 5 步化简　为了证明式(19.5)成立, 我们只需证明对包含在 D 中的任一闭长方体 $P \subset \mathbb{R}^n$ 成立:

$$m(\varphi(P)) \geqslant \int_P |\Delta^\varphi(y)|\,\mathrm{d}y. \tag{19.6}$$

事实上, 假设式(19.6)成立. 由于 f 在紧可测集 $\varphi(P)$ 上连续, 故一致连续, 从而

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists \eta_n > 0)\,(\forall x, y \in \varphi(P), d(x,y) \leqslant \eta_n) \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}.$$

对每一个 $n \in \mathbb{N}$, 令 $\sigma_n = \left(P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, \cdots, P_k^{(n)}\right)$ 是 P 的这样一个分割, 使得 $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k_n} \mathrm{d}(\varphi(P_i^{(n)}) < \eta_n$. 令

$$m_i^{(n)} = \inf_{x \in \varphi\left(P_i^{(n)}\right)} f(x)\ (i = 1, 2, \cdots, k_n, n \in \mathbb{N}),$$

并作 $\overbrace{\varphi\left(P_i^{(n)}\right)}^{\circ}$ 的特征函数 $\chi_n^{(i)}$：

$$\chi_n^{(i)}(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x\in\overbrace{\varphi\left(P_i^{(n)}\right)}^{\circ};\\ 0, & \text{若 } x\notin\overbrace{\varphi\left(P_i^{(n)}\right)}^{\circ}.\end{cases}$$

如果我们定义函数 $f_n:\varphi\left(P_!^{(n)}\right)\to\mathbb{R}$ 如下:

$$f_n(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{k_n}m_i^{(n)}\chi_n^{(i)}(x),\ \text{若 } x\in\bigcup_{i=1}^{k_n}\overbrace{\varphi\left(Pi_i^{(n)}\right)}^{\circ},\\ f(x),\ \text{若 } x\notin\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k_n}\overbrace{\varphi\left(Pi_i^{(n)}\right)}^{\circ},\end{cases}$$

则易证函数序列 $\langle f_n\rangle$ 在 $\varphi(P)$ 上一致收敛于 f.

现在对每一个 $P_i^{(n)}$ 应用式(19.6)得到

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(P)}f_n(x)\mathrm{d}x&=\sum_{i=1}^{k_n}\int_{\varphi\left(P_i^{(n)}\right)}f_n(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=1}^{k_n}\int_{\varphi\left(P_i^{(n)}\right)}m_i^{(n)}\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=1}^{k_n}m_i^{(n)}m\left(\varphi\left(P_i^{(n)}\right)\right)\\&\geqslant\sum_{i=1}^{k_n}m_i^{(n)}\int_{P_i^{(n)}}\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y\left(\text{因 } m_i^{(n)}\geqslant 0\right)\\&=\sum_{i=1}^{k_n}\int_{P_i^{(n)}}m_i^{(n)}\chi_n^{(i)}(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y\\&=\sum_{i=1}^{k_n}\int_{P_i^{(n)}}f_n(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y\\&=\int_P f_n(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

此即表明对上述定义的函数序列 $\langle f_n\rangle$ 成立不等式:

$$\int_{\varphi(P)}f_n(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_P f_n(\varphi(y))|\Delta\varphi(y)|\mathrm{d}y.$$

两边令 $n\to+\infty$, 由 $\langle f_n\rangle$ 在 $\varphi(P)$ 上一致收敛于 f 及定理19.15推得

$$\int_{\varphi(P)}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_P f(\varphi(y))\left|\Delta_\varphi(y)\right|\mathrm{d}y.$$

因此式(19.4)成立.

式(19.4)式的证明

首先由 $\varphi: D \to \varphi(D)$ 的微分同胚性及 D 的紧性知，$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $\forall z \in D, \forall y \in U$ 且 $\|z-y\| < \delta$ 则有

$$\varphi(y)-\varphi(z)=\mathrm{d}\varphi(z)(y-z)+r(y-z),$$
$$\|r(y-z)\| \leqslant \varepsilon\|y-z\|.$$

令 $x=\varphi(z)(z \in D)$. 由于 $\varphi^{-1}: \varphi(D) \to D$ 也是微分同胚，故 $\mathrm{d}\varphi^{-1}: \varphi(D) \to \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$ 在 $\varphi(D)$ 上连续，在 $\mathbb{R}^n$ 的标准基底下 ,$\forall \boldsymbol{h}=(h_1, h_2, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n, \mathrm{d}\varphi^{-1}(x)$ 对 $\boldsymbol{h}$ 的作用为：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\varphi^{-1}(x)(\boldsymbol{h}) \\
=&\begin{pmatrix}
\dfrac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial x_2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial x_n}(x) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\dfrac{\partial \varphi_n^{-1}}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial \varphi_n^{-1}}{\partial x_2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_n^{-1}}{\partial x_n}(x)
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

若令

$$M=\sup_{x \in \phi(D)} \sup_{1 \leqslant i \leqslant k n} \sum_{j=1}^n \left|\frac{\partial \varphi_i^{-1}}{\partial x_j}(x)\right|,$$

则 $M<+\infty$ 并且下述不等式成立：

$$\left\|\mathrm{d}\varphi^{-1}(x)(\boldsymbol{h})\right\| \leqslant M\|\boldsymbol{h}\| \left(\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n\right).$$

对任意固定的 $x=\varphi(z)(z \in D)$, 我们令

$$\varphi^*=\mathrm{d}\varphi^{-1}(x) \circ \varphi,$$

则 φ^* 在 V 上是 C^1 类映射，并且

$$\begin{aligned}
\varphi^*(y)-\varphi^*(z) &= \mathrm{d}\varphi^{-1}(x)(\varphi(y)-\varphi(z)) \\
&= \mathrm{d}\varphi^{-1}(x)(\mathrm{d}\varphi(z)(y-z)+r(y-z)) \\
&= \mathrm{d}\varphi^{-1}(x) \circ \mathrm{d}\varphi(z)(y-z)+\mathrm{d}\varphi^{-1}(x)(r(y-z)) \\
&= (y-z)+\mathrm{d}\varphi^{-1}(x)(r(y-z)).
\end{aligned}$$

由于当 $\|y-z\|<\delta$ 时我们有

$$\left\|\mathrm{d}\varphi^{-1}(x)(r(y-z))\right\| \leqslant M\|r(y-z)\| < M\varepsilon\|y-z\|,$$

故

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi^*(y)-\varphi^*(z)\right\| &= \left\|(y-z)+\mathrm{d}\varphi^{-1}(x)(r(y-z))\right\| \\
&\geqslant \|y-z\|-\left\|\mathrm{d}\varphi^{-1}(x)(r(y-z))\right\| \\
&\geqslant (1-M\varepsilon)\|y-z\|.
\end{aligned}$$

如果我们在 $\mathring{D}$ 中取边长为 l, 中心点为 $z \in D$ 的立方体 S，那么上述不等式表明在 $\varphi^*(S)$ 中包含一个边长为 $(1-2M\varepsilon)l$, 中心点为 $\varphi^*(z)$ 的立方体 (如图19.16所示).

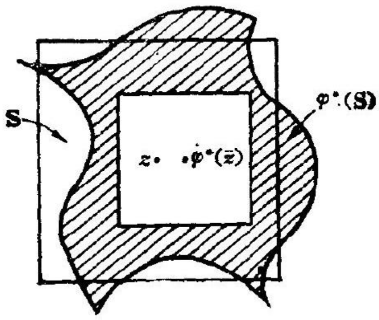


图 19.16

因此 $\varphi^*(S)$ 的测度 $m\left(\varphi^*(S)\right)$(显然 $\varphi^*(S)$ 是可测集) 满足下述不等式

$$m\left(\varphi^*(S)\right) \geqslant (1-2M\varepsilon)^n m(S).$$

由于 $\varphi^* = \mathrm{d}\varphi^{-1}(x)\circ\varphi$, 故根据上述引理我们有

$$m\left(\varphi^*(S)\right) = m(\mathrm{d}\varphi^{-1}(x)(\varphi(S)) = \left|\det\left(\mathrm{d}\varphi^{-1}(x)\right)\right| m(\varphi(S))$$

而 $\mathrm{d}\varphi^{-1}(x)\circ\mathrm{d}\varphi(z) = id_{\mathbb{R}^n}$, 所以

$$\left|\det\left(\mathrm{d}\varphi^{-1}(x)\right)\right| \cdot |\det(\mathrm{d}\varphi(z))| = 1.$$

从而

$$\begin{aligned} m\left(\varphi^*(S)\right) &= (1/|\det(\mathrm{d}\varphi(z))|)\cdot m(\varphi(S)) \\ &= \frac{1}{\left|\Delta_\varphi(z)\right|} m(\varphi(S)) \end{aligned}$$

由此得到

$$m(\varphi(S)) \geqslant (1-2M\varepsilon)^n \left|\Delta_\varphi(z)\right| m(S). \tag{19.7}$$

这里 z 为立方体 S 的中心点.

现在由 $\varphi(P)$ 的可测性知, $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个简单可测集 H 使得

$$\varphi(P) \subset \mathring{H}, m(H-\varphi(P)) < \varepsilon.$$

取 $m\in\mathbb{N}$, 充分大使得 $\frac{\sqrt{n}}{2^m} < \delta$, 并用长度为 $\frac{1}{2^m}$ 的线段去截闭长方体 P 的每一边, 于是我们可以找到有限 k 个边长为 $\frac{1}{2^m}$ 的立方体 $S_i (i=1,2,\cdots,k)$ 使得

i) $P \subset \bigcup\limits_{i=1}^k S_i \subset D, \mathring{S}_i \cap \mathring{S}_j = \varnothing (i\neq j)$,

ii)$\varphi(P) \subset \varphi\left(\bigcup\limits_{i=1}^k S_i\right) \subset H$.

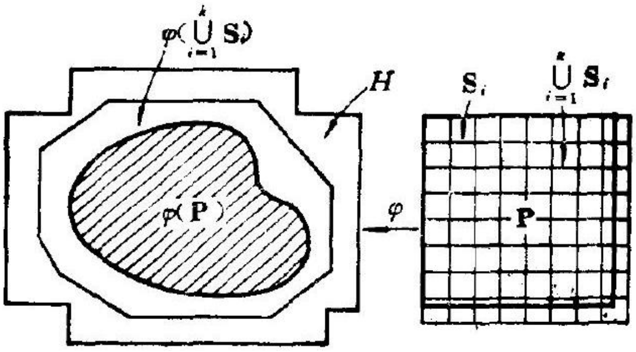


图 19.17

由此我们得到

$$m\left(\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{k} S_i\right)-\varphi(P)\right)\leqslant m(H-\varphi(P))<\varepsilon,$$

或

$$m(\varphi(P))\geqslant m\left(\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{k} S_i\right)\right)-\varepsilon=\sum_{i=1}^{k} m\left(\varphi\left(S_i\right)\right)-\varepsilon.$$

在每一个立方体 S_i 中取中心点 z_i, 由不等式(19.7), 我们得到

$$m(\varphi(P))\geqslant(1-2M\varepsilon)^n\sum_{i=1}^{k}\left|\Delta_{\varphi}\left(z_i\right)\right|m\left(S_i\right)-\varepsilon. \tag{19.8}$$

令 $P_i=P\cap S_i(i=1,2,\cdots,k)$, 则 $\sigma=(P_1,P_2,\cdots,P_k)$ 形成闭长方体 P 的一个分割. 由于函数 $y\longmapsto\left|\Delta_{\varphi}(y)\right|$ 在紧集 D 上的一致连续性及在 P 上的可积性, 我们可以取自然数 m 充分大使得

i)$\forall y,z\in S_i(i=1,2,\cdots,k),\left|\Delta_{\varphi}(y)-\Delta_{\varphi}(z)\right|<\varepsilon$,

ii)$\left|\int_P\Delta_{\varphi}(y)\mathrm{d}y-\sum_{i=1}^{k}\left|\Delta_{\varphi}\left(y_i\right)\right|m\left(P_i\right)\right|<\varepsilon$,

这里 $y_i\in P_i(i=1,2,\cdots,k)$. 由此并根据不等式(19.8)我们得到

$$\begin{aligned}m(\varphi(P))\geqslant&(1-2M\varepsilon)^n\sum_{i=1}^{k}\left|\Delta_{\varphi}\left(z_i\right)\right|m\left(P_i\right)-\varepsilon\\>&(1-2M\varepsilon)^n\sum_{i=1}^{k}\left(\left|\Delta_{\varphi}\left(y_i\right)\right|-\varepsilon\right)m\left(P_i\right)-\varepsilon\\=&(1-2M\varepsilon)^n\sum_{i=1}^{k}\left|\Delta_{\varphi}\left(y_i\right)\right|m\left(P_i\right)-\varepsilon(1-2M\varepsilon)^n m(P)-\varepsilon\\>&(1-2M\varepsilon)^n\int_P\left|\Delta_{\varphi}(y)\right|\mathrm{d}y-\varepsilon(1-2M\varepsilon)^n[1+m(P)]-\varepsilon.\end{aligned}$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性, 最后我们推得

$$m(\varphi(P))\geqslant\int_p\left|\Delta_{\varphi}(y)\right|\mathrm{d}y.$$

下面我们利用重积分的变元替换积分公式实际计算几个重积分.

例题 19.21 设 A 是平面上由 4 条双曲线 $xy=1,xy=3,x^2-y^2=1$ 及 $x^2-y^2=4$ 所围的有界区域,

试计算二重积分

$$I=\iint_A\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里函数 $f:A\to\mathbb{R}$

$$\forall(x,y)\in A,\ f(x,y)=x^2+y^2$$

在 A 上连续, A 是紧可测集, 故 f 在 A 上可积.

令

$$u=\psi_1(x,y)=xy,v=\psi_2(x,y)=x^2-y^2,$$

则映射 $\psi=(\psi_1,\psi_2):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是 C^∞ 类的, 直接计算知 $\forall(x,y)\in A,\psi$ 在 (x,y) 处的 Jacobi 行列式

$$\begin{aligned}\Delta_\phi(x,y)&=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y}(x,y)\\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y}(x,y)\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}y & x\\ 2x & -2y\end{vmatrix}=-2\left(x^2+y^2\right)\neq0,\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{d}\psi(x,y)$ 是可逆的.

其次若记 $P=[1,3]\times[1,4]$, 则不难验证映射 $\psi:A\to P$ 是一一映射. 因此根据定理16.16知, $\psi:A\to P$ 是微分同胚. 令 $\varphi=\psi^{-1}$, 则

$$\varphi:P\to A$$

也是微分同胚, 并且是 C^∞ 类的.

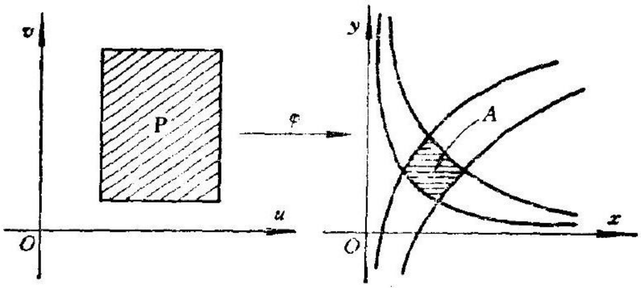


图 19.18

由于 $\varphi\circ\psi=id_A$, 故 $\mathrm{d}\varphi(u,v)\circ\mathrm{d}\psi(x,y)=id_{\mathbb{R}^2}$, 从而

$$\left|\Delta_\varphi(u,v)\right|=\frac{1}{\left|\Delta_\varphi(x,y)\right|}=\frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)},$$

这里 $(x,y)=\varphi(u,v)(\forall(u,v)\in P)$.

若令 $x = \varphi_1(u, v), y = \varphi_2(u, v)$, 则由上述重积分变元替换积分公式得到

$$\begin{aligned} I &= \iint_A \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_P \left[\varphi_1^2(u, v) + \varphi_2^2(u, v)\right] \cdot \left|\Delta_\varphi(u, v)\right| \mathrm{d}u d v \\ &= \iint_P \frac{\varphi_1^2(u, v) + \varphi_2^2(u, v)}{2\left[\varphi_1^2(u, v) + \varphi_1^2(u, v)\right]} \mathrm{d}u d v \\ &= \frac{1}{2} \iint_P \mathrm{d}u \mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2} m(P) \\ &= 3 \end{aligned}$$

例题 19.22 设 A 是由曲线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, x = 0, y = 0$ 所围的平面有界区域 $(a > 0)$, 试计算二重积分

$$I = \iint_A xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

函数 $f : A \to \mathbb{R}$

$$\forall (x, y) \in A, f(x, y) = xy$$

在 A 上连续, A 是紧可测集, 故 f 在 A 上可积.

令

$$x = \varphi_1(u, v) = u \cos^4 v, y = \varphi_2(u, v) = u \sin^4 v,$$

则 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是 C^∞ 类映射, 若取

$$P = [0, a] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

那么 $\varphi(P) = A$(如下图所示).

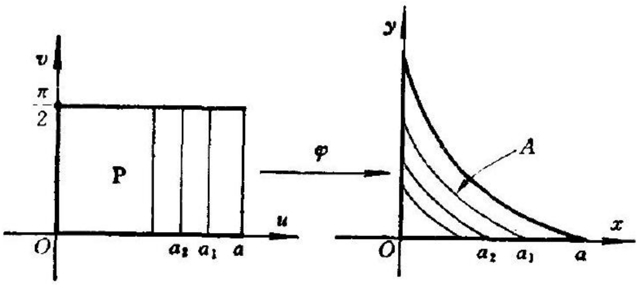


图 19.19

直接计算, $\forall (u, v) \in P, \varphi$ 在 (u, v) 处的 Jacobi 行列式

$$\Delta_\varphi(u, v) = \begin{vmatrix} \cos^4 v & \sin^4 v \\ -4u \cos^3 v \sin v & 4u \sin^3 v \cos v \end{vmatrix} = \frac{1}{2} u \sin^3 2v.$$

于是 $\forall (u, v) \in \mathring{P}, \Delta_\varphi(u, v) \neq 0$.

映射 $\varphi : P \to A$ 不是单射, 因为

$$\forall v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi(0, v) = (0, 0).$$

下面我们来证明 φ 在 $\mathring{P}$ 上的限制是从 $\mathring{P}$ 到 $\varphi(\mathring{P})$ 上的一一映射. 只需证单射性.

事实上, 设 $(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in\mathring{P}$ 使得

$$u_1\cos^4 v_1=u_2\cos^4 v_2, u_1\sin^4 v_1=u_2\sin^4 v_2,$$

那么 $\tan^4 v_1=\tan^4 v_2$, 由于 $v_1,v_2\in(0,\frac{\pi}{2})$, 故必有 $v_1=v_2$, 从而 $u_1=u_2$. 此即表明 $\varphi\Big|_{P}$ 是单射.

结合 $\Delta_\varphi(u,v)\neq 0(\forall(u,v)\in\mathring{P})$, 由定理16.16知 $\varphi\Big|_{\mathring{P}}:\mathring{P}\to\varphi(\mathring{P})$ 是微分同胚.

因此由重积分的变元替换积分公式得到

$$\begin{aligned}I&=\iint_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_P u^2\sin^4 v\cos^4 v\cdot\frac{1}{2}u\sin^3 2v\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{2}\left(\int_0^a u^3\mathrm{d}u\right)\left(\frac{1}{2^4}\int_0^{\pi/2}\sin^7 2v\mathrm{d}v\right)\\&=\frac{a^4}{2^7}\int_0^{\pi/2}\sin^7 2v\mathrm{d}v\\&=\frac{a^4}{140}.\end{aligned}$$

例题 19.23 设 A 是 $\mathbb{R}^3$ 中由 6 个球面 $x^2+y^2+z^2=ax,a'x,by,b'y,cz,c'z\ (a'>a>0,b'>b>0,c'>c>0)$ 所围的有界区域, 试计算三重积分

$$I=\iiint_A\frac{1}{xyz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

首先 A 是 $\mathbb{R}^3$ 的紧可测集, 函数 $f:A\to\mathbb{R}$

$$\forall(x,y,z)\in A, f(x,y,z)=\frac{1}{xyz}$$

在 A 上连续, 故 f 在 A 上可积.

现在我们令

$$x^2+y^2+z^2=ux, x^2+y^2+z^2=vy, x^2+y^2+z^2=wz,$$

这里 $0<a\leqslant u\leqslant a',0<b\leqslant v\leqslant b',0<c\leqslant w\leqslant c'$. 于是

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{u}=x,\frac{x^2+y^2+z^2}{v}=y,\frac{x^2+y^2+z^2}{w}=z.$$

由此得到

$$(x^2+y^2+z^2)^2\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}+\frac{1}{w^2}\right)=x^2+y^2+z^2,$$

或

$$x^2+y^2+z^2=1/\left(-\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}+\frac{1}{w^2}\right)\tag{19.9}$$

因此

$$x=\varphi_1(u,v,w)=\frac{1}{u\Omega},y=\varphi_2(u,v,w)=\frac{1}{v\Omega},z=\varphi_3(u,v,w)=\frac{1}{w\Omega}.$$

这里我们简记 $\Omega=\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}+\frac{1}{w^2}$.

显然映射 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ 将 uvw 空间中的闭长方体 $P=[a,a']\times[b,b']\times[c,c']$ 变换为 xyz 空间中的区域 A.

由 $\varphi : P \to A$ 的表达式可知 φ 是 C^{∞} 类的，并且直接计算得到 φ 在任一点 $(u,v,w) \in P$ 处的 Jacobi 行列式

$$\Delta_{\varphi}(u,v,w) = \begin{vmatrix} \dfrac{2u^{-2}-\Omega}{u^2\Omega^2} & \dfrac{2v^{-2}}{uv\Omega^2} & \dfrac{2w^{-2}}{uw\Omega^2} \\ \dfrac{2u^{-2}}{uv\Omega^2} & \dfrac{2v^{-2}-\Omega}{v^2\Omega^2} & \dfrac{2w^{-2}}{vw\Omega^2} \\ \dfrac{2u^{-2}}{uw\Omega^2} & \dfrac{2v^{-2}}{vw\Omega^2} & \dfrac{2w^{-2}-\Omega}{w^2\Omega^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{u^2v^2w^2\Omega^3} \neq 0.$$

下面我们来证明 $\varphi : P \to A$ 是一一映射. 只需证单射性. 事实上，设 $(u_1,v_1,w_1),(u_2,v_2,w_2) \in P$ 使得

$$\frac{1}{u_1\Omega_1} = \frac{1}{u_2\Omega_2}, \frac{1}{v_1\Omega_1} = -\frac{1}{v_2\Omega_2}\frac{1}{w_1\Omega_1} = \frac{1}{w_2\Omega_2}$$

那么

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{w_2}{w_1} = k,$$

或 $u_2 = ku_1, v_2 = kv_1, w_2 = kw_1$，于是由上述式(19.9)得到

$$\frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{w_1^2} = \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{w_1^2}\right).$$

因此 $k^2 = 1$. 由于 $u_i > 0, v_i > 0, w_i > 0 (i = 1,2)$ 故 $k = 1$. 此即表明 $u_1 = u_2, v_1 = v_2, w_1 = w_2$，从而 φ 是单射.

根据定理16.16 知，$\varphi : P \to A$ 是微分同胚，故由重积分的变元替换积分公式得到

$$\begin{aligned} I &= \iiint_A \frac{1}{xyz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iiint_P uvw\Omega^3 - \frac{1}{u^2v^2w^2\Omega^3}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\ &= \iiint_P \frac{1}{uvw}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\ &= \left(\int_a^{a'} \frac{1}{u}\mathrm{d}u\right)\left(\int_b^{b'} \frac{1}{v}\mathrm{d}v\right)\left(\int_c^{c'} \frac{1}{w}\mathrm{d}w\right) \\ &= \log\frac{a'}{a} \cdot \log\frac{b'}{b} \cdot \log\frac{c'}{c}. \end{aligned}$$

例题 19.24 设集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ 定义如下

$$A = \left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0, x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant 1\right\}.$$

试计算 n 重积分

$$I = \int\cdots\int_A \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

首先我们证明 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧可测集.

A 的紧性是显然的，因为 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的有界闭集. 为了证明 A 是可测集，我们记

$$A_i = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in A \mid x_i = 0, x_1 + x_2 + \cdots + \widehat{x_i} + \cdots + x_n \leqslant 1\},$$

这里 $\widehat{x_i}$ 表示在 $x_1 + x_2 + \cdots + x_i + \cdots + x_n \leqslant 1$ 中缺和项 x_i

$$B = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in A \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\}.$$

因此 A 的边界 ∂A 为:

$$\partial A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup B.$$

因为 A_i 位于一坐标平面内, 故每一个 $A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是 J-零测度集, 而集合 B 实际上就是定义在集 $A, \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 上的连续函数 $\psi : A_n \to \mathbb{R}$

$$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \in A_n, \psi (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) = 1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}$$

的图形 $\mathrm{Gr}(\psi)$, 因此 B 也是 $\mathbb{R}^n$ 的 J-零测度集, 从而 ∂A 是 $\mathbb{R}^n$ 的 J-零测度集. 故 A 是可测集.

现在我们定义函数 $f : A \to \mathbb{R}$ 如下:

$$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A, f (x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$$

显然 f 在 A 上连续, 故 f 在 A 上可积.

作变元替换

$$\begin{aligned}
&x_1 = \varphi_1 (u_1, u_2, \cdots, u_n) = u_1 \\
&x_2 = \varphi_2 (u_1, u_2, \cdots, u_n) = u_2 \\
&\cdots \\
&x_{n-1} = \varphi_{n-1} (u_1, u_2, \cdots, u_n) = u_{n-1}, \\
&x_n = \varphi_n (u_1, u_2, \cdots, u_n) = u_n - (u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}),
\end{aligned}$$

则映射 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是 C^∞ 类的, 令

$$D = \{(u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid u_1 \geqslant 0, u_2 \geqslant 0, \cdots, u_{n-1} \geqslant 0, u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} \leqslant u_n \leqslant 1\}.$$

显然 $\varphi : D \to A$ 是一一映射, 并且 $\forall (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in D, \varphi$ 在 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 处的 Jacobi 行列式

$$\Delta_\varphi(u) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

因此由定理**??**知 $\varphi : D \to A$ 是微分同胚, 根据 n 重积分的变元替换积分公式得到

$$\begin{aligned}
I &= \int \cdots \int_A \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n \\
&= \int \cdots \int_D \sqrt{u_n} \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_n \\
&= \int_0^1 \sqrt{u_n} \left(\int \cdots \int_{\substack{u_1 > 0;\ u_2 \geqslant 0;\ \ldots;\ u_{n-1} \geqslant 0 \\ u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} \leqslant u_n}} \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_{n-1} \right) \mathrm{d}u_n
\end{aligned}$$

对于 $(n-1)$ 重积分

$$J_{n-1} = \int \cdots \int_{\substack{u_1 > 0;\ u_2 \geqslant 0;\ \ldots;\ u_{n-1} \geqslant 0 \\ u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} \leqslant u_n}} \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_{n-1},$$

不难用归纳法证明

$$J_{n-1} = \frac{(u_n)^{n-1}}{(n-1)!} (\forall n \geqslant 2).$$

因此

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \sqrt{u_n} \frac{(u_n)^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{d}u_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 {u_n}^{n-\frac{1}{2}} \mathrm{d}u_n \\ &= \frac{2}{(2n+1)(n-1)!}. \end{aligned}$$

现在我们具体介绍几个变元替换积分公式.

3) 几个典型的变元替换积分公式

二重积分的极坐标变换积分公式

考虑映射 $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$：

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^2, \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

显然, φ 是 C^∞ 类的.

设 $\lambda \in \mathbb{R}$, 用 T_1 表示 xy 平面上从原点出发, 与正 x 轴的夹角为 λ 的一条半直线. 令

$$U_\lambda = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0, \lambda < \theta < \lambda + 2\pi\right\},$$
$$V_\lambda = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \notin T_\lambda\right\},$$

则 U_λ 是 r, θ 平面上的开集, V_λ 是 xy 平面上的开集.

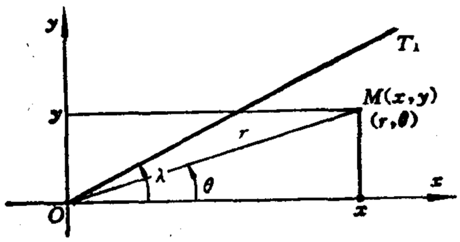


图 19.20

在第 16 章 § 3 例16.15中我们已经证明了映射 $\varphi_1 U_\lambda \to V_\lambda$ 是微分同胚, 并且 φ 在任一点 $(r,\theta) \in U_\lambda$ 处的 Jacobi 行列式

$$\Delta_\varphi(r,\theta) = r.$$

因此二重积分的极坐标变换积分定理就是:

设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是任一紧可测集, 使得对某一 $\lambda \in [0, 2\pi]$, $\mathring{D} \subset U_\lambda$. 令 $A = \varphi(D)$, $f: A \to \mathbb{R}$ 是任一连续函数, 则下述积分等式成立:

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

例题 19.25 设 $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2ax \leqslant 0\right\}$, 试计算二重积分

$$I = \iint_A \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里 A 是 xy 平面上以 $(a,0)$ 为中心, 以 a 为半径的闭圆盘, 它是紧可测集.

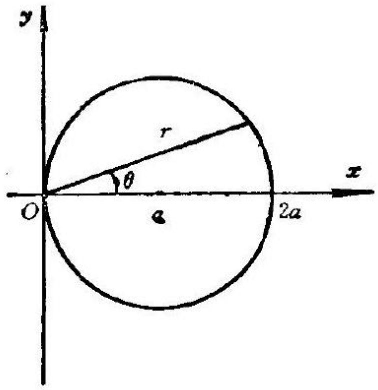


图 19.21

函数 $f: A \to \mathbb{R}, \forall (x, y) \in A, f(x, y) = x^2 + y^2$ 在 A 上连续, 故 f 在 A 上可积.

作极坐标变换

$$(x, y) = \varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta),$$

则

$$x^2 + y^2 - 2ax = r^2 - 2ar\cos\theta = r(r - 2a\cos\theta)$$

于是

$$x^2 + y^2 - 2ax \leqslant 0 \iff 0 \leqslant r \leqslant 2a\cos\theta, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

若我们令

$$D = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leqslant r \leqslant 2a\cos\theta\right\},$$

则 $A = \varphi(D)$, 并且当 $\lambda = -\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\mathring{D} \subset U_{-\frac{\pi}{2}}$(这里 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个紧可测集), 因此根据上述极坐标变换积分公式得到

$$\begin{aligned}
I &= \iint_A \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \left(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\right) r dr \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2a\cos\theta} r^3 dr\right) \mathrm{d}\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}(2a\cos\theta)^4 \mathrm{d}\theta \\
&= 8a^4 \int_0^{\pi/2} \cos^4\theta \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{3\pi}{2} a^4
\end{aligned}$$

例题 19.26 试用二重积分证明 Euler-Poisson 积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

首先，广义积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，因此

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_0^{a} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

为了计算 $\int_0^{a} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$, 我们先来计算 $\left(\int_0^{a} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2$, 因为

$$\left(\int_0^{a} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_0^{a} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{a} \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right) = \iint_{[0,a]\times[0,a]} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

并且 $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} > 0\,(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2)$, 所以我们有下述不等式成立：

$$\iint_{A_1} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_{[0,a]\times[0,a]} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_{A_2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里 A_1 与 A_2 分别为半径为 a 与 $\sqrt{2}a$, 中心为原点的圆盘位于第一象限的部分 (如图所示)：

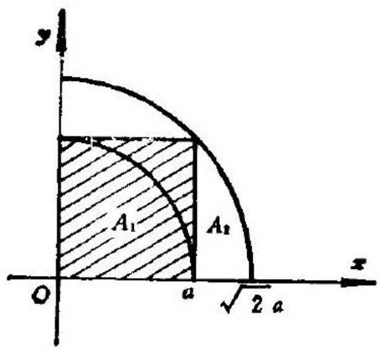


图 19.22

$$A_1 = \left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], 0\leqslant r\leqslant a\right\},$$
$$A_2 = \left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], 0\leqslant r\leqslant \sqrt{2}a\right\}.$$

根据二重积分的极坐标变换积分公式得到

$$\iint_{A_1} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{a} \mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right)$$
$$\iint_{A_2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{frac\pi 2}\left(\int_0^{\sqrt{2}a} \mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-2a^2}\right)$$

因此

$$\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right) \leqslant \left(\int_0^{a} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-2a^2}\right).$$

两边令 $a\to+\infty$ 取极限得到

$$\lim_{a\to+\infty}\left(\int_0^{a} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

此即 $\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{\pi}{4}$, 从而

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

例题 19.27 设 $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$. 试计算二重积分

$$I=\iint_A\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

此积分我们在例19.19中利用对称性化为计算下述积分

$$I=4\iint_{A_1}\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里 A_1 是随圆盘 A 位于第一象限的部分.

现在我们采用广义的极坐标变换 (即椭圆变换)$\widetilde{\varphi}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$:

$$\forall(r,\theta)\in\mathbb{R}^2,(x,y)=\widetilde{\varphi}(r,\theta)=(ar\cos\theta,br\sin\theta)$$

來计算积分 I .

与极坐标变换一样地可证, $\widetilde{\varphi}:U_\lambda\to V_\lambda$ 是微分同胚, 但 $\widetilde{\varphi}$ 在任一点 $(r,\theta)\in U_\lambda$ 处的 Jacobi 行列式

$$\Delta_{\widetilde{\varphi}}(r,\theta)=abr_0$$

于是对任一紧可测集 $D\subset\mathbb{R}^2$ 且 $\mathring{D}\subset U_\lambda$, 椭圆变换积分公式为:

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(ar\cos\theta,br\sin\theta)abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

现在对积分 I, 我们令

$$D=\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2\mid 0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$$

则 $A_1=\widetilde{\varphi}(D)$, 并且 $\mathring{D}\subset U_0$, 因此

$$\begin{aligned}
I&=4\iint_{A_1}\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=4\iint_D\left(a^2r^2\cos^2\theta-b^2r^2\sin^2\theta\right)abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\
&=4ab\left(\int_0^1 r^3\mathrm{dr}\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta\right)\\
&=ab\int_0^\pi\left(a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{\pi ab}{4}\left(a^2-b^2\right)
\end{aligned}$$

显然这比用纤维法计算 I 要简单得多.

三重积分的球面坐标变换积分公式

考虑映射 $\psi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$$\forall(r,\theta,a)\in\mathbb{R}^3,\psi(r,\theta,\alpha)=(r\sin\alpha\cos 9,r\sin\alpha\sin\theta,r\cos\alpha).$$

ψ 显然是 C^∞ 类的.

设 $\lambda\in\mathbb{R}$. 我们用 π_λ 表示 $r\theta\alpha$-空间的一个闭半平面, 它以 z 轴为边界并且与 xOy 平面的交线是极角为 λ 的一条半直线 T_λ. 令

$$U_\lambda=\left\{(r,\theta,a)\in\mathbb{R}^3\mid r>0,\lambda<\theta<\lambda+2\pi,0<\alpha<\pi\right\},$$

$$V_\lambda=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid(x,y,z)\notin\pi_\lambda\right\},$$

则 U_λ 与 V_λ 是两个开集, 它们的图形如图19.23所示.

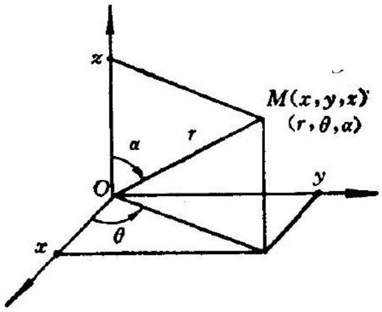


图 19.23

在第 16 章 §3 例??中我们已经证明了映射 $\psi: U_\lambda \to V_\lambda$ 是微分同胚，并且 ψ 在任一点 $(r,\theta,\alpha) \in U$，处的 Jacobi 行列式

$$\Delta_\psi(r,\theta,\alpha) = r^2 \sin\alpha.$$

因此三重积分的球面坐标变换积分定理为：

设 $D \subset \mathbb{R}^3$ 是任一紧可测集，使得对某 $-\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathring{D} \subset U_\lambda$. 令 $A = \psi(D)$, $f: A \to \mathbb{R}$ 是任一连续函数，则下述积分等式成立：

$$\iiint_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D f(r\sin\alpha\cos\theta, r\sin\alpha\sin\theta, r\cos\alpha)r^\alpha \sin\alpha \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\alpha$$

例题 19.28 设 $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant z\}$, 试计算三重积分

$$I = \iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

这里 A 是空间中以 $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ 为中心，以 $\frac{1}{2}$ 为半径的球体，故它是紧可测集.

函数 $f: A \to \mathbb{R}\left(\forall (x,y,z) \in A, f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$. 在 A 上连续，故 f 在 A 上可积.

作球面坐标变换

$$(x,y,z) = \psi(r,\theta,\alpha) = (r\sin\alpha\cos\theta, r\sin\alpha\sin\theta, r\cos\alpha),$$

则直接计算知

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant z \Longleftrightarrow 0 \leqslant r \leqslant \cos a, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi,$$

若我们令

$$D = \left\{(r,\theta,\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi, 0 \leqslant r \leqslant \cos\alpha\right\},$$

则 $A = \psi(D)$, 并且 $\mathring{D} \subset U_0$(这里 D 显然是紧可测集). 于是根据上述球面坐标变换积分公式得到

$$\begin{aligned} I &= \iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_D r^3\sin\alpha\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\alpha \\ &= \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\cdot\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\cos\alpha} r^3\sin\alpha\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}x\right) \\ &= 2\pi\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos^4\alpha\sin\alpha\mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{\pi}{5} \end{aligned}$$

例题 19.29 设 $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\right\}$. 试计算三重积分

$$I=\iiint_A\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

这里 A 是空间中的一个椭球体. 它显然是紧可测集, 函数 $f:A\to\mathbb{R}\left(\forall(x,y,z)\in A,f(x,y,z)=x^2+y^2\right)$ 在 A 上连续, 故 f 在 A 上可积.

计算此积分的便利方法是采用广义球面坐标变换 (即椭球变换)$\widetilde{\psi}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3:(a>0,b>0,c>0)$

$$\forall(r,\theta,\alpha)\in\mathbb{R}^3,\ (x,y,z)=\widetilde{\psi}(r,\theta,\alpha)=(ar\sin\alpha\cos\theta,br\sin\alpha\sin\theta,cr\cos\alpha)$$

与球面坐标变换一样可证, $\widetilde{\psi}:U_\lambda\to V_\lambda$ 是微分同胚, 但 $\widetilde{\psi}$ 在任一点 $(r,\theta,\alpha)\in U_\lambda$ 处的 Jacobi 行列式

$$\Delta_{\widetilde{\varphi}}(r,\theta,\alpha)=-abcr^2\sin\alpha.$$

因此对任一紧可测集 $D\subset\mathbb{R}^3$ 且 $\mathring{D}\subset U_\lambda$, 椭球变换积分公式为:

$$\iiint_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_D f(ar\sin\alpha\cos\theta,br\sin\alpha\sin\theta,cr\cos\theta)abcr^2\sin\alpha\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\alpha$$

现在对上述积分 I, 我们令

$$D=\left\{(r,\theta,\alpha)\in\mathbb{R}^3\mid 0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\alpha\leqslant\pi\right\},$$

则 D 是紧可测集, 并且 $\mathring{D}\subset U_\lambda$. 于是

$$\begin{aligned}
I&=\iiint_A\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\iiint_D\left[(ar\sin\alpha\cos\theta)^2+(br\sin\alpha\sin\theta)^2\right]abcr^2\sin\alpha\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\alpha\\
&=\iiint_D abcr^4\sin^3a\left(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\alpha\\
&=abc\left(\int_0^1 r^4\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^\pi\sin^3a\mathrm{d}\alpha\right)\left(\int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta\right)\\
&=abc\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3}\pi\left(a^2+b^2\right)\\
&=\frac{4}{15}\pi abc\left(a^2+b^2\right)
\end{aligned}$$

例题 19.30 设 $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid R_1^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant R_2^2\right\}(0<R_1<R_2)$. 试计算三重积分

$$I_{R_1R_2}=\iiint_A\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

并研究 $\lim\limits_{R_2\to+\infty}I_{R_1R_2}$ 及 $\lim\limits_{(R_1,R_2)\to(0^+,+\infty)}I_{R_1R_2}$.

这里函数 $f:A\to\mathbb{R}$

$$\forall(x,y,z)\in A,\ f(x,y,z)=\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

在 A 上连续. 作球面坐标变换 ψ :

$$(x,y,z)=\psi(r,\theta,\alpha)=(r\sin\alpha\cos\theta,r\sin\alpha\sin\theta,r\cos\alpha)$$

并令

$$D=\left\{(r,\theta,\alpha)\in\mathbb{R}^3\mid R_1\leqslant r\leqslant R_2,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\alpha\leqslant\pi\right\},$$

则 D 是紧可测集, $A=\psi(D)$, 并且 $\mathring{D}\subset U_0$, 故由球面坐标变换积分公式知, f 在 A 上可积, 并且

$$\begin{aligned} I &= \iiint_A \frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iiint_D r^4 r^2 \sin\alpha \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\alpha \\ &= \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\alpha\mathrm{d}\alpha\right)\left(\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r\right) \\ &= 4\pi\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \end{aligned}$$

当 $R_2\to+\infty$ 时, 积分区域 $A\to\mathbb{R}^3-B\left(0,;\quad R_1\right)$, 因此我们得到函数 f 在 $\mathbb{R}^3-B\left(0;\quad R_1\right)$ 上的所谓广义三重积分

$$\iiint_{\mathbb{R}^3-B(0;\quad R_1)}\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \text{并且}$$

$$\begin{aligned} &\iiint_{\infty^3-B(0;\quad R_1)}\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ =&\lim_{R_2\to+\infty}\iiint_A\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ =&\lim_{R_2\to+\infty}4\pi\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \\ =&\frac{4\pi}{R_1}. \end{aligned}$$

当 $(R_1,R_2)\to\left(0^+,+\infty\right)$ 时, 积分区域 $A\to\mathbb{R}^3$. 这时我们得到函数 f 在 $\mathbb{R}^3$ 上的广义三重积分 $\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 但它是发散的, 因为

$$\begin{aligned} &\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ =&\lim_{(R_1,R_2)\to(0^+,+\infty)}\iiint_A\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ =&\lim_{(R_1,R_2)\to(0^+,+\infty)}4\pi\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \\ =&+\infty. \end{aligned}$$

注 对于一般的广义重积分的定义及其性质的研究, 本书不准备介绍, 有兴趣的读者可参看 E.Ramis, C.Deschamps, J.Odoux《Coursde Mathématiques Spéciales》, MASSON, 1977, 296-304.

三重积分的柱面坐标变换积分公式

考虑映射 $\chi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$$\forall(r,\theta,z)\in\mathbb{R}^3,\ \chi(r,\theta,,z)=(r\cos\theta,r\sin\theta,z),$$

显然 χ 是 C^∞ 类的.

$\forall\lambda\in\mathbb{R}$, 开集 U_λ,V_λ 如前所定义,

在第 16 章 §3 例**??**中我们也已经证明了映射 $\chi:U_\lambda\to V_\lambda$ 是微分同胚. 并且 χ 在任一点 $(r,\theta,z)\in$

U_λ 处的 Jacobi 行列式

$$\Delta_z(r,\theta,z)=r.$$

因此三重积分的柱面坐标变换积分定理为：

设 $D\subset\mathbb{R}^3$ 是任一紧可测集，使得对某 $-\lambda\in\mathbb{R}$, $\mathring{D}\subset U_\lambda$. 令 $A=\chi(D)$, $f:A\to\mathbb{R}$ 是任一连续函数，则下述积分等式成立：

$$\iiint_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta,x)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x.$$

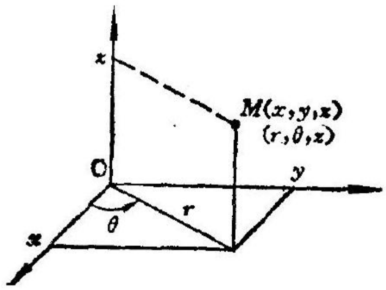


图 19.24

例题 19.31 设 $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2\leqslant z^2,0\leqslant z\leqslant 1\right\}$. 试计算三重积分

$$I=\iiint_A\frac{z}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

这里函数 $f:A\to\mathbb{R}$

$$\forall(x,y,z)\in A,\ f(x,y,z)=\frac{z}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$$

在 A 上连续. 作柱面坐标变换 $\chi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$$(x,y,z)=\chi(r,\theta,z)=(r\cos\theta,r\sin\theta,z),$$

于是

$$x^2+y^2\leqslant z^2,0\leqslant z\leqslant 1\iff 0\leqslant r\leqslant z\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

若我们令

$$D=\left\{(r,\theta,z)\in\mathbb{R}^3\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant z,0\leqslant z\leqslant 1\right\},$$

则 D 是 $\mathbb{R}^3$ 的紧可测集，并且 $\mathring{D}\subset U_0$, $A=\chi(D)$. 因此由柱面坐标变换积分公式知，f 在 A 上可积，并且

$$\begin{aligned}
I&=\iiint_A\frac{z}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\iiint_D\frac{zr}{\left(1+r^2\right)^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\\
&=\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^1 z\left(\int_0^z\frac{r}{\left(1+r^2\right)^2}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}z\right)\\
&=2\pi\int_0^1\frac{1}{2}\left(z-\frac{z}{1+z^2}\right)\mathrm{d}z\\
&=\frac{\pi}{2}(1-\log 2)
\end{aligned}$$

4. 面积与体积的计算

作为这一节的结束，我们介绍几个利用重积分计算平面图形的面积与空间图形的体积的例子.

例题 19.32 计算椭圆盘

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$$

的面积.

由于 A 可以表示成下述形式：

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|x\in[-a,a],-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\leqslant y\leqslant\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right\},$$

故根据定理19.20知，A 是紧可测集，它的测度即面积

$$\begin{aligned}m(A)&=\int_{-a}^{a}2\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\\&=\pi ab\end{aligned}$$

当 $a=b$ 时，$m(A)=\pi a^2$ 就是平面上以原点为中心以 a 为半径的圆盘的面积.

显然，我们也可以用椭圆坐标变换积分公式计算 A 的面积，即

$$\begin{aligned}m(A)&=\iint_A 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{[0;\quad 1]\times[0,2\pi]}abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=ab\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^1 r\mathrm{d}r\right)\\&=\pi ab\end{aligned}$$

例题 19.33 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 且 $0\leqslant\beta-\alpha\leqslant 2\pi.r_1,r_2:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ 是两个连续函数使得 $r_1(\theta)\leqslant r_2(\theta),\forall\theta\in[\alpha,\beta]$. 令

$$D=\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2\mid\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta)\right\},$$
$$A=\varphi(D)\ (\text{这里 }\varphi\text{ 是平面极坐标变换})$$

1) 证明；A 是 $\mathbb{R}^2$ 的紧可测集，并且其测度

$$m(A)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\left[r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)\right]\mathrm{d}\theta.$$

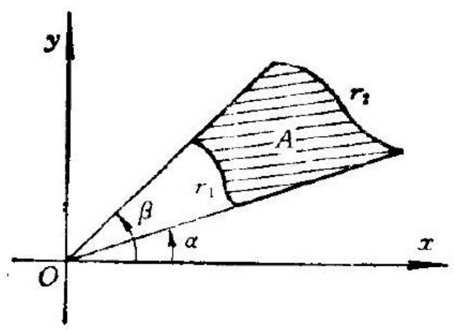


图 19.25

2) 利用 1) 的结论计算下述集合

$$B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-a\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)\leqslant 0\right\}$$

的面积

首先由于 r_1,r_2 连续，故 D 是紧可测集 (§3 例19.7). 又因为 $a\leqslant\beta\leqslant a+2\pi$, 所以 $\mathring{D}\subset U_a$, 从而 $A=\varphi(D)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的紧可测集. 根据二重积分的极坐标变换积分公式得到

$$\begin{aligned}m(A)&=\iint_A 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\int_a^\beta\left(\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\int_a^\beta\left[r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)\right]\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

现在对集合 B, 作极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 由于

$$\begin{aligned}x^2+y^2-a\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)\leqslant 0&\Longleftrightarrow r^2-a(r+r\cos\theta)\leqslant 0,\\&\Longleftrightarrow 0\leqslant r\leqslant a(1+\cos\theta), -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi,\end{aligned}$$

故若令

$$D=\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2\middle| -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant r\leqslant a(1+\cos\theta)\right\},$$

则 D 是紧可测集，$\mathring{D}\subset U, B=\varphi(D)$, 因此根据刚才所证之公式得到 B 的测度

$$m(B)=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}a^2(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\pi a^2$$

$m(B)$ 实际上就是下图所描绘的心脏线所围图形的面积.

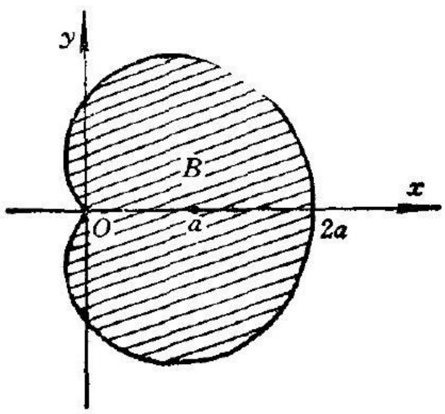


图 19.26

例题 19.34 设 $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$, $\Sigma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\middle| x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}\right\}$, 计算由 S 与 Σ 的交所确定的空间图形的体积.

令 $A=S\cap\Sigma$. 显然 A 就是空间单位球体 S 被圆柱面 $H=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\right\}$ 所截部分.

我们用 D 表示 A 在 xOy 平面上的投影，于是 D 是以 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 为中心，以 $\frac{1}{2}$ 为半径的闭圆盘.

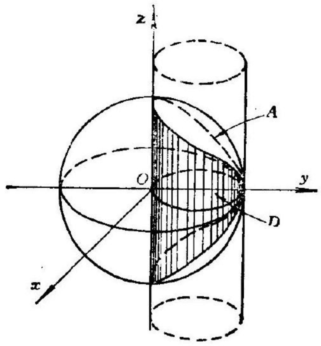


图 19.27

将 A 表示成下述形式：

$$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in D,-\sqrt{1-x^2-y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}.$$

由定理19.20知，A 是紧可测集，并且 A 的测度即体积

$$m(A)=\iint_D 2\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由于 D 具有关于 y 轴的对称关系 $\mathscr{P}$，并且

$$(x,y)\mathscr{P}(-x,y)\Longrightarrow\sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{1-(-x)^2-y^2}$$

故

$$m(A)=4\int_{D_1}\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这里 D_1 为 D 位于 xOy 平面第一象限的部分.

作极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，由于

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}\Longleftrightarrow 0\leqslant r\leqslant\sin\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

若令

$$E=\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2\middle| 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant\sin\theta\right\},$$

则 E 是紧可测集，$\mathring{E}\subset U_0$，并且 $D_1=\varphi(E)$. 于是由极坐标变换积分公式得到

$$\begin{aligned}
m(A)&=4\iint_{D_1}\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=4\iint_E\sqrt{1-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\
&=4\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\sin\theta}r\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\left[1-\left(1-\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}\right]\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\left[1-\cos^3\theta\right]\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9}
\end{aligned}$$

例题 19.35 设 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是 yOz 平面的任一连续函数，用 A 表示将此函数所代表的曲线 $\varGamma$ 绕 z 轴旋转一周所得旋转曲面 $\varSigma$，与平面 $z=a, z=b$ 所围成的 $\mathbb{R}^3$ 的一旋转体.

1) 证明：A 是 $\mathbb{R}^3$ 的紧可测集，其测度即体积

$$m(A)=\pi\int_a^b g^2(z)\mathrm{d}z$$

2) 利用 1) 的结论计算由圆盘 $\Delta=\left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid z^2+(y-\alpha)^2\leqslant R^2\right\}$ $(\alpha>R)$ 绕 z 轴旋转一周所得的旋转体 B–环体–的体积.

首先，旋转体 A 可以表示成下述形式的集合：

$$\begin{aligned}A&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid a\leqslant z\leqslant b, x^2+y^2\leqslant g^2(z)\right\}\\&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid a\leqslant z\leqslant b,-g(z)\leqslant y\leqslant g(z)-\sqrt{g^2(z)-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{g^2(z)-y^2}\right\}\end{aligned}$$

根据定理19.20知 A 是 $\mathbb{R}^3$ 的紧可测集，为了计算 A 的测度 $m(A)$, 我们用截面法.

记 $A(z)$ 为平面 $z=z$ 截 A 所得截面. 它是以原点为中心，以 $g(z)$ 为半径的闭圆盘. 它的面积 $m(A(z))=\pi g^2(z)$. 因此由截面法得到

$$m(A)=\int_a^b\left(\iint_{A(z)}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z=\pi\int_a^b g^2(z)\mathrm{d}z$$

为了计算环体 B 的体积 $m(B)$, 我们令

$$\begin{gathered}g_1:[-R,R]\to\mathbb{R}, g_1(z)=\alpha-\sqrt{R^2-z^2},\forall z\in[-R,R],\\g_2:[-R,R]\to\mathbb{R}, g_2(z)=\alpha+\sqrt{R^2-z^2},\forall z\in[-R,R],\\A_i=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid -R\leqslant z\leqslant R, x^2+y^2\leqslant g_i^2(z)\right\}(i=1,2),\end{gathered}$$

则环体 B 的体积 $m(B)$ 为

$$\begin{aligned}m(B)&=m\left(A_2\right)-m\left(A_1\right)\\&=\pi\int_{-R}^R\left(\alpha+\sqrt{R^2-z^2}\right)^2\mathrm{d}z-\pi\int_{-R}^R\left(\alpha-\sqrt{R^2-z^2}\right)^2\mathrm{d}z\\&=4\pi\alpha\int_{-R}^R\sqrt{R^2-z^2}\mathrm{d}z\\&=2\alpha\pi^2R^2\end{aligned}$$

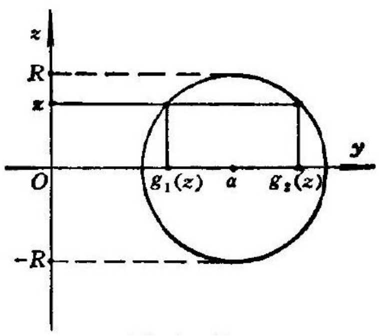


图 19.28

例题 19.36 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的 k 个线性无关向量. 集合

$$A_k=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^k\lambda_i\boldsymbol{a}_i, 0\leqslant\lambda_i\leqslant 1,\sum_{i=1}^k\lambda_i\leqslant 1\right\}$$

称为 $\mathbb{R}^n$ 的由向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ 所生成的 k 维单形或 $(k+1)$ 面体.

我们用 H_{k-1} 表示由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{k-1}$ 所生成的子空间. h_k 表示向量 $\boldsymbol{a}_k$ 的终点到 H_{k-1} 的距离, 称为 k 维单形 A_k 的一个高, 与 H_{k-1} 平行并与 $k-1$ 维单形 A_{k-1} 的距离为 s, A_k 的截面 $A_k(s)$ 是由下述 $k-1$ 个向量

$$\left(\frac{h_k-s}{h_k}\right)\boldsymbol{a}_1,\left(\frac{h_k-s}{h_k}\right)\boldsymbol{a}_2,\cdots,\left(\frac{h_k-s}{h_k}\right)\boldsymbol{a}_{k-1}$$

所生成的一个 $k-1$ 维单形, 因此 $A_k(s)$ 的测度

$$m\left(A_k(s)\right)=\left(\frac{h_k-s}{h_k}\right)^{k-1} m\left(A_{k-1}\right).$$

由截面法知 k 维单形 A_k 的 k 维测度

$$\begin{aligned} m\left(A_k\right) &= \int_0^{h_k}\left(\int_{A_k(s)} 1\right) ds \\ &= \int_0^{h_k} m\left(A_k(s)\right) \mathrm{d}s \\ &= m\left(A_{k-1}\right) \int_0^{h_k}\left(\frac{h_k-s}{h_k}\right)^{k-1} \mathrm{d}s \\ &= \frac{h_k}{k} m\left(A_{k-1}\right), \end{aligned}$$

由于 $m\left(A_1\right)=\|\boldsymbol{a}_1\| \triangleq h_1$, 故

$$m\left(A_n\right)=\frac{h_n}{n}\cdot\frac{h_{n-1}}{n-1}\cdots\frac{h_2}{2}\cdot m\left(A_1\right)=\frac{h_1h_2\cdots h_n}{n!},$$

这里 h_i 为向量 $\boldsymbol{a}_i$ 的终点到由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{i-1}$ 所生成的子空间 H_{i-1} 上的距离 ($i=1,2,\cdots,n$).

特别地, 我们得到 (见图19.29)

$$\begin{aligned} & m\left(A_1\right)=h_1=\|\boldsymbol{a}_1\| \text{ (向量 } \boldsymbol{a}_1 \text{ 的长度)}, \\ & m\left(A_2\right)=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}_1\|\cdot h_2(\triangle OAB \text{ 的面积 }), \\ & m\left(A_3\right)=\frac{1}{3} m\left(A_2\right)\cdot h_3(\text{ 四面体 } OABC \text{ 的体积 }). \end{aligned}$$

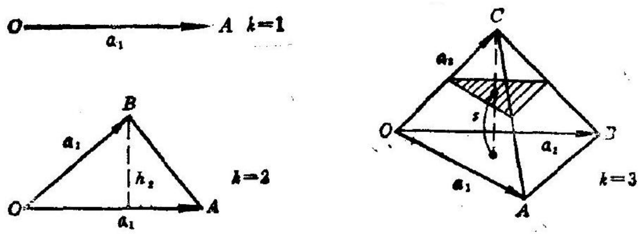


图 19.29

习题

1. 利用 Fubini 定理计算下列各积分:

   1) $\displaystyle\iint_{[1,2]\times[1,2]} \frac{1}{(1+x)y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

   2) $\displaystyle\iint_{[0,2]\times[1,2]} (xy^2+2x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

   3) $\displaystyle\iiint_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} x^2ye^{xyz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

4) $\displaystyle\iiint_{[0,a]\times[0,b]\times[0,c]} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

2. 设 $D=\left\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1] \mid x=\dfrac{1}{2}, y\in\mathbb{Q}, \text{或 } x\in\mathbb{Q}, y=\dfrac{1}{2}\right\}$，函数 $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{若 } (x,y)\in D,\\ 0, & \text{若 } (x,y)\notin D.\end{cases}$$

   1) 证明：f 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上可积，并且 $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} f=0$.
   2) 证明：不能用降维法计算 $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} f$.

3. 设 $P=[-1,1]\times[-1,1]$，函数 $f:P\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}y, & \text{若 } x\in\mathbb{Q},\\ 0, & \text{若 } x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

   1) 证明：$\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=0$.
   2) 证明：f 在 P 上不可积.

4. 设 $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{若 } (x,y)\in(0,1]\times(0,1],\\ 0, & \text{若 } x=0 \text{ 或 } y=0.\end{cases}$$

   1) 证明：$\forall x\in[0,1]$，函数 $f_x:[0,1]\to\mathbb{R}$ 在 $[0,1]$ 上可积，并计算

$$F(x)=\int_0^1 f_x(y)\mathrm{d}y.$$

   2) 证明：F 在 $[0,1]$ 上可积，并计算 $\displaystyle\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x$.
   3) 若先固定 y，考虑类似的问题，试问结果如何？

5. 设 $P\subset\mathbb{R}^m, S\subset\mathbb{R}^k$ 是两个闭长方体，$f:P\times S\to\mathbb{R}$ 是任一可积函数，定义两个函数 $F,G:P\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\forall x\in P, F(x)={}_*\int_S f(x,y)\mathrm{d}y, G(x)={}^*\int_S f(x,y)\mathrm{d}y,$$

   这里上、下积分 ${}^*\displaystyle\int_S, {}_*\int_S$ 定义见 §2 习题 6.

   1) $\forall\varepsilon>0$，通过选择两个阶梯函数 $\varphi,\psi\in\mathscr{E}(P\times S)$ 使得

$$\varphi\leqslant f\leqslant\psi, \int_{P\times S}(\psi-\varphi)<\varepsilon$$

   证明：F 是可积的，并且 $\displaystyle\int_P F(x)\mathrm{d}x=\int_{P\times S} f$.

   2) 类似地，对函数 G，证明：G 在 P 上可积，并且

$$\int_P G(x)\mathrm{d}x=\int_{P\times S} f$$

   3) 由此推出存在一个 J-零测度集 $P_f\subset P$，使得 $\forall x\in P-P_f$，函数 $f_x:S\to\mathbb{R}$ 是可积的.

6. 设 $f : P \times S \to \mathbb{R}$ 是任一可积函数,

$$P_f = \left\{x \in P \mid f_x : S \to \mathbb{R} \text{ 在 } S \text{ 上可积}\right\}.$$

在认真分析定理 19.5.1 的证明过程后, 证明：若 $P - P_f$ 是 J-零测度集, 则

1) 函数 $F(x) = \displaystyle\int_S f(x, y)dy$ 在 P 上可积.

2) $\displaystyle\int_P F = \int_{P\times S} f$.

7. 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是任一映射, 令

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}} \quad (f \text{ 的支集 }).$$

1) 证明：$\mathbb{R}^n - \operatorname{supp}(f) = \overset{\circ}{\overbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}}}$.

2) 假设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 连续, 并且 $\operatorname{supp}(f)$ 是紧集. 证明：若 A 是包含 $\operatorname{supp}(f)$ 的任一有界集, 则 f 在 A 上可积, 并且

$$\int_A f = \int_{\operatorname{supp}(f)} f$$

3) 在 2) 的假设条件下, 设 $P \subset \mathbb{R}^m, S \subset \mathbb{R}^k$ 是两个闭长方体, 使得 $m + k = n, A \subset P \times S$. 证明：

$$\int_A f = \int_P \left(\int_S f(x, y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_S \left(\int_P f(x, y)\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y.$$

8. 利用纤维法或截面法计算下列各积分：

1) $I = \displaystyle\iint_A x\sqrt{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant x^2\right\}$

2) $I = \displaystyle\iint_A \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, J = \iint_A \sqrt{x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant x\right\} (b > a > 0)$;

3) $I = \displaystyle\iint_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y, J = \iint_A (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leqslant 1\right\} (a > 0, b > 0)$;

4) $I = \displaystyle\iint_A x^2 y\mathrm{d}x\mathrm{d}y, A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 4, \sqrt{x} \leqslant y \leqslant \min(x, 2)\right\}$,

5) $I = \displaystyle\iint_A (x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, A 是由抛物线 $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 所围成的平面区域;

6) $I_i = \displaystyle\iiint_{A_i} (x + y + z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,(i = 1, 2)$

$$A_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x + y + z \leqslant a\right\} (a > 0),$$
$$A_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant a^2, 0 \leqslant z \leqslant h\right\} (h > 0);$$

7) $I = \displaystyle\iiint_A z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leqslant 1\right\}$;

8) $I = \displaystyle\iiint_A (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2\right\}$;

9) $I = \displaystyle\iiint_A (y^2 + z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, A 是由平面 $y = x, y = -x, z = 0$ 与 $z = x (0 \leqslant x \leqslant 1)$ 所围区域;

10) $I = \displaystyle\iiint_A xyz\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leqslant 1\right\} (a, b,$ 0).

9. 利用对称法计算下列各积分：

1) $\iint_A (x^3y + xy^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$；

2) $\iint_A x(x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 + x^2 - y^2 \leqslant 1\}$；

3) $\iint_A (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1\}$；

4) $\iint_A (x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} \geqslant 1, \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} \geqslant 1\right\}$，

5) $\iiint_A xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1\right\}$；

6) $\iiint_A z\cos(x^2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2, x \geqslant 0\}$

10. 利用一般变元替换积分法计算下列各积分：

1) $\iint_A x^3y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, A 是由曲线 $x^2 + y^2 = 2, x^2 + y^2 = 4, x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 2$ 所围平面区域；

2) $\iint_A (y^2-x^2)(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, a \leqslant xy \leqslant b, y \geqslant x, y^2 - x^2 \leqslant 1\}$(令 $u = xy, v = y^2 - x^2$)；

3) $\iint_A \mathrm{e}^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 2px \leqslant 0, x^2 - 2py \leqslant 0\}$ (令 $x = u^2v, y = uv^2$)；

第二十章 函数沿子流形的积分

这一章我们首先介绍了 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维曲面的概念，然后利用它定义了 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维子流形，特别研究了平面与空间曲线的局部形态及无穷远分支的渐近性态，最后严格定义了 k 维简单曲面片的 k 维面积，利用单位分解定义了 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维子流形的面积与函数沿 k 维子流形的积分.

20.1 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维曲面

1. 概念的引入

在介绍 k 维曲面概念之前，先看两个例子.

例题 20.1 考虑如下定义的两个映射 $\varphi:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}^2$ 与 $\psi:(-\infty,+\infty)\to\mathbb{R}^2$：

$$\forall\theta\in(-\pi,\pi),\varphi(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta),$$

$$\forall t\in(-\infty,+\infty),\psi(t)=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)$$

由于

$$\varphi_1^2(\theta)+\varphi_2^2(\theta)=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1,\forall\theta\in\big(-\pi,\pi\big),$$

$$\psi_1^2(t)+\psi_2^2(t)=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2=1,\forall t\in(-\infty,+\infty),$$

故 φ 的图形 $\mathrm{Gr}(\varphi)$ 与 ψ 的图形 $\mathrm{Gr}(\psi)$ 都是平面上以原点 $(0,0)$ 为中心的单位圆周挖去点 $M(-1,0)$ 后的圆弧 Γ

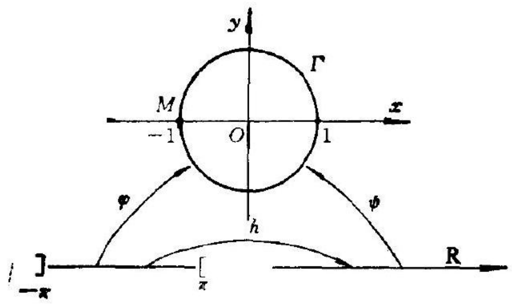


图 20.1

若我们定义映射 $h:(-\pi,\pi)\to(-\infty,+\infty)$ 为

$$\forall\theta\in(-\pi,\pi),h(\theta)=\tan\frac{\theta}{2},$$

则 h 是 C^∞ 类的微分同胚，并且

$$\varphi=\psi\circ h.$$

例题 20.2 设 I 与 J 是 $\mathbb{R}^2$ 中如下定义的开集：

$$I=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2<1\right\}-\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\geqslant 0,y=0\right\},$$

$$J=\left\{(\theta,a)\in\mathbb{R}^2\mid 0<\theta<2\pi,0<a<\frac{\pi}{2}\right\}.$$

映射 $F: I \to \mathbb{R}^3$ 与 $G: J \to \mathbb{R}^3$ 定义如下：

$$\forall (x,y) \in I, F(x,y) = \left(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right),$$

$$\forall (\theta,\alpha) \in J, G(x,y) = (\sin\alpha\cos\theta, \sin\alpha\sin\theta, \cos\alpha).$$

这两个映射的图形 Gr(F) 与 Gr(G) 描绘的是空间中同一个单位上半球面挖去圆弧 $A\widehat{B}C$ 后的球面 Σ .

若定义映射 $k: J \to I$ 为：

$$\forall (\theta,\alpha) \in J, k(\theta,\alpha) = (\sin\alpha\cos\theta, \sin\alpha\sin\theta),$$

则 k 是 C^∞ 类微分同胚，并且

$$G = F \circ k.$$

上面这两个例子说明，虽然 φ 与 $\psi(F$ 与 $G)$ 是两个完全不同的映射，但它们描绘的是平面 (空间) 中的同一曲线 (曲面)，并且通过一个微分同胚 $h(k)$ 将一个映射变为另一个映射. 由此可知，把曲线，曲面定义为映射的某一种等价类更为合理.

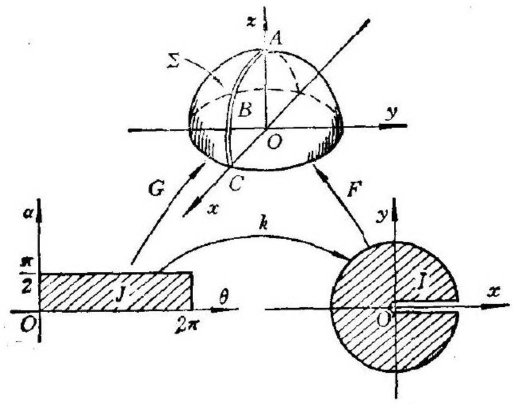


图 20.2

2. $\mathbb{R}^n$ 的 k 维曲面

以下我们设 $k, n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant k \leqslant n$.

设 $I \subset \mathbb{R}^k$ 是任一非空集合. $\varphi: I \to \mathbb{R}^n$ 是任一 $C^p(p \geqslant 0)$ 类映射，我们用 (I,φ) 表示由集合 I 与 C^p 类映射 φ 所确定的二元组，并用 $\mathscr{E}$ 表示所有这种二元组所组成的集合.

在 $\mathscr{E}$ 上定义关系 “ $\sim$ ” 如下：

$$\forall (I,\varphi),(J,\psi) \in \mathscr{E}, (I,\varphi) \sim (J,\psi) \Longleftrightarrow \text{ 存在 } C^p \text{ 类微分同胚 } h: I \to J \text{ 使得 } \varphi = \psi \circ h.$$

下面我们来证明 “ $\sim$ ” 是 $\mathscr{E}$ 上的等价关系.

事实上，$\forall (I,\varphi) \in \mathscr{E}, h = id_I: I \to I$ 是 C^p 类微分同胚. 并且 $\varphi = \varphi \circ id_I$, 故 $(I,\varphi) \sim (I,\varphi)$.

现设 $(I,\varphi),(J,\psi) \in \mathscr{E}$ ，且 $(I,\varphi) \sim (J,\psi)$. 于是存在 C^p 类微分同胚 $h: I \to J$ 使得 $\varphi = \psi \circ h$. 由于 $h^{-1}: J \to I$ 也是 C^p 类微分同胚，并且 $\psi = \varphi \circ h^{-1}$ ，故 $(J,\psi) \sim (I,\varphi)$.

最后设 $(I,\varphi),(J,\psi),(V,\xi) \in \mathscr{E}$ 并且 $(I,\varphi) \sim (J,\psi), (J,\psi) \sim (V,\xi)$. 于是存在 C^p 类微分同胚 $h: I \to J$ 及 $k: J \to V$ 使得

$$\varphi = \psi \circ h, \psi = \xi \circ k,$$

从而 $\varphi = \xi \circ (k \circ h)$. 由于 $k \circ h: I \to V$ 是 C^p 类微分同胚，故 $(I,\varphi) \sim (V,\xi)$.

定义 20.1

设 $\mathscr{E}$ 与 "$\sim$" 如上所定义.

1. $\forall (I,\varphi) \in \mathscr{E}, (I,\varphi)$ 关于 "$\sim$" 的等价类称为 $\mathbb{R}^n$ 的一个 C^p 类 k 维曲面, 记为 Σ.$\forall (J,\psi) \in \Sigma, (J,\psi)$ 称为 Σ 的 C^p 类参数表达式, $\psi(J)$ 称为 Σ 的支承集.
2. 若 $t \in I$ 并且 φ 在 t 处的 Jacobi 矩阵的秩等于 k, 则称 $\varphi(t)$ 为 Σ 的正则点.
3. 若 $\forall t \in I, \varphi(t)$ 都是 Σ 的正则点, 则称 Σ 是 C^p 类正则曲面.

当 $k=1$ 时, 我们特别称 Σ 为 C^p 类 1 维曲线, C^p 类 1 维正则曲线或简称为 C^p 类曲线, C^p 类正则曲线.

♣

容易验证, Σ 的正则点, 正则曲线, 正则曲面的定义与 Σ 的参数表达式的选择无关.

例题 20.3 设映射 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 定义如下:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \begin{bmatrix} x_{01} + a_1 t \\ x_{02} + a_2 t \\ \vdots \\ x_{0n} + a_n t \end{bmatrix},$$

这里 $M_0\left(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n}\right)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一定点, $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \cdots, \boldsymbol{a_n})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一向量且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$.

显然 φ 是 C^∞ 类的, 并且 $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\left(\varphi_1'(t)\right)^2 + \left(\varphi_2'(t)\right)^2 + \cdots + \left(\varphi_n'(t)\right)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0.$$

因此 $(\mathbb{R}, \varphi)$ 所代表的等价类 Σ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一条 C^∞ 类的正则曲线, 它就是 $\mathbb{R}^n$ 中经过点 M_0 并且平行于向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的直线.

特别地, 当 $n=2$ 与 $n=3$ 时, $(\mathbb{R}, \varphi)$ 分别代表一条平面直线与空间直线.

例题 20.4 设映射 $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 定义如下

$$\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2, \psi(t,s) = \begin{pmatrix} x_0 + \alpha_1 t + \beta_1 s \\ y_0 + \alpha_2 t + \beta_2 s \\ z_0 + \alpha_3 t + \beta_3 s \end{pmatrix},$$

这里 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 与 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的两个线性无关向量. $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中一定点.

映射 ψ 是 C^∞ 类的, 并且 $\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2, \psi$ 在 (t,s) 处的 Jacobi 矩阵 $J_\psi(t,s)$ 为

$$J_\psi(t,s) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix}.$$

由假设知, $J_\phi(t,s)$ 的秩等于 2 , 因此 $\left(\mathbb{R}^2, \psi\right)$ 代表 $\mathbb{R}^3$ 中的一个 C^∞ 类 2 维正则曲面 Σ, 实际上它就是 $\mathbb{R}^3$ 中经过点 $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ 并且平行于向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的一个平面.

例题 20.5 考虑例20.1与例20.2的两个参数表达式 $((-\pi,\pi),\varphi)$ 与 (I,F).

由 φ 与 F 的表达式可知, φ 与 F 都是 C^∞ 类的, 并且

$$\forall \theta \in (-\pi,\pi), J_\varphi(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta),$$

$$\forall (x,y)\in I, J_F(x,y)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & -\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}.$$

由此可知，$\forall \theta\in(-\pi,\pi), J_\varphi(\theta)$ 的秩为 1，而 $\forall (x,y)\in I$，$J_\varphi(x,y)$ 的秩为 2, 因此 $((-\pi,\pi),\varphi)$ 代表 $\mathbb{R}^2$ 中的一条 C^∞ 类 1 维正则曲线 $\varGamma$. 而 (I,F) 代表 $\mathbb{R}^3$ 中的一个 C^∞ 类 2 维正则曲面 $\varSigma$.

下面我们研究 $\mathbb{R}^3$ 中的一些特殊曲面.

3. $\mathbb{R}^3$ 的三类特殊曲面

1) 柱面

设 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一非零向量，$I\subset\mathbb{R}$ 是一非空区间，$\boldsymbol{f}:I\to\mathbb{R}^3$ 是任一 C^p 类映射，假设 $\forall t\in I, \boldsymbol{f}'(t)=(f_1'(t),f_2'(t),f_3'(t))$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

定义映射 $\varPhi: I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ 如下：

$$\forall (t,s)\in I\times\mathbb{R}, \varPhi(t,s)=\boldsymbol{f}(t)+\boldsymbol{\alpha}s,$$

我们来证明 $(I\times\mathbb{R},\varPhi)$ 代表 $\mathbb{R}^3$ 中的一个 C^p 类 2 维正则曲面 H.

事实上，映射 $\varPhi$ 是 C^p 类的，并且 $\forall (t,s)\in I\times\mathbb{R}, \varPhi$ 在 (t,s) 处的 Jacobi 矩阵

$$J_\varPhi(t,s)=\begin{pmatrix} f_1'(t) & \alpha_1 \\ f_2'(t) & \alpha_2 \\ f_3'(t) & \alpha_3 \end{pmatrix},$$

由假设知，$J_\varPhi(t,s)$ 的秩等于 2.

从几何上来看，此曲面 H 可以看作以 t 为指标，以 $\boldsymbol{\alpha}$ 为方向并通过点 $\boldsymbol{f}(t)$ 的直线 D_t 沿着 $(I,\boldsymbol{f})$ 代表的曲线 $\varGamma$ 平行移动所生成的. 因此我们称 H 是以 $\varGamma$ 为准线而以 $\boldsymbol{\alpha}$ 为方向的柱面.

例题 20.6 设 $\boldsymbol{\alpha}=(0,0,1)$, 映射 $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ 与 $\varPhi:[0,2\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ 分别定义如下：

$$\forall t\in[0,2\pi], f(t)=(\cos t,\sin t,0),$$

$$\forall (t,s)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R}, \varPhi(t,s)=(\cos t,\sin t,s).$$

显然 $\varPhi$ 是 C^∞ 类的，并且 $\forall (t,s)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R}, \varPhi$ 在 (t,s) 处的 Jacobi 矩阵

$$J_\varPhi(t,s)=\begin{pmatrix} -\sin t & 0 \\ \cos t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于

$$\begin{vmatrix} -\sin t & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2=\sin^2 t+\cos^2 t=1,$$

故 $J_\varPhi(t,s)$ 的秩等于 2，因此 $([0,2\pi]\times\mathbb{R},\varPhi)$ 代表 $\mathbb{R}^3$ 的一个 C^∞ 类 2 维正则柱面 H, 实际上 H 是以 xOy 平面的单位圆周 S 为准线，以 z 轴为方向的直圆柱面.

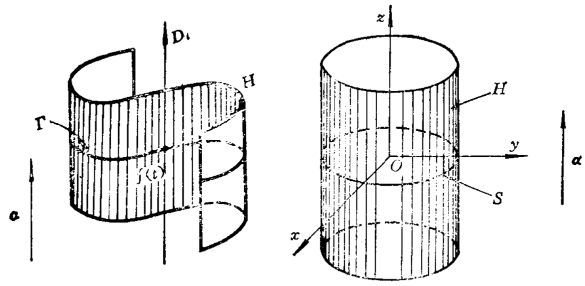


图 20.3

2) 锥面

设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一定点，同时又把它看作一向量 $\boldsymbol{\mu} = (x_0, y_0, z_0)$, $I, J \subset \mathbb{R}$ 是两个非空区间，并且 $0 \in J, g : I \to \mathbb{R}^3$ 是任一 C^p 类映射.

定义映射 $\Psi : I \times J \to \mathbb{R}^3$ 如下：

$$\forall (t, s) \in I \times J, \Psi(t, s) = \mu + s(g(t) - \mu)$$

则映射 Ψ 是 C^p 类的. $(I \times J, \Psi)$ 所代表的 $\mathbb{R}^3$ 的 C^p 类 2 维曲面 Z 称为以 M_0 为顶点，以 (I, g) 代表的曲线 Γ 为准线的锥面.

从几何上来看，此锥面 Z 可以看作由联结点 M_0 与准线 Γ 上的点 $g(t)$ 的直线或线段 $G_t (t \in I)$ 所生成.

现在我们来研究锥面 Z 的正则性.

映射 Ψ 是 C^p 类的，$\forall (t, s) \in I \times J, \Psi$ 在 (t, s) 处的 Jacobi 矩阵

$$J_\Psi(t, s) = \begin{pmatrix} sg_1'(t) & g_1(t) - x_0 \\ sg_2'(t) & g_2(t) - y_0 \\ sg_3'(t) & g_3(t) - z_0 \end{pmatrix}.$$

显然对 $s = 0, J_\psi(t, 0)$ 的秩不等于 2, 因此 $\Psi(t, 0) = M_0$ 不是锥面 Z 的正则点.

对 $s \neq 0, J_\phi(t, s)$ 的秩为 2，当且仅当向量 $g(t) - \mu = (g_1(t) - x_0, g_2(t) - y_0, g_3(t) - z_0)$ 与向量 $g'(t) = \left(g_1'(t), g_2'(t),\ g_3'(t)\right)$ 线性无关. 因此 $\Psi(t, s)(s \neq 0)$ 为锥面 Z 的正则点，当且仅当 $g(t) - \mu$ 与 $g'(t)$ 线性无关.

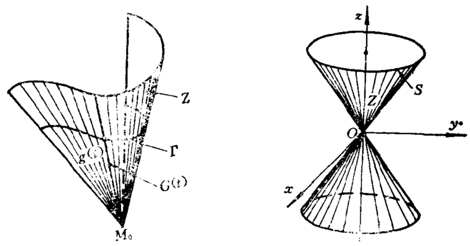


图 20.4

例题 20.7 设 $\boldsymbol{\mu} = (0, 0, 0)$. 映射 $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ 与 $\Psi : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\circ}$ 定义如下：

$$\forall t \in [0, 2\pi], g(t) = (\cos t, \sin t, 1),$$

$$\forall (t, s) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}, \Psi(t, s) = sg(t) = (s \cos t, s \sin t, s).$$

显然 Ψ 是 C^∞ 类的. 由于 $([0, 2\pi], g)$ 代表平面 $z = 1$ 上以 $(0, 0, 1)$ 为中心以 1 为半径的圆周 S, 故 $([0, 2\pi] \times \mathbb{R}, \Psi)$ 代表 $\mathbb{R}^3$ 的以原点为顶点而以 S 为准线的圆锥面 Z.

由于 Ψ 在任一点 $(t,s)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R}$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$J_\psi(t,s)=\begin{pmatrix}-s\sin t & \cos t\\ s\cos t & \sin t\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

并且 $\begin{vmatrix}-s\sin t & \cos t\\ s\cos t & \sin t\end{vmatrix}=-s$, 故对 $s\neq 0$, $J_\Psi(t,s)$ 的秩等于 2，从而圆锥面 Z 挖去原点 $(0,0,0)$ 后是一个 C^∞ 类的 2 维正则曲面.

3) 旋转面

设 $I\subset\mathbb{R}$ 是任一非空区间, $f:I\to\mathbb{R}^3$ 是一 C^p 类映射, 它定义为:

$$\forall t\in I,\ f(t)=(0,f_\varepsilon(t),f_9(t)).$$

现设映射 $\Theta: I\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ 定义如下:

$$\forall(t,\theta)\in I\times[0,2\pi],\ \Theta(t,\theta)=(f_2(t)\cos\theta,\ f_2(t)\sin\theta,\ f_3(t)).$$

显然 Θ 是 C^p 类的, $(I\times[0,2\pi],\Theta)$ 所代表的 $\mathbb{R}^3$ 的 C^p 类 2 维曲面 X 称为以 z 轴为旋转轴, 以 (I,f) 代表的 C^p 类曲线 Γ 为母线的旋转曲面.

从几何上看, 旋转曲面 X 就是将位于 yOz 平面的一条曲线 Γ 绕 z 轴旋转一周所生成的曲面.

为了研究旋转曲面 X 的正则性, 我们来计算映射 Θ 在任一点 $(t,\theta)\in I\times[0,2\pi]$ 处的 Jacobi 矩阵.

直接计算得到 Jacobi 矩阵 $J_\theta(t,\theta)$ 为

$$J_\Theta(t,s)=\begin{pmatrix}f_2'(t)\cos\theta & -f_2(t)\sin\theta\\ f_2'(t)\sin\theta & f_2(t)\cos\theta\\ f_3'(t) & 0\end{pmatrix}.$$

由于

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}f_2'(t)\cos\theta & -f_2(t)\sin\theta\\ f_2'(t)\sin\theta & f_2(t)\cos\theta\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}f_2'(t)\cos\theta & -f_2(t)\sin\theta\\ f_3'(t) & 0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}f_2'(t)\sin\theta & f_2(t)\cos\theta\\ f_3'(t) & 0\end{vmatrix}^2\\
=&f_2^2(t)f_2'^2(t)+f_2^2(t)f_3'^2(t)\\
=&f_2^2(t)\left[f_2'^2(t)+f_3'^2(t)\right]\end{aligned}$$

由此可知. $J_\Theta(t,s)$ 的秩为 2, 即 $\Theta(t,s)$ 为 X 的正则点当且仅当 $f_2(t)\neq 0$ 并且 $f_2'^2(t)+f_3'^2(t)\neq 0$，此即等价于母线 Γ 在点 $f(t)$ 处不与 z 轴相交, 并且 $f(t)$ 是 Γ 的正则点.

因此旋转曲面 X 是 $\mathbb{R}^3$ 的 C^p 类 2 维正则曲面当且仅当母线 Γ 不与 z 轴相交并且 Γ 是 C^p 类的正则曲线.

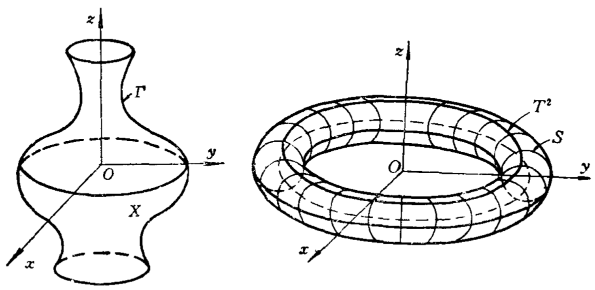


图 20.5

例题 20.8 设 $0<r<a$, 映射 $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ 与 $\Theta:[0,2\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ 定义如下：

$$\forall t\in[0,2\pi],\ f(t)=(0,a+r\cos t,r\sin t),$$

$$\forall(t,\theta)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi],\ \Theta(t,\theta)=((a+r\cos t)\cos\theta,(a+r\cos t)\sin\theta,r\sin t).$$

显然 f 与 Θ 都是 C^∞ 类的，并且

$$\forall t\in[0,2\pi],\ f_2(t)\neq 0,\ f_2'^2(t)+f_3'^2(t)=r^2>0.$$

因此 $([0,2\pi],f)$ 代表的母线 S 不与 z 轴相交并且是一条 C^∞ 类正则曲线. 从而以 z 轴为旋转轴以 S 为母线的旋转曲面是 $\mathbb{R}^3$ 的一个 C^∞ 类正则旋转曲面. 通常记为 T^2, 并称为环面.

从几何上看，环面 T^2 就是将位于 yOz 平面的不与 z 轴相交的圆周 S 绕 z 轴旋转一周所生成的曲面.

习题

1. 确定下列各参数曲线 (I,φ) 的定义域 I，并指出它们的正则点集 A：
   1) $\varphi(t)=\left(\dfrac{t^2+1}{t^2-1},\dfrac{t^2}{t-1}\right)$,
   2) $\varphi(t)=\left(\dfrac{t^2}{1+t^3},\dfrac{t^2+2}{t+1}\right)$,
   3) $\varphi(t)=\left(\dfrac{2t}{t^2-1},\dfrac{(t+1)^2}{t^2}\right)$,
   4) $\varphi(t)=\left(\cos t,\cos\dfrac{t}{3}+\sin\dfrac{t}{3}\right)$,
   5) $\varphi(t)=(k(t-\sin t),k(1-\cos t))$,
   6) $\varphi(t)=(\tan t+\cot t,\tan 2t+\cot 2t)$.
2. 设 $(\mathbb{R}^3,f_i)$ 是如下定义的 4 个空间参数曲面，试确定它们的正则点集 B：
   1) $f_1(t,s)=\left(t^2+s^2,t^2-s^2,ts\right)$,
   2) $f_2(t,s)=\left(\cos\left(t^2+s^2\right),\sin\left(t^2+s^2\right),ts\right)$,
   3) $f_3(t,s)=\left(\mathrm{e}^t,\mathrm{e}^s,t+s\right)$,
   4) $f_4(t,s)=\left(t^3,s^3,t^2+s^2\right)$.
3. 设 $I=[0,2\pi]\times[0,\pi]$，映射 $f:I\to\mathbb{R}^3$ 定义如下：
   $$\forall(\theta,\alpha)\in[0,2\pi]\times[0,\pi],\ f(\theta,\alpha)=(\sin\alpha\cos\theta,\sin\alpha\sin\theta,\cos\alpha).$$
   1) 令 Σ 是由 (I,f) 所代表的 $\mathbb{R}^3$ 的 2 维曲面，试确定 $f(\theta,\alpha)$ 是 Σ 的正则点的充分必要条件，
   2) 指出 Σ 的所有非正则点.
4. 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的任一固定点，Γ 是空间直线，它的参数表达式 (I,φ) 为：
   $$I=\mathbb{R},\varphi(t)=(x_0+\alpha t,y_0+\beta t,z_0+\gamma t)\ (\forall t\in I).$$
   试确定通过点 M_1 并包含直线 Γ 的平面 Σ 的参数表达式 (U,f).
5. 设 $1\leqslant k<n$，$I\subset\mathbb{R}^k$ 是一开集，$f_1,f_2,\cdots,f_{n-k}:I\to\mathbb{R}$ 是 $n-k$ 个 C^1 类映射，考虑如下定义

的映射 $F: I \to \mathbb{R}^n$：

$$
\begin{aligned}
&F_1(t) = t_1,\\
&\cdots\\
&F_k(t) = t_k, \quad (\forall t = (t_1, \cdots, t_k) \in I)\\
&F_{k+1}(t) = f_1(t_1, \cdots, t_k),\\
&\cdots\\
&F_n(t) = f_{n-k}(t_1, \cdots, t_k)
\end{aligned}
$$

1) 证明：(I, F) 代表 $\mathbb{R}^n$ 的一个 C^1 类 k 维正则曲面 Σ,
2) 证明：$\mathbb{R}^n$ 的任一 C^1 类 k 维正则曲面 Σ 的每一点的局部有形如 1) 中所指的参数表达式 (I, F).

6. 设空间曲线 Γ 的参数表达式 (I, φ) 为：
$$I = \mathbb{R}, \varphi(t) = \left(1 + t, t^2, t^3 - 1\right)(\forall t \in I).$$
$\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, 1)$，试确定以 $\boldsymbol{\alpha}$ 为方向，以 Γ 为准线的柱面 H 的参数表达式.

7. 设空间曲线 Γ 的参数表达式 (I, ψ) 为：
$$I = \mathbb{R}, \psi(t) = \left(t + 1, t^2, t^3\right)(\forall t \in I).$$
试确定以原点 $(0,0,0)$ 为顶点，以 Γ 为准线的锥面 Z 的参数表达式，并指出 Z 的正则点集.

8. 设空间 2 维曲面 X 有参数表达式 (I, θ)：
$$I = \mathbb{R}^2, \theta(t, s) = \left(\cos t \cos s, \cos t \sin s, 4\left(\sin\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2}\right)\right), (\forall (t, s) \in I).$$
证明：X 是一个旋转曲面，并指出 X 的正则点集.

9. 这个题目给出了构造一条充满正方形 $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ 的平面连续曲线的方法：
   1) Cantor 集的构造：
      1) 设 $\langle a_n \rangle$ 是一实数序列，$a_n \in \{0, 2\}$，考虑如下定义的实数序列 $\langle u_n \rangle$：
      $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_n}{3^n},$$
      u_n 称为一个 3 进制实数，我们也记它为
      $$u_n = 0.\overrightarrow{a_1 a_2 \cdots a_n},$$
      我们用 $\mathscr{C}_3$ 表示所有的 3 进制实数集合，于是 $u_n \in \mathscr{C}_3$(注意 $\mathscr{C}_3$ 的每一个元素不一定都能表示成 u_n 的形式).
      当 $n \to +\infty$ 时，我们得到极限 $t \in [0,1]$：
      $$t = \lim_{n \to +\infty} u_n = 0.\overrightarrow{a_1 a_2 \cdots a_n \cdots} \in \mathscr{C}_3,$$
      下面我们用 T 表示所有这种形式的 3 进制实数 t 的集合，显然 $T \subset \mathscr{C}_3$($\mathscr{C}_3$ 中有些 3 进制实数是属于 T 的，例如 $\frac{1}{3} = 0.1 \in \mathscr{C}_3$，则 $\frac{1}{3} = 0.1 = 0.\overrightarrow{0222} \cdots \in T$).
      2) 考虑区间 $I = [0,1]$，我们将 I 三等分，并去掉中间的一个开区间，剩下的两个闭区间记为
      $$A_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$
      对 A_1 中的每一个闭区间又三等分，并去掉中间的一个开区间，剩下的四个闭区间记为

A_2，如此不断地继续下去，最后剩下的实数集记为 E，并称为 Cantor 集.

3) 证明：$T = E$.

2) $\forall t \in T$，令 $t = 0.\overrightarrow{a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots a_n \cdots}, a_n \in \{0, 2\}$：

1) 我们令

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_5}{2^3} + \cdots + \frac{a_{2n-1}}{2^n}\right), \\ y_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_4}{2^2} + \frac{a_6}{2^3} + \cdots + \frac{a_{2n}}{2^n}\right), \end{aligned} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$，$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$ 存在且有限，

2) 证明：$x \in I, y \in I$，

3) 定义映射 $\varphi : T \to [0,1] \times [0,1]$ 如下：

$$\forall t \in T, \varphi(t) = (x, y) \quad (x, y \text{ 如上定义 }).$$

证明 φ 是满射.

为此我们首先证明：$\forall z \in I$，存在一实数序列 $\langle a_n \rangle, a_n \in \{0, 2\}$，使得

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} + \cdots\right).$$

然后把 $2z$ 表示成 2 进制展开式：

$$2z = 0.\overrightarrow{r_1 r_2 \cdots r_n \cdots}, r_n \in \{0, 1\},$$

若 $r_k = 0$，则记 $\frac{r_k}{2^k}$；若 $r_k = 1$，则记 $\frac{r_k}{2^k} = \frac{2}{2^{k+1}}$.

3) Peano 曲线：

1) 在 $\mathbb{R}^2$ 中取定标准基底 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$，Peano 曲线就是如下定义的一个连续映射 $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$：

若 $t \in T$，则 $f(t) = \varphi(t)$；

若 $t \in [0,1] - T$，则 t 必属于在 Cantor 集构造过程中所删去的开区间的某一个，例如 $t \in (t_0, t_1)$，于是 $\varphi(t_0)$ 与 $\varphi(t_1)$ 有定义 (因 $t_0, t_1 \in T$)，这时我们定义

$$f(t) = \varphi(t_0) + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}\left[\varphi(t_1) - \varphi(t_0)\right].$$

因此映射 f 就完全有定义了.

2) 证明：$f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ 是连续映射.

为此我们注意到，f 在 $[0,1] - T$ 上是连续的，在 T 上，只需证明映射 $t \longmapsto y(t), t \in T$ 连续 (因为映射 $t \longmapsto x(t), t \in T$ 的连续性证明类似)，也即证明：

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(\forall t, t' \in T \text{ 且 } |t - t'| < \delta\right) \Longrightarrow |y(t') - y(t)| < \varepsilon.$$

对每一个 $\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$，取 $\delta = \frac{1}{3^{2n}}$，那么 $|t' - t| < \frac{1}{3^{2n}}$，

由此推出定义 t 与 t' 的两个实数序列 $\langle a_n \rangle$ 与 $\langle a_n' \rangle$ 中的前 $2n$ 项 $a_1 = a_1'$，$a_2 = a_2', \cdots, a_{2n} = a_{2n}'$，从而由此推出在定义 $y(t)$ 与 $y(t')$ 的实数序列中，前 n 项相同，因此映射 $t \longmapsto y(t), t \in T$ 的连续性得证.

3) 证明：(I, f) 所代表的平面曲线覆盖了整个 $[0,1] \times [0,1]$.

20.2 平面与空间曲线

这一节我们特别来研究平面与空间曲线的局部形态与无穷远分支的渐近性态.

为此我们首先介绍向量值函数的导数.

1. 一元向量值函数的导数

设 $I \subset \mathbb{R}$ 是任一非空区间, $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ 是任一映射 (称为一元向量值函数 $(n > 1)$). 我们令

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n).$$

回顾一下, 在第 16 章 § 2 介绍映射在一点处的 Jacobi 矩阵时, 我们顺便地提了一下这种一元向量函数 φ 在点 $t_0 \in I$ 处的导数 $\varphi'(t_0)$, 它定义为:

$$\varphi'(t_0) = \left(\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0), \cdots, \varphi_n'(t_0)\right).$$

实际上, 由一元向量值函数极限的计算法则知, $\varphi'(t_0)$ 就是类似于一元实值函数导数的下述极限:

$$\varphi'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}.$$

现在我们可以进一步给出下述定义.

定义 20.2

我们称映射 $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ 在 t_0 处是 k 次可导, 若 $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, f 的分量函数 $\varphi_i : I \to \mathbb{R}$ 在 t_0 处是 k 次可导的, 并且 φ 在 t_0 处的 k 阶导数, 记为 $\varphi^{(k)}(t_0)$, 就定义为:

$$\varphi^{(k)}(t_0) \triangleq \left(\varphi_1^{(k)}(t_0), \varphi_2^{(k)}(t_0), \cdots, \varphi_n^{(k)}(t_0)\right).$$

若 $\forall t \in I, \varphi$ 在 t 处是 k 次可导, 则称 φ 在 I 上 k 次可导.

若 φ 在 I 上 k 次可导, 并且映射 $t \longmapsto \varphi^{(k)}(t), t \in I$ 在 I 上连续, 则称 φ 在 I 上是 C^k 类的.

若 $\forall k \in \mathbb{N}, \varphi$ 在 I 上是 C^k 类的, 则称 φ 在 I 上是 C^∞ 类的.

♣

显然, 这里映射 φ 的 C^k 类定义与我们在第 16 章 § 2 所给出的 C^k 类映射定义是一致的.

关于一元向量值函数的导数的性质可综合成下述定理.

定理 20.1

设 $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ 是任一映射, $t_0 \in I$.

1. 若 φ 在 t_0 处可导, 则 φ 在 t_0 处连续.
2. φ 在 t_0 处可导, 当且仅当 φ 在 t_0 处可微.
3. 若 $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}^n$ 在 t_0 处可导, $\lambda : I \to \mathbb{R}$ 在 t_0 处可导, 则 $\varphi \pm \psi, \lambda\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ 在 t_0 处可导, 并且
$$(\varphi \pm \psi)'(t_0) = \varphi'(t_0) \pm \psi'(t_0)$$
$$(\lambda\varphi)'(t_0) = \lambda'(t_0)\varphi(t_0) + \lambda(t_0)\psi'(t_0)$$
4. 若 φ 在 t_0 处可导, 函数 $h : J(\subset \mathbb{R}) \to I$ 在 $s_0 \in J$ 处可导, 并且 $t_0 = h(s_0)$, 则复合映射 $\varphi \circ h : J \to \mathbb{R}^n$ 在 s_0 处可导, 并且
$$(\varphi \circ h)'(s_0) = \varphi'(t_0) \cdot h'(s_0).$$

♡

这个定理的证明我们留给读者作为练习.

定理 20.2 (Taylor)

若映射 $\varphi: I \to \mathbb{R}^n$ 在 $t_0 \in I$ 处 k 次可导，则

$$\varphi(t_0+h)=\varphi(t_0)+\frac{\varphi'(t_0)}{1!}h+\frac{\varphi''(t_0)}{2!}h^2+\cdots+\frac{\varphi^{(k)}(t_0)}{k!}h^k+h^k o(1)(h\to 0).$$

证明 根据映射 φ 在 t_0 处 k 次可导的定义，我们有

$$\varphi^{(i)}(t_0)=\left(\varphi_1^{(i)}(t_0),\varphi_2^{(i)}(t_0),\cdots,\varphi_n^{(i)}(t_0)\right)(i=1,2,\cdots,k).$$

由一元实值函数的 Taylor 公式，

$$\varphi_j(t_0+h)=\varphi_j(t_0)+\frac{\varphi'(t_0)}{1!}h+\frac{\varphi''(t_0)}{2!}h^2+\cdots+\frac{\varphi_j^{(k)}(t_0)}{k!}h^k+h^k o_j(1)(h\to 0),(j=1,2,\cdots,n)$$

若令 $o(1)=(o_1(1),o_2(1),\cdots,o_n(1))$，则 $o(1)\to 0(h\to 0)$，并且

$$\varphi(t_0+h)=\varphi(t_0)+\frac{\varphi'(t_0)}{1!}h+\frac{\varphi''(t_0)}{2!}h^2+\cdots+\frac{\varphi^{(k)}(t_0)}{k!}h^k+h^k o(1)(h\to 0)$$

2. $\mathbb{R}^n$ 的曲线的切线

在未定义切线之前，我们特作以下说明：

$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，当它作为一个向量时，记为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，这时 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 就是向量 $\boldsymbol{x}$ 的分量，当把它看作一个点时，记为 $M(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 这时 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 就是 M 的坐标.

今后如无特别指明，为了叙述上的方便，我们混淆地称 $(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的向量或点. 它的具体含义读者容易明白.

下面我们就从几何的角度介绍曲线的切线概念.

定义 20.3

设 Γ 是 $\mathbb{R}^n$ 的 C^p 类曲线，(I,φ) 是 Γ 的任一 C^p 类参数表达式，$t_0\in I$，假设下述性质成立：

1. $(\exists\delta>0)(\forall t\in I,0<|t-t_0|<\delta)\Longrightarrow\varphi(t)\neq\varphi(t_0)$.
2. $\forall t\in I$ 且 $0<|t-t_0|<\delta$，联结点 $\varphi(t_0)$ 与 $\varphi(t)$ 的直线 $D_{\varphi(t_0)\varphi(t)}$ 当 $t\to t_0$ 时有极限直线 T 存在，则称直线 T 为曲线 Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处的切线.

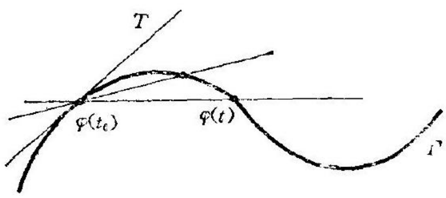


图 20.6

不难证明此切线概念与 Γ 的 C^p 类参数表达式的选择无关.

为此设 (J,ψ) 是 Γ 的另一 C^p 类参数表达式，于是存在 C^p 类微分同胚 $h: J\to I$ 使得 $\psi=\varphi\circ h,\psi(s_0)=\varphi(h(s_0))=\varphi(t_0)$. 于是 $\exists\eta>0$，使得

$$\forall s\in J,\text{且 }0<|s-s_0|<\eta\Longrightarrow 0<|t-t_0|=|h(s)-h(s_0)|<\delta$$

从而

1)$\forall s\in J,0<|s-s_0|<\eta\Longrightarrow\psi(s)=\varphi(h(s))=\varphi(t)\neq\varphi(t_0)=\psi(s_0)$, 2)$\forall s\in J,0<|s-s_0|<\eta$, 直线 $D_{\varphi(s_0)\varphi(s)}=D_{\varphi(h(s_0))\varphi(h(s))}=D_{\varphi(t_0)\varphi(t)}$ 当 $s\to s_0$ 时 (从而 $t\to t_0$) 有极限直线 T 存在.

因此曲线的切线概念是曲线的一个内在几何性质.

定理 20.3

设 $\Gamma,(I,\varphi)$ 如上所述, $t_0\in I$.

1. 若 $\varphi(t_0)$ 是 Γ 的正则点, 则 Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处的切线 T 存在, 它平行于向量 $\varphi'(t_0)$.
2. 若 $\varphi(t_0)$ 是 Γ 的非正则点, 并且存在 $k\in\mathbb{N},1\leqslant k\leqslant p$ 使得
$$\varphi'(t_0)=\varphi''(t_0)=\cdots=\varphi^{(k-1)}(t_0)=0,\varphi^{(k)}(t_0)\neq 0,$$
则 Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处也有切线 T 存在, 它平行于向量 $\varphi^{(k)}(t_0)$.

证明 1) 设 $\varphi(t_0)$ 是 Γ 的正则点. 于是 $\varphi'(t_0)\neq 0$. 由导数定义
$$\varphi'(t_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}$$
知, 存在 $\delta>0$, 使得 $\forall h\in\mathbb{R},0<|h|<\delta,\varphi(t_0+h)\neq\varphi(t_0)$,

$\forall t\in I$, 令 $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t))$, $M(t)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中以 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 为坐标的点, O 为以 $0,0,\cdots,0$ 为坐标的原点, 则 $\varphi(t)=\boldsymbol{OM}(t)$, 于是我们有
$$\forall h\in\mathbb{R},0<|h|<\delta,M(t_0+h)\neq M(t_0),$$
$$\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)=\boldsymbol{OM}(\boldsymbol{t_0+h})-\boldsymbol{OM}(\boldsymbol{t_0})=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{t_0})\boldsymbol{M}(\boldsymbol{t_0+h}),$$
从而
$$\varphi'(t_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{t_0})\boldsymbol{M}(\boldsymbol{t_0+h})}{h}.$$

由于向量 $\dfrac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{t_0})\boldsymbol{M}(\boldsymbol{t_0+h})}{h}$ 与向量 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{t_0})\boldsymbol{M}(\boldsymbol{t_0+h})$ 共线, 并且位于联结点 $M(t_0)$ 与 $M(t_0+h)$ 的直线 $D_{M(t_0)M(t_0+h)}$ 上, 所以当 $h\to 0$ 时, 直线 $D_{M(t_0)M(t_0+h)}$ 的极限直线存在, 它平行于向量 $\varphi'(t_0)$.

2) 设 $\varphi(t_0)$ 是 Γ 的非正则点, 由假设
$$\varphi'(t_0)=\varphi''(t_0)=\cdots=\varphi^{(k-1)}(t_0)=0,\varphi^{(k)}(t_0)\neq 0,$$
故由上述 Taylor 公式, 我们有
$$\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)=\frac{\varphi^{(k)}(t_0)}{k!}h^k+h^k o(1)(h\to 0),$$
或
$$\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{t_0})\boldsymbol{M}(\boldsymbol{t_0+h})}{h^k}=\frac{\varphi^{(k)}(t_0)}{k!}+o(1)(h\to 0).$$

由此推知:
$$\exists\delta>0,\forall h\in\mathbb{R},0<|h|<\delta,M(t_0+h)\neq M(t_0),\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{t_0})\boldsymbol{M}(\boldsymbol{t_0+h})}{h^k}=\frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(t_0).$$
此即表明联结点 $M(t_0)$ 与 $M(t_0+h)$ 的直线 $D_{M(t_0)M(t_0+h)}$ 当 $h\to 0$ 时有极限直线 T 存在, 它平行于向量 $\varphi^{(k)}(t_0)$. 因此, 当 $\varphi(t_0)$ 是非正则点时, Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处的切线 T 存在, 它的方向为 $\varphi^{(k)}(t_0)$.

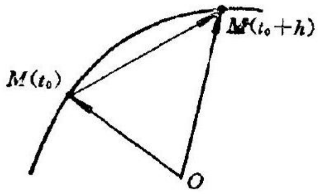


图 20.7

例题 20.9 考虑平面曲线 Γ, 它的参数表达式 (I,φ) 为:

$$I=(-\infty,0),\varphi(t)=\left(t^2+2t,-2t+\frac{1}{t^2}\right).$$

显然 (I,φ) 是 C^∞ 类的, 并且 $\forall t\in I$,

$$\varphi'(t)=\left(2t+2,-2-\frac{2}{t^3}\right),\varphi''(t)=\left(2,\frac{6}{t^4}\right).$$

由此可知, $\varphi'(t)=0$ 当且仅当 $t=-1$, 因此 $\varphi(-1)=(-1,-1)$ 是 Γ 的唯一非正则点.

由于 $\varphi''(-1)=(2,6)\neq 0$, 故 Γ 在非正则点 $\varphi(-1)$ 处的切线 T 存在, 它的方向为 $\varphi''(-1)=(2,6)$.

例题 20.10 考虑空间曲线 Γ, 它的参数表达式 (I,φ) 为:

$$I=\mathbb{R},\varphi(t)=\left(t^3,t^3(t+1),t^2\sin t\right),$$

这时 (I,φ) 是 U^∞ 类的, 并且 $\forall t\in I$,

$$\varphi'(t)=\left(3t^2,t^2(4t+3),2t\sin t+t^2\cos t\right)$$
$$\varphi''(t)=\left(6t,6t(2t+1),2\sin t+4t\cos t-t^2\sin t\right)$$
$$\varphi'''(t)=\left(6,6(4t+1),6\cos t-6t\sin t-t^2\cos t\right)$$

由 $\varphi'(t)=0$ 解得 $t=0$, 因此 $\varphi(0)=(0,0,0)$ 是 Γ 的准一非正则点, 并且由于

$$\varphi''(0)=0,\varphi'''(0)\neq 0,$$

故 Γ 在非正则点 $\varphi(0)=(0,0,0)$ 处的切线存在, 它的方向为 $\varphi'''(0)=(6,6,6)$.

3. 平面曲线的研究

设 (I,p) 是 $\mathbb{R}^2$ 的任一 C^p 类平面曲线 Γ 的参数表达式. 为了讨论方便起见, 我们假设 p 足够的大, 像前面一样, $\forall t\in I$, 我们用 $M(t)$ 表示仿射平面上的点, 使 $\boldsymbol{OM}(t)=\varphi(t)$.

1)Γ 的局部形态

我们主要研究 Γ 在非正则点 $\varphi(t_0)$ 处的局部形态. 假设 φ 在 t_0 处具有下述性质:

a) 存在最小正整数 $n>1$, 使得 $\varphi^{(n)}(t_0)\neq 0$,

b) 存在最小正整数 $m>n$ 使得 $\forall\lambda\in\mathbb{R},\varphi^{(m)}(t_0)\neq\lambda\varphi^{(n)}(t_0)$, 即向量 $\varphi^{(m)}(t_0)$ 与向量 $\varphi^{(n)}(t_0)$ 不平行).

这时, 我们有

$$\varphi'(t_0)=\varphi''(t_0)=\cdots=\varphi^{(n-1)}(t_0)=0,$$
$$\varphi^{(n+1)}(t_0)=\lambda_{n+1}\varphi^{(n)}(t_0),$$
$$\varphi^{(n+2)}(t_0)=\lambda_{n+2}\varphi^{(n)}(t_0),$$
$$\cdots$$
$$\varphi^{(m-1)}(t_0)=\lambda_{m-1}\varphi^{(n)}(t_0).$$

根据前面的 Taylor 公式，我们有

$$\begin{aligned}\varphi(t)-\varphi\left(t_0\right)=&\frac{\varphi^{(n)}}{n!}\left(t_0\right)\left(t-t_0\right)^n+\cdots+\frac{\varphi^{(m-1)}\left(t_0\right)}{(m-1)!}\left(t-t_0\right)^{m-1}\\&+\frac{\varphi^{(m)}\left(t_0\right)}{m!}\left(t-t_0\right)^m+\left(t-t_0\right)^m o(1)\left(t\to t_0\right)\\=&\left[\frac{\left(t-t_0\right)^n}{n!}+\lambda_{n-1}\frac{\left(t-t_0\right)^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\lambda_{m-1}\frac{\left(t-t_0\right)^{m-1}}{(m-1)!}\right]\varphi^{(n)}\left(t_0\right)\\&+\frac{\left(t-t_0\right)^m}{m!}\left[\varphi^{(m)}\left(t_0\right)+o(1)\right]\left(t\to t_0\right).\end{aligned}$$

由于 $\varphi^{(n)}\left(t_0\right)$ 与 $\varphi^{(m)}\left(t_0\right)$ 不平行，故我们可以在 $\varphi\left(t_0\right)$ 处建立局部坐标系 $\left\{M\left(t_0\right);\quad\varphi^{(n)}\left(t_0\right),\varphi^{(m)}\left(t_0\right)\right\}$. 在此局部坐标系下，令

$$o(1)=o_1(1)\varphi^{(n)}\left(t_0\right)+o_2(1)\varphi^{(m)}\left(t_0\right),$$

则我们得到

$$\begin{aligned}\varphi(t)-\varphi\left(t_0\right)=&\left[\frac{\left(t-t_0\right)^n}{n!}+\lambda_{n+1}\frac{\left(t-t_0\right)^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\lambda_{m-1}\frac{\left(t-t_0\right)^{m-1}}{(m-1)!}+o_1(1)\frac{\left(t-t_0\right)^m}{m!}\right]\varphi^{(n)}\left(t_0\right)\\&+\frac{\left(t-t_0\right)^m}{m!}\left[1+o_2(1)\right]\varphi^{(m)}\left(t_0\right)\left(t\to t_0\right)\end{aligned}$$

因此点 $M(t)$ 在坐标系 $\left\{M\left(t_0\right);\quad\varphi^{(n)}\left(t_0\right),\varphi^{(m)}\left(t_0\right)\right\}$ 下的坐标 (ξ,η) 为:

$$\begin{aligned}\xi=&\frac{\left(t-t_0\right)^n}{n!}+\lambda_{n+1}\frac{\left(t-t_0\right)^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\lambda_{m-1}\frac{\left(t-t_0\right)^{m-1}}{(m-1)!}+o_1(1)\frac{\left(t-t_0\right)^m}{m!},\\\eta=&\frac{\left(t-t_0\right)^m}{m!}\left[1+o_2(1)\right]\left(t\to t_0\right)\end{aligned}$$

或

$$\xi=\frac{\left(t-t_0\right)^n}{n!}[1+o(1)],\eta=\frac{\left(t-t_0\right)^m}{m!}[1+o(1)],\left(t\to t_0\right).$$

根据 n,m 的奇偶性，我们可以描绘出 Γ 在点 $M\left(t_0\right)$ 的邻域内的局部形态.

1)n 为奇数，m 为偶数:

这时对充分接近 t_0 的 t,ξ 与 $\left(t-t_0\right)$ 同号，$\eta>0$. 因此 Γ 在 $M\left(t_0\right)$ 的充分小邻域内位于向量 $\varphi^{(m)}\left(t_0\right)$ 所在的一侧，并穿过 $\varphi^{(m)}\left(t_0\right)$.

2)n 为奇数，m 为奇数:

这时对充分接近 t_0 的 t,ξ 及 η 与 $\left(t-t_0\right)$ 同号，从而 Γ 在 $M\left(t_0\right)$ 的充分小邻域内必须穿过 Γ 在 $M\left(t_0\right)$ 的切线 (其方向为 $\varphi^{(n)}\left(t_0\right)$).

3)n 为偶数，m 为奇数:

这时对充分接近 t_0 的 $t,\xi>0$, 而 η 与 $\left(t-t_0\right)$ 同号，因此 Γ 在 $M\left(t_0\right)$ 的充分小邻域内将位于向量 $\varphi^{(n)}\left(t_0\right)$ 的同一侧，而位于向量 $\varphi^{(m)}\left(t_0\right)$ 的两侧. 于是 Γ 在 $M\left(t_0\right)$ 处形成一个第一型尖点.

4)n 为偶数，m 为偶数:

这时对充分接近 t_0 的 $t,\xi>0,\eta>0$, 因此 Γ 在 $M\left(t_0\right)$ 的充分小邻域内位于由向量 $\varphi^{(n)}\left(t_0\right)$ 与 $\varphi^{(m)}\left(t_0\right)$ 组成的角域内，从而 Γ 在 $M\left(t_0\right)$ 处形成一个第二型尖点.

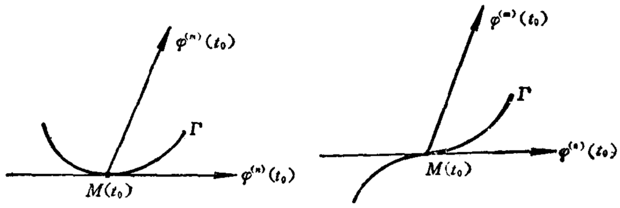


图 20.8

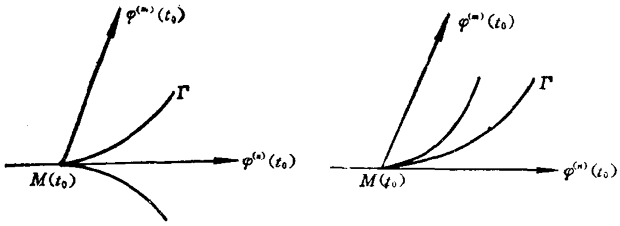


图 20.9

例题 20.11 考虑例20.9中的平面曲线 Γ, 它的参数表达式 (I,φ) 为:

$$I=(-\infty,0),\varphi(t)=\left(t^2+2t,-2t+\frac{1}{t^2}\right).$$

由于

$$\varphi'(-1)=(0,0),\varphi''(-1)=(2,6),\varphi'''(-1)=(0,24),$$

故 $\varphi''(-1)$ 与 $\varphi'''(-1)$ 不平行. 从而 Γ 在 $M(-1)=(-1,3)$ 处形成一个第一型尖点.

例题 20.12 讨论以 (I,φ)

$$I=\mathbb{R},\varphi(t)=\left(t^2-t^5,t^4\right)$$

为参数表达式的平面曲线 Γ, 在点 $M(0)=(0,0)$ 的邻域内的局部形态.

直接计算得到

$$\begin{aligned}
&\varphi'(t)=\left(2t-5t^4,4t^3\right),\varphi'(0)=(0,0);\\
&\varphi''(t)=\left(2-20t^3,12t^2\right),\varphi''(0)=(2,0);\\
&\varphi'''(t)=\left(-60t^2,24t\right),\varphi'''(0)=(0,0);\\
&\varphi^{(4)}(t)=(-120t,24),\varphi^{(4)}(0)=(0,24).
\end{aligned}$$

故 $\varphi''(0)$ 与 $\varphi^{(4)}(0)$ 不平行, 从而 Γ 在非正则点 $M(0)=(0,0)$ 处形成一个第二型尖点, Γ 在 $M(0)$ 处的切线存在, 其方向为 $\varphi''(0)=(2,\ 0)$.

2) Γ 的凸凹性

设 $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t)),\forall t\in I.J\subset I$ 是一子区间使得 $\forall t\in J,\varphi_1'(t)\neq 0$, 那么 Γ 在 J 上是凸 (凹) 的, 当且仅当

$$\varphi_1'(t)\cdot\left(\frac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)}\right)'\geqslant 0(\leqslant 0)\forall t\in J.$$

事实上, 因为 $\varphi_1'(t)\neq 0(\forall t\in J)$, 故函数 $t\mapsto\varphi_1(t),t\in J$ 在 J 上有反函数 $x\longmapsto\varphi_1^{-1}(x),x\in\varphi_1(J)$ 存在, 令 $t=\varphi_1^{-1}(x)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\left[\varphi_1^{-1}(x)\right]'=\frac{1}{\varphi_1'(t)},\ \text{这里}\ \ t=\varphi_1^{-1}(x).$$

因此 Γ 可用下述显式方程表示:

$$y=\varphi_2\left(\varphi_1^{-1}(x)\right), \forall x \in \varphi_1(J).$$

由于 $y'=\varphi_2'\left(\varphi_1^{-1}(x)\right)\cdot\left(\varphi_1^{-1}(x)\right)'=\dfrac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)}$, 故

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)}\right)' \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)}\right)' \frac{1}{\varphi_1'(t)} \\ &= \varphi_1'(t)\left(\frac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)}\right)' \cdot \left(\frac{1}{\varphi_1'(t)}\right)^2 \end{aligned}$$

根据定理**??**的推论, Γ 在 J 上是凸 (凹) 的充分必要条件是 $y''\geqslant 0(\leqslant 0)$, 故由 y'' 的上述表达式可知, Γ 在 J 上是凸 (凹) 的当且仅当

$$\varphi_1'(t)\left(\frac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)}\right)' \geqslant 0(\leqslant 0), \forall t \in J.$$

例题 20.13 考虑旋轮线 Γ, 它的参数表达式 (I,φ) 为:

$$I=\mathbb{R}, \varphi(t)=(a(t-\sin t), a(1-\cos t))(a>0).$$

令 $J_k=(k\pi,(k+1)\pi)(k\in\mathbb{Z}), \varphi_1(t)=a(t-\sin t), \varphi_2(t)=a(1-\cos t)$, 则

$$\begin{aligned} \forall t \in J_k, \varphi_1'(t)\left(\frac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)}\right)' &= a(1-\cos t)\left(\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}\right)' \\ &= \frac{a(1-\cos t)}{\cos t-1} = -a<0 \end{aligned}$$

因此旋轮线 Γ 在 $J_k(k\in\mathbb{Z})$ 上是凹的.

3)Γ 的无穷远分支

设 $I=(a,b)$, 这里 $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$, 用 t_0 表示 I 的任一端点, d 表示 $\mathbb{R}^2$ 的任一基本度量.

定义 20.4

设 Γ 是任一 C^p 类平面曲线, 它有参数表达式 (I,φ).

1. 若点 $\varphi(t)$ 与 $\mathbb{R}^2$ 的原点 O 的距离 $d(O,\varphi(t))$ 当 $t\to t_0$ 时趋于 $+\infty$, 即
$$\lim_{t\to t_0} d(O,\varphi(t))=+\infty,$$
则我们称 Γ 当 $t\to t_0$ 时有无穷远分支 Γ_{t_0}.
2. 若 Γ 当 $t\to t_0$ 时有无穷远分支 Γ_{t_0}, 并且联结原点 O 与 $\varphi(t)$ 的直线 $D_{o\varphi(t)}$ 当 $t\to t_0$ 时有极限直线 D, 则 D 的方向称为此无穷远分支 Γ_{t_0} 的渐近方向.
3. 设 Γ_{l_0} 是 Γ 当 $t\to t_0$ 时的无穷远分支, Δ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一直线, 若点 $\varphi(t)$ 与直线 Δ 的距离 $d(\varphi(t),\Delta)$ 当 $t\to t_0$ 时趋于 0, 即
$$\lim_{t\to t_0} d(\varphi(t),\Delta)=0,$$
则我们称 Δ 是无穷远分支 Γ_{t_0} 当 $t\to t_0$ 时的渐近线.

♣

我们容易证明 Γ 的无穷远分支, 无穷远分支的渐近方向与渐近线是 Γ 的内在几何性质, 与 Γ 的参数表达式的选择无关.

关于无穷远分支的渐近线的方向与无穷远分支的渐近方向的关系, 我们有下述定理.

定理 20.4

若直线 Δ 是 Γ 的无穷远分支 Γ_{t_0} 的渐近线, 则 Δ 的方向就是此无穷远分支 Γ_{t_0} 的渐近方向.

证明 如下图所示, 令 $N(t)$ 为 Γ 上的点 $M(t)$ 在直线 Δ 上的投影.

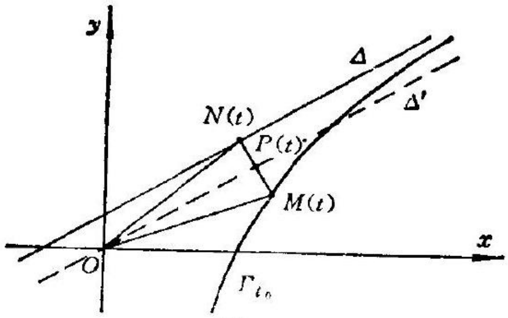


图 20.10

由于 Δ 为 Γ_{t_0} 的渐近线, 故

$$\lim_{t\to t_0}\|\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{N}(t)\| = 0.$$

过原点 O 作与 Δ 平行的直线 Δ' 交直线段 $\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{N}(t)$ 于点 $P(t)$, 则 $\|\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{P}(t)\|$ 在 t_0 的充分小邻域有界.

另一方面, 由于 $\boldsymbol{OP}(t) = \boldsymbol{OM}(t) + \boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{P}(t)$, 故

$$\|\boldsymbol{OM}(t)\| - \|\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{P}(t)\| \leqslant \boldsymbol{OP}(t)\| \leqslant \|\boldsymbol{OM}(t)\| + \|\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{P}(t)\|$$

两边同除以 $\|\boldsymbol{OM}(t)\|$ 并令 $t\to t_0$ 取极限, 注意到 $\|\boldsymbol{OM}(t)\| \to +\infty\,(t\to t_0)$, 我们得到

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\|\boldsymbol{OP}(t)\|}{\|\boldsymbol{OM}(t)\|} = 1.$$

因为 $\boldsymbol{OM}(t) = \boldsymbol{OP}(t) + \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{M}(t)$, 所以

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{OM}(t)}{\|\boldsymbol{OM}(t)\|} &= \frac{\boldsymbol{OP}(t)}{\|\boldsymbol{OM}(t)\|} + \frac{\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{M}(t)}{\|\boldsymbol{OM}(t)\|}.\\ &= \frac{\boldsymbol{OP}(t)}{\|\boldsymbol{OP}(t)\|}\cdot\frac{\|\boldsymbol{OP}(t)\|}{\|\boldsymbol{OM}(t)\|} + \frac{\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{M}(t)}{\|\boldsymbol{OM}(t)\|}.\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\varphi(t)}{\|\varphi(t)\|} = \frac{\boldsymbol{OP}(t)}{\boldsymbol{OP}(t)}.$$

又因为 $P(t)$ 位于直线 Δ' 上, 所以 $\dfrac{\boldsymbol{OP}(t)}{\|\boldsymbol{OP}(t)\|}$ 是 Δ' 的单位向量, 因此若令 Δ 的单位方向向量为 $\boldsymbol{\delta}$, 则 $\dfrac{\boldsymbol{OP}(t)}{\|\boldsymbol{OP}(t)\|} = \boldsymbol{\delta}$, 从而

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\varphi(t)}{\|\varphi(t)\|} = \boldsymbol{\delta}.$$

此即表明 Δ 的方向是 I' 的无穷远分支 T_{t_0} 的渐近方向.

现在我们具体地利用 Γ 的参数表达式 (I,φ) 的分量函数 (φ_1,φ_2) 来判断 Γ 的无穷远分支. 无穷远分支的渐近方向与渐近线的存在与否.

由无穷远分支的定义可知, 平面曲线 Γ 当 $t\to t_0$ 时有无穷远分支 Γ_{t_0} 存在, 当且仅当下列三种情形中至少有一种出现:

i) $\lim\limits_{t\to t_0}|\varphi_1(t)|=+\infty$,

ii) $\lim\limits_{t\to t_0}|\varphi_2(t)|=+\infty$,

iii) $\lim\limits_{t\to t_0}|\varphi_1(t)|=+\infty, \lim\limits_{t\to t_0}|\varphi_2(t)|=+\infty$.

下面分别对这三种情形进行讨论.

$$\lim_{t\to t_0}|\varphi_1(t)|=+\infty,\ \lim_{t\to t_0}\varphi_2(t)=b\in\mathbb{R}$$

在 xOy 平面上作直线 $\Delta: y=b$, 无穷远分支 Γ_{t_0} 上的点 $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$ 在 Δ 上的投影点 $\psi(t)=(\varphi_1(t),b)$. 因此点 $\varphi(t)$ 与直线 Δ 的距离 $d(\varphi(t),\Delta)=|\varphi_2(t)-b|$, 于是

$$\lim_{t\to t_0}d(\varphi(t),\Delta)=\lim_{t\to t_0}|\varphi_2(t)-b|=0,$$

从而直线 Δ 是无穷远分支 Γ_{t_0} 当 $t\to t_0$ 时的水平渐近线. 根据上述定理20.4, 直线 Δ 的方向就是此无穷远分支 Γ_{t_0} 的渐近方向.

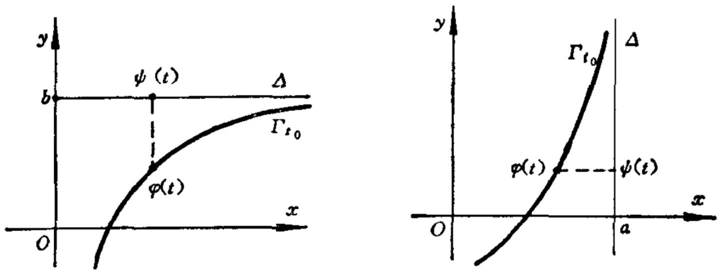


图 20.11

$$\lim_{t\to t_0}\varphi_1(t)=a,\ \lim_{t\to t_0}|\varphi_2(t)|=+\infty$$

在 xOy 平面上作直线 $\Delta: x=a$. 无穷远分支 Γ_{t_0} 上的点 $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$ 在 Δ 上的投影点 $\psi(t)=(a,\varphi_2(t))$. 因此点 $\varphi(t)$ 与直线 Δ 的距离 $d(\varphi(t),\Delta)=|\varphi_1(t)-a|$, 于是

$$\lim_{t\to t_0}d(\varphi(t),\Delta)=\lim_{t\to t_0}|\varphi_1(t)-a|=0.$$

从而直线 Δ 是无穷远分支 Γ_{t_0} 当 $t\to t_0$ 时的垂直渐近线, Δ 的方向就是 Γ_{t_0} 的渐近方向.

$$\lim_{t\to t_0}|\varphi_1(t)|=+\infty,\ \lim_{t\to t_0}|\varphi_2(t)|=+\infty$$

这里又有三种情况需要分别研究:

1°. $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}=0$.

这时联结原点 O 与 Γ_{t_0} 上的点 $\varphi(t)$ 的直线 $D_{O\varphi(t)}$ 当 $t\to t_0$ 时有极限直线 x 轴, 因此 Ox 轴的方向为无穷远分支 Γ_{t_0} 的渐近方向. 但 x 轴不是它的渐近线, 因为过点 $\varphi(t)$ 并与 x 轴平行的直线 $\Delta_{\varphi(t)}$ 当 $t\to t_0$ 时趋于无穷远 (即 $\Delta_{\varphi(t)}$ 与 x 轴的距离当 $t\to t_0$ 时趋于 $+\infty$), 我们称这种无穷远分支为 Γ 的抛物分支.

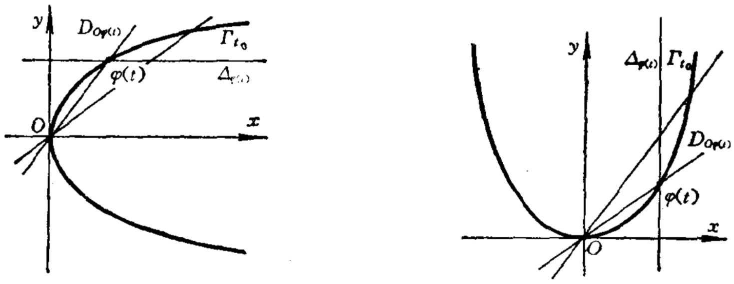


图 20.12

2°. $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}=\pm\infty$.

这时联结原点 O 与 Γ_{t_0} 上的点 $\varphi(t)$ 的直线 $D_{0\varphi(t)}$ 当 $t\to t_0$ 时有极限直线 y 轴，因此 Oy 轴的方向为无穷远分支 Γ_{t_0} 的渐近方向，但 y 轴不是它的渐近线，因为过点 $\varphi(t)$ 并与 y 轴平行的直线 $\Delta_{\varphi(t)}$ 当 $t\to t_0$ 时趋于无穷远 (即 $\Delta_{\varphi(t)}$ 与 y 轴的距离当 $t\to t_0$ 时趋于 $+\infty$)，这种无穷远分支也称为 Γ 的抛物分支.

3°. $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}=k\in\mathbb{R}$ 且 $k\neq 0$.

这时联结原点 O 与 Γ_{t_0} 上的点 $\varphi(t)$ 的直线 $D_{O\varphi(t)}$ 当 $t\to t_0$ 时有极限直线 $D:y=kx$. 因此直线 D 的方向为无穷远分支 Γ_{t_0} 的渐近方向.

为了进一步确定此无穷远分支当 $t\to t_0$ 时是否有渐近线存在，我们考虑通过点 $\varphi(t)$ 并且与 D 平行的直线 $\Delta_\varphi(t)$ 当 $t\to t_0$ 时的极限位置.

直线 $\Delta_{\varphi(t)}$ 的方程为

$$y-\varphi_2(t)=k\left(x-\varphi_1(t)\right).$$

因此 $\Delta_{\varphi(t)}$ 与 y 轴的交点的纵坐标 $h(t)$ 为

$$h(t)=\varphi_2(t)-k\varphi_1(t).$$

a) 若 $\lim\limits_{t\to t_0}[\varphi_2(t)-k\varphi_1(t)]=\pm\infty$, 则无穷远分支 Γ_{t_0} 没有渐近线. 因为 $\Delta_{\varphi(t)}$ 当 $t\to t_0$ 时没有极限位置. 这时我们也称 Γ_{t_0} 是抛物分支.

b) 若 $\lim\limits_{t\to t_0}[\varphi_2(t)-k\varphi_1(t)]=l$, 则无穷远分支 Γ_{t_0} 有渐近线 $\Delta:y=kx+l$. 事实上，设过点 $\varphi(t)$ 且平行于 y 轴的直线交直线 Δ 于点 $F(t)$(如图20.13所示)，于是点 $F(t)$ 的纵坐标与点 $\varphi(t)$ 的纵坐标之差为

$$\varphi_2(t)+k\left(x-\varphi_1(t)\right)-(kx+l)=\varphi_2(t)-k\varphi_1(t)-l\to 0\,(t\to t_0)\,,$$

而

$$d(\varphi(t),\Delta)\leqslant|\varphi_2(t)-k\varphi_1(t)-l|\,,$$

所以 $\lim\limits_{t\to t_0}d(\varphi(t),\Delta)=0$, 此即表明 Δ 是 Γ_{t_0} 当 $t\to t_0$ 时的渐近线.

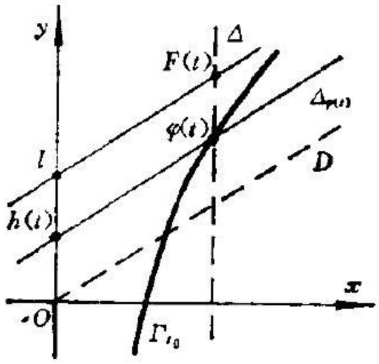


图 20.13

例题 20.14 考虑以下述 (I, φ) 为参数表达式的平面曲线 Γ：

$$I=(-\infty, 0) \cup (0,+\infty, (\varphi(t)=\left(t^2-2t, t^2+\frac{1}{t^2}\right).$$

1) 由于

$$\lim_{t \to 0^{\pm}} \varphi_1(t)=\lim_{t \to 0^{\pm}}\left(t^2-2t\right)=0,$$
$$\lim_{t \to 0^{\pm}} \varphi_2(t)=\lim_{t \to 0^{\pm}}\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)=+\infty,$$

故 Γ 当 $t \to 0^{+}$ 与 $t \to 0^{-}$ 时分别有无穷远分支 Γ_0+ 与 Γ_0-，并且都以 y 轴为它们的垂直渐近线. 但由于

$$\lim_{t \to 0^{+}} \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}=-\infty, \lim_{t \to 0^{-}} \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}=+\infty,$$

因此实际上，Γ_{0+} 以负 y 轴为其垂直渐近线，而 Γ_{0-} 以正 y 轴为其垂直渐近线.

2) 又因为

$$\lim_{t \to \pm\infty} \varphi_1(t)=+\infty, \lim_{t \to \pm\infty} \varphi_2(t)=+\infty,,$$

所以 Γ 当 $t \to +\infty$ 与 $t \to -\infty$ 时也分别有无穷远分支 $\Gamma_{+\infty}$ 与 $\Gamma_{-\infty}$. 进一步，由于

$$\lim_{t \to \pm\infty} \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}=1, \lim_{t \to t_0}\left[\varphi_2(t)-1 \cdot \varphi_1(t)\right]=+\infty,$$

故无穷远分支 $\Gamma_{+\infty}$ 与 $\Gamma_{-\infty}$ 没有渐近线，它们是以直线 $D: y=x$ 的方向为其渐近方向的抛物分支.

4) Γ 的作图

根据上面对平面曲线的研究，我们可以按以下步骤来描绘由参数表达式 (I, P)：

$$I \subset \mathbb{R}\,(\text{不一定是区间}),\ \varphi(t)=\left(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\right)$$

所代表的平面曲线 Γ 的大致图形.

1) 确定定义域 I(一般 I 是若干个开区间的并).
2) 确定 φ_1, φ_2 是否有周期性与对称性.
3) 计算 $\varphi_1'(t), \varphi_2'(t)$, 并确定它们的符号变化区间.
4) 确定 Γ 的非正则点及其局部形态.
5) 研究 Γ 的凸凹性.
6) 确定 Γ 的无穷远分支及其渐近线，渐近方向. 确定无穷远分支与其渐近线的相互位置关系.
7) 列出 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_1'(t), \varphi_2'(t)$ 的变化表格.
8) 最后画出 Γ 的简图.

例题 20.15 画出由下述参数表达式

$$\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t))=\left(t^2+\frac{2}{t},t^2+\frac{1}{t^2}\right),t\in I$$

所定义的平面曲线 Γ 的图形.

1) 确定定义域 I.

$$I=(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

2) 计算 $\varphi_1'(t),\varphi_2'(t)$, 并确定它们的符号变化区间.

$$\varphi_1'(t)=2t-\frac{2}{t^2}=\frac{2\left(t^3-1\right)}{t^2}=\frac{2(t-1)\left(t^2+t+1\right)}{t^2},$$
$$\varphi_2'(t)=2t-\frac{2}{t^3}=\frac{2\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}{t^3}.$$

由此可知,

$$\varphi_1'(t)>0,\quad \forall t\in(1,+\infty);\quad \varphi_1'(t)<v,\forall t\in(-\infty,1);$$
$$\varphi_2'(t)>0,\quad \forall t\in(-1,0)\cup(1,+\infty);$$
$$\varphi_2'(t)<0,\quad \forall t\in(-\infty,-1)\cup(0,1).$$

3) 确定 Γ 的非正则点及其局部形态.

由 $\varphi_1'(t)=0,\varphi_2'(t)=0$, 解之得 $t=1$, 因此 $\varphi(1)=(3,2)$ 是 Γ 的唯一非正则点, 直接计算得到

$$\varphi''(1)=(6,8),\varphi'''(1)=(-12,-24).$$

于是 $\varphi''(1)$ 与 $\varphi'''(1)$ 线性无关. 从而 Γ 在 $\varphi(1)=(3,2)$ 处有切线 T 存在, 它平行于向量 $\varphi''(1)=(6,8)$, 并且 $\varphi(1)$ 是第一型尖点.

4) 确定 Γ 的凸凹性.

直接计算 $\varphi_1'(t)\left(\frac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)}\right)'$ 得到

$$\varphi_1'(t)\left(\frac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)}\right)'=\frac{2\left(t^3-1\right)}{t^2}\left(\frac{t^4-1}{t^4-t}\right)'=\frac{-3t^4+4t^3-1}{t^4\left(t^3-1\right)}$$

令 $f(t)=-3t^4+4t^3-1$, 则 $f(1)=0$, 并且

$$f'(t)=-12t^3+12t^2=12t^2(1-t),$$

于是

$$f(t)<0,\forall t\in(-\infty,1);\quad f(t)<0,\forall t>1.$$

因此

$$\varphi_1'(t)\left(\frac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)}\right)'=\frac{-3t^4+4t^3-1}{t^4\left(t^3-1\right)}\begin{cases}>0, & \forall t\in(-\infty,0)\cup(0,1);\\ <0, & \forall t\in(1,+\infty),\end{cases}$$

此即表明当 $t\in(-\infty,0)\cup(0,1)$ 时, Γ 是凸的, 当 $t\in(1,+\infty)$ 时 Γ 是凹的.

5) 确定 Γ 的无穷远分支及其渐近线与它们之间的相互位置关系.

因为

$$\lim_{t\to0^+}\varphi_1(t)=+\infty,\ \lim_{t\to0^+}\varphi_2(t)=+\infty,$$
$$\lim_{t\to0^-}\varphi_1(t)=-\infty,\ \lim_{t\to0^-}\varphi_2(t)=+\infty,$$
$$\lim_{t\to\infty}\varphi_1(t)=+\infty,\ \lim_{t\to\infty}\varphi_2(t)=+\infty,$$

故 Γ 有 4 个无穷远分支 $\Gamma_{0+}, \Gamma_{0-}, \Gamma_{+\infty}, \Gamma_{-\infty}$.

另一方面，由于

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} = \lim_{t\to-\infty} t^2+\frac{1}{t^2}\Big/ t^2+\frac{2}{t} = 1,$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}[\varphi_2(t)-\varphi_1(t)] = \lim_{t\to\pm\infty}\left(t^2+\frac{1}{t^2}-t^2-\frac{2}{t}\right) = 0,$$

故无穷远分支 $\Gamma_{+\infty}$ 与 $\Gamma_{-\infty}$ 有斜渐近线 $y=x$, 并且由

$$\varphi_2(t)-\varphi_1(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-2\right)\begin{cases} <0, & \forall t>\dfrac{1}{2} \\ >0, & \forall t<0 \end{cases}$$

无穷远分支 $\Gamma_{+\infty}$ 位于渐近线 $y=x$ 的下方，而无穷远分支 $\Gamma_{-\infty}$ 位于渐近线 $y=x$ 的上方.

又因为

$$\varphi_2(t)-\frac{1}{4}(\varphi_1(t))^2 = t^2+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{4}\left(t^2+\frac{2}{t}\right)^2 = t^2-\frac{1}{4}\left(t^4+4t\right),$$

故 $\lim\limits_{t\to 0}\left[\varphi_2(t)-\dfrac{1}{4}(\varphi_1(t))^2\right]=0$. 从而无穷远分支 Γ_{0+} 与 Γ_{0-} 有抛物线 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 为其渐近线. 并且由

$$\varphi_2(t)-\frac{1}{4}(\varphi_1(t))^2 = t^2\left(1-\frac{t^2}{4}-\frac{1}{t}\right)\begin{cases} <0, & \forall 0<t<\delta, \\ >0, & \forall -\delta<t<0 \end{cases}$$

推知，Γ_{0+} 位于抛物线 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 的下方，而 Γ_{0-} 位于抛物线 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 的上方.

6) 列出 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_1'(t), \varphi_2'(t)$ 的变化表格.

t	$-\infty$		-1	0		1		$+\infty$
$\varphi_1'(t)$		$-$			$-$	0	$+$	
$\varphi_1(t)$	$+\infty$		-1	$-\infty$		3		$+\infty$
$\varphi_2'(t)$		$-$	0	$+$	$-$	0	$+$	
$\varphi_2(t)$	$+\infty$		2	$+\infty$		2		$+\infty$

7) 最后根据上述分析画出 Γ 的简图.

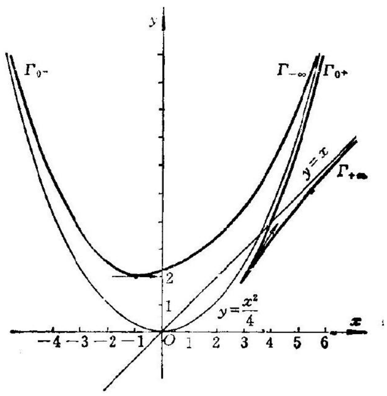


图 20.14

4. 空间曲线的研究

以下我们设 Γ 是空间中的任一 C^p 类曲线，它的 C^p 类参数表达式为 (I,φ), 为了讨论方便起见，我们假设 p 足够的大.

研究空间曲线的一个有力工具就是所谓的密切平面.

1) 密切平面

定义 20.5

设空间曲线 Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处有切线 T 存在, 则

1. 空间中任一包含切线 T 的平面称为 Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处的切平面.
2. 过点 $\varphi(t_0)$ 并垂直于切线 T 的平面称为 Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处的法平面, 法平面上任一过 $\varphi(t_0)$ 的直线称为 Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处的法线.

♣

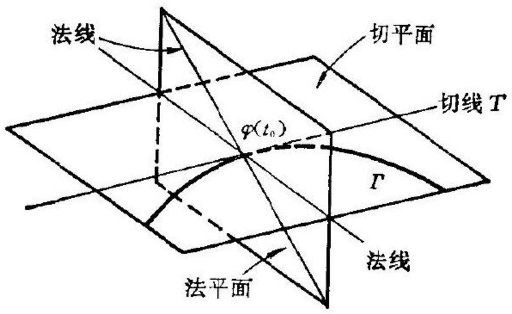


图 20.15

定义 20.6

设空间 C^p 类曲线 Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处有切线 T 存在, 并且其参数表达式 (I,φ) 具有下述性质:

1. $(\exists\delta>0)\,(\forall t\in I, 0<|t-t_0|<\delta)\Longrightarrow \varphi(t)\notin T$.
2. $\forall t\in I, 0<|t-t_0|<\delta$, 经过点 $\varphi(t)$ 与切线 T 的平面 H_t 当 $t\to t_0$ 时有极限位置 H.

则我们称 H 为 Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处的密切平面.

♣

由密切平面的定义可知, 空间曲线的密切平面的概念是与 Γ 的参数表达式选择无关的一个内在几何性质. 由于密切平面包含切线 T, 故密切平面 H 也是 Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处的一个切平面.

当然不是任何一条空间曲线 Γ 在其上任一点处都有密切平面存在. 例如通过空间中任一点 M_0 的直线 D 就只有切平面而没有密切平面. 因为直线 D 本身就是 D 在其上任意一点 $\overline{M}$ 处的切线 T, 因此 $\forall\delta>0, \forall t\in\mathbb{R}, 0<|t-\bar{t}|<\delta$ 都有 $M(t)\in T$(这里 $M(t)$ 为 D 上的动点, $M(t_0)=M_0, M(\bar{t})=\overline{M}$).

另一方面, 如果空间曲线 Γ 位于某一平面 π 上, 并且 Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处有卵线 T 存在, 又当 t 充分接近 t_0 时, $\varphi(t)\notin T$, 则通过点 $\varphi(t)$ 与印线 T 的平面 H_t 就是平面 π. 因此 H_t 当 $t\to t_0$ 时的极限位置也就是平面 π, 从而 Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处的密切平面为平面 π.

定理 20.5

设空间 C^p 类曲线 Γ 的参数表达式为 (I,φ). $t_0\in I$.

1. 若向量 $\varphi'(t_0)$ 与 $\varphi''(t_0)$ 线性无关, 则 Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处的密切平面 H 存在, 它平行于向量 $\varphi'(t_0)$ 与 $\varphi''(t_0)$.
2. 若存在 $n,m\in\mathbb{N}, n<m$ 使得 $\varphi'(t_0)=\varphi''(t_0)=\cdots=\varphi^{(n-1)}(t_0)=0, \varphi^{(n)}(t_0)\neq 0$, $\varphi^{(m)}(t_0)$ 是第一个与 $\varphi^{(n)}(t_0)$ 线性无关的向量, 则 Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处的密切平面 H 存在, 它平行于向量 $\varphi^{(n)}(t_0)$ 与 $\phi^{(m)}(t_0)$.

♡

证明 我们只对第一种情形进行证明, 第二种情形的证明完全类似, 读者自行补证.

设 $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$, O 为坐标原点, $M(t)$ 是以 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ 为坐标的空间点, 则 $\boldsymbol{OM}(\boldsymbol{t}) = \varphi(t)$.

由 Taylor 公式

$$\varphi(t_0+h) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)h + \frac{h^2}{2}\left[\varphi''(t_0) + o(1)\right](h \to 0)$$

知, Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处有切线 T 存在, 它平行于 $\varphi'(t_0)$.

由于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{t_0})\boldsymbol{M}(\boldsymbol{t_0}+\boldsymbol{h}) &= \boldsymbol{OM}(\boldsymbol{t_0}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{OM}(\boldsymbol{t_0}) \\ &= \varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)\end{aligned}$$

故向量 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{t_0})\boldsymbol{M}(\boldsymbol{t_0}+\boldsymbol{h})$ 不与 $\varphi'(t_0)$ 平行, 因此对充分接近 t_0 的 t, 点 $M(t_0+h) \notin T$.

其次, 由上述 Taylor 展开式知, 通过点 $M(t_0+h)$ 与切线 T 的平画 H_{t_0+h} 与向量 $\varphi''(t_0)+o(1)$ 平行, 因此当 $h \to 0$ 时 H_{t_0+h} 有极限位置 H 存在, 它平行于向量 $\varphi'(t_0)$ 与 $\varphi''(t_0)$. 此即表明 H 是 Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处的密切平面.

例题 20.16 研究下述参数表达式 (I, φ):

$$I = \mathbb{R}, \varphi(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)(a > 0, b > 0)$$

所代表的空间螺旋线 Γ 在任一点 $\varphi(t)$ 处的密切平面 H .

我们有

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= (-a\sin t, a\cos t, b), \\ \varphi''(t) &= (-a\cos t, -a\sin t, 0).\end{aligned}$$

由此可知, $\forall t \in I, \varphi'(t)$ 与 $\varphi''(t)$ 线性无关, 根据上述定理20.5, 螺旋线 Γ 在 $\varphi(t)$ 处的密切平面 H 存在, 它平行于向量 $\varphi'(t)$ 与 $\varphi''(t)$.

为了导出 H 的方程, 我们设 $M(X, Y, Z)$ 是 H 上的任意一点, 则

$$M \in H \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} X - a\cos t & Y - a\sin t & Z - bt \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

展开之得 H 的方程为

$$(\sin t)X - (\cos t)Y + \frac{a}{b}Z - at = 0.$$

2) Γ 的局部形态

像研究平面曲线的局部形态一样, 为了研究空间曲线 Γ 在任一点 $\varphi(t_0)$ 处的局部形态, 我们在 $\varphi(t_0)$ 处引入适当的局部坐标系, 然后考虑 $\varphi(t_0+h)$ 在此局部坐标系下的坐际.

我们只讨论一种最简单的情形; 即假设向量 $\varphi'(t_0), \varphi''(t_0), \varphi'''(t_0)$ 线性无关. 对一般的 $\varphi^{(k)}(t_0)$, $\varphi^{(n)}(t_0), \varphi^{(m)}(t_0)$ 线性无关的情形, 证明完全类似.

根据上述定理20.5知, Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处的密切平面 H 存在, 它平行于向量 $\varphi'(t_0), \varphi''(t_0)$. 由 Taylor 公式有

$$\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0) = h\varphi'(t_0) + \frac{h^2}{2}\varphi''(t_0) + \frac{h^3}{6}\varphi'''(t_0) + h^3 o(1)(h \to 0).$$

在点 $M(t_0)$ 处建立局部坐标系 $\{M(t_0);\ \varphi'(t_0), \varphi''(t_0), \varphi'''(t_0)$ 并令

$$o(1) = o_1(1)\varphi'(t_0) + o_2(1)\varphi''(t_0) + o_3(1)\varphi'''(t_0),$$

则点 $M(t_0+h)$ 在此局部坐标系下的坐标 (ξ,η,ζ) 为：

$$\xi=h(1+o_1(1)),\eta=\frac{h^2}{2}(1+o_2(1)),\zeta=\frac{h^3}{6}(1+o_3(1)),(h\to 0)$$

为了看清楚 Γ 在点 $M(t_0)$ 的邻域内的形态，我们将 Γ 分别段影到三个坐标平面 $(\xi,\eta),(\eta,\zeta)$ 与 (ξ,ζ) 上，其中 (ξ,η) 平面就是 Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处的密切平面. 根据上述 ξ,η,ζ 的表达式可知，Γ 的投影图形分别为下述各形状：

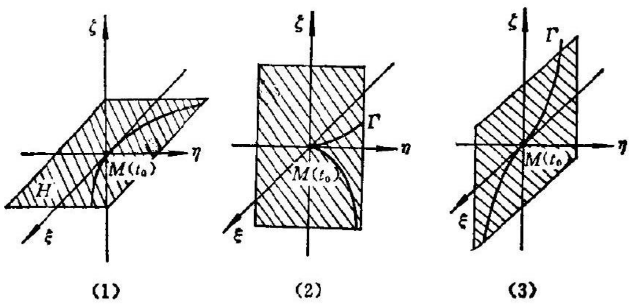


图 20.16

由此可知，Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处必须穿过密切平面 H(如图20.16中 (2) 与 (3) 所示).

实际上，我们还可以进一步证明下述定理.

定理 20.6

若空间 C^p 类曲线 Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处使得 $\varphi'(t_0),\varphi''(t_0),\varphi'''(t_0)$ 线性无关，则 Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处的密切平面 H 是 Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处唯一必须穿过的切平面.

证明 在 $M(t_0)$ 处引入如上所述的局部坐标系 $\{M(t_0);\ \varphi'(t_0),\varphi''(t_0),\varphi'''(t_0)\}$, 并假设 π 是 Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处的切平面，它异于密切平面 H. 由于 H 平行于向量 $\varphi'(t_0),\varphi''(t_0)$, 而 Γ 在 $\varphi(t_0)$ 处的切线 T 平行于向量 $\varphi'(t_0)$, 故切平面 π 包含 ξ 轴但异于坐标平面 (ξ,η), 因此 π 在局部坐标系 $\{M(t_0);\ \varphi'(t_0),\varphi''(t_0),\varphi'''(t_0)\}$ 下的方程为

$$Y=kZ.$$

如果我们能证明当 $|h|$ 充分小时，点 $M(t_0+h)$ 恒位于切平面 π 的同一侧，则定理的结论成立.

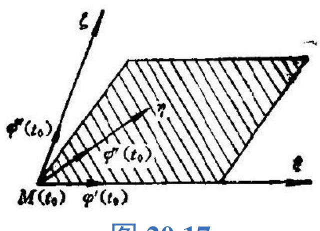


图 20.17

为此计算 $Y-kZ$ 在点 $M(t_0+h)$ 处的值. 因为点 $M(t_0+h)$ 在上述局部坐标系下的坐标 (ξ,η,ζ) 为：

$$\eta=\frac{h^2}{2}[1+o_2(1)],\zeta=\frac{h^3}{6}[1+o_3(1)]\,(h\to 0),$$

所以

$$
\begin{aligned}
Y-kZ &= \frac{h^2}{2}\left[1+o_2(1)\right]-k\cdot\frac{h^3}{6}\left[1+o_3(1)\right] \\
&= \frac{h^2}{2}[1+o(1)](h\to 0).
\end{aligned}
$$

由此可知，当 $|k|$ 充分小时，$Y-kZ>0$，此即正好表明点 $M\left(t_0+h\right)$ 恒位于切平面 π 的同一侧.

最后作为这一节的结束，我们指出，对空间曲线也可以像平面曲线一样的，定义它的无穷远分支，无穷远分支的渐近方向与渐近线. 这里我们就不准备进行深入的研究了，

习题

1. 设映射 $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ 定义如下：

$$\forall t\in[0,2\pi],\ f(t)=(\cos t,\sin t).$$

证明：对 f，一元实值函数的 Lagrange 中值定理不成立，即 $\forall\xi\in[0,2\pi]$，

$$f(2\pi)-f(0)\neq 2\pi f'(\xi).$$

2. 设映射 $f,g:I(\subset\mathbb{R})\to\mathbb{R}^n$ 在 I 上可导，证明：实值函数 $x\longmapsto\langle f(x),g(x)\rangle, x\in I$ 在 I 上可导，并且

$$\langle f(x),g(x)\rangle'=\left\langle f'(x),g(x)\right\rangle+\left\langle f(x),g'(x)\right\rangle,\forall x\in I.$$

3. 设映射 $f:(a,b)\to\mathbb{R}^n$ 在 (a,b) 上可导，并且存在常数 $C\geqslant 0$，使得 $\forall x\in(a,b),\|f(x)\|=C$. 证明：

$$\left\langle f(x),f'(x)\right\rangle=0,\forall x\in(a,b).$$

4. 设映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ 在 $\mathbb{R}$ 上是 C^1 类的，并且 $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\neq 0$. 假设存在实值函数 $\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得

$$f'(x)=\lambda(x)f(x),\forall x\in\mathbb{R},$$

证明：存在实值函数 $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 及向量 C 使得

$$f(x)=u(x)C,\forall x\in\mathbb{R}.$$

5. 设映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ 定义为

$$f(x)=\left(\cos x,\tan x,\mathrm{e}^x\sin x\right),\forall x\in\mathbb{R}.$$

试给出 f 在 $x=0$ 的邻域内的 Taylor 展开式.

6. 设映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ 定义为

$$f(x)=(\operatorname{sh}x,x\operatorname{ch}x),\forall x\in\mathbb{R}.$$

试给出 f 在 $x=0$ 的邻域内的 3 阶 Taylor 展开式.

7. 证明：平面曲线的无穷远分支, 无穷远分支的渐近方向与渐近线的概念是与曲线的参数表达式选择无关的内在几何性质.

8. 设 Γ 是平面的任一 C^p 类曲线 (p 足够大)，(I,φ) 与 (J,ψ) 是 Γ 的任意两个 C^p 类参数表达式：
   1) 假设对 $t_0\in I$，存在最小正整数 $k, 1\leqslant k\leqslant p$ 使得 $\varphi^{(k)}\left(t_0\right)\neq 0$. 证明: k 也是使 $\psi^{(k)}\left(s_0\right)\neq 0$ 的最小正整数，这里 $s_0\in J$ 使得 $t_0=h\left(s_0\right), h:J\to I$ 为参数变换.

2) 由此推出 $\varGamma$ 在一点处的切线概念是 $\varGamma$ 的内在几何性质.

3) 设对 $t_0 \in I$，存在最小正整数 k, m 使得 $1 \leqslant k < m \leqslant p$，并且 $\varphi^{(k)}(t_0)$ 与 $\varphi^{(m)}(t_0)$ 线性无关. 证明：k, m 也是使 $\psi^{(k)}(s_0)$ 与 $\psi^{(m)}(s_0)$ 线性无关的最小正整数.

4) 由此推知 $\varGamma$ 在一点的局部形态 (如第一, 二型尖点等) 是 $\varGamma$ 的内在几何性质.

9. 设平面曲线 $\varGamma$ 有参数表达式 (I, φ)：

$$I = \mathbb{R}, \varphi(t) = \left(2t^3 - 3t^2, 1 - t^2\right).$$

证明：经过点 $M_0\left(-\dfrac{10}{9}, \dfrac{17}{27}\right)$ 可向 $\varGamma$ 引三条切线.

10. 设平面曲线 $\varGamma$ 有参数表达式 (I, φ)：

$$I = (0, \frac{\pi}{2}), \varphi(t) = (\cos t - \log(1 + \cos t), \sin t).$$

我们用 T 和 N 分别表示 $\varGamma$ 在 $\varphi(t)$ 处的切线与法线跟 x 轴的交点，证明：联结点 T 与 N 的线段的长度 $\overline{NT}$ 是一常量.

11. 设平面曲线 $\varGamma$ 有参数表达式 (I, φ)：

$$I = \mathbb{R}, \varphi(t) = \left(t^2 + t^3, t^2 - t^3\right).$$

1) 证明：$\varphi(0) = (0, 0)$ 是 $\varGamma$ 的非正则点.

2) $\varphi(0)$ 是 $\varGamma$ 的第一型尖点.

3) $\varGamma$ 在 $\varphi(0)$ 处的切线 T 的方程是 $y = x$.

12. 设平面曲线 $\varGamma$ 的参数表达式 (I, φ) 为

$$I = \mathbb{R}, \varphi(t) = \left(6e^{\mathrm{T}} - t^3 - 6t + 1, e^{\mathrm{T}}(t - 3) - t^2 + 2t - 2\right).$$

1) 证明：$\varGamma$ 存在唯一的非正则点 M_0.

2) 证明：M_0 是 $\varGamma$ 的第二型尖点.

3) 写出 $\varGamma$ 在 M_0 处的切线方程.

13. 设平面曲线 $\varGamma$ 的参数表达式 (I, φ) 为：

$$I = \mathbb{R} - \{1\}, \varphi(t) = \left(\frac{t^2}{t - 1}, \frac{t^3}{t - 1}\right).$$

1) 确定 $\varGamma$ 的所有无穷远分支.

2) 确定 $\varGamma$ 的无穷远分支的渐近线.

3) 证明：$\varGamma$ 有抛物线 $y = x^2 - x - 1$ 作为其渐近线.

4) 画出曲线 $\varGamma$ 的简图.

14. 设平面曲线 $\varGamma$ 的参数表达式 (I, φ) 为：

$$\varphi(t) = \left(\frac{(t - 1)(t + 3)}{4t}, \frac{(t - 1)^3(t + 3)}{16t}\right)$$

1) 确定 φ 的定义域 I.

2) 研究 $\varGamma$ 的凸凹性.

3) 确定 $\varGamma$ 的无穷远分支，存在渐近线吗？

15. 证明：空间曲线 $\varGamma$ 的密切平面的概念是 $\varGamma$ 的内在几何性质.

16. 补充定理20.5的第二种情形的证明.

17. 设空间曲线 $\varGamma$ 的参数表达式 (I, φ) 为：

$$I = \mathbb{R}, \varphi(t) = (\cos t, \sin\theta \sin t, \cos\theta \sin t) \ (\theta \in \mathbb{R}).$$

试确定 Γ 在点 $\varphi(t)$ 处的密切平面及其法向量.

18. 设空间曲线 Γ 有参数表达式 (I,φ):

$$I=\mathbb{R}, \varphi(t)=(t\cos t, t\sin t, t).$$

试确定 Γ 在 $\varphi(t)$ 处的切线与密切平面, 并研究 Γ 在坐标平面 xOy, yOz, zOx 上的投影.

19. 设空间曲线 Γ 有参数表达式 (I,φ):

$$I=\mathbb{R}, \varphi(t)=\left(\sin t, \frac{1}{2}\cos^2 t, \cos t\right).$$

确定 Γ 在 $\varphi(t)$ 处的密切平面以及 Γ 在该点处的主法线 (即位于密切平面上的法线).

20. 设空间曲线 Γ 有参数表达式 (I,φ):

$$I=\mathbb{R}-\{0\}, \varphi(t)=\left(t^2+2t, -2t+\frac{1}{t^2}, t\right).$$

研究 Γ 在 $\varphi(t)$ 的邻域内的局部形态.

21. 设空间曲线 Γ 的参数表达式 (I,φ) 为:

$$I=\mathbb{R}, \varphi(t)=(a\cos t, a\sin t, h(t)),$$

这里 $a\in\mathbb{R}, h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是任一 C^∞ 类函数. 试确定 h 使得 Γ 的切线是方程为

$$x^2+y^2+z^2=a^2\left(1+b^2\right)\ (b\in\mathbb{R})$$

的球面的切线.

22. 设空间曲线 Γ 的参数表达式 (I,φ) 为:

$$I=\mathbb{R}-\{0\}, \varphi(t)=\left(\frac{\cos t}{\operatorname{sh} t}, \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t}, \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}\right).$$

证明: Γ 在任一点 $\varphi(t)$ 处的密切平面与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相切, 并确定切点 P 的坐标.

23. 设空间曲线 Γ 的参数表达式 (I,φ) 为:

$$I=\mathbb{R}, \varphi(t)=(t, \operatorname{sh} 2t, \operatorname{ch} 2t)$$

1) 确定 Γ 在任一点 $\varphi(t)$ 处的密切平面的方程及法平面方程.

2) 设 P 是过 $\varphi(t)$ 的密切平面与 x 轴的交点, 试确定 P 关于点 $\varphi(t)$ 的对称点的位置.

20.3 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维子流形

1. 问题的提出

首先还是让我们来研究一下 $\mathbb{R}^3$ 的单位球面

$$S^2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\right\}.$$

令 $D=[0,2\pi]\times[0,\pi]$, 并定义映射 $f:D\to\mathbb{R}^3$ 如下:

$$\forall(\theta,\alpha)\in D, f(\theta,\alpha)=(\sin\alpha\cos\theta, \sin\alpha\sin\theta, \cos\alpha).$$

则映射 f 在 D 上是 C^∞ 类的, 并且 $f(D)=S^2$. 因此 (D,f) 是 S^2 的一个 C^∞ 类参数表达式.

但是这个参数表达式有两个缺陷:

1) 映射 f 不是一一映射.

例如, $\forall\theta\in[0,2\pi], (\theta,0)$ 对应于 S^2 上的同一北极点 $N(0,0,1)$, 而 (θ,π) 对应于 S^2 上的同一南极点 $S(0,0,-1)$.

2) 不是在任一点 $(\theta, a) \in D$ 处 f 的 Jacobi 矩阵的秩都等于 2.

事实上，f 在 (θ, α) 处的 Jacobi 矩阵

$$J_f(\theta, a) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha\sin\theta & \cos\alpha\cos\theta \\ \sin\alpha\cos\theta & \cos\alpha\sin\theta \\ 0 & -\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

直接计算可知，$J_f(\theta, \alpha)$ 的三个 2 阶行列式的平方和为：

$$\begin{vmatrix} -\sin\alpha\sin\theta & \cos\alpha\cos\theta \\ \sin\alpha\cos\theta & \cos\alpha\sin\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\sin\alpha\sin\theta & \cos\alpha\cos\theta \\ 0 & -\sin\alpha \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \sin\alpha\cos\theta & \cos\alpha\sin\theta \\ 0 & -\sin\alpha \end{vmatrix}^2 = \sin^2\alpha$$

因此 $\forall\theta \in [0, 2\pi]$, f 在 $(\theta, 0)$ 与 (θ, π) 处的 Jacobi 矩阵的秩不等于 2.

解决这两个令人讨厌的缺陷的一个办法就是：删去 D 的边界，而只考虑 D 的内部 $\mathring{D} = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$. 这时 f 在 $\mathring{D}$ 上的限制 $f|_{\mathring{D}}$ 就是从 $\mathring{D}$ 到 $f(\mathring{D})$ 上的一一映射，而且是同胚映射，$f|_{\mathring{D}}$ 在 $\mathring{D}$ 上的 Jacobi 矩阵的秩处处等于 2. 但这样一来，$f(\mathring{D})$ 又不能覆盖住整个球面 S^2.

实际上我们可以证明：根本上就不存在这样一个映射 $\varphi : I \to S^2$ 使得

1. $I \subset \mathbb{R}^2$ 是开集,
2. $\varphi : I \to S^2$ 是同胚,
3. φ 在 I 的每一点 t 处的 Jacobi 矩阵的秩等于 2 .

这是因为如果存在的话，则 $\varphi^{-1} : S^2 \to I$ 也是同胚，由于 S^2 是紧的，故 $I = \varphi^{-1}\left(S^2\right)$ 也是 $\mathbb{R}^2$ 的紧集，这与 I 为非空开集矛盾.

由此可知，我们必须用更多个的具有上述 1)—3) 性质的参数表达式来共同描述单位球面 S^2.

这种思想的进一步抽象就形成了下面我们要介绍的 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维子流形的概念.

2. $\mathbb{R}^n$ 的 k 维子流形

我们首先介绍 $\mathbb{R}^n$ 的 C^p 类 k 维简单曲面的定义.

定义 20.7

设 Σ 是 $\mathbb{R}^p$ 的任一 C^p 类 k 维曲面，(I, φ) 是它的任一 C^p 类参数表达式，我们称 Σ 是简单的，如果它具有下述性质：

1. $I \subset \mathbb{R}^k$ 为开集,
2. $\varphi : I \to \varphi(I)$ 是同胚映射,
3. φ 在任一 $t \in I$ 处的 Jacobi 矩阵的秩为 k, 这种映射 φ 称为正则映射.

♣

直接由此定义可知，Σ 的简单性与它的参数表达式的选择无关.

简单曲面的一个特点是由于它的正则性及参数表达式 φ 的同胚性而避免了一般曲面容易出现的诸如角点, 结点, 锥点等非正常情形.

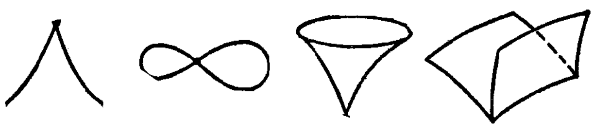


图 20.18

现在我们可以来介绍 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维子流形的定义.

定义 20.8

设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的任一非空集合. 我们称 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的 C^p 类 k 维子流形, 如果:
$\forall x \in M$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 的含 x 的开集 U 使得 $U \cap M$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的 C^p 类 k 维简单曲面.

注意, 在这个子流形的定义中, 我们把 $U \cap M$ 与定义简单曲面的参数表达式的等价类等同起来了, 实际上 $U \cap M$ 应该是 C^p 类 k 维简单曲面 Σ 的支承集. 这完全是为了叙述简洁起见.

下面让我们来看几个典型的子流形的例子.

例题 20.17 $\mathbb{R}^n$ 的任一 C^p 类 k 维简单曲面 Σ 是 C^p 类 k 维子流形, 特别地 $\mathbb{R}^n$ 的任一开集 U 是 C^∞ 类 n 维子流形.

事实上, 设 Σ 的 C^p 类参数表达式为 (I,φ), Σ 的支承集 $\varphi(I)$ 就是子流形定义中的 M. 它具有子流形所指的性质, 因此 Σ 是 $\mathbb{R}^n$ 的 C^p 类 k 维子流形.

特别地, 若 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集, 则 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 C^∞ 类 n 维简单曲面, 因为它有 C^∞ 类参数表达式 (U, id_U), 这里恒等映射 $id_U : U \to U$ 是 C^∞ 类微分同胚.

例题 20.18 $\mathbb{R}^3$ 的单位球面 S^2 是 $\mathbb{R}^3$ 的 C^∞ 类 2 维子流形.

为此, 我们令

$$U = S^2 - \{N\}\left(N = (0,0,1) \text{ 为 } S^2 \text{ 的北极点}\right),$$
$$V = S^2 - \{S\}\left(S = (0,0,-1) \text{ 为 } S^2 \text{ 的南极点}\right),$$

于是 $S^2 = U \cup V$, U 与 V 是 S^2 的两个开集(因为 $U = S^2 \cap \left(\mathbb{R}^3 - \{(0,0,1)\}\right)$, $V = S^2 \cap \left(\mathbb{R}^3 - \{(0,0,-1)\}\right)$)

考虑 S^2 关于 N 与 S 的两个球极投影 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to U$ 与 $\psi : \mathbb{R}^2 \to V$:

$$\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2, \varphi(t,s) = \left(\frac{2t}{1+t^2+s^2}, \frac{2s}{1+t^2+s^2}, \frac{t^2+s^2-1}{1+t^2+s^2}\right),$$
$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \psi(u,v) = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}\right).$$

这两个映射都是 C^∞ 类的, 并且都是同胚映射. 直接计算映射 φ 的 Jacobi 矩阵得

$$J_\varphi(t,s) = \frac{1}{1+t^2+s^2}\begin{pmatrix} 2\left(1+s^2-t^2\right) & -4ts \\ -4ts & 2\left(1+t^2-s^2\right) \\ 4t & 4s \end{pmatrix}, \forall (t,s) \in \mathbb{R}^2.$$

它的三个 2 阶行列式不同时为 0 , 因此 $J_\varphi(t,s)$ 的秩为 2 , 同理可知, $J_\phi(u,v)$ 的秩为 2 .

此则表明 $(\mathbb{R}^2,\varphi)$ 与 $(\mathbb{R}^2,\psi)$ 所代表的 2 个 C^∞ 类 2 维曲面 U 与 V 是简单的, 由于 $\forall (x,y,z) \in S^2$, 或 $(x,y,z) \in U$ 或 $(x,y,z) \in V$, 故由定义知 S^2 是 $\mathbb{R}^3$ 的 C^∞ 类 2 维子流形.

例题 20.19 设 $k < n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ 是任 $-C^p$ 类映射. 令

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0, J_f(x) \text{ 的秩为 } k\right\}.$$

若 $M \neq \varnothing$, 则 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的 C^p 类 $n-k$ 维子流形.

任取 $x_0 \in M$. 由于 $J_f(x_0)$ 的秩为 k, 通过适当改变 $\mathbb{R}^n$ 的坐标顺序, 我们可以假没

$$\frac{D\left(f_1, f_2, \cdots, f_k\right)}{D\left(x_{n-k+1}, x_{n-k+2} \cdots x_n\right)}(x_0) \neq 0.$$

由 f 的 C^p 类性知, 存在 x_0 的邻域 U_1 使得

$$\forall x \in U_1, \frac{D\left(f_1, f_2, \cdots, f_k\right)}{D\left(x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \cdots, x_n\right)}(x) \neq 0,$$

从而 $\forall x \in U_1, J_f(x)$ 的秩为 k. 于是

$$M \cap U_1 = \{x \in U_1 \mid f(x) = 0\}.$$

另一方面由隐射定理 16.17知，存在 x_0 的一个邻域 $U \subset U_1, \left(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_{n-k}^n\right)$ 的一个邻域 $I \subset \mathbb{R}^{n-k}$ 及唯一的 C^p 类映射 $g: I \to \mathbb{R}^k$ 使得

$$\{x \in U \mid f(x) = 0\} = \{(t, g(t)) \mid t \in I\}.$$

现在我们定义映射 $p: I \to \mathbb{R}^n$ 如下：

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(t) = t_1,\\
&\cdots\\
&\varphi_{n-k}(t) = t_{n-k}, \forall t \in I.\\
&\varphi_{n-k+1}(t) = g_1(t),\\
&\cdots\\
&\varphi_n(t) = g_k(t),
\end{aligned}$$

显然 φ 是 C^p 类的，$\varphi: I \to \varphi(I)$ 是同胚映射，φ 在任一点 $t \in I$ 处的 Jacobi 矩阵的秩等于 $n-k$. 并且

$$M \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\} = \{(t, g(t)) \mid t \in I\} = \varphi(I).$$

此即表明对 $x_0 \in M$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 的含 x_0 的开集 U 使得 $U \cap M$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 C^p 类 $n-k$ 维简单曲面 (它的参数表达式就是 (I, φ)). 由 x_0 的任意性知，M 是 $\mathbb{R}^n$ 的 C^p 类 $n-k$ 维子流形.

利用这个例子的结论，证明 $\mathbb{R}^n$ 的许多点集为子流形就十分简单.

例题 20.20 证明 $\mathbb{R}^\kappa$ 的单位球面

$$S^{n-1} = \left\{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\right\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的 C^∞ 类 $n-1$ 维子流形.

为此，我们定义映射 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1。$$

于是

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$$

f 在 $\mathbb{R}^n$ 上是 C^∞ 类的，并且 $\forall x \in S^{n-1}$,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)^2 = 4\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right) = 4$$

故 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 不全为零. 从而 $\forall x \in S^{n-1}, J_f(x)$ 的秩为 1，根据例 20.19 的结论，S^{n-1} 是 $\mathbb{R}^n$ 的 C^∞ 类 $n-1$ 维子流形.

特别地，当 $n = 2, 3$ 时，S^1($\mathbb{R}^2$ 的单位圆周) 是 $\mathbb{R}^2$ 的 C^∞ 类 1 维子流形，S^2($\mathbb{R}^3$ 的单位球面) 是 $\mathbb{R}^3$ 的 C^∞ 类 2 维子流形.

例题 20.21 证明：$\mathbb{R}^3$ 中的环面是 $\mathbb{R}^3$ 的 C^∞ 类 2 维子流形.

事实上，由 § 1 例20.8知，$\mathbb{R}^3$ 的环面 T^2 有参数表达式 (I, Θ). 消去参数 t,θ 得到

$$T^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2 = r^2\right\}.$$

令 $f(x,y,z)=\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2-r^2$, 则 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 是 C^∞ 类的，并且

$$T^2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=0\right\}.$$

直接计算知，$\forall(x,y,z)\in T^2$,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)^2=4r^2\neq 0.$$

于是 $J_f(x)$ 的秩为 1, 故 T^2 是 C^∞ 类的 2 维子流形.

注 从上述子流形定义可知，$\mathbb{R}^n$ 的 C^p 类 k 维子流形 M 就是 $\mathbb{R}^n$ 的这样一个子集. 它的每一点的局部是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 C^p 类 k 维简单曲面. 记这些 C^p 类 k 维简单曲面为 $\{\Sigma_a\}_{a\in\Lambda}$.

当然，这些 C^p 类 k 维简单曲面 $\Sigma_a, a\in\Lambda$ 不是在 M 上的简单覆盖，而是在某种意义下的“拼接”.

下面我们就来研究这种“拼接”的数学含义.

$\forall a\in\Lambda$, 令 Σ_a 的 C^p 类参数表达式为 (I_a,φ_a), $U_a=\varphi_a(I_a)$, 于是我们得到一个与 $\{\Sigma_a\}_{a\in\Lambda}$ 对应的二元组族 $\left\{\left(U_a,\varphi_a^{-1}\right)\right\}$, 它具有下述性质：

1. $M=\bigcup\limits_{a\in\Lambda}U_\Lambda$.
2. $\forall a\in\Lambda, U.$ 是 M 的开集，I_a 是 $\mathbb{R}^k$ 的开集.
3. $\forall a\in\Lambda$, 映射 $\varphi_a:I_a\to U_a$ 是 C^p 类的正则映射 (因此 φ_a 是同胚映射).

反之，若在 M 上存在具有性质 1)-3) 的二元组族 $(U_a\varphi_a^{-1})\}$, 则 M 定是 $\mathbb{R}^n$ 的 C^p 类 k 维子流形.

因此我们得到 k 维子流形的下述等价定义.

定义 20.9

若 $\left\{\left(U_a,\varphi_a^{-1}\right)\right\}$ 是具有如上性质的二元组族，则

1. 我们称 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的 C^p 类 k 维子流形.
2. $\forall a\in\Lambda,\left(U_a,\varphi_a^{-1}\right)$ 称为 M 的一个 C^p 类坐标图. U_a 称为一个坐标邻域. $\forall x\in U_a,(t_1,t_2,\cdots,t_k)=\varphi_a^{-1}(x)$ 称为 x 的局部坐标.
3. $\left\{\left(U_a,\varphi_a^{-1}\right)\right\}$ 称为 M 的一个 C^p 类坐标图册.

♣

现在设 $U_a\cap U_\beta\neq\varnothing.\forall x\in U_a\cap U_\beta$, 令

$$\varphi_a^{-1}(x)=(t_1,t_2,\cdots,t_k),\varphi_\beta^{-1}(x)=(s_1,s_2,\cdots,s_k),$$

定义映射 $T_{\beta a}=\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_a:\varphi_a^{-1}\left(U_a\cap U_\beta\right)\to\varphi_\beta^{-1}\left(U_a\cap U_\beta\right)$ 如下：

$$\forall\left(t_1,t_2,\cdots,t_k\right)\in\varphi_a^{-1}\left(U_a\cap U_\beta\right),T_{\beta a}\left(t_1,t_2,\cdots,t_k\right)=\left(s_1,s_2,\cdots,s_k\right),$$

则映射 $T_{\beta a}:\varphi_a^{-1}\left(U_a\cap U_\beta\right)\to\varphi_\beta^{-1}\left(U_a\cap U_\beta\right)$ 称为 M 的局部坐标变换，它是 C^p 类微分同胚，因为 $U_a\cap U_\beta$ 是 C^p 类曲面.

现在 $T_{\beta a}$ 可以理解为重叠简单曲面 Σ_a 与 Σ_β 的“拼接”映射，它的 C^p 类微分同胚性反映了 Σ_a 与 Σ_β“拼接”的光滑度. 映射 $T_{\beta a}$ 在下面的子流形的进一步研究中起着十分重要的作用.

例题 20.22 对于例20.18中所考虑的 S^2 的两个球极投影映射 $\varphi:\mathbb{R}^2\to U_1$ 与 $\psi:\mathbb{R}^2\to U_2$.

1)$\left(U_1,\varphi^{-1}\right)$ 与 $\left(U_2,\psi^{-1}\right)$ 是 S^2 的两个 C^∞ 类坐标图.

2)$\left\{\left(U_1,\varphi^{-1}\right),\left(U_2,\psi^{-1}\right)\right\}$ 形成 S^2 的一个 C^∞ 类坐标图册.

3) 这两个坐标图的坐标变换映射 $\psi^{-1}\circ\varphi:\varphi^{-1}\left(U_1\cap U_2\right)\to\psi^{-1}\left(U_1\cap U_2\right)$ 的表达式为：

$$\forall(t,s)\in\varphi^{-1}\left(U_1\cap U_2\right)=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\},\psi^{-1}\circ\varphi(t,s)=\left(\frac{t}{t^2+s^2},\frac{s}{t^2+s^2}\right).$$

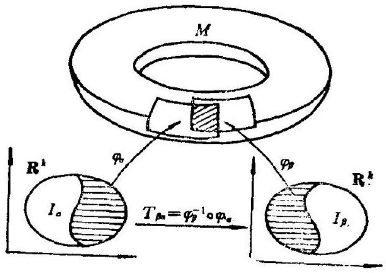


图 20.19

例题 20.23 考虑由下述参数表达式

$$
\begin{aligned}
x &= \left(1+t\cos\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta \\
y &= \left(1+t\cos\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta, (\theta,t)\in[0,2\pi]\times\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \\
z &= t\sin\frac{\theta}{2}
\end{aligned}
$$

所表示的 $\mathbb{R}^3$ 的曲面 M——Möbius 带.

我们不难直接按上述参数表达式画出 Möbius 带的简图. Möbius 带在数学上是一个十分有趣的典型几何图形, 它有一个非常直观的几何构造方法:

取一长方形纸带 $ABCD$, 将纸带的一端例如 CD 端扭转 180 度, 然不箂纸带 AB 瑞与 DC 端粘接在一起, 所得图形就是一个如图20.20所示的 Möbius 带.

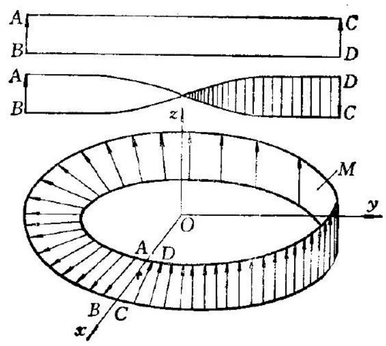


图 20.20

显然, Möbius 带 M 不是 $\mathbb{R}^3$ 的简单曲面. 因为 $\theta=0$ 与 $\theta=2\pi$ 对应于 M 上直线段 AB.

现在我们定义映射 (I,h) 与 (J,k) 如下:

$$
\begin{aligned}
I &= (0,2\pi)\times\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), h(\theta,t)=\left(\left(1+t\cos\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta,\left(1+t\cos\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta, t\sin\frac{\theta}{2}\right) \\
J &= (-\pi,\pi)\times\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), k(\alpha,s)=\left(\left(1+s\cos\frac{\alpha}{2}\right)\cos a,\left(1+s\cos\frac{a}{2}\right)\sin\alpha, s\sin\frac{a}{2}\right)
\end{aligned}
$$

并令 $U=h(I), V=k(J)$, 则容易验证映射

$$h: I\to U \text{ 与 } k: J\to V$$

是 C^∞ 类正则映射, 并且 $M=U\cup V$, 因此

1)$\left(U,h^{-1}\right)$ 与 $\left(V,k^{-1}\right)$ 是 M 的两个 C^∞ 类坐标图.

2)$\left\{\left(U,h^{-1}\right),\left(V,k^{-1}\right)\right\}$ 形成 M 的一个 C^∞ 类坐标图册, 因此 Möbius 带 M 是 $\mathbb{R}^3$ 的 C^∞ 类 2 维子流形.

3) 这两个坐标图的坐标变换映射 $k^{-1}\circ k:((0,\pi)\cup(\pi,2\pi))\times\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\to((-\pi,0)\cup(0,\pi))\times\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 为

$$k^{-1}\circ h(\theta,t)=\begin{cases}(\theta,t),\ 若\ (\theta,t)\in(0,\pi)\times\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);\\(\pi-\theta,t),\ 若\ (\theta,t)\in(\pi,2\pi)\times\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).\end{cases}$$

3. 子流形的切空间与仿射切平面

在 §2 中我们对 $\mathbb{R}^n$ 的以 (I,φ) 为 C^p 类参数表达式的曲线 Γ, 用几何的观点定义了它在 $\varphi(t_0)$ 处的切线 T, 当 $\varphi(t_0)$ 为正则点时, T 是以 $\mathbb{R}^n$ 的 1 维向量子空间 $E=\{\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n\mid\boldsymbol{a}=\lambda\varphi'(t_0),\lambda\in\mathbb{R}\}$ 为方向的仿射直线.

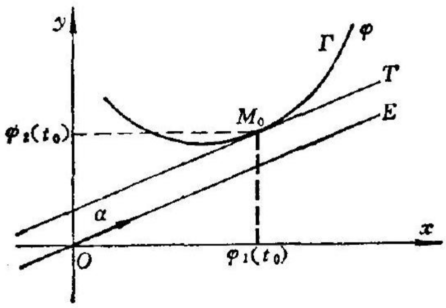


图 20.21

下面我们用分析的方法在 k 维子流形上定义切空间, 切平面概念, 首先介绍迹弧的定义.

定义 20.10

设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的任一 C^p 类 k 维子流形, $\boldsymbol{x_0}\in M$ 是任一固定点, $\boldsymbol{a}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的任一向量. 我们称 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处与 M 相切, 如果存在含 u_0 的一个开区间 $J\subset\mathbb{R}$ 及 C^p 类映射 $\gamma:J\to\mathbb{R}^n$ 使得

$$\gamma(J)\subset M,\gamma(u_0)=\boldsymbol{x_0},\gamma'(u_0)=\boldsymbol{a},$$

这时 (J,γ) 称为 M 过 $\boldsymbol{x_0}$ 的一条 C^p 类迹弧.

♣

定理 20.7

设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的任一 C^p 类 k 维子流形, $\boldsymbol{x_0}\in M$. 则所有在 $\boldsymbol{x_0}$ 处与 M 相切的向量形成 $\mathbb{R}^n$ 的一个 k 维向量空间.

♡

证明 设 (U,φ^{-1}) 是 M 含 $\boldsymbol{x_0}$ 的一个 C^p 类坐标图. 令 $I=\varphi^{-1}(U)\subset\mathbb{R}^k, t_0=\varphi^{-1}(\boldsymbol{x_0})$.

1) 首先设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是在 $\boldsymbol{x_0}$ 处与 M 相切的任一向量. 于是由定义存在 M 过 $\boldsymbol{x_0}$ 的一条 C^p 类迹弧 (J,γ) 使得

$$\gamma(J)\subset M,\gamma(u_0)=\boldsymbol{x_0},\gamma'(u_0)=\boldsymbol{\alpha}.$$

我们来证明 $\boldsymbol{\alpha}\in \mathrm{d}\varphi(t_0)\left(\mathbb{R}^k\right)$.

不失一般性, 通过缩小 J, 我们可以假设 $\gamma(J)\subset U$. 定义映射 $\mu:J\to\mathbb{R}^k$ 如下:

$$\forall u\in J,\mu(u)=\varphi^{-1}(\gamma(u)).$$

由于 φ^{-1} 是 C^p 类的，故 μ 是 C^p 类的，并且

$$\mu\left(u_0\right)=\varphi^{-1}\left(\gamma\left(u_0\right)\right)=\varphi^{-1}\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}\right)=t_0, \mu\left(u_0\right) \in \mathbb{R}^k . \gamma(u)=\varphi(\mu(u)), \forall u \in J .$$

由复合映射的微分法则得到

$$\boldsymbol{\alpha}=\gamma^{\prime}\left(u_0\right)=\mathrm{d} \varphi\left(t_0\right)\left(\mu^{\prime}\left(u_0\right)\right) \in \mathrm{d} \varphi\left(t_0\right)\left(\mathbb{R}^k\right) .$$

2) 反过来，设 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{d} \varphi\left(t_0\right)\left(\mathbb{R}^k\right)$, 我们证明存在 M 过点 $\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$ 的一条 C^p 类迹弧 (J, γ) 使得 $\gamma^{\prime}\left(u_0\right)=\boldsymbol{\alpha}$. 令 $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^k$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{d} \varphi\left(t_0\right)(\boldsymbol{h})$.

通过缩小 J, 我们假设：$\forall u \in J, t_0+\left(u-u_0\right) \boldsymbol{h} \in I$. 这是可以办到的，因为 I 是 $\mathbb{R}^k$ 的开集.

现在我们定义映射 $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ 如下：

$$\forall u \in J, \gamma(u)=\varphi\left(t_0+\left(u-u_0\right) \boldsymbol{h}\right) .$$

则 γ 在 J 上是 C^p 类的，并且

$$\gamma(J) \subset \varphi(I) \subset U \subset M, \gamma\left(u_0\right)=\varphi\left(t_0\right)=\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}, \gamma^{\prime}\left(u_0\right)=\mathrm{d} \varphi\left(t_0\right)(\boldsymbol{h})=\boldsymbol{\alpha} .$$

上述论证正好表明 $\mathrm{d} \varphi\left(t_0\right)\left(\mathbb{R}^k\right)$ 就是所有在 $\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$ 处与 M 相切的向量所组成的 k 维向量子空间.

最后剩下来一点就是证明这个在 $\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$ 处与 M 相切的所有向量形成的 k 维向量子空间与含 $\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$ 的坐标图的选择无关.

为此，设 $\left(V, \psi^{-1}\right)$ 是 M 含 $\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$ 的另一 C^p 类坐标图. 令 $s_0=\psi^{-1}\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}\right)$. 我们来证明

$$\mathrm{d} \varphi\left(t_0\right)\left(\mathbb{R}^k\right)=\mathrm{d} \psi\left(s_0\right)\left(\mathbb{R}^k\right) .$$

考虑 $\left(U, \varphi^{-1}\right)$ 与 $\left(V, \psi^{-1}\right)$ 的坐标变换

$$T=\psi^{-1} \circ \varphi: \varphi^{-1}(U \cap V) \rightarrow \psi^{-1}(U \cap V) .$$

它是 C^p 类微分同胚. 于是由 $\varphi=\psi \circ T$ 及复合映射的微分法则得到

$$\mathrm{d} \varphi\left(t_0\right)=\mathrm{d}(\psi \circ T)\left(t_0\right)=\mathrm{d} \psi\left(T\left(t_0\right)\right) \circ \mathrm{d} T\left(t_0\right) .$$

由于

$$T\left(t_0\right)=\psi^{-1} \circ \varphi\left(t_0\right)=\psi^{-1}\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}\right)=s_0,$$

故

$$\mathrm{d} \varphi\left(t_0\right)=\mathrm{d} \psi\left(s_0\right) \circ \mathrm{d} T\left(t_0\right) \tag{20.1}$$

从而

$$\mathrm{d} \varphi\left(t_0\right)\left(\mathbb{R}^k\right)=\mathrm{d} \psi\left(s_0\right) \circ \mathrm{d} T\left(t_0\right)\left(\mathbb{R}^k\right) .$$

因为 $\mathrm{d} T\left(t_0\right): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ 是同构映射，所以 $\mathrm{d} T\left(t_0\right)\left(\mathbb{R}^k\right)=\mathbb{R}^k$. 因此最后我们得到

$$\mathrm{d} \varphi\left(t_0\right)\left(\mathbb{R}^k\right)=\mathrm{d} \psi\left(s_0\right)\left(\mathbb{R}^k\right) .$$

根据这个定理，我们用 $T_{\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}} M$ 表示由所有在 $\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$ 处与 M 相切的向量组成的 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维向量子空间.

定义 20.11

设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的 C^p 类 k 维子流形，$\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}} \in M$.

1. $T_{\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}} M$ 称为 M 在 $\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$ 处的切空间；$T_{\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}} M$ 中的任一向量称为 M 在 $\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$ 处的切向量；仿射空

间 $\boldsymbol{x_0}+T_{\boldsymbol{x_0}}M$ 称为 M 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的仿射切平面，简称为切平面.

2. 切空间 $T_{\boldsymbol{x_0}}M$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的正交补称为 M 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的法空间，记为 $N_{\boldsymbol{x_0}}M$；法空间 $N_{\boldsymbol{x_0}}M$ 中的任一向量称为 M 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的法向量；仿射空间 $\boldsymbol{x_0}+N_{\boldsymbol{x_0}}M$ 称为 M 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的法平面. ♣

显然，当 $k=1$ 时，M 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的切平面 $\boldsymbol{x_0}+T_{\boldsymbol{x_0}}M$ 就是我们在 § 2 中当 $\boldsymbol{x_0}$ 为正则点时曲线 Γ 过 $\boldsymbol{x_0}$ 的切线 T . 这时法平面 $\boldsymbol{x_0}+N_{\boldsymbol{x_0}}M$ 称为法超平面.

当 $k=n-1$ 时，切平面 $\boldsymbol{x_0}+T_{\boldsymbol{x_0}}M$ 称为 M 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的切超平面；法平面 $\boldsymbol{x_0}+N_{\boldsymbol{x_0}}M$ 称为 M 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的法线.

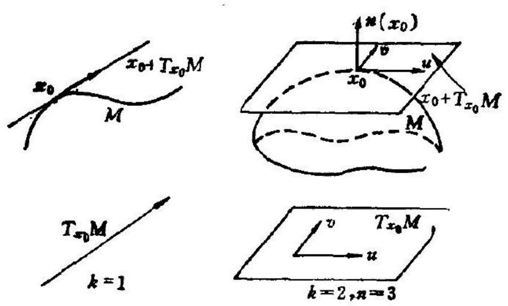


图 20.22

4. 切空间的基底

设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的任一 C^p 类 k 维子流形，$\boldsymbol{x_0}\in M.(U,\varphi^{-1})$ 与 (V,ψ^{-1}) 是 M 含 $\boldsymbol{x_0}$ 的两个 C^p 类坐标图.

在 $\mathbb{R}^k$ 中取定标准基底 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_k)$, 由于

$$T_{\boldsymbol{x_0}}M=\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{t_0})\left(\mathbb{R}^k\right)=\mathrm{d}\psi(\boldsymbol{s_0})\left(\mathbb{R}^k\right),$$

故 $T_{\boldsymbol{x_0}}M$ 有两个基底

$$\boldsymbol{\alpha}=(\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{t_0})(\boldsymbol{e}_1),\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{t_0})(\boldsymbol{e}_2),\cdots,\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{t_0})(\boldsymbol{e}_k)),$$

$$\boldsymbol{\beta}=(\mathrm{d}\psi(\boldsymbol{s_0})(\boldsymbol{e}_1),\mathrm{d}\psi(\boldsymbol{s_0})(\boldsymbol{e}_2),\cdots,\mathrm{d}\psi(\boldsymbol{s_0})(\boldsymbol{e}_k)).$$

直接计算得到

$$\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{t_0})(\boldsymbol{e}_i)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t_i}(\boldsymbol{t_0})\\ \vdots\\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial t_i}(\boldsymbol{t_0})\end{pmatrix},\mathrm{d}\psi(\boldsymbol{s_0})(\boldsymbol{e}_i)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial s_i}(\boldsymbol{s_0})\\ \vdots\\ \dfrac{\partial\psi_n}{\partial s_i}(\boldsymbol{s_0})\end{pmatrix}(i=1,2,\cdots,k).$$

显然 $T_{\boldsymbol{x_0}}M$ 的这两个基底不是别的，正好分别是 φ 与 ψ 的 Jacobi 矩阵 $J_\varphi(\boldsymbol{t_0}),J_\psi(\boldsymbol{s_0})$ 的 k 个列向量，即

$$\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(\boldsymbol{t_0}),\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(\boldsymbol{t_0}),\cdots,\frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(\boldsymbol{t_0})\right),$$

$$\boldsymbol{\beta}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial s_1}(\boldsymbol{s_0}),\frac{\partial\psi}{\partial s_2}(\boldsymbol{s_0}),\cdots,\frac{\partial\psi}{\partial s_k}(\boldsymbol{s_0})\right).$$

下面我们来研究这两个基底之间的关系.

由上一段的关系式(20.1)

$$\mathrm{d}\psi(\boldsymbol{s_0})\circ\mathrm{d}T(\boldsymbol{t_0})=\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{t_0})$$

可知，相应的 Jacobi 矩阵满足下述关系式：

$$J_\psi(\boldsymbol{s_0}) \cdot J_T(\boldsymbol{t_0}) = J_\varphi(\boldsymbol{t_0}).$$

这里我们令

$$J_T(\boldsymbol{t_0}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

由矩阵乘法立即得到

$$\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{t_0})(\boldsymbol{e}_i) = a_{1i}\mathrm{d}\psi(\boldsymbol{s_0})(\boldsymbol{e}_1) + a_{2i}\mathrm{d}\psi(\boldsymbol{s_0})(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + a_{ki}\mathrm{d}\psi(\boldsymbol{s_0})(\boldsymbol{e}_k)\,(i = 1, 2, \cdots, k)$$

由此可知，基底 $\boldsymbol{\alpha} = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_1}(\boldsymbol{t_0}), \dfrac{\partial\varphi}{\partial t_2}(\boldsymbol{t_0}), \cdots, \dfrac{\partial\varphi}{\partial t_k}(\boldsymbol{t_0})\right)$ 在基底 $\boldsymbol{\beta} = \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial s_1}(\boldsymbol{s_0}), \dfrac{\partial\psi}{\partial s_2}(\boldsymbol{s_0}), \cdots, \dfrac{\partial\psi}{\partial s_k}(\boldsymbol{s_0})\right)$ 下的矩阵 $\boldsymbol{\beta}^{(\alpha)}$ 为矩阵 $J_T(\boldsymbol{t_0})$ 的转置矩阵，因此

$$\det\left(\boldsymbol{\beta}^{(\alpha)}\right) = \det(J_T(\boldsymbol{t_0})).$$

这个关系式在第 21 章研究子流形的定向问题中起着十分重要的作用.

例题 20.24 设 M 是 $\mathbb{R}^3$ 的任一 C^p 类 2 维子流形，$P_0 \in M$. (U, φ^{-1}) 是 M 含 P_0 的一个 C^p 类坐标图. 令

$$I = \varphi^{-1}(U), I_t = \{s \in \mathbb{R} \mid (t, s) \in I\}, I_s = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, s) \in I\}$$
$$\forall (t, s) \in I, \varphi(t, s) = (\varphi_1(t, s), \varphi_2(t, s), \varphi_3(t, s)),$$

则映射

$$t \longmapsto \nu_s(t) = (\varphi_1(t, s), \varphi_2(t, s), \varphi_3(t, s)), \forall t \in I_s,$$
$$s \longmapsto \mu_t(s) = (\varphi_1(t, s), \varphi_2(t, s), \varphi_3(t, s)), \forall s \in I_t$$

是子流形 M 的两族迹弧，我们称它们为子流形 M 的局部坐标曲线族.

$$\nu'_{s_0}(t_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t_0, s_0) = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(t_0, s_0), \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(t_0, s_0), \frac{\partial\varphi_3}{\partial t}(t_0, s_0)\right),$$
$$\mu'_{t_0}(s_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial s}(t_0, s_0) = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}(t_0, s_0), \frac{\partial\varphi_2}{\partial s}(t_0, s_0), \frac{\partial\varphi_3}{\partial s}(t_0, s_0)\right),$$

故 M 在 P_0 处的两个切向量 $(\nu'_{s_0}(t_0), \mu'_{t_0}(s_0))$ 正好是 M 在 P_0 处的切平面 $P_0 + T_{P_0}M$ 的基底. 因此局部坐标曲线 $t \longmapsto \nu_{s_0}(t), t \in I_{s_0}$，$s \longmapsto \mu_{t_0}(s), s \in I_{t_0}$ 类似于平面直角坐标系中的 x 轴与 y 轴，而切向量 $\nu'_{s_0}(t_0)$ 与 $\mu'_{t_0}(s_0)$ 类似于 x 轴，y 轴的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$.

为了求得切平面 $P_0 + T_{P_0}M$ 的方程. 我们设 (X, Y, Z) 为 $P_0 + T_{P_0}M$ 上任一点 P 的直角坐标. 点 P_0 的坐标为 (x_0, y_0, z_0). 于是切平面 $P_0 + T_{P_0}M$ 的方程为：

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t}(t_0, s_0) & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t}(t_0, s_0) & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial t}(t_0, s_0) \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial s}(t_0, s_0) & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial s}(t_0, s_0) & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial s}(t_0, s_0) \end{vmatrix} = 0.$$

另一方面，由于 M 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法空间 $N_{P_0}M$ 是切空间 $T_{P_0}M$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中的正交补，故 $N_{P_0}M$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个 1 维向量子空间. 于是向量 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(t_0, s_0)$ 与 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}(t_0, s_0)$ 的叉积 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(t_0, s_0) \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial s}(t_0, s_0)$

就是 M 在 P_0 处的一个法向量，它可形式地由下述行列式确定：

$$N(\boldsymbol{P_0})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t}(t_0,s_0) & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t}(t_0,s_0) & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial t}(t_0,s_0) \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial s}(t_0,s_0) & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial s}(t_0,s_0) & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial s}(t_0,s_0) \end{vmatrix}.$$

这里 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的标准基底，在行列式展开时，我们把 $\boldsymbol{e}_i$ 当作实数来看待，因此按第一行展开得到：

$$N(\boldsymbol{t_0},\boldsymbol{s_0})=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t}(t_0,s_0) & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial t}(t_0,s_0) \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial s}(t_0,s_0) & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial s}(t_0,s_0) \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1+\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial t}(t_0,s_0) & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t}(t_0,s_0) \\ \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial s}(t_0,s_0) & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial s}(t_0,s_0) \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2+\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t}(t_0,s_0) & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t}(t_0,s_0) \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial s}(t_0,s_0) & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial s}(t_0,s_0) \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3$$

特别地，若子流形 M 是由函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 所确定的一个 C^p 类的 2 维简单曲面，则我们令

$$\varphi(x,y)=(x,y,f(x,y)),\forall(x,y)\in I,$$

于是 (I,φ) 是 M 的 C^p 类参数表达式，从而 M 在 $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切平面方程为：

$$\begin{vmatrix} X-x_0 & Y-y_0 & Z-f(x_0,y_0) \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{vmatrix}=0,$$

或

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(X-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(Y-y_0)-(Z-f(x_0,y_0))=0$$

M 在 P_0 处的法向量 $N(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$ 为：

$$N(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{vmatrix},$$

或

$$N(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})=-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\boldsymbol{e}_1-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$$

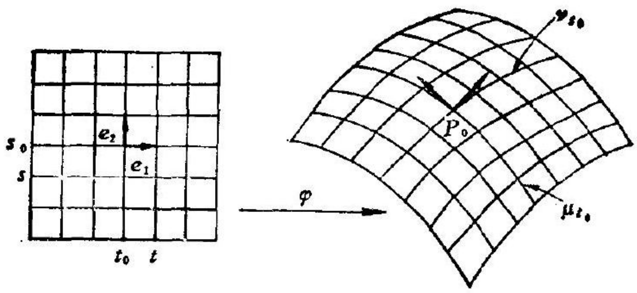


图 20.23

注 例20.24中我们对 $\mathbb{R}^3$ 中的 C^p 类 2 维子流形的分析完全可以推广到 $\mathbb{R}^n$ 的 C^p 类 $n-1$ 维子流形上去.

例如设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的任一 C^p 类 $n-1$ 维子流形，$\boldsymbol{x_0}=(x_{01},x_{02},\cdots,x_{0n})\in M$. $\left(U,\varphi^{-1}\right)$ 是 M 含 $\boldsymbol{x_0}$ 的任一 C^p 类坐标图，令 $\boldsymbol{t_0}=\varphi^{-1}(\boldsymbol{x_0})$. 则

1)M 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的切超平面 $\boldsymbol{x_0}+T_{\boldsymbol{x_0}}M$ 的方程为：

$$\begin{vmatrix} X_1-x_{01} & X_2-x_{02} & \cdots & X_n-x_{0n} \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}(\boldsymbol{t_0}) & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}(\boldsymbol{t_0}) & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial t_1}(\boldsymbol{t_0}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t_{n-1}}(\boldsymbol{t_0}) & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t_{n-1}}(\boldsymbol{t_0}) & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial t_{n-1}}(\boldsymbol{t_0}) \end{vmatrix}=0.$$

2) 由于 $T_{\boldsymbol{x_0}}M$ 是 $n-1$ 维的，故 M 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的法空间 $N_{\boldsymbol{x_0}}M$ 是 1 维的，因此 M 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处的一个法向量 $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x_0})$ 由下述行列式确定：

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x_0})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}(\boldsymbol{t_0}) & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}(\boldsymbol{t_0}) & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial t_1}(\boldsymbol{t_0}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t_{n-1}}(\boldsymbol{t_0}) & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t_{n-1}}(\boldsymbol{t_0}) & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial t_{n-1}}(\boldsymbol{t_0}) \end{vmatrix}.$$

这里 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基底，在行列式按第一行展开时，我们是把 $\boldsymbol{e}_i$ 当作实数看待的.

✍ 习题

1. 判断下列各子集 M 是否为各自空间的子流形：
   1) $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid xy=0\right\}$,
   2) $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y=\sin\dfrac{1}{x},0<x<1\right\}$,
   3) $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y=\sin\dfrac{1}{x},0<x<1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x=0,|y|\leqslant 1\right\}$,
   4) $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t),t\in\mathbb{R}\right\}$,
   5) $M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2-z^2=c,c\neq 0\right\}$,
   6) $M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2-z^2=0\right\}$,
   7) $M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2\right\}$,
   8) $M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid xy=0,x^2+y^2+z^2=1,z\neq\pm 1\right\}$.
2. 证明：$M\subset\mathbb{R}^n$ 是 n 维子流形当且仅当 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集.
3. 1) 完成例20.23的 Möbius 带为子流形的证明,
   2) 利用构造坐标图册的方法证明 T^2 是 $\mathbb{R}^3$ 的 C^∞ 类 2 维子流形.
4. 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的任一 C^p 类 k 维子流形. 证明：$\forall x\in M$，存在 x 在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集 V 以及从 V

到 $\mathbb{R}^n$ 的开集 W 上的 C^p 类微分同胚 Φ 使得

$$\Phi(V \cap M) = \{t \in W \mid t_{k+1} = t_{k+2} = \cdots = t_n = 0\}.$$

5. 设 $SL(n) = \{n \times n$ 实矩阵 $A \mid \det(A) = 1\}$，$\forall A \in SL(n)$，令

$$A = \left(a_{ij}\right), \|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

证明：$SL(n)$ 是 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的一个 C^∞ 类 n^2-1 维子流形.

6. 设 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 是任一 C^2 类映射，令

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\right\}.$$

假设 $\forall (x, y, z) \in M$，f 在 (x, y, z) 处的 Jacobi 矩阵的秩等于 1.

1) 证明：M 在任一点 $(x_0, y_0, z_0) \in M$ 处的切平面方程为：
$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

2) 证明：M 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的法向量平行于梯度向量
$$\operatorname{grad} f\,(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)$$

7. 设 $a > 0$，函数 $f: \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ 定义如下：

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+, f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x} - \sqrt{z}.$$

1) 证明：$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ \mid f(x, y, z) = 0\right\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个 C^∞ 类 2 维子流形，

2) 设 $(x_0, y_0, z_0) \in M$，M 在 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面为 Π，Π 与 x 轴,y 轴,z 轴的交点分别为 $(\alpha, 0, 0)$,$(0, \beta, 0)$,$(0, 0, \gamma)$，试写出切平面 Π 的方程并计算 $\alpha + \beta + \gamma$ 的值.

8. 设 $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$，$abc \neq 0$，$\alpha\beta\gamma \neq 0$.

1) 证明：椭球面 $M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1\right\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个 C^∞ 类 2 维子流形，

2) 确定 M 的切平面方程，使得这些切平面平行于平面 $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

9. 设 $a, b > 0$.

1) 证明：双曲抛物面

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0\right\}$$

是 $\mathbb{R}^3$ 的一个 C^∞ 类 2 维子流形，

2) 证明：抛物线 $\Gamma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, z + \dfrac{y^2}{b^2} = 0\right\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个 C^∞ 类 1 维子流形，

3) 设 $M_0\,(0, y_0, z_0) \in \Gamma$，写出与 x 轴平行并且包含 Γ 在 M_0 处的切线的平面 $\Pi\,(y_0, z_0)$ 的方程，

4) 证明：$\Pi\,(y_0, z_0) \cap M$ 是两条直线的并，

5) 设 $(0, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ 并且 $\gamma + \dfrac{\beta^2}{b^2} > 0$，证明：通过点 $(0, \beta, \gamma)$ 可向 Γ 引两条切线.

10. 设 $M = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = 1\right\}$.

1) 在什么条件下，M 是 $\mathbb{R}^n$ 的 $n-1$ 维子流形？

2) 至少要有多少个坐标图来描述 M？

3) 写出 M 在任一点 $x_0 \in M$ 处的切超平面方程.

20.4 函数沿 k 维子流形的积分

为了引进函数沿 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维子流形的积分, 我们首先介绍 k 维平行体的概念.

1.$\mathbb{R}^n$ 的 k 维平行体

定义 20.12

设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的 k 个线性无关的向量 $(k \leqslant n)$ 点集,

$$P^k = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \middle| \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{a}_i, \lambda_i \in [0,1], i = 1, 2, \cdots, k \right\},$$

称为由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 张成的 $\mathbb{R}^n$ 的一个 k 维平行体.

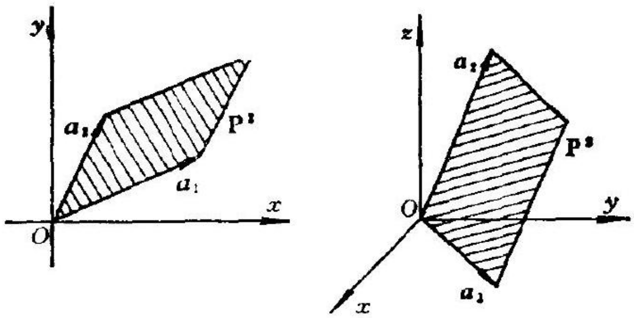


图 20.24

当 $k = n$ 时, P^n 就是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 n 维平行体. 我们用 $\boldsymbol{A}$ 表示以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 为列向量的 $n \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵. 关于 P^n 的可测性及其测度, 我们有下述定理.

定理 20.8

$\mathbb{R}^n$ 的由向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 张成的 n 维平行体 P^n 是可测集, 并且其测度 $m\left(P^n\right)$ 为:

$$m\left(P^n\right) = |\det(\boldsymbol{A})| = \left[\det\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

证明 设 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基底. 令

$$\boldsymbol{a}_i = c_{i1}\boldsymbol{e}_1 + c_{i2}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_{in}\boldsymbol{e}_n (i = 1, 2, \cdots, n).$$

由此得到 $n \times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, \det(\boldsymbol{A}) \neq 0.$$

若我们记与 $\boldsymbol{A}$ 对应的线性映射为 $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 则我们有

$$T\left(\boldsymbol{e}_i\right) = \boldsymbol{a}_i (i = 1, 2, \cdots, n).$$

现在用 I^n 表示 $\mathbb{R}^n$ 的由 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 所张成的标准立方体，则容易验证

$$P^n = T\left(I^n\right), T(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

根据第 19 章 §5 的引理19.1知， P^n 是可测集，并且其测度

$$m\left(P^n\right) = m\left(T\left(I^n\right)\right) = |\det T| m\left(I^n\right).$$

由于 $\det T = \det(\boldsymbol{A}), m\left(I^n\right) = 1$, 故

$$m\left(P^n\right) = |\det(\boldsymbol{A})| = \left[\det\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

2. $\mathbb{R}^n$ 中的 k 维可测集

现在我们设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中某个 k 维向量子空间 V 的子集. 在 V 中任取一个正规基底 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k)$(即 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ 线性无关，并且 $\left\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \right\rangle = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots, k)$ 若用 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_k)$ 表示 $\mathbb{R}^k$ 的标准基底，则我们有下述引理.

引理 20.1

存在保持内积不变的线性映射 $T: V \to \mathbb{R}^k$ 使得

$$T\left(\boldsymbol{v}_i\right) = \boldsymbol{e}_i (\forall i = 1, 2, \cdots, k).$$

证明 因为 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k)$ 是 V 的一个正规基底，所以 $\forall \boldsymbol{x} \in V$, 存在唯一的 $x_1, x_2, \cdots, x_k \in \mathbb{R}$ 使得

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{v}_1 + x_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k \boldsymbol{v}_k$$

定义映射 $T: V \to \mathbb{R}^k$ 如下：

$$\forall \boldsymbol{x} \in V, T(\boldsymbol{x}) = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_k \boldsymbol{e}_k$$

则显然 T 是线性映射，并且满足

$$T\left(\boldsymbol{v}_i\right) = \boldsymbol{e}_i (i = 1, 2, \cdots, k).$$

下面我们来证明 T 保持内积不变.

为此设 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, 并且

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{v}_1 + x_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{y} = y_1 \boldsymbol{v}_1 + y_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_k \boldsymbol{v}_k$$

则直接计算得到

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k x_i \boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^k y_j \boldsymbol{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_i y_j \left\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^k x_i y_i$$

$$\langle T(\boldsymbol{x}), T(\boldsymbol{y}) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k x_i \boldsymbol{e}_i, \sum_{j=1}^k y_j \boldsymbol{e}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_i y_j \left\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^k x_i y_i$$

因此 $\langle T(\boldsymbol{x}), T(\boldsymbol{y}) \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$, 即 T 保持内积不变.

引理 20.2

设 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k)$ 与 $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_k)$ 是 V 的任意两个正规基底，$\varphi, \psi: V \to \mathbb{R}^k$ 是满足

$$\varphi\left(\boldsymbol{v}_i\right) = \boldsymbol{e}_i, \psi\left(\boldsymbol{w}_i\right) = \boldsymbol{e}_i (i = 1, 2, \cdots, k).$$

的任意两个保持内积不变的线性映射，E 是 V 的任一子集.

若 $\varphi(E)\subset\mathbb{R}^k$ 可测，则 $\psi(E)\subset\mathbb{R}^k$ 也可测，并且

$$m(\varphi(E))=m(\psi(E)).$$

证明 首先我们证明 $\psi\circ\varphi^{-1}:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ 是正交变换. 设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^k$, 并且

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_k\boldsymbol{e}_k,\ \boldsymbol{y}=y_1\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+y_k\boldsymbol{e}_k,$$

由 φ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\boldsymbol{x})&=x_1\boldsymbol{v}_1+x_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+x_k\boldsymbol{v}_k,\\ \varphi^{-1}(\boldsymbol{y})&=y_1\boldsymbol{v}_1+y_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+y_k\boldsymbol{v}_k.\end{aligned}$$

从而由 ψ 的定义得到

$$\begin{aligned}\psi\circ\varphi^{-1}(\boldsymbol{x})&=\psi\left(x_1\boldsymbol{v}_1+x_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+x_k\boldsymbol{v}_k\right),\\ \psi\circ\varphi^{-1}(\boldsymbol{y})&=\psi\left(y_1\boldsymbol{v}_1+y_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+y_k\boldsymbol{v}_k\right).\end{aligned}$$

若用 M 表示正规基底 $(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_k)$ 与 $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_k)$ 之间的变换矩阵，即

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1\\ \boldsymbol{v}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{v}_k\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_1\\ \boldsymbol{w}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{w}_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_1\\ \boldsymbol{w}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{w}_k\end{pmatrix},$$

则 M 是正交矩阵，即满足等式 $MM^{\mathrm{T}}=E_k$(这里 E_k 为 $k\times k$ 单位矩阵). 于是

$$\begin{aligned}\psi\circ\varphi^{-1}(\boldsymbol{x})&=\psi\left(x_1\sum_{i=1}^k a_{1i}\boldsymbol{w}_i+x_2\sum_{i=1}^k a_{2i}\boldsymbol{w}_i+\cdots+x_k\sum_{i=1}^k a_{ki}\boldsymbol{w}_i\right)\\ &=\psi\left(\left(\sum_{i=1}^k x_ia_{i1}\right)\boldsymbol{w}_1+\left(\sum_{i=1}^k x_ia_{i2}\right)\boldsymbol{w}_2+\cdots+\left(\sum_{i=1}^k x_ia_{ik}\right)\boldsymbol{w}_k\right)\\ &=\left(\sum_{i=1}^k x_ia_{i1}\right)\boldsymbol{e}_1+\left(\sum_{i=1}^k x_ia_{i2}\right)\boldsymbol{e}_2+\cdots+\left(\sum_{i=1}^k x_ia_{ik}\right)\boldsymbol{e}_k,\\ \psi\circ\varphi^{-1}(\boldsymbol{y})&=\psi\left(y_1\sum_{i=1}^k a_{1i}\boldsymbol{w}_i+y_2\sum_{i=1}^k a_{2i}\boldsymbol{w}_i+\cdots+y_k\sum_{i=1}^k a_{ki}\boldsymbol{w}_i\right)\\ &=\psi\left(\left(\sum_{i=1}^k y_ia_{i1}\right)\boldsymbol{w}_1+\left(\sum_{i=1}^k y_ia_{i2}\right)\boldsymbol{w}_2+\cdots+\left(\sum_{i=1}^k y_ia_{ik}\right)\boldsymbol{w}_k\right)\\ &=\left(\sum_{i=1}^k y_ia_{i1}\right)\boldsymbol{e}_1+\left(\sum_{i=1}^k y_ia_{i2}\right)\boldsymbol{e}_2+\cdots+\left(\sum_{i=1}^k y_ia_{ik}\right)\boldsymbol{e}_k\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\langle\psi\circ\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}),\psi\circ\varphi^{-1}(\boldsymbol{y})\rangle&=\left(\sum_{i=1}^{k}x_ia_{i1}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}y_ia_{i1}\right)+\cdots+\left(\sum_{i=1}^{k}x_ia_{ik}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}y_ia_{ik}\right)\\&=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}x_iy_ja_{i1}a_{j1}+\cdots+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}x_iy_ja_{ik}a_{jk}\\&=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}x_iy_j\left(\sum_{l=1}^{k}a_{il}a_{jl}\right).\end{aligned}$$

因为 $MM^{\mathrm{T}}=E_k$, 所以

$$\sum_{l=1}^{k}a_{il}a_{jl}=\begin{cases}1, & 若\ i=j;\\0, & 若\ i\neq j\end{cases}$$

因此

$$\langle\psi\circ\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}),\psi\circ\varphi^{-1}(\boldsymbol{y})\rangle=\sum_{i=1}^{k}x_iy_i=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$$

此即表明 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 是正交变换.

由于对正交变换 $\psi\circ\varphi^{-1}$, 有 $\left|\det\left(\psi\circ\varphi^{-1}\right)\right|=1$, 故若 $\varphi(E)$ 可测, 则 $\psi(E)=\psi\circ\varphi^{-1}(\varphi(E))$ 也可测, 并且

$$m(\psi(E))=m\left(\psi\circ\varphi^{-1}(\varphi(E))\right)=\left|\det\left(\psi\circ\varphi^{-1}\right)\right|m(\varphi(E))=m(\varphi(E))$$

根据上述引理, 我们可以对 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维可测集引入下述定义.

定义 20.13

设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维子空间 V 的任一子集. $\varphi:V\to\mathbb{R}^k$ 是由引理 1 确定的线性映射. 若 $\varphi(E)\subset\mathbb{R}^k$ 是可测集, 则称 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 k 维可测集, E 的 k 维测度 (或称 k 维面积)$S(E)$ 定义为

$$S(E)\triangleq m(\varphi(E)).$$

特别地, 对于由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k\in\mathbb{R}^n$ 所张成的 k 维平行体 P^k 的 k 维面积记为

$$S\left(a_1,a_2,\cdots,a_k\right)\triangleq m\left(\varphi\left(P^k\right)\right).$$

♣

定理 20.9

若 P^k 是由向量 $a_1,a_2,\cdots,a_k\in\mathbb{R}^n$ 所张成的 $\mathbb{R}^k$ 维平行体, A 是以 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为列向量的 $n\times k$ 矩阵, 则 P^k 的 k 维面积

$$S\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k\right)=\left[\det\left(A^{\mathrm{T}}A\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

♡

证明 令 $\boldsymbol{b}_i=\varphi\left(\boldsymbol{a}_i\right)(i=1,2,\cdots,k)$(这里 φ 是由引理20.1确定的线性映射). 那么 $\varphi(P^k)$ 是由向量 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_k\in\mathbb{R}^k$ 所张成的 $\mathbb{R}^k$ 中的 k 维平行体, 因此由定理20.8知, $\varphi\left(P^k\right)$ 在 $\mathbb{R}^k$ 中的测度

$$m\left(\varphi\left(P^k\right)\right)=\left[\det\left(B^{\mathrm{T}}B\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

这里 B 是以 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_k$ 为列向量的 $k\times k$ 矩阵. 于是

$$
\begin{aligned}
s(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k) &= \left[\det\left(B^{\mathrm{T}}B\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{\det\begin{pmatrix} \langle\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1\rangle & \langle\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\rangle & \cdots & \langle\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_k\rangle \\ \langle\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_1\rangle & \langle\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2\rangle & \cdots & \langle\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_k\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle\boldsymbol{b}_k,\boldsymbol{b}_1\rangle & \langle\boldsymbol{b}_k,\boldsymbol{b}_2\rangle & \cdots & \langle\boldsymbol{b}_k,\boldsymbol{b}_k\rangle \end{pmatrix}\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\det\begin{pmatrix} \langle\varphi(a_1),\varphi(a_1)\rangle & \langle\varphi(a_1),\varphi(a_2)\rangle & \cdots & \langle\varphi(a_1),\varphi(a_k)\rangle \\ \langle\varphi(a_2),\varphi(a_1)\rangle & \langle\varphi(a_2),\varphi(a_2)\rangle & \cdots & \langle\varphi(a_2),\varphi(a_k)\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle\varphi(a_k),\varphi(a_1)\rangle & \langle\varphi(a_k),\varphi(a_2)\rangle & \cdots & \langle\varphi(a_k),\varphi(a_k)\rangle \end{pmatrix}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\det\begin{pmatrix} \langle a_1,a_1\rangle & \langle a_1,a_2\rangle & \cdots & \langle a_1,a_k\rangle \\ \langle a_2,a_1\rangle & \langle a_2,a_2\rangle & \cdots & \langle a_2,a_k\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle a_k,a_1\rangle & \langle a_k,a_2\rangle & \cdots & \langle a_k,a_k\rangle \end{pmatrix}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\det\left(A^{\mathrm{T}}A\right)\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

3. k 维简单曲面片的 k 维面积与曲面积分

为了能用重积分来计算 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维曲面的 k 维面积, 我们介绍 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维简单曲面片的概念.

设 Σ 是 $\mathbb{R}^n$ 的任一 C^p 类 k 维简单曲面, (I,φ) 是 Σ 的任一 C^p 类参数表达式, $D\subset I$ 使得 $\overline{D}$ 是一紧可测集, 我们仍用 φ 表示 φ 在 D 上的限制 $\varphi|_D$.

定义 20.14

以 (D,φ) 为参数表达式的曲面称为 $\mathbb{R}^n$ 的一个 C^p 类 k 维简单曲面片. ♣

显然, k 维简单曲面片的定义与 Σ 的参数表达式的选择无关. 因为若 $(J,\psi)\in\Sigma$, 则存在 C^p 类微分同胚 $h:I\to J$ 使得 $\varphi=\psi\circ h$. 令 $G=h(D)$ 则 $\overline{G}\subset J$ 是紧可测集, 显然 (D,φ) 与 (G,ψ) 等价, 因此 (D,φ) 与 (G,ψ) 定义 Σ 的同一 C^p 类 k 维简单曲面片.

下面我们就用 Σ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的任一 C^p 类 k 维简单曲面片, 它的 C^p 类参数表达式为 (D,φ).

为了正确地给 Σ 的 k 维面积下定义, 我们采用把 Σ 再分割成若干子简单曲面片 Σ_i, 然后用 $\mathbb{R}^n$ 中的适当的 k 维平行体 Q_i 近似地代替 Σ_i 的方法进行讨论.

设 $\varepsilon>0$. 在 $\mathbb{R}^k$ 中, 我们用平行于各坐标面的若干超平面分割可测集 D, 使得若 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 为所有包含在 D 内的分割单元, $D_1,D_2,\cdots D_s$ 为 D 的其他分割单元, 则它们满足下述要求;

$$
D=\left(\bigcup_{i=1}^{m}P_i\right)\bigcup\left(\bigcup_{j=1}^{m}D_j\right),\ 0\leqslant m(D)-m\left(\bigcup_{i=1}^{m}P_i\right)<\varepsilon.
$$

令 Σ_i,Σ_j' 分别为 (P_i,φ) 与 (D_i,φ) 所代表的 C^p 类 k 维简单曲面片. 于是我们得到 Σ 的一个分割:

$$
\Sigma=\left(\bigcup_{i=1}^{m}\Sigma_i\right)\cup\left(\sum_{j=1}^{s}\Sigma_j'\right).
$$

对每一个 P_i，取它的一个顶点 $\xi_i \in P_i$，使得 P_i 是由下述 k 个向量

$$
\begin{aligned}
a_1^i &= \xi_i + \left(l_1^i, 0, \cdots, 0\right) \\
a_2^i &= \xi_i + \left(0, l_2^i, 0, \cdots, 0\right) \\
&\cdots \\
a_k^i &= \xi_i + \left(0, \cdots, 0, l_k^i\right)
\end{aligned}
$$

所张成的 k 维长方体. 在 P_i 上考虑映射 $\Phi : P_i \to \mathbb{R}^n$，它定义为：

$$\forall \xi_i + l \in P_i, \Phi\left(\xi_i + l\right) = \varphi\left(\xi_i\right) + \mathrm{d}\varphi\left(\xi_i\right)(l).$$

那么

$$
\begin{aligned}
&\Phi\left(\boldsymbol{a}_1^i\right) = \Phi\left(\xi_i + \left(l_1^i, 0, \cdots, 0\right)\right) = \varphi\left(\xi_i\right) + \mathrm{d}\varphi\left(\xi_i\right)\left(l_1^i, 0, \cdots, 0\right), \\
&\Phi\left(\boldsymbol{a}_2^i\right) = \Phi\left(\xi_i + \left(0, l_2^i, 0 \cdots, 0\right)\right) = \varphi\left(\xi_i\right) + \mathrm{d}\varphi\left(\xi_i\right)\left(0, l_2^i, 0, \cdots 0\right). \\
&\cdots \\
&\Phi\left(\boldsymbol{a}_k^i\right) = \Phi\left(\xi_i + \left(0, \cdots, 0, l_k^i\right)\right) = \varphi\left(\xi_i\right) + \mathrm{d}\varphi\left(\xi_i\right)\left(0, \cdots, 0, l_k^i\right).
\end{aligned}
$$

若令 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$，则

$$
\mathrm{d}\varphi(\xi_i)(l) = \begin{pmatrix}
\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}(\xi_i) & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t_2}(\xi_i) & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t_k}(\xi_i) \\
\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}(\xi_i) & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t_2}(\xi_i) & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t_k}(\xi_i) \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial t_1}(\xi_i) & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial t_2}(\xi_i) & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial t_k}(\xi_i)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_k \end{pmatrix}
$$

从而

$$
\Phi\left(\boldsymbol{a}_j^i\right) = \varphi\left(\boldsymbol{\xi}_i\right) + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_j}\left(\boldsymbol{\xi}_i\right), \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_j}\left(\boldsymbol{\xi}_i\right), \cdots, \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_j}\left(\boldsymbol{\xi}_i\right)\right) l_j^i,
$$

$$(i = 1, 2, \cdots m, j = 1, 2, \cdots k).$$

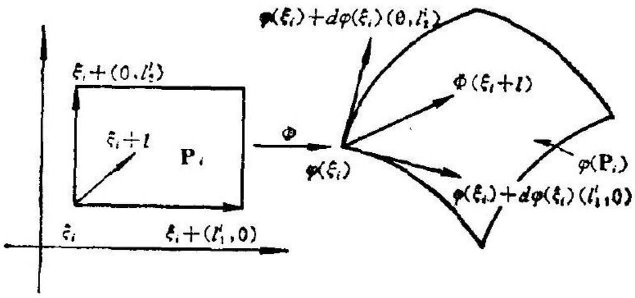


图 20.25

令 $Q_i = \Phi\left(P_i\right)$，则 Q_i 是由向量 $\Phi\left(a_1^i\right), \Phi\left(a_2^i\right), \cdots, \Phi\left(a_k^i\right)$. 所张成的 $\mathbb{R}^n$ 中以 $\varphi\left(\xi_i\right)$ 为顶点的 k

维平行体, 它的 k 维面积 $S(Q_i)$ 等于由向量

$$\boldsymbol{\beta}_1^i = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(\xi_i), \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1}(\xi_i), \cdots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}(\xi_i)\right) l_1^i$$

$$\boldsymbol{\beta}_2^i = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2}(\xi_i), \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2}(\xi_i), \cdots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_2}(\xi_i)\right) l_2^i$$

$$\cdots$$

$$\boldsymbol{\beta}_k^i = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(\xi_i), \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_k}(\xi_i), \cdots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k}(\xi_i)\right) l_k^i$$

所张成的 $\mathbb{R}^n$ 中的 k 维平行体的 k 维面积, 即

$$S(Q_i) = S\left(\boldsymbol{\beta}_1^i, \boldsymbol{\beta}_2^i, \cdots, \boldsymbol{\beta}_k^i\right) = \left[\det\left(\mathrm{d}\varphi(\xi_i)^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\varphi(\xi_i)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \left|l_1^i l_2^i \cdots l_k^i\right|.$$

由于 $\mathbb{R}^k$ 中的 k 维长方体 P_i 的测度 $m(P_i) = \left|l_1^i l_2^i \cdots l_k^i\right|$ 故

$$S(Q_i) = \left[\det\left(\mathrm{d}\varphi(\xi_i)^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\varphi(\xi_i)\right)\right]^{\frac{1}{2}} m(P_i).$$

如果 $\varepsilon > 0$ 充分小, 并且上述可测集 D 的分割单元的最大直经也充分小, 则我们有

$$\Sigma_i \approx Q_i, S(\Sigma_i) \approx S(Q_i)\,(i = 1, 2, \cdots, m).$$

因此 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} Q_i$ 可作为 k 维简单曲面片 $\Sigma = \left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} \Sigma_i\right) \cup \left(\bigcup\limits_{j=1}^{s} \Sigma_j'\right)$ 的近似覆盖, 而 Q_i 的 k 维面积之和

$$\sum_{i=1}^{m} S(Q_i) = \sum_{i=1}^{m} \left[\det\left(\mathrm{d}\varphi(\xi_i)^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\varphi(\xi_i)\right)\right]^{\frac{1}{2}} m(P_i)$$

可作为 k 维简单曲面片 Σ 的 “k 维面积” 的近似值.

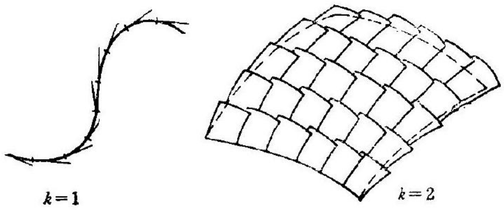


图 20.26

上图表明, 当 $k = 1$ 时, 我们对曲线的局部用切线段来近似, 当 $k = 2$ 时, 对曲面片的局部用切平面片来近似,

由于 φ 是 C^p 类的, 故映射 $t \longrightarrow \left[\det\left(\mathrm{d}\varphi(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\varphi(t)\right)\right]^{\frac{1}{2}}, t \in D$ 在 D 上连续, 因此当 $\varepsilon \to 0$ 时并且 D 的分割单元的最大直径趋于零时, $\sum\limits_{i=1}^{m} S(Q_i)$ 趋于下述 k 重积分:

$$\int_D \left[\det\left(\mathrm{d}\varphi(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\varphi(t)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t.$$

我们来证明上述 k 重积分的值与 Σ 的参数表达式的选择无关.

为此设 (G, ψ) 是 Σ 的另一参数表达式. 于是存在 C^p 类微分同胚 $h: D \to G$ 使得 $\varphi = \psi \circ h. \forall t \in D$

令 $s=h(t)$, 则 $\mathrm{d}\varphi(t)=\mathrm{d}\psi(s),\mathrm{d}h(t)$. 根据重积分的变元替换公式得到

$$\begin{aligned}
&\int_D\left[\det\left(\mathrm{d}\varphi(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\varphi(t)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\\
=&\int_G\left[\det\left((\mathrm{d}\psi(s)\cdot\mathrm{d}h(t))^{\mathrm{T}}(\mathrm{d}\psi(s)\cdot\mathrm{d}h(t))\right)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot|\Delta_{h^{-1}}(s)|\,\mathrm{d}s\\
=&\int_G\left[\det\left((\mathrm{d}h(t))^{\mathrm{T}}\cdot(\mathrm{d}\psi(s))^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\psi(s)\cdot\mathrm{d}h(t)\right)\right]^{\frac{1}{2}}|\Delta_{h^{-1}}(s)|\,\mathrm{d}s\\
=&\int_G\left[\det\left(\mathrm{d}\psi(s)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\psi(s)\right)\right]^{\frac{1}{2}}|\Delta_h(t)|\,|\Delta_{h^{-1}}(s)|\,\mathrm{d}s\\
=&\int_G\left[\det\left(\mathrm{d}\psi(s)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\psi(s)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

此即表明 $\int_D\left[\det\left(\mathrm{d}\varphi(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\varphi(t)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$ 是仅与 Σ 有关而与 (D,φ) 无关的一个定数.

根据上述分析, 现在我们可以引入下述定义.

定义 20.15

设 Σ 是 $\mathbb{R}^n$ 的任一 C^p 类 k 维简单曲面片, (D,φ) 是 Σ 的任一 C^p 类参数表达式, Σ 的 k 维测度 (或 k 维面积)$S(\Sigma)$ 定义为:

$$S(\Sigma)\triangleq\int_D\left[\det\left(\mathrm{d}\varphi(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\varphi(t)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

现在设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是一开集且 $\Sigma\subset U.f:U\to\mathbb{R}$ 是任一连续函数. 定义映射 $F:D\to\mathbb{R}$ 如下:

$$\forall t\in D,\ F(t)=f(\varphi(t))\left[\det\left(\mathrm{d}\varphi(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\varphi(t)\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

则 F 在 D 上连续. 因此 F 在 D 上的积分存在. ♣

定义 20.16

函数 $f:U\to\mathbb{R}$ 沿 $\mathbb{R}^n$ 的 C^p 类 k 维简单曲面片 Σ 的曲面积分 $\int_\Sigma f\,\mathrm{d}S$ 定义为

$$\int_\Sigma f\,\mathrm{d}S\triangleq\int_D f(\varphi(t))\left[\det\left(\mathrm{d}\varphi(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\varphi(t)\right)\right]^{2}\mathrm{d}t$$

这里 (D,φ) 是 Σ 的任一 C^p 类参数表达式. ♣

从曲面积分 $\int_\Sigma f\,\mathrm{d}S$ 的定义可知, $\int_\Sigma f\,\mathrm{d}S$ 是一个只依赖于 f 及 Σ 而与 Σ 的参数表达式的选择无关的定数.

直接由重积分的性质可以推出曲面积分 $\int_\Sigma f\,\mathrm{d}S$ 具有下述性质.

定理 20.10

设 $f,g:U\to\mathbb{R}$ 是任意两个连续函数, Σ 是 $\mathbb{R}^*$ 的任一 C^p 类 k 维简单曲面片, 并且 $\Sigma\subset U$. 则
1)$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\int_\Sigma(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}S$ 存在, 并且

$$\int_\Sigma(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}S=\alpha\int_\Sigma f\,\mathrm{d}S+\beta\int_\Sigma g\mathrm{d}S.$$

2) $\int_\Sigma 1\mathrm{d}S=S(\Sigma)$.

3) 若 $\forall x\in\Sigma, f(x)\leqslant g(x)$, 则 $\int_\Sigma f\,\mathrm{d}S\leqslant\int_\Sigma g\mathrm{d}S$.

4) 若 $\forall x \in \Sigma$ 有 $|f(x)| \leqslant M$, 则

$$\left|\int_{\Sigma} f\,\mathrm{d}S\right| \leqslant \int_{\Sigma} |f|\mathrm{d}S \leqslant MS(\Sigma)$$

5) 若 Σ 是 k 维零测度曲面片, 则 $\int_{\Sigma} f\,\mathrm{d}S = 0$.

6) 若 Σ_1 与 Σ_2 互不重迭, 则 $\int_{\Sigma_1\cup\Sigma_2} f\,\mathrm{d}S = \int_{\Sigma_1} f\,\mathrm{d}S + \int_{\Sigma_2} f\,\mathrm{d}S$.

下面我们来讨论 k 的几种特殊情形的曲面积分 $\int_{\Sigma} f\,\mathrm{d}S$.

1)$k=1$ 的情形

这时 $\mathbb{R}^n$ 的 C^p 类 1 维简单曲面片 Σ 就是 $\mathbb{R}^n$ 中的一条 C^p 类曲线 Γ. 设 $([a,b],\gamma)$ 是 Γ 的任一 C^p 类参数表达式.

在 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}^n$ 的标准基底下, $\forall t \in [a,b], \gamma$ 在 t 处的微分 $\mathrm{d}\gamma(t)$ 是一个 $n\times 1$ 矩阵

$$\mathrm{d}\gamma(t) \sim \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix},$$

因此

$$\left[\det\left(\mathrm{d}\gamma(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\gamma(t)\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\gamma_1'(t)\right)^2 + \left(\gamma_2'(t)\right)^2 + \cdots + \left(\gamma_n'(t)\right)^2}.$$

于是在 $k=1$ 时, 我们得到

$$S(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\left(\gamma_1'(t)\right)^2 + \left(\gamma_2'(t)\right)^2 + \cdots + \left(\gamma_n'(t)\right)^2}\mathrm{d}t$$

$$\int_{\Gamma} f\,\mathrm{d}S = \int_a^b f(\gamma(t))\sqrt{\left(\gamma_1'(t)\right)^2 + \left(\gamma_2'(t)\right)^2 + \cdots + \left(\gamma_n'(t)\right)^2}\mathrm{d}t$$

由 $S(\Sigma)$ 的定义过程可知, Γ 的 1 维测度 (或 1 维面积)$S(\Gamma)$ 不是别的, 而是曲线 Γ 的长度, 因此上述两式分别称为曲线 Γ 的弧长计算公式与函数 f 沿曲线 Γ 的曲线积分.

例题 20.25 计算由参数表达式

$$x = \gamma_1(t) = a(t-\sin t), y = \gamma_2(t) = a(1-\cos t), t \in [0, 2\pi]$$

所代表的平面曲线 Γ -旋轮线一段-的长度.

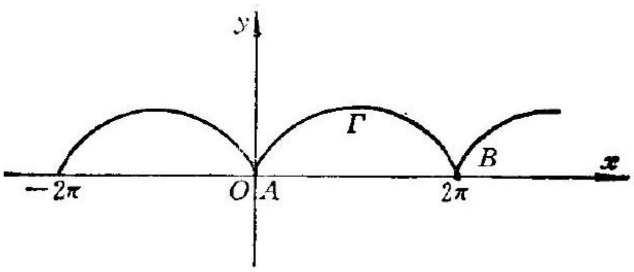


图 20.27

因为

$$\gamma(t) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t)),\ \ \gamma'(t) = (a(1-\cos t), a\sin t)$$

所以 $\gamma'(t)=0$ 当且仅当 $t=0$ 或 $t=2\pi$. 因此旋轮线段 Γ 除态两个端点 A 与 B 外是一简单曲线段. 上述弧长计算公式仍然适用, 故

$$\begin{aligned} S(\Gamma) &= \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t \\ &= 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= 8a. \end{aligned}$$

例题 20.26 计算由参数表达式 $\gamma(t)=(a\cos t,a\sin t,bt),t\in[0,2\pi](a>0,b>0)$ 所代表的空间曲线 Γ -螺旋线一段-的长度.

因为 $\gamma'(t)=(-a\sin t,a\cos t,b)\neq 0,\forall t\in[0,2\pi]$, 所以 Γ 是 C^∞ 类的简单曲线段. 从而 Γ 的弧长为

$$\begin{aligned} S(\Gamma) &= \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi\sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}$$

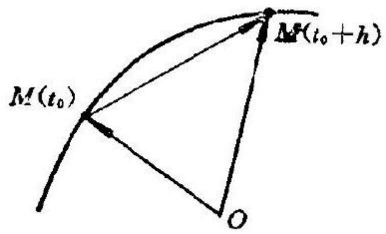


图 20.28

例题 20.27 利用曲线积分计算由 xOy 平面的圆周 $S'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=r^2\}$ 绕 Ox 轴旋转一周所得旋转曲面-球面 S_r^2 的面积.

我们记 Γ 为上半圆, 那么 Γ 有参数表达式:

$$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

由于 $\left(x'(\theta)\right)^2+\left(y'(\theta)\right)^2=r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta=r^2+0$. 故 Γ 是 $\mathbb{R}^2$ 的 C^∞ 类简单曲线,

考虑函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 如下:

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=2\pi y.$$

则 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

我们来证明函数 f 沿曲线 Γ 的曲线积分 $\int_\Gamma f\,\mathrm{d}S$ 正好是球面 S_r^2 的面积.

设 $\sigma=(\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_m)$ 是区间 $[0,\pi]$ 的任一分割, 当 $\delta(\sigma)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}(\theta_i-\theta_{i-1})$ 充分小时, 联结 Γ 上两点 $\Gamma(\theta_{i-1})$ 与 $\Gamma(\theta_i)$ 的弦 $\Gamma(\theta_{i-1})\Gamma(\theta_i)$ 的长度, 记为 $\|\Gamma(\theta_{i-1})\Gamma(\theta_i)\|$ 近似于曲线弧 $\Gamma(\theta_{i-1})\Gamma(\theta_i)$ 的弧长. 从而弧段 $\Gamma(\theta_{i-1})\Gamma(\theta_i)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转面的面积近似于 $2\pi r\cdot\sin\theta_i\|\Gamma(\theta_{i-1})\Gamma(\theta_i)\|$,

因此曲线 $\varGamma$ 绕 x 轴旋转一周所得球面 S_r^2 的面积的近似值为

$$\sum_{i=1}^{m} 2\pi r \sin\theta_i \left\|\varGamma\left(\theta_{i-1}\right)\varGamma\left(\theta_i\right)\right\| \xrightarrow{\delta(\sigma)\to 0} \int_0^{\pi} 2\pi r \sin\theta \sqrt{\left(x'(\theta)\right)^2+\left(y'(\theta)\right)^2}\mathrm{d}\theta.$$

右边的积分正好就是函数 f 沿 $\varGamma$ 的曲线积分 $\displaystyle\int_{\varGamma} f\,\mathrm{d}S$. 因此球面 S_r^2 的面积 $S(\varSigma)$ 为:

$$\begin{aligned} S\left(S_r^2\right) &= \int_{\varGamma} f\,\mathrm{d}S \\ &= \int_0^{\pi} 2\pi r \sin\theta \sqrt{r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\mathrm{d}\theta = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

注 $\mathbb{R}^n$ 的任何一条 C^p 类简单曲线 $\varGamma$ 有一种与几何关系特别密切的参数表达式, 即以它的弧长为参数的表达式.

设 C^p 类简单曲线 $\varGamma$ 有参数表达式 (I,γ), 这里 $I=[a,b]$, 我们令

$$s(t)=\int_a^t \left\|\gamma'(t)\right\|\mathrm{d}t=\int_a^t \sqrt{\left(\gamma_1'(t)\right)^2+\left(\gamma_2'(t)\right)^2+\cdots+\left(\gamma_n'(t)\right)^2}\mathrm{d}t,$$

显然 $s(t)$ 就是 $([a,t],\gamma)$ 所代表的曲线 $\varGamma_t$ 的长度, 并且 $s(a)=0, s(b)=s(\varGamma)$.

由于函数 $t \longmapsto \left\|\gamma'(t)\right\|, t\in[a,b]$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故我们有

$$s'(t)=\left\|\gamma'(t)\right\|>0(\varGamma \text{ 的简单性 }).$$

根据反函数定理, 由方程 $s=s(t)$ 可定义 t 为 s 的反函数 $s\longmapsto t=\varphi(s), s\in[0,S(\varGamma)].\varphi:[0,S(\varGamma)]\to[a,b]$ 是 C^p 类微分同胚. 因此映射

$$\mu: J\to\mathbb{R}^n, \mu(s)=\gamma\circ\varphi(s), \forall s\in J=[0,S(\varGamma)]$$

是 C^p 类的, 从而 (J,μ) 是 $\varGamma$ 的以弧长 s 为参数的 C^p 类参数表达式.

2)$k=2$ 的情形

设 $\mathbb{R}^n$ 的 C^p 类 2 维简单曲面片 $\varSigma$ 有参数表达式 (D,φ), 这里

$$q(t,s)=\left(\varphi_1(t,s),\varphi_2(t,s),\cdots,\varphi_n(t,s)\right), \forall(t,s)\in D,$$

则

$$\mathrm{d}\varphi(t,s)\sim\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t}(t,s) & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial s}(t,s) \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t}(t,s) & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial s}(t,s) \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial t}(t,s) & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial s}(t,s) \end{pmatrix}$$

因此

$$\mathrm{d}\varphi(t,s)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\varphi(t,s)=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(t,s) & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t}(t,s)\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial s}(t,s) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial s}(t,s) & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial s}(t,s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial s}(t,s)\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial s}(t,s)\\ \vdots & \vdots\\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial\varphi_n}{\partial s}(t,s)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}(t,s)\right)^2 & \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}(t,s)\frac{\partial\varphi_i}{\partial s}(t,s)\\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}(t,s)\frac{\partial\varphi_i}{\partial s}(t,s) & \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial s}(t,s)\right)^2\end{pmatrix}$$

从而

$$\det\left(\mathrm{d}\varphi(t,s)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\varphi(t,s)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}(t,s)\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial s}(t,s)\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}(t,s)\frac{\partial\varphi_i}{\partial s}(t,s)\right)^2.$$

若我们记

$$E=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}(t,s)\right)^2, G=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial s}(t,s)\right)^2, F=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}(t,s)\frac{\partial\varphi_i}{\partial s}(t,s),$$

则我们得到下述形式的表达式：

$$S(\Sigma)=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S$$

$$\int_\Sigma f\,\mathrm{d}S=\iint_D f(\varphi(t,s))\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s$$

例题 20.28 求 $\mathbb{R}^3$ 中以原点为中心，以 R 为半径的球面被两个子午面 $\theta=\theta_1,\theta=\theta_2\ (\theta_1<\theta_2)$ 与两个平行圆 $a=a_1,a=a_2\ (a_1<a_2)$ 所割下来的曲面的面积.

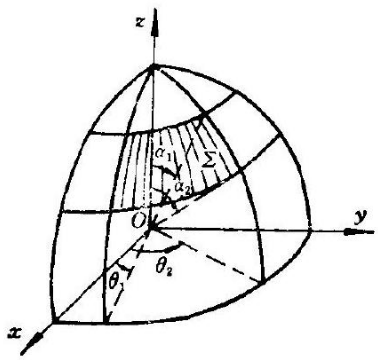


图 20.29

设所割下的球面部分为 Σ. 于是 Σ 有 C^∞ 类参数表达式

$$x=R\sin a\cos\theta, y=R\sin a\sin\theta, z=R\cos a, (\theta,a)\in[\theta_1,\theta_2]\times[a_1,a_2].$$

显然 Σ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个 C^∞ 类 2 维简单曲面片. 直接计算得到

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}(\theta,a)\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}(\theta,a)\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}(\theta,a)\right)^2=R^2\sin^2 a,$$
$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial a}(\theta,a)\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial a}(\theta,a)\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial a}(\theta,a)\right)^2=R^2,$$
$$F=\frac{\partial x}{\partial \theta}(\theta,a)\frac{\partial x}{\partial a}(\theta,a)+\frac{\partial y}{\partial \theta}(\theta,a)\frac{\partial y}{\partial a}(\theta,a)+\frac{\partial z}{\partial \theta}(\theta,a)\frac{\partial z}{\partial a}(\theta,a)=0.$$

因此 Σ 的曲面面积为

$$\begin{aligned}S(\Sigma)&=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{a_1}^{a_2}\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}a\\&=R^2\int_{\theta_1}^{a_2}\int_{a_1}^{a_2}\sin a\mathrm{d}\theta\mathrm{d}a\\&=R^2\left(\theta_2-\theta_1\right)\left(\cos a_1-\cos a_2\right)\end{aligned}$$

若我们令 $\theta_1\to 0,\hat{t}_2\to 2\pi,a_1\to 0,a_2\to\pi$, 则 Σ 趋于整个球面 $S_R^2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=R^2\right\}$, 从而球面 S_R^2 的面积

$$\begin{aligned}S\left(S_R^2\right)&=\lim S(\Sigma)\\&=\lim R^2\left(\theta_2-\theta_1\right)\left(\cos a_1-\cos a_2\right)\\&=4\pi R^2\end{aligned}$$

这与我们在例20.27中计算的结果是一致的.

例题 20.29 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的 C^p 类 2 维简单曲面片 Σ, 它的 C^p 类参数表达式 (D,φ) 为:

$$x=\varphi_1(t,s),y=\varphi_2(t,s),z=\varphi_3(t,s),\forall(t,s)\in D.$$

由 § 2 知道, $\forall(t,s)\in D$, $\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(t,s),\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(t,s),\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}(t,s)\right)$ 与 $\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}(t,s),\frac{\partial\varphi_2}{\partial s}(t,s),\frac{\partial\varphi_3}{\partial s}(t,s)\right)$ 构成 Σ 在点 $\boldsymbol{M}\left(\varphi_1(t,s),\varphi_2(t,s),\varphi_3(t,s)\right)$ 的切空间 $T_{\boldsymbol{M}}\Sigma$ 的基底, 因此 Σ 在点 $\boldsymbol{M}$ 处的法向量 $\boldsymbol{N}$ 为:

$$\boldsymbol{N}=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(t,s),\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(t,s),\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}(t,s)\right)\times\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}(t,s),\frac{\partial\varphi_2}{\partial s}(t,s),\frac{\partial\varphi_3}{\partial s}(t,s)\right)$$

此法向量 $\boldsymbol{N}$ 的长度 $\|\boldsymbol{N}\|$ 正好就是由向量 $\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(t,s),\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(t,s),\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}(t,s)\right)$ 与 $\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}(t,s),\frac{\partial\varphi_2}{\partial s}(t,s),\frac{\partial\varphi_3}{\partial s}(t,s)\right)$ 张成的 $\mathbb{R}^3$ 中的一个 2 维平行体的面积, 因此

$$\|\boldsymbol{N}\|=\left[\det\left(\mathrm{d}\varphi(t,s)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\varphi(t,s)\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

由此我们得到当 $n=3,k=2$ 时, C^p 类 2 维简单曲面片 Σ 的曲面面积 $S(\Sigma)$ 与函数 f 沿 Σ 的曲面积分 $\int_\Sigma f\mathrm{d}S$ 的另一表达式:

$$S(\Sigma)=\iint_D\|\boldsymbol{N}\|\mathrm{d}t\mathrm{d}s,\int_\Sigma f\mathrm{d}S=\iint_D f(\varphi(t,s))\|\boldsymbol{N}\|\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

特别地, 若 $\mathbb{R}^3$ 的 C^p 类 2 维简单曲面片 Σ 是以下述显式方程的形式给出:

$$z=h(x,y),(x,y)\in D$$

则我们可得到 Σ 的一个 C^p 类参数表达式 (D,φ) :

$$\varphi(x,y)=(x,y,h(x,y)),\forall(x,y)\in D$$

这时

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x,y),\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x,y),\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}(x,y)\right)=\left(1,0,\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\right),$$
$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}(x,y),\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}(x,y),\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}(x,y)\right)=\left(0,1,\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)$$

因此法向量

$$\boldsymbol{N}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ 1 & 0 & \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y)\\ 0 & 1 & \dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y)\end{vmatrix}=-\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\boldsymbol{e}_1-\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$$

这里 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的标准基底, 从而

$$\|\boldsymbol{N}\|=\sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)^2}.$$

于是在 $\mathbb{R}^3$ 的 C^p 类 2 维简单曲面片 Σ 是以显式方程 $z=h(x,y),\ (x,y)\in D$ 的形式给出的情况下, 我们得到 Σ 的曲面面积 $S(\Sigma)$ 与 f 沿 Σ 的曲面积分 $\int_\Sigma f\,\mathrm{d}S$ 的下述形式的表达式:

$$S(\Sigma)=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\int_\Sigma f\,\mathrm{d}S=\iint_D f(x,y,h(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例题 20.30 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=b^2(b>0)$ 在平面 $z=h(0<h<\mathrm{b})$ 上面的部分.

1) 计算 Σ 的曲面面积 $S(\Sigma)$.

2) 计算曲面积分 $\int_\Sigma\frac{1}{z}\mathrm{d}S$. 曲面 Σ 有显式方程

$$z=\sqrt{b^2-x^2-y^2}$$

这里 $(x,y)\in D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leqslant b^2-h^2\right\}$. 直接计算得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=-\frac{x}{\sqrt{b^2-x^2-y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=-\frac{y}{\sqrt{b^2-x^2-y^2}}.$$

因此曲面 Σ 的曲面面积 $S(\Sigma)$ 及曲面积分 $\int_\Sigma \frac{1}{z}\mathrm{d}S$ 为：

$$\begin{aligned}
S(\Sigma) &= \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \sqrt{1+\frac{x^2}{b^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{b^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{b^2-h^2}} \frac{br}{b^2-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi b(b-h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma \frac{1}{z}\mathrm{d}S &= \iint_D \frac{1}{\sqrt{b^2-x^2-y^2}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \frac{b}{b^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{b^2-h^2}} \frac{br}{b^2-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi b\log\frac{b}{h}.
\end{aligned}$$

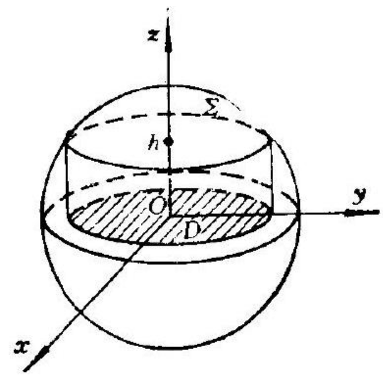


图 20.30

3)$k=n$ 的情形

在这种情况下，若设 $\mathbb{R}^n$ 的 C^p 类 n 维简单曲面片 Σ 的参数表达式为 (D,φ), 其中 D 为紧集,

$$\varphi(x)=(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)),\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D,$$

则 φ 在 x 处的微分 $\mathrm{d}\varphi(x)$ 为：

$$\mathrm{d}\varphi(x)\sim\begin{pmatrix}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}(x) \\
\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}(x) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}(x)
\end{pmatrix}.$$

因此

$$\left[\det(\mathrm{d}\varphi(x)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\varphi(x)\right]^{\frac{1}{2}} = |\varDelta_{\varphi}(x)|$$

从而 $\mathbb{R}^n$ 的 C^p 类 n 维简单曲面片 $\varSigma$ 的曲面面积 $S(\varSigma)$ 及函数 f 的曲面积分 $\int_{\varSigma} f\mathrm{d}S$ 具有下述形式

$$S(\varSigma) = \int_D \left|\varDelta_{\varphi}(x)\right| \mathrm{d}x$$

$$\int_{\varSigma} f\,\mathrm{d}S = \int_D f(\varphi(x)) \left|\varDelta_{\varphi}(x)\right| \mathrm{d}x$$

显然，$S(\varSigma)$ 实际上就是 $\varSigma$ 的 n 维体积，而 $\int_{\varSigma} f\,\mathrm{d}S$ 的表达式正好是 n 重积分的变元替换公式. 因为这时 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 维简单曲面片 $\varSigma$ 的支承集 $\varphi(D) = G$ 就是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 n 维紧可测集，并且

$$\int_{\varSigma} f\,\mathrm{d}S = \int_G f(y)\mathrm{d}y = \int_D f(\varphi(x)) \left|\varDelta_{\varphi}(x)\right| \mathrm{d}x$$

注 读者到这里可以发现，无论是在例20.27 还是在例20.28 中计算 $\mathbb{R}^3$ 的整个球面 S^2 的曲面面积时，我们都没有直接利用曲面面积公式

$$S(\varSigma) = \int_D \left[\det\left(\mathrm{d}\varphi(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\varphi(t)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t$$

这是因为 S^2 不是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个 2 维简单曲面片，而是 $\mathbb{R}^3$ 的一个 2 维紧子流形 ($\mathbb{R}^3$ 的 k 维子流形 M 称为紧的，如果 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧集).

为了解决 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维紧子流形 M 的 k 维面积的定义及计算问题，通常有两种方法:

第一种方法：就是将紧子流形 M 分割成有限个 k 维简单曲面片 $\varSigma_1, \varSigma_2, \cdots, \varSigma_m$ 使得它们互不重迭，然后定义 M 的 k 维面积 $S(M)$ 为这些简单曲面片的 k 维面积 $S\left(\varSigma_i\right)$ 之和，即

$$S(M) \triangleq \sum_{i=1}^{m} S\left(\varSigma_i\right).$$

但是要证明每一个 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维紧子流形 M 都能这样进行分割不是一件容易的事，同样地，证明这样定义的 k 维面积的值与 M 的分割法无关也相当困难.

第二种方法：就是采用所谓单位分解的办法，这个方法避免了分割法中 $\varSigma_i$ 与 $\varSigma_j$ 不能重迭所产生的困难.

当然，实际计算 $\mathbb{R}^n$ 的一个 k 维子流形 M 的 k 维面积 $S(M)$ 时，我们都是采用第一种分割法，而并不把单位分解法作为计算的手段.

下面我们就来介绍紧子流形的单位分解.

4. 紧子流形的单位分解

定义 20.17

设 $f : X\left(\subset \mathbb{R}^n\right) \to \mathbb{R}$ 是任一函数，令

$$E = \{\boldsymbol{x} \in X \mid f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}\},$$

则 $\overline{E}$ 称为函数 f 的支集，记为 $\operatorname{supp}(f)$.

例题 20.31 考虑如下定义的两个函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 与 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$：

$$f(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right), & -1<x<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1;\end{cases}$$

$$F(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{1-\left(\frac{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}{\delta}\right)^2}\right), & \forall \boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{x}_0,\delta),\\ 0, & \forall \boldsymbol{x}\notin B(\boldsymbol{x}_0,\delta),\end{cases}$$

函数 f 与 F 都是 C^∞ 类的，并且

$$\operatorname{supp}(f)=[-1,1],\operatorname{supp}(F)=\overline{B}(x_0,\delta).$$

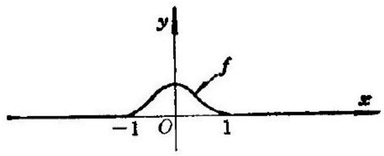


图 20.31

定义 20.18

设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的任一 C^p 类 k 维子流形，$\{(U_a,\varphi_a^{-1})\}$ 是 M' 的任一 C^p 类坐标图册. $\pi_i:M\to\mathbb{R}(i=1,2,\cdots,m)$ 是 m 个函数. 我们称函数族 $\{\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m\}$ 是 M 的一个 C^∞ 类单位分解，如果下述性质成立：

1. $\forall i=1,2,\cdots,m,\pi_i\geqslant 0$ 并且 π_i 是 C^∞ 类的.
2. $\forall i=1,2,\cdots,m,\operatorname{supp}(\pi_i)$ 是某一个坐标邻域 U_a 的紧子集.
3. $\forall x\in M,\sum\limits_{i=1}^{m}\pi_i(x)=1$.

定理 20.11

$\mathbb{R}^n$ 的任一 C^p 类 k 维紧子流形 M 都存在 C^∞ 类单位分解.

证明 设 $\{(U_a,\varphi_a^{-1})\}$ 是 M 的任一 C^p 类坐标图册. 令 $I_a=\varphi_a^{-1}(U_a)$. 不失一般性，通式缩小 I_a，可以假设 I_a 是 R^k 的紧可测集. 我们用 Σ_a 表示以 (I_a,φ_a) 为参数表达式的 M 的一个 C^p 类 k 维简单曲面片.

对每一个 a，由于 U_a 是 M 的开集，故存在 $\mathbb{R}^n$ 的开集 W_a 使得 $U_a=W_a\cap M$.

$\forall x\in M$，存在 U_{a_x} 使得 $x\in U_{a_x}\subset W_{a_x}$，取充分小 $\delta_x>0$，使得 $B(x,\delta_x)\subset W_{a_x}$. 显然

$$M=\bigcup_{x\in M}(B(x,\delta_x)\cap U_{a_x})\subset\bigcup_{x\in M}U_{a_x}$$

由 M 的紧性知，存在有限个 $x_1,x_2,\cdots,x_m\in M$ 使得

$$M=\bigcup_{i=1}^{m}\left(B(x_i,\delta_{x_i})\cap U_{a_{x_i}}\right)\subset\bigcup_{i=1}^{m}U_{a_{x_i}}.$$

令 $F_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}(i=1,2,\cdots,m)$ 为

$$F_i(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{1-\left(\frac{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i\|}{\delta_{\boldsymbol{x}_i}}\right)^2}\right), & \forall\boldsymbol{x}\in B\left(\boldsymbol{x}_i,\delta_{\boldsymbol{x}_i}\right),\\ 0, & \forall\boldsymbol{x}\notin B\left(\boldsymbol{x}_i,\delta_{\boldsymbol{x}_i}\right),\end{cases}$$

则 $\operatorname{supp}(F_i)=\overline{B}\left(\boldsymbol{x}_i,\delta_{\boldsymbol{x}_i}\right)$, 并且

$$\forall x\in M, F_1(x)+F_2(x)+\cdots+F_m(x)>0.$$

现在我们定义函数 $\pi_i:M\to\mathbb{R}$ 如下

$$\forall x\in M,\pi_i(x)=\frac{F_i(x)}{F_1(x)+F_2(x)+\cdots+F_m(x)}(i=1,2,\cdots,m),$$

则

1)$\forall i=1,2,\cdots,m,\pi_i\geqslant 0$ 并且 π_i 是 C^∞ 类的.

2)$\forall i=1,2,\cdots,m,\pi_i$ 的支集 $\operatorname{supp}(\pi_i)$ 满足

$$\operatorname{supp}(\pi_i)=\operatorname{supp}(F_i|_M)=\overline{B}\left(x_i,\delta_{x_i}\right)\cap M\subset U_{a_{x_i}},$$

并且 $\operatorname{supp}(\pi_i)$ 显然是紧集.

3)$\forall x\in M,\sum\limits_{i=1}^m\pi_i(x)=1.$

因此函数族 $\{\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m\}$ 是 M 的一个 C^∞ 类单位分解.

5. 函数沿 k 维子流形的积分

设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的任一 C^p 类 k 维紧子流形, $\left\{\left(U_a,\varphi_a^{-1}\right)\right\}$ 是 M 的任一 C^p 类坐标图册. 像在上述定理的证明过程中所指出的一样, 我们可以假设 $(I_a,\varphi_a)\left(I_a=\varphi_a^{-1}(U_a)\right)$ 所代表的 Σ_a 是 M 的 C^p 类 k 维简单曲面有. $\{\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m\}$ 是 M 的一个 C^∞ 类单位分解, 使得

$$\forall i=1,2,\cdots,m,\operatorname{supp}(\pi_i)\subset U_{a_i},$$

于是

$$M=\bigcup_{i=1}^m\Sigma_{a_i}.$$

现在设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是任一开集且 $M\subset U$, $f:U\to\mathbb{R}$ 是任一连续函数. 于是 $\forall i=1,2,\cdots,m$, $f\pi_i$ 的支集 $\operatorname{supp}(f\pi_i)\subset\operatorname{supp}(\pi_i)\subset U_{a_i}$, 从而函数 $f\pi_i$ 沿 k 维简单曲面片 Σ_{a_i} 的曲面积分 $\displaystyle\int_{\Sigma_{a_i}}f\pi_i\mathrm{d}S$ 有定义, 从而

$$\sum_{i=1}^m\int_{\Sigma_{a_i}}f\pi_i\mathrm{d}S$$

是一个确定实数.

下面我们来证明：若 $\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_2\}$ 是 M 关于坐标图册 $\left\{\left(V_\beta,\psi_\beta^{-1}\right)\right\}$ 的一个 C^∞ 类单位分解, 并且

$$\operatorname{supp}(\mu_j)\subset V_{\beta_j},M=\bigcup_{j=1}^l\Sigma_{\beta_j},$$

这里 Σ_{β_j} 是由参数表达式 $(J_{\beta_j},\psi_{\beta_j})\left(J_{\beta_j}=\psi_{\beta_j}^{-1}(V_{\beta_j})\right)$ 所代表的 M 的一个 C^p 类 k 类简单曲面片, 则

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{\Sigma_{a_i}} f\pi_i\,\mathrm{d}S=\sum_{j=1}^{l}\int_{\Sigma_{\beta_j}} f\mu_j\,\mathrm{d}S$$

事实上, $\forall x\in M$ 我们有

$$f(x)\mu_j(x)=\sum_{i=1}^{m} f(x)\mu_j(x)\pi_i(x).$$

因此

$$\int_{\Sigma_{\beta_j}} f\mu_j\,\mathrm{d}S=\sum_{i=1}^{m}\int_{\Sigma_{\beta_j}} f\mu_j\pi_i\,\mathrm{d}S=\sum_{i=1}^{m}\int_{\Sigma_{\beta_j}\cap\Sigma_{a_i}} f\mu_j\pi_i\,\mathrm{d}S$$

从而

$$\sum_{j=1}^{l}\int_{\Sigma_{\beta_j}} f\mu_j\,\mathrm{d}S=\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{m}\int_{\Sigma_{\beta_j}\cap\Sigma_{a_i}} f\mu_j\pi_i\,\mathrm{d}S$$

同理, 我们又有

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{\Sigma_{a_i}} f\pi_i\,\mathrm{d}S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}\int_{\Sigma_{a_i}\cap\Sigma_{\beta_j}} f\pi_i\mu_j\,\mathrm{d}S$$

由此推得

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{\Sigma_{a_i}} f\pi_i\,\mathrm{d}S=\sum_{j=1}^{l}\int_{\Sigma_{\beta_j}} f\mu_j\,\mathrm{d}S$$

上述分析表明, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\int_{\Sigma_{a_i}} f\pi_i\,\mathrm{d}S$ 是一个只与 f 及 M 有关而与 M 的坐标图册以及相应的 C^∞ 类单位分解的选择无关的定数, 因此我们引入下述定义就是合理的.

定义 20.19

设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的任一 C^p 类 k 维紧子流形, $U\subset\mathbb{R}^n$ 是任一开集且 $M\subset U$, $f:U\to\mathbb{R}$ 是任一连续函数, 函数族 $\{\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m\}$ 是关于 M 的 C^p 类坐标图册 $\{(U_a,\varphi_a^{-1})\}$ 的任一 C^∞ 类单位分解, 则函数 f 沿 k 维紧子流形 M 的积分, 记为 $\displaystyle\int_M f\,\mathrm{d}S$, 定义为:

$$\int_M f\,\mathrm{d}S\triangleq\sum_{i=1}^{m}\int_{\Sigma_{a_i}} f\pi_i\,\mathrm{d}S$$

这里 Σ_{a_i} 如上所定义.

由这个定义可知

1) 若 M 就是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 C^p 类 k 维简单曲面片, 则上述定义与前面的曲面积分的定义一致.

2) 若 $f=1$, 则上述积分就是 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维紫子流形 M 的 k 维测度或 k 维面积, 即

$$S(M)=\int_M \mathrm{d}S=\sum_{i=1}^{m}\int_{\Sigma_{a_i}}\pi_i\,\mathrm{d}S$$

♣

例题 20.32 计算由下述参数表达式

$$\varphi(\theta, a)=\begin{pmatrix}(a+r\cos\theta)\cos a\\(a+r\cos\theta)\sin a\\r\sin\theta\end{pmatrix}, (\theta, a)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi], a>r>0$$

定义的的面 T^2 的 2 维面积 $S\left(T^2\right)$.

T^2 是 $\mathbb{R}^3$ 的 C^∞ 类 2 维紧子流形. 我们分别用 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ 表示由 $([0,\pi]\times[0,\pi],\varphi)$, $([0,\pi]\times[\pi,2\pi],\varphi)$, $([\pi,2\pi]\times[0,\pi],\varphi)$, $([\pi,2\pi]\times[\pi,2\pi],\varphi)$ 所代表的 T^2 的 4 个 C^∞ 类 2 维简单曲面片, 则 $(\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3,\Sigma_4)$ 形成 T^2 的一个分割, 从而

$$S\left(T^2\right)=S\left(\Sigma_1\right)+S\left(\Sigma_2\right)+S\left(\Sigma_3\right)+S\left(\Sigma_4\right).$$

直接计算可知, $\forall(\theta, a)\in(0,2\pi]\times[0,2\pi]$,

$$\det\left(f\mathrm{d}\varphi(\theta,a)^{\mathrm{T}}f\mathrm{d}\varphi(\theta,a)\right)=\begin{vmatrix}r^2&0\\0&(a+r\cos\theta)^2\end{vmatrix}=r^2(a+r\cos\theta)^2$$

因此

$$\begin{aligned}S\left(\Sigma_1\right)&=\int_0^\pi\int_0^\pi\left[\det\left(\mathrm{d}\varphi(\theta,a)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\varphi(\theta,a)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}a\\&=\int_0^\pi\int_0^\pi r(a+r\cos\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}a\\&=\pi r\int_0^\pi(a+r\cos\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\pi^2ar\\S\left(\Sigma_2\right)&=\int_\pi^{2\pi}\int_0^\pi\left[\det\left(\mathrm{d}\varphi(\theta,a)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\varphi(0,a)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}a\\&=\int_\pi^{2\pi}\int_0^\pi r(a+r\cos\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}a\\&=\pi^2ar\\S\left(\Sigma_3\right)&=\int_0^\pi\int_\pi^{2\pi}\left[\det\left(\mathrm{d}q(\theta,a)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\varphi(\theta,a)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}a\\&=\pi^2ar\\S\left(\Sigma_4\right)&=\int_\pi^{2\pi}\int_\pi^{2\pi}\left[\det\left(\mathrm{d}\varphi(\theta,a)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\varphi(\theta,a)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}a\\&=\pi^2ar\end{aligned}$$

故 $\mathbb{R}^3$ 的环面 T^2 的 2 维面积为

$$S\left(T^2\right)=4\pi^2ar.$$

例题 20.33 计算 $\mathbb{R}^n$ 的 C^∞ 类 $n-1$ 维单位球面

$$S^{n-1}=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1\right\}$$

的 $n-1$ 维面积 $S\left(S^{n-1}\right)$.

S^{n-1} 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 C^∞ 类 $n-1$ 维紧子流形. 我们设 S^{n-1} 具有下述分割:

$$\{\Sigma_1,\Sigma_2,\cdots,\Sigma_m\},$$

这里 $\Sigma_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是由 $\left(I_i^{n-1},\varphi_i\right)$ 所代表的 S^{n-1} 的 C^∞ 类 $n-1$ 维简单曲面片，其中 $I_i^{n-1}\subset\mathbb{R}^{n-1}$ 是一闭长方体 $(i=1,2,\cdots,m)$ 于是 S^{n-1} 的 $n-1$ 维面积 $S\left(S^{n-1}\right)$ 为：

$$S\left(S^{n-1}\right)=S\left(\Sigma_1\right)+S\left(\Sigma_2\right)+\cdots+S\left(\Sigma_m\right)$$

下面我们来计算 $S\left(\Sigma_i\right)$.

$\forall\varepsilon>0$, 定义映射 $\Phi: I_i^{n-1}\times[\varepsilon,1]\to\mathbb{R}^n$ 如下：

$$\forall(t,r)\in I^{n-1}\times[\varepsilon,1],\Phi(t,r)=r\varphi_i(t).$$

我们记 $B_i=\Phi\left(I_i^{n-1}\times[\varepsilon,1]\right)$(如图20.32所示)，于是 B_i 是 $\mathbb{R}^n$ 的可测集，其 n 维体积

$$m\left(B_i\right)=\int_{B_i}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\int_{I_i^{n-1}\times[\varepsilon,1]}\left|\Delta_\Phi(t,r)\right|\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r$$

这里 $\left|\Delta_\Phi(t,r)\right|$ 就是由下述 n 个线性无关的向量

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t_1}(t,r),\frac{\partial\Phi}{\partial t_2}(t,r),\cdots,\frac{\partial\Phi}{\partial t_{n-1}}(t,r),\frac{\partial\Phi}{\partial r}(t,r)$$

张成的 $\mathbb{R}^n$ 的一个 n 维平行体 P^n 的体积. 由于

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}(t,r)=\varphi_i(t)\in S^{n-1}$$

是一个单位向量，它正交于下面的每一个向量：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t_1}(t,r)=r\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_1}(t,r),\cdots,\frac{\partial\Phi}{\partial t_{n-1}}(t,r)=r\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_{n-1}}(t,r).$$

若我们令 Q 为这 $n-1$ 个向量张成的 $\mathbb{R}^n$ 的一个 $n-1$ 维的平行体，则 $m\left(P^n\right)=S(Q)$, 因此

$$\begin{aligned}\left|\Delta_\phi(t,r)\right|&=m\left(P^n\right)=S(Q)\\&=\left[\det\left((r\mathrm{d}\varphi(t))^{\mathrm{T}}(r\mathrm{d}\varphi(t))\right)\right]^{\frac{1}{2}}\\&=r^{n-1}\left[\det\left(\mathrm{d}p(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\varphi(t)\right)\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}m\left(B_i\right)&=\int_{I_i^{n-1}\times[\varepsilon,1]}r^{n-1}\left[\det\left(\mathrm{d}\varphi(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\varphi(t)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r\\&=\int_\varepsilon^1 r^{n-1}\left(\int_{I_i^{n-1}}\left[\det\left(\mathrm{d}\varphi(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\varphi(t)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}r\\&=\int_\varepsilon^1 r^{n-1}S\left(\Sigma_i\right)\mathrm{d}r\\&=\frac{S\left(\Sigma_i\right)}{n}\left(1-\varepsilon^n\right).\end{aligned}$$

两边对 i 从 1 到 m 求和得到

$$\begin{aligned}m\left(B^n-\operatorname{Int}B_i^n\right)&=\sum_{i=1}^m m\left(B_i\right)\\&=\sum_{i=1}^m\frac{S\left(\Sigma_i\right)}{n}\left(1-\varepsilon^n\right)\\&=\frac{1}{n}S\left(S^{n-1}\right)\left(1-\varepsilon^n\right)\end{aligned}$$

这里 B^n 为 $\mathbb{R}^n$ 的单位球体，B_ε^n 是 $\mathbb{R}^n$ 的以原点为中心，以 ε 为半径的球体.

现在令 $\varepsilon \to 0$ 取极限得到

$$S\left(S^{n-1}\right)=n\cdot m\left(S^{n}\right)=\begin{cases}\dfrac{2\pi^{k}}{(k-1)!}, & n=2k\\ \dfrac{2^{k+1}\pi^{k}}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-1)}, & n=2k+1\end{cases}$$

特别地，当 $n=2,3$ 时，我们得到

$$S\left(S^{1}\right)=2\pi. \quad (\text{单位圆周的周长})$$
$$S\left(S^{2}\right)=4\pi. \quad (\text{单位球面的面积})$$

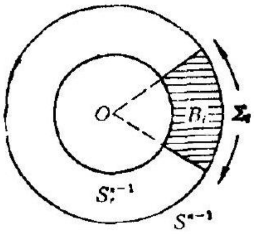


图 20.32

作为这一节的结束，我们对单位分解再作一点说明.

由前面函数沿子流形积分的定义的分析过程可以看出，单位分解的作用就在于利用它先化整体问题为局部问题，然后从局部又返回到整体，从而使问题顺利得到解决.

正是由于单位分解的这一特殊功能，它在现代数学问题的好些研究领域中发挥了重要作用. 在下一章的微分形式沿子流形的积分的定义及 Stokes 公式的证明过程中，我们将再一次看到单位分解所起的作用.

单位分解并不限于上面我们介绍的 $\mathbb{R}^n$ 的紧子流形上的 C^∞ 类有限单位分解类型. 对于一般的单位分解的概念读者可参看：徐森林, 薛春华：《流形》，高等教育出版社，1991 年第 1 版，36-44.

习题

1. 设 A 是任一 $n\times k$ $(k\leqslant n)$ 矩阵，我们令 $i=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$，这里 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$. 记 G_k 为所有这种 i 的集合，A_i 为 A 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行上的元素所组成的 $k\times k$ 矩阵.
   1) 证明：$\det\left(A^{\mathrm{T}}A\right)=\sum\limits_{i\in G_k}(\det A_i)^2$.
   2) 设 P^k 为 $\mathbb{R}^n$ 中由 k 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ $(k\leqslant n)$ 所张成的 k 维平行体. $\boldsymbol{A}$ 是以 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ 为列向量的 $n\times k$ 矩阵，证明：
   $$S\left(P^k\right)=\left(\sum_{i\in G_k}(\det A_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
   3) 设 P^2 是 $\mathbb{R}^3$ 中由向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所张成的 2 维平行体，记 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的叉积 (或向量积)，证明：$S\left(P^2\right)=\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|$.
2. 设 P^3 是 $\mathbb{R}^3$ 中由向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 张成的 3 维平行体，证明 P^3 的 3 维体积 $m\left(P^3\right)=|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$. 这里 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 的内积.

3. 试计算下列各参数式 (I,φ) 所代表的平面或空间曲线的弧长：
   1) $I=[0,2\pi]$，$\varphi(t)=(a(\cos t+t\sin t),a(\sin t-t\cos t)),(a>0)$
   2) $I=[0,1]$，$\varphi(t)=(t-\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t,2\operatorname{ch}t)$；
   3) $I=[0,2\pi]$，$\varphi(t)=\left(a\cos^3 t,a\sin^3 t,b\cos 2t\right)\ (a,b\in\mathbb{R})$；
   4) $I=[0,1]$，$\varphi(t)=\left(3t^2,t^3-3t,t^3+3t\right)$.
4. 设空间曲线 Γ 的参数表达式 (I,φ) 为：
$$I=[0,A]\ (A>0),\varphi(t)=\left(b\cos t,b\sin t,\sqrt{a^2-b^2t^2}\right),(a,b>0)$$
   证明：Γ 的弧长 $S(\Gamma)=a\arcsin\dfrac{bA}{a}$.
5. 试计算下列各曲线积分：
   1) $\displaystyle\int_\Gamma\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}S$，$\Gamma$ 的参数表达式 (I,φ) 为：$I=[0,2\pi]$，$\varphi(t)=(a(t-\sin t),a(1-\cos t))$；
   2) $\displaystyle\int_\Gamma\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}S$，$\Gamma$ 由方程 $x^2+y^2=ax$ 所定义；
   3) $\displaystyle\int_\Gamma\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}S$，$\Gamma$ 的参数表达式 (I,φ) 为：$I=[0,2\pi]$，$\varphi(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)\ (a>0,b>0)$；
   4) $\displaystyle\int_\Gamma z\,\mathrm{d}S$，$\Gamma$ 的参数表达式 (I,φ) 为：$I=[0,a]$，$\varphi(t)=(t\cos t,t\sin t,t)\ (a>0)$.
6. 设空间曲线 Γ 的参数表达式 (I,φ) 为：
$$I=[0,1],\ \varphi(t)=\frac{1}{3\sqrt{2a}}\left(3at-at^3,3at^2,3at+at^3\right)$$
   一条细电线被弯成曲线 Γ 的形状. 假设在参数为 t 的任一点 $\varphi(t)$ 处电线的单位长度的质量等于 $(1+S(t))$，其中 $S(t)$ 表示从 $\varphi(0)$ 到 $\varphi(t)$ 之间电线的长度，试计算电线的总质量.
7. 设 $\mathbb{R}^3$ 中的 2 维简单曲面片 Σ 的参数表达式 (D,φ) 为：
$$\varphi(u,v)=\left(u\cos v,u\sin v,\frac{\sqrt{3}}{u}\right),\ \forall(u,v)\in D$$
   这里 D 是 uv 平面上由曲线 $v=u^4,v=2u^4$ 及直线 $u=1,u=\sqrt{3}$ 所围成的区域. 证明：Σ 的面积 $S(\Sigma)=\frac{4}{3}(3\sqrt{3}-1)$.
8. 计算下列各曲面积分：
   1) $\displaystyle\int_\Sigma z^2\,\mathrm{d}S$，$\Sigma$ 是由方程 $x^2+y^2+z^2=a^2,z\geqslant 0$ 所确定的上半球面；
   2) $\displaystyle\int_\Sigma\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}S$，$\Sigma$ 是由方程 $z^2=3\left(x^2+y^2\right)$ 所确定的介于 $z=0$ 与 $z=3$ 之间的锥面部分；
   3) $\displaystyle\int_\Sigma\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}S$，$\Sigma$ 的参数表达式 (D,φ) 为：
$$D=[0,2\pi]\times[0,l],\ \varphi(\theta,z)=(a\cos\theta,a\sin\theta,z)$$
   4) $\displaystyle\int_\Sigma\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S$，$\Sigma$ 为四面体 $x+y+z\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$ 的边界曲面 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+y+z$
   5) $\displaystyle\int_\Sigma(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，$\Sigma$ 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截下的部分.
9. 设曲面 Σ 的参数表达式 (D,φ) 为：
$$D=[0,1]\times[0,2\pi],\ \varphi(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta,r)$$
   若 Σ 的每一点的单位面积的质量等于该点到 Σ 的中心轴的距离的 k 倍 (k 为常量)，试计算 Σ 的总质量.

10. 设 Γ 是抛物面 $z+2=x^2+y^2$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的交线，我们用 Σ 表示球面被 Γ 所截的较小的球面部分，试计算 Σ 的面积 $S(\Sigma)$.
11. 设 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是由 $T(x)=bx$ 定义的线性映射，(D,φ) 是 $\mathbb{R}^n$ 中任一 C^p 类 k 维简单曲面片 Σ 的参数表达式，记 Ω 为 $(D, T\circ\varphi)$ 所代表的 k 维简单曲面片. 证明：
$$S(\Omega)=b^k S(\Sigma)$$
12. 设 X 是由参数表达式 $([a,b]\times[0,2\pi],\Theta)$ 所代表的旋转曲面：
$$\forall (t,\theta)\in[a,b]\times[0,2\pi], \Theta(t,\theta)=(f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, g(t)).$$
令 Γ 为 yOz 平面上以 $y=f(t), z=g(t), t\in[a,b]$ 为参数表达式的曲线 (即 X 的母线). 证明：X 的面积
$$S(X)=2\pi\int_\Gamma y\,\mathrm{d}S$$
13. 设 Γ 是 xOy 平面上一条 C^p 类曲线 $(p>1)$，它的以弧长为参数的参数表达式 $([0,L],\gamma)$ 为：
$$\forall s\in[0,L],\ \gamma(s)=(\alpha(s),\beta(s)),\quad \big(\alpha'(s)\big)^2+\big(\beta'(s)\big)^2=1$$
定义映射 $\varphi:[0,L]\times[0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$ 如下：
$$\forall (s,\theta)\in[0,L]\times[0,2\pi],\ \varphi(s,\theta)=\begin{pmatrix}\alpha(s)+r\beta'(s)\cos\theta\\ \beta(s)-r\alpha'(s)\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}(r>0)$$
证明：由 $([0,L]\times[0,2\pi],\varphi)$ 所代表的 $\mathbb{R}^3$ 中的 2 维曲面 Σ 的面积
$$S(\Sigma)=2\pi rL$$