数学分析

课程手稿

作者：迷途小书童

组织：Institute of Mathematics

时间：October 8, 2025

版本：第二次修正

Marie Curie：Life is not easy for any of us. But what of that?

We must have perseverance and above all confidence in ourselves.

We must believe that we are gifted for something and that this thing must be attained.

ElegantLaTeX Program

作者联系方式：learnweierstrass@gmail.com

从“无穷的冒险”到“严密的基石”：数学分析之路

欢迎来到《数学分析》的课堂. 本教材的起点是高度抽象的**“集合与映射”**. 这或许会让你们疑惑: 数学分析不是关于微积分的吗？那些激动人心的变化、速度、面积都去哪了？为什么我们不像历史那样, 从微积分开始?

今天, 就让我们穿越时空, 先快速回顾一场跨越数百年的伟大智力冒险, 再回来看为什么我们选择的这条道路, 是通往真理的**必经之门**.

英雄时代——直觉的辉煌与迷雾 (17 世纪)

我们的故事始于科学史上一个群星闪耀的时代.

Newton 在思考行星轨道和物体运动时, 需要描述**“瞬时变化”**. 为了定义**瞬时速度**（路程的变化率）和**计算不规则面积**, 他发明了“流数术”.

与此同时, 在另一端,**Leibniz** 独立地发明了微积分, 他引入了我们今天熟悉的 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 和 $\int$ 等优美符号.

这仿佛为人类送上了一把“神力钥匙”! 科学家们第一次能**定量地**处理**变化、运动、无限和连续**这些概念. 天文学、物理学、工程学因此获得了爆炸性的发展. **微积分展现了它无与伦比的威力, 但它建立在“无穷小量”这个模糊的直觉上**——一个时而为 0（在除法时）, 时而又不是 0（在加法时）的“幽灵”. **Berkeley** 主教嘲讽它是“消失的鬼魂”. 这座宏伟的建筑, 地基充满了裂缝.

严密化运动——为巨人打造坚实地基 (18-19 世纪)

微积分工具如此有效, 以至于工程师们争相使用它去改造世界, 但数学家们却陷入了深深的焦虑. 数学需要一场严密化的革命.

一代数学巨匠开始了为分析学奠定逻辑基础的伟大工作:

Cauchy 首先站出来, 用**极限**的概念取代了模糊的“无穷小”, 让“无限趋近”有了更清晰的表述.

Weierstrass 给出了最终的答案:“$\varepsilon-\delta$ 语言”. 这套语言像一套精密的**法律条文**, 用静态的、有限的数学, 完美地定义了动态的、无限的过程, 彻底驱散了“鬼魂”.

Riemann 等人则严格定义了**积分**

至此, **微积分**从一门强大的计算工具, 进化成了逻辑严密的**数学分析**

终极奠基——集合论：现代数学的“原子”与“语言”

严密主义者们发现, **极限论依赖于实数理论, 实数理论依赖于有理数, 有理数依赖于整数, 整数最终依赖于自然数**——那么, 整个数学大厦最根本、最无可置疑的基础是什么?

19 世纪末到 20 世纪初, 以 **Cantor**（创立集合论）、**Russel**、**Hilbert**、**Zermelo** 等为代表的思想家. 发起了为整个数学寻找终极地基的宏大运动. 他们的答案是: 几乎所有数学对象都可以被看作是**“集合,”** **几乎所有数学推理都可以从“集合”的基本性质和公理中推导出来**.

我们不是在回避微积分的历史, 而是在重走人类思想的进化之路——但不是从原始的直觉开始, 而是直接站在巨人的肩膀上, 从**逻辑的终点**出发, 去反向构建整个宏伟的理论体系.

“集合”是构建一切数学对象的“原子”(数、函数、空间都是某种集合)

“映射”是描述对象之间“关系与动作”的通用语言（函数、极限、算子都是某种映射）

学习这套语言, 就像一位建筑师在学习看最标准的蓝图, 学习分辨最基础的钢筋和水泥. 这个过程或许不如直接欣赏一座建成的教堂那样令人兴奋, 但**这是你从“使用者”转变为“创造者”和“理解者”的关键一步**

我们的教材之所以经典, 正是因为它引导我们**直接深入内核**, 用最现代、最深刻的视角来理解数学分析. 这条路起点很高, 颇具挑战, 但这意味着我们将从一开始就站在思想的最高处.

现在, 就让我们手握“集合”与“映射”这份最强大的蓝图, 从第一块砖开始, 亲自动手, **一砖一瓦地、逻辑严密地重建起整座数学分析的宏伟大厦**

我们的冒险, 现在开始.

目录

第一章 集合与映射

这一章我们首先介绍了集合的定义、集合的运算、集合的关系，然后利用集合的关系定义了映射，并利用映射研究了集合的可数性. 这些内容是全书的基础.

1.1 集合

1. 集合的定义

集合这个名词是由德国数学家 G. Cantor 在 1874 年首先提出的. 这是一个至今没有严格数学定义的概念. 为了完备起见，我们直接采用 Cantor 原话作为我们的定义.

定义 1.1

"集合是由我们直观感觉或意识到的、确定的、不同对象汇集而成的一个整体. 这些对象称为此集合的元素 (成员)" 或点.

通常用大写字母 $A, B, X, Y, \Omega \cdots$ 表示集合，而用小写字母 $a, b, x, y, \omega \cdots$ 表示集合的元素.

若 a 是集合 A 的元素，则称 a 属于 A, 记为 $a \in A$, 若 a 不是集合 A 的元素，则称 a 不属于 A, 并记为 $a \notin A$.

只含一个元素 a 的集合称为单点集，记为 $\{a\}$, 没有元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$. ♣

表示集合的方法一般是：

1. 列举集合的元素 (如果可能的话)；
2. 设 P 是一性质，x 是一对象，$P(x)$ 表示 x 具有性质 P. 由所有具有性质 P 的对象组成的集合记为 $\{x \mid P(x)\}$.

例题 1.1

1. 自然数集 $\{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$ 记为 $\mathbb{N}$,
2. 整数集 $\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots\}$ 记为 $\mathbb{Z}$.
3. 有理数集 $\left\{\frac{m}{n} \middle| m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, m \text{ 与 } n \text{ 互质 }\right\}$ 记为 $\mathbb{Q}$.
4. 实数集记为 $\mathbb{R}$(它的表示方法将在下一章介绍).
5. 一元二次方程 $x^2 + x - 2 = 0$ 的解的集合记为

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 2 = 0\right\}.$$

2. 集合之间的关系

定义 1.2

设 A, B 是两个集合.

1) 若 $x \in A$, 则 $x \in B$, 则我们称 A 是 B 的子集，或称 A 包含于 B 中，或称 B 包含 A, 记为

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A;$$

2) 若 $A \subset B, B \subset A$, 则我们称 A 与 B 相等，记为

$$A = B;$$

3) 若 $A \subset B, A \neq B$, 则我们称 A 是 B 的真子集，或称 A 严格包含于 B 中，或称 B 严格包含 A,

记为

$$A \subsetneq B.$$

♣

注 存在互不包含的集合 A 与 B.

例题 1.2

1. 对任一集合 $A, \varnothing \subset A$；
2. $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$；
3. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\right\} = \varnothing$；
4. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 2 = 0\right\} = \{1, -2\}$；
5. 集合 $\{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ 与 $\{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ 互不包含.

3. 集合的运算及性质

定义 1.3

设 A, B 是两个集合.

1. A 与 B 的并集，记为 $A \cup B$，定义为
$$A \cup B \triangleq \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$
2. A 与 B 的交集，记为 $A \cap B$，定义为
$$A \cap B \triangleq \{x \mid x \in A \text{ 并且 } x \in B\};$$
3. B 关于 A 的差集，记为 $A - B$，定义为
$$A - B \triangleq \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\};$$
4. 若 $B \subset X$，则称 $X - B$ 为 B 在 X 中的余集或补集，记为 $C_X B$. 如果在上、下文中 X 与 B 的关系很清楚，则可简记 $C_X B$ 为 B^c.

♣

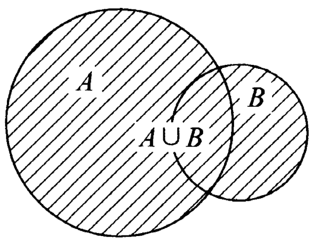

图 1.1

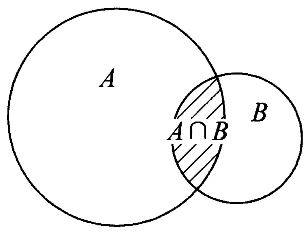

图 1.2

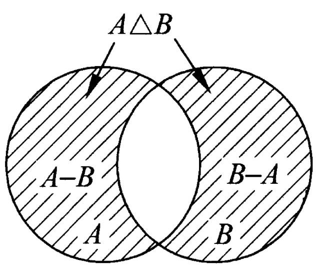

图 1.3

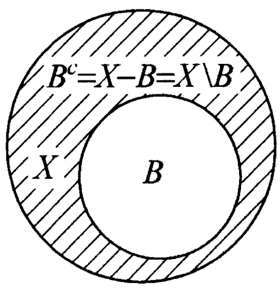

图 1.4

例题 1.3 记 I 为无理数集, 则

$$\mathbb{Q}\cup I=\mathbb{R},\mathbb{Q}\cap I=\varnothing,\quad \mathbb{Q}=\mathbb{R}-I,I=\mathbb{R}-\mathbb{Q},$$
$$I=C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}=\mathbb{Q}^c,\qquad \mathbb{Q}=C_{\mathbb{R}}I=I^c.$$

定理 1.1

设 E,F,G 是三个集合, 则

1. 并、交都是可交换的, 即
$$E\cup F=F\cup E,E\cap F=F\cap E;$$
2. 并、交都是可结合的, 即
$$E\cup(F\cup G)=(E\cup F)\cup G,E\cap(F\cap G)=(E\cap F)\cap G;$$
3. 并关于交是可分配的, 即
$$E\cup(F\cap G)=(E\cup F)\cap(E\cup G);$$
4. 交关于并是可分配的, 即
$$E\cap(F\cup G)=(E\cap F)\cup(E\cap G);$$
5. De Morgan 公式
$$E-(F\cap G)=(E-F)\cup(E-G),$$
$$E-(F\cup G)=(E-F)\cap(E-G).$$

证明 1)-4) 的验证留给读者作为练习, 我们证明 5) 的第一式, 第二式的证明类似.

先证 $E-(F\cap G)\subset(E-F)\cup(E-G)$.

设 $x\in E-(F\cap G)$, 则

$$\begin{aligned}x\in E,x\notin F\cap G&\Longrightarrow x\in E;\quad x\notin F \text{ 或 } x\notin G\\&\Longrightarrow x\in E-F \text{ 或 } x\in E-G\\&\Longrightarrow x\in(E-F)\cup(E-G).\end{aligned}$$

因此 $E-(F\cap G)\subset(E-F)\cup(E-G)$.

再证 $(E-F)\cup(E-G)\subset E-(F\cap G)$.

设 $x\in(E-F)\cup(E-G)$, 则

$$\begin{aligned}x\in E-F \text{ 或 } x\in E-G&\Longrightarrow x\in E,x\notin F \text{ 或 } x\in E,x\notin G\\&\Longrightarrow x\in E;\quad x\notin F\cap G\\&\Longrightarrow x\in E-(F\cap G).\end{aligned}$$

因此 $(E-F)\cup(E-G)\subset E-(F\cap G)$.

综合上述所证, $E-(F\cap G)=(E-F)\cup(E-G)$.

注 若 $F\subset E,G\subset E$, 则 De Morgan 公式的第二式可直接从第一式推得.

事实上, 分别用 $E-F$ 与 $E-G$ 代换第一式中的 F 与 G 得

$$\begin{aligned}E-((E-F)\cap(E-G))&=(E-(E-F))\cup(E-(E-G))\\&=F\cup G.\end{aligned}$$

由于 $(E-F)\cap(E-G)\subset E$, 故

$$E-(F\cup G)=(E-F)\cap(E-G).$$

任意多个集合的并与交

定义 1.4

以集合作为元素的集合称为集族或集系.

通常用花体字母 $\mathscr{A}$ 或 $\mathscr{B}$ 等来表示集族或集系.

例题 1.4 设 X 是任一集合, 由 X 的所有子集组成的集族称为 X 的幂集, 记为 2^X.

例题 1.5 设 Λ 是一非空集合. 对 Λ 的每一元素 λ, 规定集合 X 的一子集 X_λ, 由这些子集组成的集族记为 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, 并称之为依 Λ 赋予指标的集族. 集合 Λ 称为此集族的指标集, Λ 的元素称为指标.

比如平面上以点 M_0 为中心以 $n\in\mathbb{N}$ 为半径的圆盘

$$\overline{B}\left(M_0,n\right)=\left\{M\mid\overline{M_0M}\leqslant n\right\}$$

的全体构成一个以 $\mathbb{N}$ 为指标集的集族 $\left\{\overline{B}\left(M_0,n\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

定义 1.5

设 $\mathscr{A}$ 是任一非空集族.

1. $\mathscr{A}$ 中的元素的并, 记为 $\bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}}A$, 定义为
$$\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A\triangleq\{x\mid\ \text{存在一个 } A\in\mathscr{A} \text{ 使得 } x\in A\};$$
2. $\mathscr{A}$ 中的元素的交, 记为 $\bigcap\limits_{A\in\mathscr{A}}A$, 定义为
$$\bigcap_{A\in\mathscr{A}}A\triangleq\{x\mid\ \text{对每一个 } A\in\mathscr{A},x\in A\}.$$

例如, 对例1.5中的集族 $\left\{\overline{B}\left(M_0,n\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, 我们有:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\overline{B}\left(M_0,n\right)=\ \text{整个平面},\quad\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{B}\left(M_0,n\right)=\overline{B}\left(M_0,1\right).$$

现设 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是任一集族, 直接从定义容易得出下述推广的 De Morgan 公式:

$$X-\bigcap_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\left(X-X_\lambda\right),$$
$$X-\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\left(X-X_\lambda\right).$$

集合的乘积

定义 1.6

设 X,Y 是两个非空集合.

1. 若 $x\in X,y\in Y$, 则我们称 (x,y) 为一个序偶, x 称为此序偶的第一坐标, y 称为第二坐标, 由所有这种序偶组成的集合称为 X 与 Y 的乘积或简称为积, 记为 $X\times Y$. 于是
$$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}$$
2. 对任意 $n(n\in\mathbb{N},n>2)$ 个非空集合 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的乘积 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$, 定义为:
$$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in X_i,i=1,\quad 2,\ \cdots,n\},$$

其中每一元素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 n 元有序组，$x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 称为此有序组的第 i 坐标.

例题 1.6 在平面上引进笛卡尔坐标系 $\{O;\ x, y\}$, 则平面成为两个数轴的乘积 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$； 在空间中引进笛卡尔坐标系 $\{O;\ x, y, z\}$, 则空间成为三个数轴的乘积 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

最后我们介绍量词.

4. 量词

设 X 是任一集合，P 是 X 的元素可能具有的一个性质. 我们约定：

“存在 $x \in X$, 具有性质 P” 记为 $(\exists x)P$,

“每一个 $x \in X$ 具有性质 P” 记为 $(\forall x)P$.

符号”∃” 与”∀” 分别称为存在量词与全称量词.

考虑集合

$$A = \{x \in X \mid x \text{ 有性质 } P\},$$

则

$$X - A = \{x \in X \mid x \text{ 没有性质 } P\}.$$

显然我们有：

$$(\exists x)P \iff A \neq \varnothing.$$

$$(\forall x)P \iff A = X \iff X - A = \varnothing.$$

$$\begin{aligned}
\text{``}(\exists x)P\text{'' 不成立} &\iff A = \varnothing\\
&\iff X - A = X\\
&\iff (\forall x)\ (\text{非 } P\ ).\\
\text{``}(\forall x)P\text{'' 不成立} &\iff A \neq X\\
&\iff X - A \neq \varnothing\\
&\iff (\exists x)\ (\text{非 } P).
\end{aligned}$$

例题 1.7 考虑正弦 $\sin x, x \in \mathbb{R}$. 设 $y_0 \in \mathbb{R}$.P 表示性质 “$\sin x \leqslant y_0$”，那么我们有：

$(\exists x)P \iff$ 存在 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $\sin x \leqslant y_0$.

$(\forall x)P \iff$ 对每一个 $x \in \mathbb{R}, \sin x \leqslant y_0$.

$(\exists x)(\text{非 } P) \iff$ 存在 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $\sin x > y_0$.

$(\forall x)(\text{非 } P) \iff$ 对每一个 $x \in \mathbb{R}, \sin x > y_0$.

现在设 X 与 Y 是任意两个非空集合，P 是 $x \in X, y \in Y$ 可能具有的性质，我们约定：

“存在 $x \in X$, 存在 $y \in Y$ 具有性质 P” 记为

$$(\exists x \in X)(\exists y \in Y)P,$$

“存在 $x \in X$, 对每一 $y \in Y$ 具有性质 P” 记为

$$(\exists x \in X)(\forall y \in Y)P,$$

“对每一 $x \in X$, 存在 $y \in Y$ 具有性质 P” 记为

$$(\forall x \in X)(\exists y \in Y)P,$$

“对每一 $x \in X$, 对每一 $y \in Y$ 具有性质 P” 记为

$$(\forall x \in X)(\forall y \in Y)P.$$

那么下述各结论就不难理解了：

$$(\exists x \in X)(\exists y \in Y)P \iff (\exists y \in Y)(\exists x \in X)P.$$

$$(\exists x \in X)(\forall y \in Y)P \implies (\forall y \in Y)(\exists x \in X)P.$$

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)P \not\Longrightarrow (\exists x \in X)(\forall y \in Y)P.$$

$$(\forall x \in X)(\forall y \in Y)P \iff (\forall y \in Y)(\forall x \in X)P.$$

如果我们要考虑语句 “存在 $x \in X$, 存在 $y \in Y$ 具有性质 P” 的否定语句, 那么我们有：

“存在 $x \in X$, 存在 $y \in Y$ 具有性质 P” 不成立

$\iff$ “不存在 $x \in X$, 不存在 $y \in Y$ 具有性质 P”

$\iff$ “对每一 $x \in X$, 对每一 $y \in Y$, 不具有性质 P”

因此

“$(\exists x \in X)(\exists y \in Y)P$” 不成立 $\iff (\forall x \in X)(\forall y \in Y)$(非 P).

同理下述结论成立：

“$(\forall x \in X)(\forall y \in Y)P$” 不成立 $\iff (\exists x \in X)(\exists y \in Y)$(非 P).

“$(\exists x \in X)(\forall y \in Y)P$” 不成立 $\iff (\forall x \in X)(\exists y \in Y)$(非 P).

‘‘$(\forall x \in X)(\exists y \in Y)P$” 不成立 $\iff (\exists x \in X)(\forall y \in Y)$(非 P).

类似地, 我们可以考虑要多个元素所具有的性质的语句及其否定语句.

例题 1.8 考虑下面两个语句：

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, -\delta < x < \delta)(|\sin x| < \varepsilon),$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, -\delta < x < \delta, x \neq 0)\left(\left|\sin \frac{1}{x}\right| < \varepsilon\right)$$

对于第一个语句：由于 $|\sin x| \leqslant |x|$. 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$, 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$ 且 $-\delta < x < \delta$ 有 $|\sin x| < \varepsilon$.

对于第二个语句：显然不成立. 它的否定语句是：$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R},\quad -\delta < x < \delta,\quad x \neq 0)\left(\left|\sin \frac{1}{x}\right| \geqslant \varepsilon\right)$.

事实上, 若取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 则 $\forall \delta > 0, \exists n \in \mathbb{N}$, 使得 $0 < \frac{1}{n} < \delta$, 令 $x = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$ 则 $-\delta < x < \delta, x \neq 0$ 并且 $\left|\sin \frac{1}{x}\right| = 1 > \frac{1}{2}$.

注 从上面的讨论中可以看出, 在出现多个存在量词 $\exists$ 与全称量词 $\forall$ 的语句中, 一般不能随意交换存在量词 $\exists$ 与全称量词 $\forall$ 的出现次序, 否则所得新语句与原语句不等价, 例如前面的语句 “$(\exists x \in X)(\forall y \in Y)P$” 与 “$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)P$” 就是如此.

其次, 从前述的语句的否定语句中可以得出这样一个规律：为了得到一个含存在量词 $\exists$ 或全称量词 $\forall$ 的语句的否定语句, 只需将该语句中的存在量词 $\exists$ 换为全称量词 $\forall$, 将全称量词 $\forall$ 换为存在量词 $\exists$, 将性质 P 换为非 P 即可.

习 题 1.1

1. 证明下列各等式 $(A, B, C, D \subset X)$：

1) $A-B=A\cap B^c$;
2) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$;
3) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$;
4) $A-(B\cup C)=(A-B)-C$;
5) $(A-B)\cap(C-D)=A\cap C-(B\cup D)$;
6) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$.

2. 试找出使等式 $(A-B)\cup C=A-(B-C)$ 成立的充分必要条件.
3. 证明:
   1) $\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)-B=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda-B)$;
   2) $\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)-B=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda-B)$.
4. 设 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是任一集族.
   1) 构造集族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 如下:

$$A_1=E_1,\quad A_2=E_2-E_1,\cdots,A_n=E_n-\left(\bigcup_{k=1}^{n-1}E_k\right)\ (n\in\mathbb{N}),$$

   证明 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 具有下列性质;

$$A_n\cap A_m=\varnothing,n\neq m;\quad \bigcup_{k=1}^{n}A_k=\bigcup_{k=1}^{n}E_k;$$

   2) 如果 $\{E_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ 是一单调下降集族 (即 $E_{n+1}\subset E_n,n\in\mathbb{N}$),

$$E_1=(E_1-E_2)\cup(E_2-E_3)\cup\cdots\cup(E_n-E_{n+1})\cup\cdots\cup\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}E_n\right),$$

$$(E_n-E_{n+1})\cap(E_m-E_{m+1})=\varnothing,m\neq n.$$

5. 设 $A_n\subset B$ 是任意两个集合. 集合

$$(A-B)\cup(B-A)$$

   称为 A 与 B 的对称差, 证明下列各等式成立:
   1) $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$;
   2) $A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$;
   3) $A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle C$;
   4) $A\cup B=A\triangle B\triangle(A\cap B)$;
   5) $A-B=A\triangle(A\cap B)$.
6. 若集合 X 为空集或 n 个元素的集合, 试问 X 的幂集的 2^X 各有多少个元素?
7. 用符号 "$\subset,\supset,=$" 填入下列各式引号中的空白处, 使它们成立:
   1) $(A\times B)\cup(C\times D)$ " " $(A\cup C)\times(B\cup D)$;
   2) $(A\times B)\cap(C\times D)$ " " $(A\cap C)\times(B\cap D)$;
   3) $A\times(B-C)$ " " $(A\times B)-(A\times C)$;
   4) $(A-B)\times(C-D)$ " " $(A\times C-B\times C)-A\times D$;
   5) $(A\times B)-(C\times D)$ " " $(A-C)\times(B-D)$.
8. 把下列 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 的子集表示成 $\mathbb{R}$ 的两个子集 A 与 B 的乘积的形式:
   1) $\{(x,y)\mid x\in\mathbb{Z}\}$;

2) $\{(x, y) \mid x \notin \mathbb{N},\ y \in \mathbb{Z}\}$;
3) $\{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\}$;
4) $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{Q},\ y \notin \mathbb{Q}\}$.

1.2 关系

一个"关系", 从数学的观点来看就是具有某种性质的集合. 我们首先介绍一般关系.

1. 一般关系

定义 1.7

以序偶为元素的一个集合 $\mathscr{R}$ 称为一个二元关系, 简称为关系. $(x, y) \in \mathscr{R}$ 也记为 $x\mathscr{R}y$, 并称 x 与 y 有关系 $\mathscr{R}$. ♣

令

$\mathrm{Dom}(\mathscr{R}) = \{x \mid \text{存在 } y \text{ 使得 } x\mathscr{R}y\}$,

$\mathrm{Ran}(\mathscr{R}) = \{y \mid \text{存在 } x \text{ 使得 } x\mathscr{R}y\}$.

定义 1.8

设 $\mathscr{R}$ 是任一关系.

1. $\mathrm{Dom}(\mathscr{R})$ 称为关系 $\mathscr{R}$ 的定义域, $\mathrm{Ran}(\mathscr{R})$ 称为关系 $\mathscr{R}$ 的值域.
2. 我们称 $\mathscr{R}$ 是从 X 到 Y 的一个关系, 如果 $\mathrm{Dom}(\mathscr{R}) = X, \mathrm{Ran}(\mathscr{A}) \subset Y$.
3. X 到 X 的关系 $\mathscr{R}$ 简称为 X 上的关系. ♣

下述包含关系式显然成立:

$$\mathscr{R} \subset \mathrm{Dom}(\mathscr{R}) \times \mathrm{Ran}(\mathscr{R}).$$

例题 1.9 设 X 是中国公民集合. 在 X 上定义关系 $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2$ 如下:

$$\mathscr{R}_1 = \{(x, y) \in X \times X \mid x \text{ 是 } y \text{ 的父亲}\},$$

$$\mathscr{R}_2 = \{(x, y) \in X \times X \mid x \text{ 是 } y \text{ 的妻子}\}.$$

于是 $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2$ 分别是通常所说的父子关系、夫妻关系.

例题 1.10 在 $\mathbb{N}$ 上定义关系 $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2$ 如下:

$$\mathscr{R}_1 = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \leqslant n\},$$

$$\mathscr{R}_2 = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \text{ 整除 } n\}.$$

显然 $\mathscr{R}_1$ 是 $\mathbb{N}$ 上的通常大小关系, $\mathscr{R}_2$ 是 $\mathbb{N}$ 上的整除关系.

例题 1.11 设 $a \in \mathbb{N}$. 在 $\mathbb{Z}$ 上定义关系 $\mathscr{R}$ 为:

$$\mathscr{R} = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m = n (\mathrm{mod}\ a)\}.$$

这个关系 $\mathscr{R}$ 就是 $\mathbb{Z}$ 上的模 a 同余关系.

例题 1.12 设 E 表示平面上三角形的集合. 在 E 上定义关系 $\mathscr{R}$ 为:

$$\mathscr{R} = \left\{\left(\triangle, \triangle'\right) \in E \times E \mid \triangle \text{ 与 } \triangle' \text{ 相似}\right\},$$

则关系 $\mathscr{R}$ 是平面上三角形的相似关系.

定义 1.9

设 $\mathscr{U}$ 与 $\mathscr{V}$ 是任意两个关系.

1. $\mathscr{U}^{-1}=\{(x,y)\mid y\mathscr{U}x\}$ 称为 $\mathscr{U}$ 的逆关系.
2. $\mathscr{U}\circ\mathscr{V}=\{(x,y)\mid$ 存在 z 使得 $x\mathscr{V}z,z\mathscr{U}y\}$ 称为 $\mathscr{V}$ 与 $\mathscr{U}$ 的复合关系.

♣

例题 1.13 我们用 $\mathscr{R}$ 表示例1.10中的自然数集 $\mathbb{N}$ 上的整除关系, 即

$$\mathscr{R}=\{(m,n)\mid m,n\in\mathbb{N},m\text{ 整除 }n\}.$$

则 $\mathscr{R}$ 的逆关系

$$\begin{aligned}\mathscr{R}^{-1}&=\{(m,n)\mid n\mathscr{R}m\}\\&=\{(m,n)\mid n,m\in\mathbb{N},n\text{ 整除 }m\}\\&=\{(m,n)\mid n,m\in\mathbb{N},n\text{ 是 }m\text{ 的因子 }\}.\end{aligned}$$

因此 $\mathbb{N}$ 上的整除关系 $\mathscr{R}$ 的逆关系 $\mathscr{R}^{-1}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的“倍数”关系.

例题 1.14 设 $\mathscr{U}=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R},y=\sin x\},\mathscr{V}=\{(x,y)\mid 1<x<2,y=\sqrt{x}\}$, 则

$$\begin{aligned}\mathscr{U}^{-1}&=\{(x,y)\mid y\mathscr{U}x\}=\{(x,y)\mid y\in\mathbb{R},x=\sin y\}\\&=\{(\sin y,y)\mid y\in\mathbb{R}\}\\\mathscr{V}^{-1}&=\{(x,y)\mid y\mathscr{V}x\}=\{(x,y)\mid 1<y<2,x=\sqrt{y}\}\\&=\{(\sqrt{y},y)\mid 1<y<2\};\\\mathscr{U}\circ\mathscr{V}&=\{(x,y)\mid \text{ 存在 }z\text{ 使得 }x\mathscr{V}z,z\mathscr{U}y\}\\&=\{(x,y)\mid \text{ 存在 }z\text{ 使得 }z=\sqrt{x},1<x<2,y=\sin z\}\\&=\{(x,y)\mid 1<x<2,y=\sin\sqrt{x}\}\\&=\{(x,\sin\sqrt{x})\mid 1<x<2\};\\\mathscr{V}\circ\mathscr{U}&=\{(x,y)\mid \text{ 存在 }z\text{ 使得 }x\mathscr{U}z,z\mathscr{V}y\}\\&=\{(x,y)\mid \text{ 存在 }z\text{ 使得 }z=\sin x,y=\sqrt{z},1<z<2\}\\&=\varnothing(\text{ 因 }|\sin x|\leqslant 1).\end{aligned}$$

如果我们将 $\mathscr{U}^{-1},\mathscr{V}^{-1}$ 中序偶的第一坐标而不是现在的第一坐标换成“自变元”, 则 $\mathscr{U}^{-1},\mathscr{V}^{-1}$ 也可以表示成下述形式:

$$\begin{aligned}\mathscr{U}^{-1}&=\left\{\left(x,k\pi+(-1)^k\arcsin x\right)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,k\in\mathbb{Z}\right\},\\\mathscr{V}^{-1}&=\left\{\left(x,x^2\right)\mid 1<x<\sqrt{2}\right\}.\end{aligned}$$

关于逆关系与复合关系有下述重要结论.

命题 1.1

对任意的关系 $\mathscr{T},\mathscr{S},\mathscr{R}$,

$$\left(\mathscr{R}^{-1}\right)^{-1}=\mathscr{R},\quad (\mathscr{T}\circ\mathscr{S})\circ\mathscr{R}=\mathscr{T}\circ(\mathscr{S}\circ\mathscr{R}).$$

♠

证明

$$\begin{aligned}(x,y)\in\left(\mathscr{R}^{-1}\right)^{-1}&\Longleftrightarrow (y,x)\in\mathscr{R}^{-1}\\&\Longleftrightarrow (x,y)\in\mathscr{R};\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(x,y)\in(\mathscr{T}\circ\mathscr{S})\circ\mathscr{R} &\Longleftrightarrow \exists z \text{ 使 } (x,z)\in\mathscr{R},(z,y)\in\mathscr{T}\circ\mathscr{S}\\
&\Longleftrightarrow \exists z,w \text{ 使 } (x,z)\in\mathscr{R},(z,w)\in\mathscr{S},(w,y)\in\mathscr{T}\\
&\Longleftrightarrow \exists w \text{ 使 } (x,w)\in\mathscr{S}\circ\mathscr{R},(w,y)\in\mathscr{T}\\
&\Longleftrightarrow (x,y)\in\mathscr{T}\circ(\mathscr{S}\circ\mathscr{R}).
\end{aligned}
$$

关系、逆关系与复合关系概念在下一节有重要应用，下而我们介绍一类在现代数学中有许多应用的特殊关系，即等价关系.

2. 等价关系

定义 1.10

设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的一个关系，我们称 $\mathscr{R}$ 是等价关系，如果它满足下列条件：

1. (自反性) 若 $x\in X$，则 $x\mathscr{R}x$；
2. (对称性) 若 $x\mathscr{R}y$，则 $y\mathscr{R}x$；
3. (传递性) 若 $x\mathscr{R}y, y\mathscr{R}z$，则 $x\mathscr{R}z$.

如果 $\mathscr{R}$ 是 X 上的一个等价关系，并且 $x\mathscr{R}y$，则我们称 x $\mathscr{R}$ 等价于 y 或称 x 与 $y\mathscr{R}$ 等价. ♣

容易验证前面所举的父子关系、夫妻关系、及 $\mathbb{N}$ 上的大小关系与整除关系都不是等价关系，而三角形相似关系是等价关系. 下面我们来证明 $\mathbb{Z}$ 上的模 a 同余关系是等价关系.

1. 自反性：设 $n\in\mathbb{Z}$. 由于 $n-n=0\cdot a$，所以 $n\mathscr{R}n$.
2. 对称性：设 $m\mathscr{R}n$. 则 $m=n+ka(k\in\mathbb{Z})$. 于是 $n=m+(-k)a(-k\in\mathbb{Z})$，因此 $n\mathscr{R}m$.
3. 传递性：设 $m\mathscr{R}n, n\mathscr{R}l$. 则 $m=n+ka, n=l+sa(k,s\in\mathbb{Z})$. 于是 $m=l+(k+s)a(k+s\in\mathbb{Z})$ 因此 $m\mathscr{R}l$.

定义 1.11

设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的任一等价关系. $x\in X$. 集合

$$\{y\in X\mid x\mathscr{R}y\}$$

称为 x 的 $\mathscr{R}$ 等价类，记为 $\tilde{x}$. $\tilde{x}$ 中的每一个元素 y 称为 $\tilde{x}$ 的一个代表. ♣

例如，对 $\mathbb{Z}$ 上的“模 a 同余关系 $\mathscr{R}$”，$n\in\mathbb{Z}$ 的 $\mathscr{R}$ 等价类 $\tilde{n}$ 为：

$$
\begin{aligned}
\tilde{n}&=\{m\in\mathbb{Z}\mid m=n(\mathrm{mod}a)\}\\
&=\{m\in\mathbb{Z}\mid m=n+ka,k\in\mathbb{Z}\}\\
&=\{n+ka\mid k\in\mathbb{Z}\}\\
&\triangleq n+a\mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

关于等价类之间的关系，我们有下述定理.

定理 1.2

设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的任一等价关系.

1. 若 $x\in X$，则 $x\in\tilde{x}$；
2. $x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow \tilde{x}=\tilde{y} \Longleftrightarrow \tilde{x}\cap\tilde{y}\neq\varnothing$. ♡

证明

1. 因为 $x\mathscr{R}x$, 所以 $x \in \tilde{x}$.
2. 设 $x, y \in X$ 且 $x\mathscr{R}y$. 若 $z \in \tilde{x}$, 则 $x\mathscr{R}z$, 由对称性, $z\mathscr{R}x$. 由传递性得 $z\mathscr{R}y$. 故 $y\mathscr{R}z, z \in \tilde{y}$ 因此 $\tilde{x} \subset \tilde{y}$. 由于 $y\mathscr{R}x$, 故同理可证 $\tilde{y} \subset \tilde{x}$. 因此 $\tilde{x} = \tilde{y}$.
   若 $\tilde{x} = \tilde{y}$, 则显然有 $\tilde{x} \cap \tilde{y} \neq \varnothing$.
   现设 $\tilde{x} \cap \tilde{y} \neq \varnothing$. 令 $z \in \tilde{x} \cap \tilde{y}$, 则 $x\mathscr{R}z, y\mathscr{R}z$. 于是 $x\mathscr{R}z, z\mathscr{R}y$, 由传递性得 $x\mathscr{R}y$.

上述定理告诉我们, 在 X 的全体 $\mathscr{R}$ 等价类中, 任意两个 $\mathscr{R}$ 等价类要么相等, 要么不相交.

根据上述定理, 我们可以引进下述定义.

定义 1.12

设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的任一等价关系. 由 X 的所有 $\mathscr{R}$ 等价类组成的集合称为 X 关于 $\mathscr{R}$ 的商集, 记为 $X/\mathscr{R}$. 于是

$$X/\mathscr{R} = \{\tilde{x} \mid x \in X\}.$$

♣

例题 1.15 $\mathbb{Z}$ 关于模 a 同余关系 $\mathscr{R}$ 的商集 $\mathbb{Z}/\mathscr{R}$ 为

$$\mathbb{Z}/\mathscr{R} = \{n + a\mathbb{Z} \mid n = 0, 1, 2, \cdots, a-1\}$$

例题 1.16 设 P 是一平面, $O \in P$ 是一定点, 在 P 上定义关系 $\mathscr{R}$ 如下:

$$\mathscr{R} = \{(M, N) \in P \times P \mid \overline{MO} = \overline{NO}\}.$$

容易验证 $\mathscr{R}$ 是 P 上的一个等价关系. 对每一点 $M \in P, M$ 的 $\mathscr{R}$ 等价类 $\widetilde{M}$ 就是平面 P 上以 O 为中心以 $\overline{MO}$ 为半径的圆周 $S(O;\ \overline{MO}) = \{N \in P \mid \overline{NO} = \overline{MO}\}$, 当 $M = O$ 时, $S(O;\ \overline{MO}) = \{O\}$. 因此 P 关于 $\mathscr{R}$ 的商集 $P/\mathscr{R}$ 为:

$$P/\mathscr{R} = \{S(O;\ r) \mid r \geqslant 0\}.$$

例题 1.17 作为商集概念的一个重要应用. 我们介绍从整数集 $\mathbb{Z}$ 出发的有理数集的构造.

考虑乘积集合 $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. 在 E 上定义关系 $\mathscr{R}$ 如下:

$$\mathscr{R} = \left\{\left((m, n), (m', n')\right) \in E \times E \mid mn' = nm'\right\}$$

我们证明 $\mathscr{R}$ 是 E 上的一个等价关系.

1. 自反性: 设 $(m, n) \in E$, 则 $mn = nm$. 因此 $(m, n)\mathscr{R}(m, n)$.
2. 对称性: 设 $(m, n)\mathscr{R}\left(m', n'\right)$. 则 $mn' = nm'$, 从而 $m'n = n'm$, 因此 $\left(m', n'\right)\mathscr{R}(m, n)$.
3. 传递性: 设 $(m, n)\mathscr{R}\left(m', n'\right), \left(m', n'\right)\mathscr{R}\left(m'', n''\right)$, 则 $mn' = nm', m'n'' = n'm''$. 由此得到

$$mn'n'' = nm'n'' = nn'm'' \Longrightarrow mn'' = nm''.$$

因此 $(m, n)\mathscr{R}\left(m'', n''\right)$.

集 E 关于此等价关系 $\mathscr{R}$ 的商集 $E/\mathscr{R}$ 称为有理数集, 通常记为 $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ 的每一个 $\mathscr{R}$ 等价类 $\widetilde{(m, n)}$ 称为一个有理数, 简记为 $\dfrac{m}{n}$. m 称为分子, n 称为分母. 于是

$$\frac{m}{n} = \widetilde{(m, n)} = \left\{\left(m', n'\right) \in E \mid mn' = nm'\right\}$$

很显然, 这里所定义的有理数 $\dfrac{m}{n}$ 实际上就是我们通常所说的分子分母为整数, 并且没有公因子的既约分数.

最后我们介绍集合元素的顺序概念, 即序关系.

3. 序关系

定义 1.13

设 X 是任一非空集合，$\mathscr{R}$ 是 X 上的一个关系．我们称 $\mathscr{R}$ 是 X 上的一个偏序关系，如果它满足下列条件：

1. (自反性) 若 $x \in X$，则 $x\mathscr{R}x$；
2. (反对称性) 若 $x\mathscr{R}y, y\mathscr{R}x$，则 $x = y$；
3. (传递性) 若 $x\mathscr{R}y, y\mathscr{R}z$，则 $x\mathscr{R}z$.

♣

偏序关系 $\mathscr{R}$ 常记为 $\preccurlyeq$. $x \preccurlyeq y$ 读作 y 在 x 后 (y 大于 x) 或 x 在 y 前 (x 小于 y). 具有偏序关系 $\mathscr{R}$ 的集合 X 称为偏序集. 有时记为 $(X, \preccurlyeq)$.

此外，如果 X 上的偏序关系 $\preccurlyeq$ 还满足条件：

对任意的 $x, y \in X, x \preccurlyeq y$ 与 $y \preccurlyeq x$ 至少有一个成立，则我们称关系 $\mathscr{R}$ 为 X 上的一个序关系. 具有序关系 $\mathscr{R}$ 的集合 X 称为全序集或线性序集.

设 $\preccurlyeq$ 是 X 上的任一偏序关系. 我们规定：

$$x \prec y \Longleftrightarrow x \preccurlyeq y \text{ 且 } x \neq y,$$

并读作 y 真在 x 后，(y 真大于 x) 或 x 真在 y 前，(x 真小于 y).

例题 1.18 在整数集 $\mathbb{Z}$ 上定义关系 $\mathscr{R}$ 如下：

$$m, n \in \mathbb{Z}, m\mathscr{R}n \Leftrightarrow m \leqslant n$$

(这里 $\leqslant$ 为通常的大小关系)，显然 $\mathscr{R}$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的一个序关系. 因此定义了此关系 $\mathscr{R}$ 的整数集 $\mathbb{Z}$ 是一个全序集.

例题 1.19 在例1.10中所定义的 $\mathbb{N}$ 上的整除关系 $\mathscr{R}_2$ 是一个偏序关系而不是序关系. 事实上，对 $3, 5 \in \mathbb{N}$, $3\mathscr{R}_2 5$ 与 $5\mathscr{R}_2 3$ 没有一个成立.

例题 1.20 设 X 是任一非空集合. 在幂集 2^X 上定义关系 $\mathscr{R}$ 如下：

$$A, B \in 2^X, A\mathscr{R}B \Longleftrightarrow A \subset B.$$

容易验证 $\mathscr{R}$ 是 2^X 上的一个偏序关系. 但不是一个序关系. 这是因为存在 $A, B \in 2^X$，它们互不包含. 因此 2^X 关于此关系 $\mathscr{R}$ 只是一个偏序集，而不是全序集.

习题 1.2

1. 设 $\mathscr{A}$ 是由关系组成的任一集族. 证明：
   1) $\mathrm{Dom}\left(\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A\right) = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} \mathrm{Dom}(A)$;
   2) $\mathrm{Ran}\left(\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A\right) = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} \mathrm{Ran}(A)$.
   3) $\mathrm{Dom}\left(\bigcap_{A \in \mathscr{A}} A\right) \subset \bigcap_{A \in \mathscr{A}} \mathrm{Dom}(A)$;
   4) $\mathrm{Ran}\left(\bigcap_{A \in \mathscr{A}} A\right) \subset \bigcap_{A \in \mathscr{A}} \mathrm{Ran}(A)$.
2. 证明下列各结论：
   1) 对任意的集合 X 与 Y，$X \times Y$ 是从 X 到 Y 的一个关系，并且 $(X \times Y)^{-1} = Y \times X$;
   2) 令 $\mathrm{id}_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$(称为 $X \times X$ 的对角线). 对任一从 X 到 Y 的关系 $\mathscr{U}$ 及从 $\mathbb{Z}$ 到 X

的关系 $\mathscr{V}$，有：

$$\mathscr{U} \circ \mathrm{id}_X = \mathscr{U}, \mathrm{id}_X \circ \mathscr{V} = \mathscr{V}.$$

3) 设 $V = \left\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} - \{0\}, y = \dfrac{1}{x}\right\}$，$U = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^+, y = \sqrt{x}\}$ 试写出 $\mathscr{V}^{-1}, \mathscr{U}^{-1}, \mathscr{U} \circ \mathscr{V}, \mathscr{V} \circ \mathscr{U}$，并证明 $\mathscr{U} \circ \mathscr{V} = \mathscr{V} \circ \mathscr{U}$.

4) 设 A、B 是任意两个关系. 则

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A, (A \cup B)^{-1} = A^{-1} \cup B^{-1}, (A \cap B)^{-1} = A^{-1} \cap B^{-1}, (A \circ B)^{-1} = B^{-1} \circ A^{-1}.$$

3. 设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的一个等价关系. 证明：
   1) $\mathscr{R}$ 是自反的，当且仅当 $\mathrm{id}_X \subset \mathscr{R}$；
   2) $\mathscr{R}$ 是对称的，当且仅当 $\mathscr{R}^{-1} = \mathscr{R}$；
   3) $\mathscr{R}$ 是传递的，当且仅当 $\mathscr{R} \circ \mathscr{R} \subset \mathscr{R}$.
4. 有人指出：等价关系定义中的自反性可以由对称性和传递性推出，因为“若 $\mathscr{R}$ 具有对称性，由 $x\mathscr{R}y$ 推出 $y\mathscr{R}x$；又因 $\mathscr{R}$ 具有传递性，由 $x\mathscr{R}y$ 及 $y\mathscr{R}x$ 推出 $x\mathscr{R}x$，故 $\mathscr{R}$ 具有自反性”.
   此推论正确吗？为什么？
5. 设 $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的两个关系：

$$\mathscr{U} = \{(x, y) \mid y = x + 1,\ 0 < x < 2\},$$

$$\mathscr{V} = \{(x, y) \mid y - x \in \mathbb{Z}\}.$$

   证明 $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$ 并且 $\mathscr{V}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个等价关系. 写出 $\mathbb{R}$ 关于此等价关系 $\mathscr{V}$ 的商集 $\mathbb{R}/\mathscr{V}$.
6. 设 X 是任一非空集合，$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是由 X 的子集组成的集族，使得：

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = X, \quad X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing, \alpha, \beta \in \Lambda, \alpha \neq \beta.$$

   在 X 上定义关系 $\mathscr{R}$ 如下：

$$x, y \in X, x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow x, y \text{ 属于同一 } X_\lambda.$$

   1) 证明 $\mathscr{R}$ 是 X 上的一个等价关系；
   2) 写出每一个元素 $x \in X$ 的 $\mathscr{R}$ 等价类以及 X 关于 $\mathscr{A}$ 的商集 $X/\mathscr{R}$.
7. 设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的任一偏序关系. 证明：如果 $\mathscr{R}$ 是 X 上的一个偏序关系 (序关系), 则 $\mathscr{R}^{-1}$ 也是一个偏序关系 (序关系).
8. 设 $\preccurlyeq$ 是 X 上的任一偏序关系，A, B 是偏序集 $(X, \preccurlyeq)$ 的两个子集，使得

$$A \cup B = X, \quad A \cap B = \varnothing, \quad \text{且 } x \in A,\ y \in B \Rightarrow x \prec y.$$

   这时称 (A, B) 是集 X 关于 $\preccurlyeq$ 的一个分割.
   证明：如果 (A_1, B_1) 与 (A_2, B_2) 是 $(X, \preccurlyeq)$ 的两个分割，那么 $A_1 \subset A_2$ 或 $A_2 \subset A_1$.
9. 设 $\mathbb{Q}$ 是本节例 1.17 所定义的有理数集. 在 $\mathbb{Q}$ 上定义加法 “+” 与乘法 “·” 运算如下：

$$\frac{b}{a}, \frac{d}{c} \in \mathbb{Q}, \frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{bc + ad}{ac}, \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{bd}{ac}.$$

   1) 证明上述加法与乘法定义与代表元的选择无关. 因此它们的定义是合理的.
   2) 证明加法与乘法运算具有下列各性质：
      a) 加法具有 “交换群” 性质，即

$$\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{d}{c} + \frac{b}{a}, \quad \left(\frac{b}{a} + \frac{d}{c}\right) + \frac{m}{n} = \frac{b}{a} + \left(\frac{d}{c} + \frac{m}{n}\right),$$

存在 0 元素使得 $\frac{b}{a}+0=\frac{b}{a}$，对每一个 $\frac{b}{a}$，存在逆元 $\frac{-b}{a}$ 使得 $\frac{b}{a}+\frac{-b}{a}=0$；

b) $\mathbb{Q}-\{0\}$ 关于乘法具有 "交换群" 性质，即

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}=\frac{d}{c}\cdot\frac{b}{a},\quad \left(\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}\right)\cdot\frac{m}{n}=\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{d}{c}\cdot\frac{m}{n}\right),$$

存在单位元 1 使得 $\frac{b}{a}\cdot 1=\frac{b}{a}$，对每一个 $\frac{b}{a}$，存在逆元 $\frac{a}{b}$ 使得 $\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}=1$；

c) 乘法关于加法满足分配律. 即

$$\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{d}{c}+\frac{m}{n}\right)=\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}+\frac{b}{a}\cdot\frac{m}{n}.$$

3) 令 $\mathbb{Q}^{+}=\left\{\frac{b}{a}\in\mathbb{Q}\middle| ab\geqslant 0\right\}$. 在 $\mathbb{Q}$ 上定义关系 $\leqslant$ 如下：

$$\frac{b}{a},\frac{d}{c}\in\mathbb{Q},\frac{b}{a}\leqslant\frac{d}{c}\iff\frac{d}{c}-\frac{b}{a}\triangleq\frac{d}{c}+\frac{-b}{a}\in\mathbb{Q}^{+},$$

$$\frac{b}{a}<\frac{d}{c}\iff\frac{b}{a}\leqslant\frac{d}{c}\text{ 且 }\frac{b}{a}\neq\frac{d}{c}.$$

证明 $\leqslant$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的一个序关系，因此 $(\mathbb{Q},\leqslant)$ 是一个全序集.

4) 对每一个 $\frac{b}{a}\in\mathbb{Q}$，定义 $\frac{b}{a}$ 的绝对值 $\left|\frac{b}{a}\right|$ 为：

$$\left|\frac{b}{a}\right|=\begin{cases}\frac{b}{a}, & \text{若 } 0<\frac{b}{a},\\ 0, & \text{若 } \frac{b}{a}=0,\\ \frac{-b}{a}, & \text{若 } \frac{b}{a}<0,\end{cases}$$

证明绝对值的下列性质成立：

$$\left|\frac{b}{a}\right|=0\Leftrightarrow\frac{b}{a}=0,$$

$$\left|\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right|=\left|\frac{d}{c}-\frac{b}{a}\right|,$$

$$\left|\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right|\leqslant\left|\frac{b}{a}-\frac{m}{n}\right|+\left|\frac{m}{n}-\frac{d}{c}\right|.$$

1.3 映射

在数学分析中, "映射" 是我们的一个主要研究对象. 因此我们首先介绍映射的概念.

1. 映射的一般概念

定义 1.14

设 f 是任一关系，令

$$\mathrm{Dom}(f)=X,\mathrm{Ran}(f)\subset Y.$$

如果 f 具有下述性质：

$$\forall x\in\mathrm{Dom}(f),xfy_1,xfy_2\Longrightarrow y_1=y_2,$$

则我们称 f 是从 X 到 Y 的一个函数关系或映射.

通常用下列各记号表示从 X 到 Y 的映射 f：

$$f: X \to Y, \qquad X \xrightarrow{f} Y,$$
$$x \mapsto f(x) \in Y, \quad x \in X, \quad y = f(x) \in Y, \quad x \in X,$$
$$\{(x, f(x)) \mid x \in X\}, \qquad \{(x, y) \mid x \in X, x f y\}.$$

♣

例题 1.21 考虑下列各关系 $f_i (i = 1, 2, 3)$：

$$f_1 = \{(x, \sin x) \mid x \in \mathbb{R}\};$$
$$x \longmapsto f_2(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$
$$f_3 = \{(x, \pm\sqrt{x}) \mid x \geqslant 0\}.$$

显然，f_1, f_2 是映射，而 f_3 不是映射. 因为

$\forall x \in \mathbb{R}, x f_1 y_1, x f_1 y_2 \Longrightarrow y_1 = \sin x, y_2 = \sin x \Longrightarrow y_1 = y_2$；

$\forall x \in \mathbb{R}, x f_2 y_1, x f_2 y_2 \Longrightarrow y_1 = 0, y_2 = 0$ 若 $x = 0$ 或 $y_1 = x \sin \dfrac{1}{x}, y_2 = x \sin \dfrac{1}{x}$，若 $x \neq 0 \Longrightarrow y_1 = y_2$.

故 f_1, f_2 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射. 而对 f_3, 由于

$$(x, \sqrt{x}) \in f_3, (x, -\sqrt{x}) \in f_3 \text{ 但 } \sqrt{x} \neq -\sqrt{x} (x \neq 0),$$

故 f_3 不是映射.

上面我们用关系概念给映射下的定义与在中学里所学的映射定义是一致的：

"设 A, B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f, 对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应 (包括集合 A, B 及从 A 到 B 的对应法则 f) 叫做从集合 A 到集合 B 的映射".

现在设 $f: X \to Y$ 是任一映射. f 的图形，记为 $\mathrm{Gr}(f)$, 定义为乘积 $X \times Y$ 的下述子集合：

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in X, y = f(x)\}$$

由此可知，映射的图形与我们的映射定义完全统一起来了.

对于任一映射 $f: X \to Y$, 设 $A \subset X$ 是一非空集合. 显然关系

$$g = \{(x, y) \mid x \in A, x f y\}$$

是从 A 到 Y 的一个映射.

定义 1.15

映射 $g: A \to Y$ 称为映射 $f: X \to Y$ 在 A 上的限制，记为 $f|_A$. 如果一个映射 $h: A \to Y$ 是映射 $f: X \to Y$ 在 $A(\subset X)$ 上的限制，则我们称 f 为 h 的扩张.

♣

例如考虑如下两个映射：

$$g = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^+\}, f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

则 g 是 f 在 $\mathbb{R}^+$ 上的限制，而 f 是 g 的扩张.

2. 单射、满射与一一映射

首先我们介绍映射的象集与逆象集概念.

定义 1.16

设 $f: X \to Y$ 是任一映射. $A \subset X, B \subset Y$ 是任意两个集合.

1. $f(A) \triangleq \{y \in Y \mid \exists x \in A$ 使 $y = f(x)\}$ 称为 A 在 f 下的象集.
2. $f^{-1}(B) \triangleq \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ 称为 B 关于 f 的逆象集.

♣

显然，当 $A = X, B = Y$ 时，$f(X) = \mathrm{Ran}(f), f^{-1}(Y) = \mathrm{Dom}(f) = X$.

可能出现这种情形：

$$A \subsetneq X, f(A) = \mathrm{Ran}(f), B \subsetneq Y, f^{-1}(B) = \varnothing,$$

并且一般我们只能有下述包含关系式成立：

$$A \subset f^{-1}(f(A)), f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B.$$

例如，对上面所考虑过的映射 $f = \left\{\left(x, x^2\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$, 若取 $A = \mathbb{R}^+, B = \mathbb{R}_*^-$[1], 则

$$f\left(\mathbb{R}^+\right) = \mathrm{Ran}(f) = \mathbb{R}^+, f^{-1}\left(\mathbb{R}_*^-\right) = \varnothing,$$

$$\mathbb{R}^+ \subset f^{-1}\left(f\left(\mathbb{R}^+\right)\right) = \mathbb{R}. \quad f(f^{-1}(\mathbb{R}_*^-)) = f(\varnothing) = \varnothing \subset \mathbb{R}_*^-$$

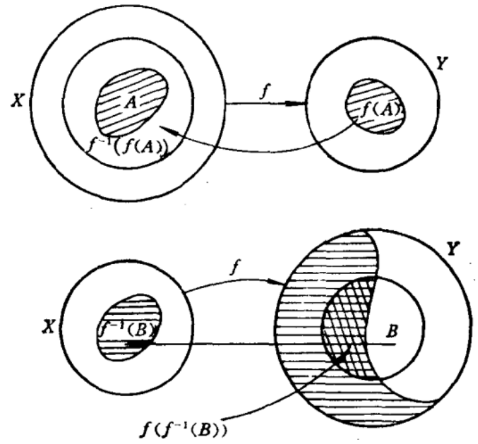

图 1.5

关于映射 $f: X \to Y$ 的值域 $f(X) \subset Y$, 有下列三种情形值得我们特别考虑：

1. $f(X) \subsetneq Y$；
2. $f(X) = Y$；
3. $\forall y \in f(X), f^{-1}(y) \triangleq f^{-1}(\{y\})$ 是单点集.

与这三种情形对应的映射分类是：

定义 1.17

对映射 $f: X \to Y$,

1. 若 $f(X) \subsetneq Y$, 则称 f 是内部映射；
2. 若 $f(X) = Y$, 则称 f 是满射或全射；
3. 若 $\forall y \in f(X), f^{-1}(y)$ 是单点集，则称 f 是单射；
4. 若 f 既是单射，又是满射，则称 f 是一一映射或满单射.

♣

[1] $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-, \mathbb{R}_*^+, \mathbb{R}_*^-$, 分别表示非负实数集、非正实数集、正实数集、负实数集. 它们的严格定义将在第 2 章 §3 中介绍.

从单射的定义容易验证下三个结论互相等价：

1. $f: X \to Y$ 是单射；
2. 若 $x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$；
3. 若 $x_1, x_2 \in X$ 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $x_1 = x_2$.

例题 1.22 对任一映射 $f: X \to Y$, 映射 $f: X \to f(X)$ 是满射.

例题 1.23 对任一非空集合 X, 映射 $x \longmapsto x, x \in X$ 是一一映射，称为从 X 到 X 上的恒等映射，记为 $\mathrm{id}_X: X \to X$.

例题 1.24 前面考虑过的映射

$$f = \left\{\left(x, x^2\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$$

不是单射，因为 $f(x) = f(-x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$, 但是 f 在 $\mathbb{R}^+$ 上的限制 $f|_{\mathbb{R}^+}$ 是从 $\mathbb{R}^+$ 到 $\mathbb{R}^+$ 上的一一映射.

对于两个映射，如何判断它们是同一映射，下面的命题给出了两个映射相等的充分必要条件.

命题 1.2

设 f, g 是任意两个映射，则

$$f = g \Longleftrightarrow \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g), \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f), f(x) = g(x)$$

证明 首先由映射的定义，我们有

$$f = \{(x, y) \mid xfy\}, \mathrm{Dom}(f) = \{x \mid \text{存在唯一的 } y, xfy\},$$

$$g = \{(x, y) \mid xgy\}, \mathrm{Dom}(g) = \{x \mid \text{存在唯一的 } y, xgy\}.$$

现在设 $f = g$. 那么 $\forall x \in \mathrm{Dom}(f)$, 存在唯一的 y 使得 xfy 或 $y = f(x)$, 从而 $(x, y) \in f$, 故 $(x, y) \in g$, 因此 $x \in \mathrm{Dom}(g)$, $y = g(x)$ 或 $\mathrm{Dom}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$, $\quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f), f(x) = g(x)$.

由对称性，同理可证

$$\mathrm{Dom}(g) \subset \mathrm{Dom}(f), \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(g), g(x) = f(x).$$

此即表明

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g), \forall x \in \mathrm{Dom}(f), f(x) = g(x).$$

反之，设 $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g), \forall x \in \mathrm{Dom}(f), f(x) = g(x)$. 那么 $\forall (x, y) \in f, x \in \mathrm{Dom}(f), y = f(x)$, 从而 $x \in \mathrm{Dom}(g), y = g(x)$, 故 $(x, y) \in g$, 因此 $f \subset g$.

同理可证 $g \subset f$. 因此 $f = g$. 命题证毕.

下面我们介绍用逆关系与复合关系定义的逆映射与复合映射.

3. 逆映射与复合映射

定义 1.18

定义设 $f: X \to Y$ 是任一映射. 如果 $f(X) = Y$ 并且 f 的逆关系 $f^{-1} = \{(y, x) \mid xfy\}$ 也是一个映射，则我们称 f 是可逆的，f^{-1} 称为 f 的逆映射.

由上述定义可知，若映射 $f: X \to Y$ 可逆，则

1. f^{-1} 是从 Y 到 X 上的映射，因为 $\mathrm{Dom}\left(f^{-1}\right) = \mathrm{Ran}(f) = Y$.
2. $f^{-1}: Y \to X$ 也是可逆的，并且 $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

例题 1.25 考虑 $f=\{(x,x+1)\mid x\in\mathbb{R}\}$.

显然 f 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 上的映射，并且由于

$$\begin{aligned} f^{-1}&=\{(y,x)\mid xfy\}\\ &=\{(y,x)\mid x\in\mathbb{R},y=x+1\}\\ &=\{(y,y-1)\mid y\in\mathbb{R}\}\end{aligned}$$

及 $\forall y\in\mathbb{R},yf^{-1}x_1,yf^{-1}x_2\Longrightarrow x_1=y-1,x_2=y-1\Longrightarrow x_1=x_2$, 故 f^{-1} 也是一个映射，因此 f 是可逆的.

例题 1.26 考虑 $f=\left\{\left(x,x^2+1\right)\mid x\in\mathbb{R}\right\}$. 容易验证 f 是从 $\mathbb{R}$ 到 $Y=\mathrm{Ran}(f)=\left\{y\in\mathbb{R}\mid y=x^2+1,x\in\mathbb{R}\right\}=\{y\in\mathbb{R}\mid y-1\geqslant 0\}=\{y\in\mathbb{R}\mid y\geqslant 1\}$ 上的映射.

由于

$$\begin{aligned} f^{-1}&=\{(y,x)\mid xfy\}\\ &=\left\{(y,x)\mid x\in\mathbb{R},\quad y=x^2+1\right\}\\ &=\{(y,\pm\sqrt{y-1})\mid y\geqslant 1\}\end{aligned}$$

及 $\forall y>1,yf^{-1}\left(\sqrt{y-1}\right),yf^{-1}(-\sqrt{y-1})$, 但 $\sqrt{y-1}\neq-\sqrt{y-1}$, 故 f^{-1} 不是一个映射，从而 f 不可逆.

关于映射的复合，我们首先证明下述定理.

定理 1.3

设 f,g 是任意两个映射，则

1. $g\circ f$ 也是一个映射；
2. $g\circ f$ 在 x 处有定义当且仅当 f 在 x 处有定义，g 在 $f(x)$ 处有定义，于是
$$\mathrm{Dom}(g\circ f)=\mathrm{Dom}(f)\cap f^{-1}(\mathrm{Dom}(g));$$
3. $\forall x\in\mathrm{Dom}(g\circ f),g\circ f(x)=g(f(x))$.

证明

1. 我们只需证明
$$\forall x,x(g\circ f)z_1,x(g\circ f)z_2\Longrightarrow z_1=z_2$$
根据复合关系的定义，$\exists y_1,y_2$ 使得
$$xfy_1,\quad y_1gz_1;\qquad xfy_2,\quad y_2gz_2$$
因为 f 是映射，故 $y_1=y_2$, 又因为 g 是映射，故由 y_1gz_1,y_1gz_2 推得 $z_1=z_2$.
2.
$$\begin{aligned} x\in\mathrm{Dom}(g\circ f)&\Longleftrightarrow\exists z\text{ 使 }x(g\circ f)z\\ &\Longleftrightarrow\exists y\text{ 和 }z\text{ 使 }xfy,ygz\\ &\Longleftrightarrow x\in\mathrm{Dom}(f),y=f(x)\in\mathrm{Dom}(g)\\ &\Longleftrightarrow x\in\mathrm{Dom}(f)\cap f^{-1}(\mathrm{Dom}(g)).\end{aligned}$$
3. 由 2) 的证明推出.

根据此定理，我们可以引进下述定义.

定义 1.19

设 f, g 是任意两个映射，则 $g \circ f$ 称为 f 与 g 的复合映射.

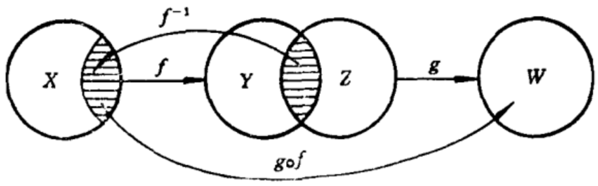

图 1.6

从图1.6可以理解 $g \circ f$ 的意义.

例题 1.27 设 $f = \left\{(x, x^2+1) \mid x \in \mathbb{R}\right\}, g = \left\{(y, \sqrt{y}) \mid y \in \mathbb{R}^+\right\}$.

$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathrm{Dom}(f) \cap f^{-1}(\mathrm{Dom}(g)) = \mathbb{R} \cap f^{-1}\left(\mathbb{R}^+\right) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R};$$

$$\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathrm{Dom}(g) \cap g^{-1}(\mathrm{Dom}(f)) = \mathbb{R}^+ \cap g^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+;$$

$$\begin{aligned} g \circ f &= \{(x, z) \mid x \in \mathbb{R} \text{ 并且存在 } y \text{ 使得 } xfy, ygz\} \\ &= \left\{(x, z) \mid x \in \mathbb{R}, y = x^2+1, z = \sqrt{y}\right\} \\ &= \left\{\left(x, \sqrt{x^2+1}\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \circ g &= \left\{(x, z) \mid x \in \mathbb{R}^+, \text{并且存在 } y \text{ 使得 } xgy, yfz\right\} \\ &= \left\{(x, z) \mid x \in \mathbb{R}^+, y = \sqrt{x}, z = y^2+1\right\} \\ &= \left\{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{R}^+\right\}. \end{aligned}$$

利用映射的复合可以判断映射的单射性与满射性，即成立下面的定理，

定理 1.4

设 $f: X \to Y$ 与 $g: Y \to X$ 是任意两个映射，

1. 若 $g \circ f = \mathrm{id}_X$，则 f 是单射，g 是满射；
2. 若 $g \circ f = \mathrm{id}_X, f \circ g = \mathrm{id}_Y$，则 f 与 g 是一一映射，并且 $f^{-1} = g, g^{-1} = f$.

证明

1. 设 $x_1, x_2 \in X$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 那么

$$\begin{aligned} x_1 = \mathrm{id}_X(x_1) = g \circ f(x_1) &= g(f(x_1)) \\ &= g(f(x_2)) = g \circ f(x_2) = \mathrm{id}_X(x_2) = x_2, \end{aligned}$$

   因此 f 是单射.

   为了证明 g 是满射，设 $x \in X$，令 $y = f(x)$. 则

$$x = \mathrm{id}_X(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y),$$

   因此 g 是满射.

2. 若 $g \circ f = \mathrm{id}_X, f \circ g = \mathrm{id}_Y$，则由 1) 知 f, g 都是一一映射，为了证明 $f^{-1} = g, g^{-1} = f$，我们只需证明

$$f^{-1}(y) = g(y), \quad y \in Y, g^{-1}(x) = f(x), \quad x \in X.$$

事实上，由于 $f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_X, g^{-1}\circ g=\mathrm{id}_Y$，故

$$g(y)=\left(f^{-1}\circ f\right)(g(y))=f^{-1}(f(g(y)))=f^{-1}(y),\quad y\in Y$$

$$f(x)=\left(g^{-1}\circ g\right)(f(x))=g^{-1}(g(f(x)))=g^{-1}(x),\quad x\in X$$

最后作为映射的一个应用，我们来介绍集合的可数性.

4. 集合的可数性

定义 1.20

设 X 是任一集合.

1. 我们称 X 是有限集，如果 X 是空集，或者存在 $n\in\mathbb{N}$ 及一个一一映射 $f:\{1,2,\cdots,n\}\to X$. 在第一种情形下称 X 有 0 个元素，在第二种情形下称 X 有 n 个元素.
2. 我们称 X 是无限集，如果它不是有限集.
3. 我们称 X 是可数无限集，如果存在一一映射 $f:\mathbb{N}\to X$.
4. 我们称 X 是可数集，如果 X 是有限集或可数无限集.
5. 我们称 X 是不可数集，如果 X 不是可数集.

例题 1.28 对每一个 $n\in\mathbb{N}$, 集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 是有 n 个元素的有限集，而集合 $\mathbb{N}$ 是可数无限集.

例题 1.29 整数集 $\mathbb{Z}$ 是可数无限集. 因为我们有一一映射 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$:

$$f(n)=\begin{cases}k, & \text{若 } n=2k+1(k=0,1,2,\cdots);\\ -k, & \text{若 } n=2k(k=1,2,\cdots).\end{cases}$$

定理 1.5

设 X 是任一非空集合. X 是可数集的充分必要条件是存在一个满射 $f:\mathbb{N}\to X$.

证明 (必要性) 设 X 是可数集. 如果 X 是无限集，则由定义，存在一一映射 $f:\mathbb{N}\to X$；如果 X 是有 n 个元素的有限集，则存在一一映射 $g:\{1,2,\cdots,n\}\to X$. 现在定义映射 $f:\mathbb{N}\to X$ 为：

$$f(m)=\begin{cases}g(m), & m=1,2,\cdots,n;\\ g(1), & m=n+1,n+2,\cdots\end{cases}$$

显然 f 是满射.

(充分性) 设存在满射 $f:\mathbb{N}\to X$. 如果 X 是有限集，则充分性成立. 因此不妨设 X 是无限集.

在 $\mathbb{N}$ 上定义关系 $\mathscr{R}$ 如下：

$$n,m\in\mathbb{N},\quad n\mathscr{R}m\iff f(n)=f(m).$$

容易验证 $\mathscr{R}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的一个等价关系.

下面我们定义两个映射 $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}/\mathscr{R}$ 与 $g:\mathbb{N}/\mathscr{R}\to X$.

首先定义映射 $g:\mathbb{N}/\mathscr{R}\to X$ 如下：

$$g(\tilde{n})=f(n),\quad \forall\tilde{n}\in\mathbb{N}/\mathscr{R}.$$

显然 g 是单射.

其次我们归纳地定义映射 $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}/\mathscr{R}$, $h(1)=\widetilde{k_1}=\widetilde{1}$. $h(2)=\widetilde{k_2}$. 这里 k_2 是不属于 $\widetilde{1}$ 的最小自然数.

现在假设 $h(1)=\widetilde{k_1},h(2)=\widetilde{k_2},\cdots,h(m)=\widetilde{k_m}$ 已经定义好了，我们令 $h(m+1)=\widetilde{k_{m+1}}$, 这里

k_{m+1} 是不属于 $\widetilde{k_1},\widetilde{k_2},\cdots,\widetilde{k_m}$ 的最小自然数.

由于 X 是无限集, g 是单射, 故 $\mathbb{N}/\mathscr{R}$ 也是无限集, 因此上述定义 h 的过程可以无限地继续下去. 从而映射 $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}/\mathscr{R}$ 就完全归纳地定义了.

现在我们来证明复合映射 $g\circ h:\mathbb{N}\to X$ 是一一映射, 从而 X 是可数无限集.

首先证明 $g\circ h$ 是单射. 为此设 $n,m\in\mathbb{N}$ 且 $n\neq m$. 那么

$$g\circ h(n)=g\left(\widetilde{k_n}\right),\quad g\circ h(m)=g\left(\widetilde{k_m}\right).$$

由于 $\widetilde{k_n}\neq\widetilde{k_m}, g$ 是单射, 所以 $g\circ h(n)\neq g\circ h(m)$.

为了证明 $g\circ h$ 是满射, 设 $a\in X$. 由于 f 是满射, 故存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $f(n)=a$. 令 k_m 是 $\tilde{n}$ 中最小自然数, 那么 $g\circ h(m)=g\left(\widetilde{k_m}\right)=f(k_m)=f(n)=a$.

推论 1.1

若 X 是可数集, $Y\subset X$ 是任一子集, 则 Y 也是可数集.

证明 如果 Y 是空集, 则推论成立. 因此不妨设 $Y\neq\varnothing$. 令 $x_0\in Y$. 由于 X 可数, 故存在满射 $g:\mathbb{N}\to X$. 现在定义映射 $f:\mathbb{N}\to Y$ 为:

$$f(n)=\begin{cases} g(n) & \text{若 } g(n)\in Y; \\ x_0 & \text{若 } g(n)\notin Y. \end{cases}$$

则 f 是满射, 因此 Y 是可数集.

推论 1.2

若 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots\cdots$ 是可数多个可数集, 则 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}X_k,\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}X_k$ 也是可数集.

证明 由于对任意的 $n\in\mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{k=1}^{n}X_k\subset\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}X_k$, 根据推论 1.1, 我们只需证明 $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}X_k$ 是可数集.

不妨设每一个 $X_k\neq\varnothing$, 否则可以把那些空集删去. 由于 X_k 是可数集, 故存在满射 $f_k:\mathbb{N}\to X_k$. 下面我们定义映射 $f:\mathbb{N}\to\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}X_k$ 如下:

首先, 对每一个 $n\in\mathbb{N}$ 可唯一的分解成

$$n=2^{k-1}(2m-1)\quad(k,m\in\mathbb{N})$$

的形式. 我们令 $f(n)=f_k(m)$, 则 f 是满射. 事实上, 设 $x\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}X_k$. 于是存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $x\in X_k$, 从而存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $x=f_k(m)$. 若令 $n=2^{k-1}(2m-1)$, 则 $f(n)=f\left(2^{k-1}(2m-1)\right)=f_k(m)=x$, 因此 f 是满射. 故 $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}X_k$ 是可数集.

例题 1.30 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可数集.

事实上, 对每一个 $n\in\mathbb{N}$, 令

$$\mathbb{Q}_n=\left\{\frac{m}{n}\,\middle|\,m\in\mathbb{Z},\ \text{且}\ -n^2\leqslant m\leqslant n^2\right\},$$

则 $\mathbb{Q}_n$ 是有限集, 并且 $\mathbb{Q}=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Q}_n$, 因此由推论 1.2知 $\mathbb{Q}$ 是可数集.

推论 1.3

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是可数集, 则乘积 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 也是可数集.

证明 不妨设每一个 $X_k \neq \varnothing$, 否则 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \varnothing$, 它显然是可数集.

首先由分解式 $n = 2^{k-1}(2m-1)$ 及映射 $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, h(n) = (k, m) \quad (n \in \mathbb{N})$ 知 h 是一一映射, 因此 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 是可数集.

设 A, B 是两个可数集, 于是存在满射

$$f_1 : \mathbb{N} \to A, \quad f_2 : \mathbb{N} \to B.$$

定义映射 $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B$ 为:

$$g(n, m) = (f_1(n), f_2(m)) \quad (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

则 g 是满射. 因此 $g \circ h : \mathbb{N} \to A \times B$ 也是满射, 从而 $A \times B$ 是可数集. 现在假设 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}$ 是可数集, 那么 $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$ 是可数集. 从而存在满射

$$f : \mathbb{N} \to (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n.$$

另一方面, 若定义映射

$$g : (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n \to X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1} \times X_n$$

为

$$g((x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}), x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n),$$

则 g 是一一映射, 从而 $g \circ f : \mathbb{N} \to X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 是满射, 因此 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 是可数集.

不可数集的一个简单例子就是下面的例.

例题 1.31 $\mathbb{N}$ 的幂集 $2^{\mathbb{N}}$ 是不可数集.

为此我们只需证明不存在任何满射 $f : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$. 设 $f : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ 是任一映射. 对每一个 $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ 是 $\mathbb{N}$ 的一个子集. 那么我们有

$$n \in f(n) \text{ 或 } n \notin f(n).$$

构造 $\mathbb{N}$ 的一个子集 E 如下:

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\},$$

显然 $E \in 2^{\mathbb{N}}$.

下面证明 $E \notin f(\mathbb{N})$. 用反证法, 假设存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $f(n_0) = E$. 那么由 E 的定义知

若 $n_0 \in E$, 则 $n_0 \notin f(n_0) = E$;

若 $n_0 \notin E$, 则 $n_0 \in f(n_0) = E$,

这显然是矛盾的. 因此 f 不是满射. 故由定理1.5知 $2^{\mathbb{N}}$ 是不可数集.

习题 1.3

1. 指出下列关系中哪些是函数关系:
   1) $f_1 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{N}\}$;
   2) $f_2 = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$;
   3) $f_3 = \left\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ y = \dfrac{1}{x^2}\right\}$;

4) $f_4 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y = |x|\}$.

2. 设映射 $f = \{(x, x^2 - 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $g = \{(y, \sqrt{y}) \mid y \in \mathbb{R}^+\}$, 分别写出：

$$\mathrm{Dom}(g \circ f), \quad \mathrm{Dom}(f \circ g), \quad g \circ f, \quad f \circ g.$$

3. 设映射 f_1, f_2, f_3 定义如下：

$$f_1 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y = x + 1\},$$
$$f_2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^+,\ y = \sqrt{x}\},$$
$$f_3 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y = \sqrt[3]{x}\},$$

试确定下列各复合映射，并写出各自的定义域：

$$f_2 \circ f_1, \quad f_1 \circ f_2, \quad f_1 \circ f_3, \quad f_3 \circ f_1, \quad f_2 \circ f_3, \quad f_3 \circ f_2.$$

4. 设映射 $f : X \to Y$ 是任一映射.

1) 若 $A, B \subset X$ 是任意两个集合，证明：

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$$
$$f(A - B) \supset f(A) - f(B).$$

若 f 为单射，则 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B), f(A - B) = f(A) - f(B)$.

2) 若 $C, D \subset Y$ 是任意两个集合，证明：

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D),$$
$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D),$$
$$f^{-1}(C - D) = f^{-1}(C) - f^{-1}(D).$$

5. 设 $f : X \to Y$ 是任一映射，$A \subset X, B \subset Y$. 证明以下命题成立：

1) $f(A) = \varnothing \iff A = \varnothing$;
2) $f^{-1}(B) = \varnothing \iff B \cap f(X) = \varnothing$；若 f 是满射，则 $f^{-1}(B) = \varnothing \iff B = \varnothing$;
3) $(f|_A)^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)$;
4) $A \subset f^{-1}(f(A))$, $f(f^{-1}(B)) \supset B$;
5) f 是单射 $\iff$ 对每一个 $A \subset X$，有 $f^{-1}(f(A)) = A$;
6) f 是满射 $\iff$ 对每一个 $B \subset Y$，有 $f(f^{-1}(B)) = B$;
7) f 是一一映射 $\iff$ 对每一个 $A \subset X$，$B \subset Y$，$f^{-1}(f(A)) = A, \quad f(f^{-1}(B)) = B$.

6. 证明第 3 题中的每个映射 f_1, f_2, f_3 都是可逆的，并写出它们的逆映射 f_i^{-1} $(i = 1, 2, 3)$. 证明：

$$\mathrm{Dom}(f_i) = \mathrm{Ran}(f_i^{-1}), \quad \mathrm{Ran}(f_i) = \mathrm{Dom}(f_i^{-1}) \quad (i = 1, 2, 3).$$

7. 设 f 是任一映射. 若存在映射 g 与 h，使得：

$$g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{Dom}(f)}, \quad f \circ h = \mathrm{id}_{\mathrm{Ran}(f)},$$

则 f 是可逆的，并且 $f^{-1} = h = g$.

8. 证明：若 f 与 g 是单射，则 $g \circ f$ 也是单射，并且：

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

9. 设 $f, g : X \to \mathbb{R}$ 是任意两个映射，定义映射 $f + g, fg : X \to \mathbb{R}$ 为：

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad (\forall x \in X).$$

再设 $E \subset X$，定义其特征函数 $\chi_E : X \to \{0,1\}$ 为：

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

证明对任意 $A, B \subset X$，有：

1) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$；
2) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$；
3) $\chi_{A\setminus B} = \chi_A(1-\chi_B)$.

10. 设 $f : X \to Y$ 是任一映射，$A \subset X$ 是任一非空集合. 称 A 关于 f 不变，如果 $f(A) = A$. 定义集合 $B \subset X$ 如下：

$$B = \left\{x \in X \,\middle|\, \text{存在 } x_1, x_2, \ldots \in X \text{ 使得 } x = x_1, x_n = f(x_{n+1})\right\}.$$

证明：B 是 X 中关于 f 不变的最大子集.

11. 设 E 是所有 $\mathbb{N}$ 的有限子集组成的集合，定义映射 $f : E \to \mathbb{N}$ 为：

$$f(A) = \begin{cases} 0, & A = \varnothing, \\ \sum\limits_{x\in A} x, & A \neq \varnothing. \end{cases}$$

1) 设 $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$，计算 $f(A_n)$；
2) 证明 f 不是单射；
3) 证明 f 是满射；
4) 计算集合 $f^{-1}(4)$ 的元素个数.

12. 证明：任一可数集的所有有限子集所组成的集合是可数集.

13. 设 A, B 是任意两个集合. 若存在一一映射 $f : A \to B$，则称 A 与 B 是等势的.

1) 证明：对任意非空集合 X，X 与它的幂集 2^X 不等势；
2) 证明：区间 $(0,1)$、$(0,1]$、$[0,1)$、$[0,1]$、$(0,+\infty)$、$[0,+\infty)$ 彼此等势；
3) 证明：若 S^2 表示 $\mathbb{R}^3$ 中单位球面，则对任意 $a \in S^2$，$S^2 - \{a\}$ 与 $\mathbb{R}^2$ 等势.

14. 设 $(X, \preccurlyeq)$ 是全序集，$f : X \to X$ 是满足如下性质的映射：若 $x \prec y$，则 $f(x) \prec f(y)$. 证明：

1) f 是单射；
2) 若 $f(x) \prec f(y)$，则 $x \prec y$.

15. 设 X, Y 是任意两个集合，用 E 表示所有定义域含于 X、值域含于 Y 的映射的集合. 在 E 上定义关系 $\mathscr{R}$ 如下：

$$f \mathscr{R} g \iff \mathrm{Dom}(f) \subset \mathrm{Dom}(g) \text{ 且 } g|_{\mathrm{Dom}(f)} = f.$$

试问：

1) $\mathscr{R}$ 是 E 上的偏序关系吗？
2) $\mathscr{R}$ 是 E 上的序关系吗？

16. 设 X_1, X_2 是两个集合，$\mathscr{R}_i$ 是 X_i 上的一个等价关系，定义投影映射 $p_i : X_i \to X_i/\mathscr{R}_i (i = 1, 2)$ 为：

$\forall x \in X_i, p_i(x) = \widetilde{x}, \widetilde{x}$ 是 x 关于 $\mathscr{R}_i$ 的等价类.

现在设映射 $f : X_1 \to X_2$ 满足下述性质

$$x', x'' \in X_1, x' \mathscr{R}_1 x'' \Longrightarrow f\left(x'\right) \mathscr{R}_2 f\left(x''\right).$$

证明：

1) 存在映射 $F: X_1/\mathscr{R}_1 \to X_2/\mathscr{R}_2$, 使得下述图形可交换：

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ X_1/\mathscr{R}_1 & \xrightarrow[F]{} & X_2/\mathscr{R}_2 \end{array}$$

即证明等式 $Fp_1 = p_2 f$；

2) 如果 f 是满射, 则 F 也是满射.

第二章 实数的构造

严格的实数理论是在 19 世纪的后半叶才由 Cantor 和 Dedekind 等数学家完整地建立起来的. 这一章我们介绍 Cantor 的实数构造理论.

2.1 实数的定义

Cantor 是以有理数系为基础用引进有理数 Cauchy 序列等价类的方法来定义实数的. 关于有理数集 $\mathbb{Q}$, 我们已经在第 1 章 § 2 例1.17中严格定义它了, 并在同一节的习题 9 中详细列出了它的基本性质, 因此现在我们可以来介绍 Cantor 实数构造理论了

1. 有理数 Cauchy 序列

定义 2.1

从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{Q}$ 的任一映射 $r:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ 称为一个有理数序列, 简记为 $\langle r_n\rangle$. $r_n(n\in\mathbb{N})$ 称为此序列的第 n 项或通项.

例题 2.1 以下列各项:

1. $r_n=\dfrac{1}{10^n}\quad(n\in\mathbb{N})$;
2. $r_n=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}(n\in\mathbb{N})$;
3. $r_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}(n\in\mathbb{N})$

为通项的序列都是有理数序列.

定义 2.2

我们称有理数序列 $\langle r_n\rangle$ 是 Cauchy 序列, 如果它具有下述性质:

$$(\forall 0<\varepsilon\in\mathbb{Q})(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n,m\in\mathbb{N},n,m\geqslant N)\implies|r_n-r_m|<\varepsilon.\tag{2.1}$$

显然性质2.1也可以表示成下述等价的形式:

$$(\forall 0<\varepsilon\in\mathbb{Q})(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n,k\in\mathbb{N},n\geqslant N)\implies|r_{n+k}-r_n|<\varepsilon.$$

例题 2.2 证明有理数序列 $\left\langle\dfrac{1}{10^n}\right\rangle$ 是 Cauchy 序列.

证明 事实上, $\forall n,m\in\mathbb{N}$ 且 $m\geqslant n$, 有

$$\left|\frac{1}{10^n}-\frac{1}{10^m}\right|=\frac{1}{10^n}\left|1-\frac{1}{10^{m-n}}\right|\leqslant\frac{1}{10^n}<\frac{1}{n}.$$

$\forall 0<\varepsilon=\dfrac{q}{p}\in\mathbb{Q}$, 由 $\dfrac{1}{n}<\dfrac{q}{p}$ 知, 取 $N=p$, 则

$$\forall n,m\in\mathbb{N},n,m\geqslant N\implies\left|\frac{1}{10^n}-\frac{1}{10^m}\right|<\frac{1}{n}<\frac{q}{p}.$$

因此 $\left\langle\dfrac{1}{10^n}\right\rangle$ 是有理数 Cauchy 序列.

例题 2.3 证明有理数序列 $\left\langle 1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right\rangle$ 是 Cauchy 序列.

证明 事实上，若令 $r_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$，则 $\forall n,k\in\mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned}
0 < r_{n+k}-r_n &= \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+k)!}\\
&< \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!(n+1)^{k-1}}\\
&< \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^{k-1}}\right)\\
&< \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n\cdot n!} \leqslant \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

$\forall 0<\varepsilon=\frac{q}{p}\in\mathbb{Q}$，由 $\frac{1}{n}<\frac{q}{p}$ 知，若取 $N=p$，则

$$\forall n,k\in\mathbb{N}, n\geqslant N \Longrightarrow |r_{n+k}-r_n| < \frac{1}{n} < \frac{q}{p}.$$

因此 $\left\langle 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right\rangle$ 是有理数 Cauchy 序列.

例题 2.4 证明由下述递推公式

$$r_0=1, r_n=\frac{1}{1+r_{n-1}}(n\in\mathbb{N})$$

所定义的有理数序列是 Cauchy 序列.

证明 首先容易证明 $\frac{1}{2}\leqslant r_n\leqslant 1(\forall n\in\mathbb{N})$.

其次由

$$\begin{aligned}
|r_{n+1}-r_n| &= \left|\frac{1}{1+r_n}-\frac{1}{1+r_{n-1}}\right| = \frac{|r_{n-1}-r_n|}{(1+r_n)(1+r_{n-1})}\\
&\leqslant \frac{4}{9}|r_n-r_{n-1}| \leqslant \cdots\\
&\leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n |r_1-r_0| < \left(\frac{4}{9}\right)^n
\end{aligned}$$

得到：$\forall n,k\in\mathbb{N}$ 且 $n\geqslant 2$

$$\begin{aligned}
|r_{n+k}-r_n| &\leqslant |r_{n+k}-r_{n+k-1}|+|r_{n+k-1}-r_{n+k-2}|+\cdots++|r_{n+1}-r_n|\\
&< \left(\frac{4}{9}\right)^{n+k-1}+\left(\frac{4}{9}\right)^{n+k-2}+\cdots+\left(\frac{4}{9}\right)^n\\
&< \left(\frac{4}{9}\right)^n\cdot 2 < \left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot 2 = \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{n-1}.
\end{aligned}$$

$\forall 0<\varepsilon=\frac{q}{p}\in\mathbb{Q}$，由 $\frac{1}{n-1}<\frac{q}{p}$ 知若取 $N=p+1$，则

$$\forall n,k\in\mathbb{N}, n\geqslant N \Longrightarrow |r_{n+k}-r_n| < \frac{1}{n-1} < \frac{q}{p}.$$

因此序列 $\langle r_n\rangle$ 是有理数 Cauchy 序列.

现在设 $\langle r_n\rangle$ 是任一有理数序列，由 Cauchy 序列的定义可知，$\langle r_n\rangle$ 不是 Cauchy 序列当且仅当：

$$(\exists 0<\varepsilon_0\in\mathbb{Q})\,(\forall n\in\mathbb{N})\,(\exists k_n,m_n\in\mathbb{N}, k_n,m_n\geqslant n) \Longrightarrow \left|r_{k_n}-r_{m_n}\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

例题 2.5 证明有理数序列 $\left\langle 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right\rangle$ 不是 Cauchy 序列.

证明 事实上, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|r_{2n} - r_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{2n-n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

因此 $\left\langle 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right\rangle$ 不是 Cauchy 序列.

我们用 E 表示由所有的有理数 Cauchy 序列组成的集合. $E \neq \varnothing$, 因为 $\forall a \in \mathbb{Q}$, 常值有理数序列 $\langle a \rangle \in E$.

在 E 上我们定义加法 "+"、乘法 "·" 及数乘运算如下: $\forall \langle r_n \rangle, \langle s_n \rangle \in E, \forall \lambda \in \mathbb{Q}$, 我们规定:

$$\langle r_n \rangle + \langle s_n \rangle \triangleq \langle r_n + s_n \rangle; \quad \langle r_n \rangle \cdot \langle s_n \rangle \triangleq \langle r_n s_n \rangle; \quad \lambda \langle r_n \rangle \triangleq \langle \lambda r_n \rangle.$$

我们有下述定理:

定理 2.1

集合 E 具有下述性质:

1. $\forall \langle r_n \rangle \in E, \langle r_n \rangle$ 是有界的, 即
$$\exists 0 < M \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}, |r_n| \leqslant M;$$
2. $\forall \langle r_n \rangle, \langle s_n \rangle \in E, \forall \lambda \in \mathbb{Q}, \langle r_n \rangle + \langle s_n \rangle, \langle r_n \rangle \cdot \langle s_n \rangle, \lambda \langle r_n \rangle \in E$.

证明 1) 设 $\langle r_n \rangle \in E$. 由定义, 对 $\varepsilon = 1$,

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N &\Longrightarrow |r_n - r_N| < 1 \\ &\Longrightarrow |r_n| \leqslant |r_n - r_N| + |r_N| < 1 + |r_N|. \end{aligned}$$

令 $M = \max(|r_1|, |r_2|, \cdots, |r_{N-1}|, 1 + |r_N|)$ 则

$$0 < M \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}, |r_n| \leqslant M.$$

2) 设 $\lambda \in \mathbb{Q}, \langle r_n \rangle, \langle s_n \rangle \in E$. 于是由定义有

$$(\forall 0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}) \begin{cases} (\exists N_1 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geqslant N_1) \Longrightarrow |r_n - r_m| < \varepsilon, \\ (\exists N_2 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geqslant N_2) \Longrightarrow |s_n - s_m| < \varepsilon. \end{cases}$$

令 $N = \max(N_1, N_2)$, 则

$$\begin{aligned} \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geqslant N &\Longrightarrow |r_n - r_m| < \varepsilon \text{ 且 } |s_n - s_m| < \varepsilon \\ &\Longrightarrow |(r_n + s_n) - (r_m + s_m)| \leqslant |r_n - r_m| + |s_n - s_m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

因此 $\langle r_n \rangle + \langle s_n \rangle \in E$.

为了证明 $\langle r_n \rangle \cdot \langle s_n \rangle \in E$, 由 1) 所证知

$$\exists 0 < A, B \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}, |r_n| \leqslant A, |s_n| \leqslant B.$$

于是

$$\begin{aligned} \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geqslant N \Longrightarrow &|r_n s_n - r_m s_m| \\ &\leqslant |r_n| |s_n - s_m| + |s_m| |r_n - r_m| \\ &< A\varepsilon + B\varepsilon = (A + B)\varepsilon. \end{aligned}$$

因此 $\langle r_n \rangle \cdot \langle s_n \rangle \in E$.

最后证明 $\lambda \langle r_n \rangle \in E$.

若 $\lambda = 0$, 则 $\lambda \langle r_n \rangle = \langle 0 \rangle \in E$.

若 $\lambda \neq 0$, 则

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geqslant N \Longrightarrow |\lambda r_n - \lambda r_m| = |\lambda| |r_n - r_m| < |\lambda| \varepsilon.$$

因此 $\lambda \langle r_n \rangle \in E$.

现在我们介绍实数集的构造.

2. 实数集的构造

在 E 上定义关系 $\mathscr{R}$ 如下:

$$\forall \langle r_n \rangle, \langle s_n \rangle \in E, \langle r_n \rangle \mathscr{R} \langle s_n \rangle$$
$$\Longleftrightarrow (\forall 0 < \varepsilon \in \mathbb{Q})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Longrightarrow \quad |r_n - s_n| < \varepsilon$$

容易验证 $\mathscr{R}$ 是 E 上的一个等价关系.

定义 2.3

E 关于 $\mathscr{R}$ 的商集 $E/\mathscr{R}$ 称为实数集，记为 $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ 中的每一个元素 x 称为实数.

现在设 $x \in \mathbb{R}$ 是任一实数. 由于 x 是一个 $\mathscr{R}$ 等价类，所以我们有:

$$\forall \langle r_n \rangle, \langle s_n \rangle \in x, x = \widetilde{\langle r_n \rangle} = \widetilde{\langle s_n \rangle}.$$

下面我们将要在 $\mathbb{R}$ 上定义加法与乘法运算，为此先证明下述命题.

命题 2.1

设 $\langle r_n \rangle, \langle r_n' \rangle, \langle s_n \rangle, \langle s_n' \rangle, \in E$, 如果 $\langle r_n \rangle \mathscr{R} \langle r_n' \rangle$, $\langle s_n \rangle \mathscr{R} \langle s_n' \rangle$, 那么

$$(\langle r_n \rangle + \langle s_n \rangle) \mathscr{R} (\langle r_n' \rangle + \langle s_n' \rangle), (\langle r_n \rangle \cdot \langle s_n \rangle) \mathscr{R} (\langle r_n' \rangle \cdot \langle s_n' \rangle).$$

证明 首先由 $\langle r_n' \rangle, \langle s_n \rangle \in E$ 及定理2.1知

$$\exists 0 < A, B \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}, |r_n'| \leqslant A, |s_n| \leqslant B.$$

另一方面，由于 $\langle r_n \rangle \mathscr{R} \langle r_n' \rangle$, $\langle s_n \rangle \mathscr{R} \langle s_n' \rangle$, 故有

$$(\forall 0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}) \begin{cases} (\exists N_1 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_1) \Longrightarrow |r_n - r_n'| < \varepsilon, \\ (\exists N_2 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_2) \Longrightarrow |s_n - s_n'| < \varepsilon. \end{cases}$$

令 $N = \max(N_1, N_2)$, 则我们有

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow |(r_n + s_n) - (r_n' + s_n')| \leqslant |r_n - r_n'| + |s_n - s_n'| < 2\varepsilon,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow |r_n s_n - r_n' s_n'| \leqslant |s_n| |r_n - r_n'| + |r_n'| |s_n - s_n'| < B\varepsilon + A\varepsilon = (A + B)\varepsilon.$$

因此

$$(\langle r_n \rangle + \langle s_n \rangle) \mathscr{R} (\langle r_n' \rangle + \langle s_n' \rangle),$$
$$(\langle r_n \rangle \cdot \langle s_n \rangle) \mathscr{R} (\langle r_n' \rangle \cdot \langle s_n' \rangle).$$

这个命题说明，$\forall x, y \in \mathbb{R}$, 若 $\langle r_n \rangle, \langle r_n' \rangle \in x$, $\langle s_n \rangle, \langle s_n' \rangle \in y$, 则

$$\widetilde{\langle r_n \rangle + \langle s_n \rangle} = \widetilde{\langle r_n' \rangle + \langle s_n' \rangle}, \widetilde{\langle r_n \rangle \cdot \langle s_n \rangle} = \widetilde{\langle r_n' \rangle \cdot \langle s_n' \rangle}.$$

也就是说 $\widetilde{\langle r_n \rangle + \langle s_n \rangle}$ 与 $\widetilde{\langle r_n \rangle \cdot \langle s_n \rangle}$ 是两个只与 x, y 有关而与 x, y 的代表元的选择无关的实数. 因此在 $\mathbb{R}$ 上按下面定义中的方式定义实数的加法与乘法就是合理的.

定义 2.4

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, 令 $x = \widetilde{\langle x_n \rangle}, y = \widetilde{\langle y_n \rangle}$. x 与 y 的和 $x+y$ 及积 $x \cdot y$ 分别定义为:

$$x + y = \widetilde{\langle x_n \rangle + \langle y_n \rangle},\ x \cdot y = \widetilde{\langle x_n \rangle \cdot \langle y_n \rangle}.$$

关于实数的加法与乘法的运算性质，我们在下一节中讨论.

习题 2.1

1. 证明以下列各 r_n 为通项的有理数序列是 Cauchy 序列:

$$1) r_n = \frac{1}{n^2};\qquad 2) r_n = \frac{n}{n^3+1};\qquad 3) r_n = \frac{a^n}{n!}\ (a \in \mathbb{Q});$$

$$4) r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2};\qquad 5) r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k};\qquad 6) r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k}.$$

2. 设 $\langle r_n \rangle$ 是如下定义的有理数序列:

$$r_1 = 0.1,$$
$$r_2 = 0.101,$$
$$r_3 = 0.101001,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_n = 0.1010010\ldots01\underbrace{0\ldots01}_{n-1\text{个 }0},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

证明：$\langle r_n \rangle$ 是一个 Cauchy 序列.

3. 证明：对任意给定的 $r_0, r_1 \in \mathbb{Q}$，由递推公式

$$r_{n+1} = \frac{1}{2}(r_n + r_{n-1}), n \in \mathbb{N}$$

所定义的 $\langle r_n \rangle$ 是有理数域上的 Cauchy 序列.

4. 设 $\langle r_n \rangle$ 是任一有理数序列. 如果存在一个有理数 l，它具有下述性质:

$$(\forall 0 < \varepsilon \in \mathbb{Q})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Rightarrow |r_n - l| < \varepsilon,$$

则称 $\langle r_n \rangle$ 收敛于 l，记作 $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = l$.

   1) 证明：任何收敛的有理数序列 $\langle r_n \rangle$ 都是 Cauchy 序列;
   2) 设 $\langle r_n \rangle$ 与 $\langle s_n \rangle$ 是两个有理数序列，并且

   $$\lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = l,$$

   证明序列 $\langle r_n \rangle$ 与 $\langle s_n \rangle \mathscr{R}$ 等价.
   3) 证明：任何一个收敛的有理数序列 $\langle r_n \rangle$ 是有界的.

5. 设 $\langle r_n \rangle$ 是任一有理数 Cauchy 序列. 证明下述三个结论中有且仅有一个成立:

   1) $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$;
   2) $(\exists 0 < M \in \mathbb{Q})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N) \Rightarrow r_n > M$;
   3) $(\exists 0 < M \in \mathbb{Q})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N) \Rightarrow r_n < -M$.

6. 设 $\mathscr{K}$ 是所有有理数 Cauchy 序列构成的集合 E 的一个非空子集合. 我们称 $\mathscr{K}$ 是 E 的一个理想, 如果 $\mathscr{K}$ 具有下述性质:
   1) $\forall\langle r_n\rangle,\langle s_n\rangle\in\mathscr{K}$, 都有 $\langle -r_n\rangle,\langle r_n\rangle+\langle s_n\rangle\in\mathscr{K}$;
   2) $\forall\langle a_n\rangle\in E,\forall\langle r_n\rangle\in\mathscr{K}$, 有 $\langle a_n\rangle\cdot\langle r_n\rangle\in\mathscr{K}$.

   我们称 $\mathscr{K}$ 是 E 的一个极大理想, 如果 $\mathscr{K}$ 是 E 对的一个理想, 并且 E 中不存在适合 $\mathscr{K}\subset\mathscr{A}\subsetneq E$ 的理想 $\mathscr{A}$.
   1) 证明 $\mathscr{K}=\left\{\langle r_n\rangle\in E\;\middle|\;\lim\limits_{n\to+\infty}r_n=0\right\}$ 是 E 的一个理想;
   2) 设 $\mathscr{A}$ 是 E 的一个理想, 使得 $\mathscr{K}\subsetneq\mathscr{A}$, 并设 $\langle s_n\rangle\in\mathscr{A}-\mathscr{K}$. 试证明:
      a) 存在 $\langle r_n\rangle\in E$, 使得 $\langle r_n\rangle+\langle s_n\rangle\in\mathscr{A}$,
      $$\forall n\in\mathbb{N},\ r_n+s_n\neq 0,\left\langle\frac{1}{r_n+s_n}\right\rangle\in E$$
      b) 常值序列 $\langle 1\rangle\in\mathscr{A}$;
      c) 由此推出 $\mathscr{K}$ 是一个极大理想.

2.2 实数集 $\mathbb{R}$ 的群性质

1. $\mathbb{R}$ 关于加法的群性质

定理 2.2

实数集 $\mathbb{R}$ 关于加法运算是一个交换群, 即下述性质成立:
1. $\forall x,y\in\mathbb{R},x+y=y+x$;
2. $\forall x,y,z\in\mathbb{R},(x+y)+z=x+(y+z)$;
3. 存在零元素 0, 使得 $\forall x\in\mathbb{R},x+0=x$;
4. $\forall x\in\mathbb{R}$, 存在负元素, 记为 $-x$, 使得 $x+(-x)=0$.

证明 设 $x=\widetilde{\langle x_n\rangle},y=\widetilde{\langle y_n\rangle},z=\widetilde{\langle z_n\rangle}$, 由定义
$$x+y=\widetilde{\langle x_n\rangle+\langle y_n\rangle}=\widetilde{\langle x_n+y_n\rangle}=\widetilde{\langle y_n\rangle+\langle x_n\rangle}=y+x,$$
$$(x+y)+z=\widetilde{\langle x_n\rangle+\langle y_n\rangle}+\widetilde{\langle z_n\rangle}=\widetilde{\langle x_n+y_n+z_n\rangle}=\widetilde{\langle x_n\rangle}+\widetilde{\langle y_n\rangle+\langle z_n\rangle}=x+(y+z).$$
因此 1)、2) 成立.

现证 3). 因为 $0\in\mathbb{Q}$, 若令 $0_n=0(\forall n\in\mathbb{N})$, 则 $\langle 0_n\rangle\in E$, 记 $0=\widetilde{\langle 0_n\rangle}$. 那么
$$x+0=\widetilde{\langle x_n\rangle}+\widetilde{\langle 0_n\rangle}=\widetilde{\langle x_n+0_n\rangle}=\widetilde{\langle x_n\rangle}=x.$$
最后证 4). 记 $-x=\widetilde{\langle -x_n\rangle}$, 则 $-x\in\mathbb{R}$ 并且.
$$x+(-x)=\widetilde{\langle x_n\rangle}+\widetilde{\langle -x_n\rangle}=\widetilde{\langle x_n-x_n\rangle}=\widetilde{\langle 0_n\rangle}=0.$$

2、$\mathbb{R}-\{0\}$ 关于乘法的群性质

在介绍 $\mathbb{R}-\{0\}$ 关于乘法的群性质之前, 我们先证明下述引理.

引理 2.1

$\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$, 存在有理数 $r>0$ 及 x 的一个代表 $\langle r_n\rangle$ 使得
$$(\forall n\in\mathbb{N},r_n\geqslant r)\ \text{或者}\ (\forall n\in\mathbb{N},r_n\leqslant -r).$$

证明 设 $\langle x_n\rangle$ 是 x 的任一代表. 由于 $x \neq 0$, 故 $\langle x_n\rangle$ 不等价于 $\langle 0_n\rangle$. 因此

$$(\exists 0 < \varepsilon_0 \in \mathbb{Q})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists k_n \in \mathbb{N}, k_n \geqslant n) \Longrightarrow \left|x_{k_n}\right| = \left|x_{k_n} - 0_n\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

另一方面, 由于 $\langle x_n\rangle \in E$, 对于 $\varepsilon_0 > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geqslant N \Longrightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

下面分两种情形讨论:

1)$x_{k_N} \geqslant \varepsilon_0$: 这时我们有

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant k_N \geqslant N \Longrightarrow \left|x_n - x_{k_N}\right| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

因为 $x_{k_N} - x_n \leqslant \left|x_n - x_{k_N}\right|$, 所以

$$x_n \geqslant x_{k_N} - \left|x_n - x_{k_N}\right| > \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

定义有理数序列 $\langle r_n\rangle$ 如下:

$$r_n = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_0}{2}, & \forall n < k_N; \\ x_n, & \forall n \geqslant k_N, \end{cases}$$

那么 $\langle r_n\rangle \in E$, 并且 $x = \widetilde{\langle r_n\rangle}$. 显然我们有

$$\forall n \in \mathbb{N}, r_n \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

2)$x_{k_N} \leqslant -\varepsilon_0$: 这时我们有

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant k_N > N \Longrightarrow \left|x_n - x_{k_N}\right| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

由于 $x_n - x_{k_N} \leqslant \left|x_n - x_{k_N}\right|$, 故

$$x_n \leqslant x_{k_N} + \left|x_n - x_{k_N}\right| < -\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0}{2} = -\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

若我们定义有理数序列 $\langle r_n\rangle$ 为:

$$r_n = \begin{cases} -\dfrac{\varepsilon_0}{2}, & \forall n < k_N; \\ x_n, & \forall n \geqslant k_N, \end{cases}$$

则 $\langle r_n\rangle \in E$, 并且 $x = \widetilde{\langle r_n\rangle}$. 对于此 $\langle r_n\rangle$ 显然有

$$\forall n \in \mathbb{N}, r_n \leqslant -\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

现在我们可以来介绍 $\mathbb{R} - \{0\}$ 的群性质, 即下述定理.

定理 2.3

$\mathbb{R} - \{0\}$ 关于乘法运算是一个交换群, 即下述性质成立:

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}, x \cdot y \in \mathbb{R} - \{0\}, x \cdot y = y \cdot x$;
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} - \{0\}, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
3. 存在单位元 $1 \in \mathbb{R} - \{0\}$, 使得 $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, x \cdot 1 = x$;
4. $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, 存在逆元素, 记为 x^{-1}, 使得 $x \cdot x^{-1} = 1$.

证明 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} - \{0\}$, 令 $x = \widetilde{\langle x_n\rangle}, y = \widetilde{\langle y_n\rangle}, z = \widetilde{\langle z_n\rangle}$. 根据上述引理, 不妨设存在正有理数 α, β 使得 $|x_n| \geqslant \alpha, |y_n| \geqslant \beta$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). 于是

1) $x \cdot y = \widetilde{\langle x_n\rangle \cdot \langle y_n\rangle} = \widetilde{\langle x_n y_n\rangle} = \widetilde{\langle y_n\rangle \cdot \langle x_n\rangle} = y \cdot x$,

$$|x_n y_n| \geqslant \alpha\beta(\forall n \in \mathbb{N}).$$

因此 $\langle x_n y_n\rangle$ 不与 $\langle 0_n\rangle$ 等价，从而 $x \cdot y \in \mathbb{R}-\{0\}$.

2)

$$\begin{aligned}(x \cdot y) \cdot z &= \widetilde{\langle x_n y_n\rangle \cdot \langle z_n\rangle} = \widetilde{\langle x_n y_n z_n\rangle} \\ &= \widetilde{\langle x_n\rangle \cdot \langle y_n z_n\rangle} = x \cdot (y \cdot z).\end{aligned}$$

3) 因为 $1 \in \mathbb{Q}$, 若令 $1_n = 1(\forall n \in \mathbb{N})$, 则 $\langle 1_n\rangle \in E$ 并且 $\langle 1_n\rangle$ 不与 $\langle 0_n\rangle$ 等价. 令 $1 = \widetilde{\langle 1_n\rangle}$, 则 $1 \in \mathbb{R}-\{0\}$. 并且

$$x \cdot 1 = \widetilde{\langle x_n\rangle \cdot \langle 1_n\rangle} = \widetilde{\langle x_n 1_n\rangle} = \widetilde{\langle x_n\rangle} = x.$$

4) 首先证明 $\langle x_n^{-1}\rangle \in E$. 因为 $\langle x_n\rangle \in E$, 由定义

$$(\forall 0<\varepsilon \in \mathbb{Q})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n,m \in \mathbb{N}, n,m \geqslant N) \Longrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

因此

$$\forall n,m \in \mathbb{N}, n,m \geqslant \mathbb{N} \Longrightarrow \left|x_n^{-1} - x_m^{-1}\right| = \frac{|x_n - x_m|}{|x_n||x_m|} < \frac{1}{\alpha^2}\varepsilon.$$

此即表明 $\langle x_n^{-1}\rangle \in E$. 我们记 $x^{-1} = \widetilde{\langle x_n^{-1}\rangle}$. 下面证明 $x^{-1} \in \mathbb{R}-\{0\}$.

事实上，由定理2.1 ,$\langle x_n\rangle$ 是有界的，于是存在正有理数 M 使得 $|x_n| \leqslant M(\forall n \in \mathbb{N})$. 由此得 $\left|x_n^{-1}\right| \geqslant \frac{1}{M}(\forall n \in \mathbb{N})$, 因此 $\langle x_n^{-1}\rangle$ 不与 $\langle 0_n\rangle$ 等价，从而 $x^{-1} \in \mathbb{R}-\{0\}$. 现在

$$x \cdot x^{-1} = \widetilde{\langle x_n\rangle \cdot \langle x_n^{-1}\rangle} = \widetilde{\langle x_n x_n^{-1}\rangle} = \widetilde{\langle 1_n\rangle} = 1.$$

3. $\mathbb{R}$ 的加法对乘法的分配性质

定理 2.4

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

证明 设 $x = \widetilde{\langle x_n\rangle}, y = \widetilde{\langle y_n\rangle}, z = \widetilde{\langle z_n\rangle}$, 则

$$\begin{aligned}(x+y) \cdot z &= \widetilde{\langle x_n + y_n\rangle \cdot \langle z_n\rangle} = \widetilde{\langle (x_n + y_n) z_n\rangle} \\ &= \widetilde{\langle x_n z_n\rangle + \langle y_n z_n\rangle} = x \cdot z + y \cdot z.\end{aligned}$$

注

1. 根据上述三个定理，$\mathbb{R}$ 对于加法形成交换群，$\mathbb{R}-\{0\}$ 对于乘法形成交换群，并且 $\mathbb{R}$ 的加法对乘法满足分配律，因此我们称实数集 $\mathbb{R}$ 对于加法与乘法运算构成一个交换域.
2. 为了书写简便起见，从以下开始，我们记 $x \cdot y$ 为 xy.

习题 2.2

1. 证明：

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \cdot x = 0, x = -(-x).$$

2. 证明：

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, (-x)(-y) = xy, (-x)y = x(-y) = -xy.$$

3. 证明：设 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 0$，则方程 $ax = b$ 存在唯一解 x.
4. 证明：零元、负元和逆元都是唯一确定的.

2.3 实数集 $\mathbb{R}$ 的全序性

2.3.1 $\mathbb{R}$ 上的序关系

考虑下面两个集合

$$\mathbb{R}^+ = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists \langle r_n \rangle \in x \text{ 使得 } r_n \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$\mathbb{R}^- = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -x \in \mathbb{R}^+\right\}.$$

$\mathbb{R}^+$ 与 $\mathbb{R}^-$ 分别称为非负实数集与非正实数集. 除此以外，我们还分别称

$$\mathbb{R}^+_* \triangleq \mathbb{R}^+ - \{0\} \text{ 与 } \mathbb{R}^-_* \triangleq \mathbb{R}^- - \{0\}$$

为正实数集与负实数集.

关于这些集合之间的关系，我们有下述定理.

定理 2.5

如果我们定义 $\mathbb{R}$ 的任意两个子集合 A 与 B 的和 $A + B$ 与积 $A \cdot B$ 为

$$A + B = \{x + y \in \mathbb{R} \mid x \in A, y \in B\},$$

$$A \cdot B = \{xy \in \mathbb{R} \mid x \in A, y \in B\}.$$

那么我们有：

1. $\mathbb{R}^+ + \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^- + \mathbb{R}^- = \mathbb{R}^-$;
2. $\mathbb{R}^+ \cdot \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^- \cdot \mathbb{R}^- = \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+ \cdot \mathbb{R}^- = \mathbb{R}^-$;
3. $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}, \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R} = \mathbb{R}^+_* \cup \mathbb{R}^-_* \cup \{0\}$.

证明 1) 与 2) 的论证我们留给读者作为练习. 我们来证明 3).

设 $x \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-$. 于是 $x \in \mathbb{R}^+, -x \in \mathbb{R}^+$. 根据定义存在 $\langle r_n \rangle, \langle s_n \rangle \in E$ 使得

$$x = \widetilde{\langle r_n \rangle}, -x = \widetilde{\langle s_n \rangle} \text{ 且 } r_n \geqslant 0, s_n \geqslant 0 (\forall n \in \mathbb{N}).$$

由于 $x = -(-x)$, 故 $x = \widetilde{\langle -s_n \rangle}$, 从而 $\langle r_n \rangle$ 与 $\langle -s_n \rangle$ 等价. 因此

$$(\forall 0 < \varepsilon \in \mathbb{Q})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Longrightarrow |r_n - (-s_n)| < \varepsilon.$$

由此推得

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow |r_n - 0_n| = |r_n| \leqslant |r_n + s_n| < \varepsilon.$$

此即表明 $\langle r_n \rangle$ 与 $\langle 0_n \rangle$ 等价，因此 $x = 0$.

为了证 $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}$, 首先注意到 $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \subset \mathbb{R}$. 现设 $x \in \mathbb{R}$.

若 $x = 0$, 则 $x \in \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$.

若 $x \neq 0$, 则由 2.2 的引理2.1知，存在 $\langle r_n \rangle \in E$ 及正有理数 r 使得 $x = \widetilde{\langle r_n \rangle}, r_n \geqslant r (\forall n \in \mathbb{N})$ 或者 $r_n \leqslant -r (\forall n \in \mathbb{N})$.

如果 $r_n \geqslant r (\forall n \in \mathbb{N})$, 则 $x \in \mathbb{R}^+$;

如果 $r_n \leqslant -r (\forall n \in \mathbb{N})$, 则 $-r_n \geqslant r (\forall n \in \mathbb{N})$. 由于 $-x = \widetilde{\langle -r_n \rangle}$, 所以 $-x \in \mathbb{R}^+$，即 $x \in \mathbb{R}^-$.

因此 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$. 从而 $\mathbb{R} = \mathbb{R}_*^+ \cup \mathbb{R}_*^- \cup \{0\}$.

现在我们在 $\mathbb{R}$ 上定义关系 $\leqslant$ 如下：

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leqslant y \Longleftrightarrow y - x \triangleq y + (-x) \in \mathbb{R}^+.$$

并且规定：

$$x < y \Longleftrightarrow x \leqslant y \text{ 及 } x \neq y.$$

定理 2.6

实数集 $\mathbb{R}$ 关于如上定义的关系 $\leqslant$ 是一个全序集.

证明 1) 自反性：$\forall x \in \mathbb{R}$, 由于 $x - x = x + (-x) = 0 \in \mathbb{R}^+$, 所以 $x \leqslant x$.

2) 反对称性：设 $x, y \in \mathbb{R}$ 并且 $x \leqslant y, y \leqslant x$. 那么 $y - x \in \mathbb{R}^+$, $x - y \in \mathbb{R}^+$, 从而 $y - x \in \mathbb{R}^-$. 因此 $y - x \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-$. 由定理 2.5 知 $y - x = 0$ 即 $x = y$.

3) 传递性：设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ 并且 $x \leqslant y, y \leqslant z$. 那么 $y - x \in \mathbb{R}^+$, $z - y \in \mathbb{R}^+$. 于是由定理 2.5 知

$$z - x = (z - y) + (y - x) \in \mathbb{R}^+ + \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+.$$

因此 $x \leqslant z$.

4) 证明 $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$.

事实上，$y - x \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$. 所以 $y - x \in \mathbb{R}^+$ 或 $y - x \in \mathbb{R}^-$, 从而 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$.

综合上述所证知，$\leqslant$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个序关系，从而 $(\mathbb{R}, \leqslant)$ 是全序集.

推论 2.1

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, 下述三个关系式

$$x < y, y < x, x = y$$

中有一个并且只有一个成立.

证明留给读者.

下面我们研究 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中的嵌入.

2.3.2 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中的嵌入

在 2.1，我们从有理数出发构造了实数. 自然要问：实数集 $\mathbb{R}$ 一定比有理数集 $\mathbb{Q}$ 有更“多”的元素吗？下面我们就来研究这个问题. 为此我们定义映射 $p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\forall r \in \mathbb{Q}, p(r) = \widetilde{\langle r \rangle}.$$

映射 p 的性质可以综述为下述定理.

定理 2.7

映射 p 是从 $\mathbb{Q}$ 到 $p(\mathbb{Q})$ 上的保序同构映射，即下述性质成立：

1. $p : \mathbb{Q} \to p(\mathbb{Q})$ 是一一映射；
2. $\forall r, s \in \mathbb{Q}, p(r + s) = p(r) + p(s), p(rs) = p(r)p(s)$;
3. $\forall r, s \in \mathbb{Q}$, 若 $r < s$, 则 $p(r) < p(s)$.

证明 1) 我们只需证明 p 是单射. 设 $r, s \in \mathbb{Q}, r \neq s$. 那么 $\langle r \rangle$ 与 $\langle s \rangle$ 不等价，因此 $\widetilde{\langle r \rangle} \neq \widetilde{\langle s \rangle}$ 从而

$p(r) \neq p(s)$.

2)$\forall r, s \in \mathbb{Q}$, 由定义我们有

$$p(r)+p(s)=\widetilde{\langle r\rangle}+\widetilde{\langle s\rangle}=\widetilde{\langle r+s\rangle}=p(r+s),$$
$$p(r)\cdot p(s)=\widetilde{\langle r\rangle}\cdot\widetilde{\langle s\rangle}=\widetilde{\langle rs\rangle}=p(rs).$$

3) 设 $r, s \in \mathbb{Q}$ 且 $r<s$, 那么 $r \leqslant s, r \neq s$. 于是 $s-r \geqslant 0$, 从而 $p(s-r)=\widetilde{\langle s-r\rangle} \in \mathbb{R}^{+}$. 但是 $p(s-r)=p(s+(-r))=p(s)-p(r)$, 因此 $p(s)-p(r) \in \mathbb{R}^{+}$, 即 $p(r) \leqslant p(s)$. 由于 p 的单射性 $p(r) \neq p(s)$. 因此 $p(r)<p(s)$.

注 我们记 $\widetilde{\mathbb{Q}}=p(\mathbb{Q}), \forall r \in \mathbb{Q}$, 记 $\widetilde{r}=p(r)$, 并称 $\widetilde{r}$ 为有理实数, $\widetilde{\mathbb{Q}}$ 为有理实数集. 在本节习题 9 中我们将证明 $\widetilde{Q}^{c}=\mathbb{R}-\widetilde{\mathbb{Q}} \neq \varnothing$, 因此 $\widetilde{\mathbb{Q}}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个真子集. $\mathbb{R}-\widetilde{\mathbb{Q}}$ 中的每一个元素称为无理实数.

定理2.7表明 $\mathbb{Q}$ 与 $\widetilde{\mathbb{Q}}$ 上的加法、乘法及序关系保持不变, 又注表明 $\widetilde{\mathbb{Q}}$ 是 $\mathbb{R}$ 的真子集, 据此我们称 $\widetilde{\mathbb{Q}}$ 嵌入 $\mathbb{R}$ 中或 $\mathbb{R}$ 是 $\widetilde{\mathbb{Q}}$ 的扩张.

正因为有理数集 $\mathbb{Q}$ 与有理实数集 $\widetilde{\mathbb{Q}}$ 之间保持这种运算关系及序关系, 故从下一章起, 如未特别指明, 我们将不再区分有理数 r 与有理实数 $\widetilde{r}$, 而一律记 $\widetilde{r}$ 为 r.

最后我们介绍有理实数集 $\widetilde{\mathbb{Q}}$ 的两个重要性质, 即下述定理.

定理 2.8 ($\widetilde{\mathbb{Q}}$ 在 $\mathbb{R}$ 中的稠密性)

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, 若 $x<y$, 则存在 $\widetilde{r} \in \widetilde{\mathbb{Q}}$ 使得 $x<\widetilde{r}<y$.

证明 因为 $x<y$, 所以 $0<y-x$. 由 §2 引理2.1知, 存在 $\langle r_n'\rangle, \langle s_n'\rangle \in E$ 及正有理数 α 使得

$$x=\widetilde{\langle r_n'\rangle}, y=\widetilde{\langle s_n'\rangle} \text{ 且 } s_n'-r_n' \geqslant \alpha(\forall n \in \mathbb{N}).$$

另一方面, 对 $\alpha>0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N &\Longrightarrow \left|r_n'-r_N'\right|<\frac{\alpha}{4},\left|s_n'-s_N'\right|<\frac{\alpha}{4}\\ &\Longrightarrow r_n'<r_N'+\frac{\alpha}{4}, s_N'-\frac{\alpha}{4}<s_n'\end{aligned}$$

令 $r=\dfrac{r_N'+s_N'}{2}$, 则 $r \in \mathbb{Q}$, 并且

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow r_n'<r_N'+\frac{\alpha}{4}<r<s_N'-\frac{\alpha}{4}<s_n'.$$

现在我们定义有理数序列 $\langle r_n\rangle$ 及 $\langle s_n\rangle$ 如下:

$$r_n=\begin{cases} r_N'+\dfrac{\alpha}{4}, & \text{若 } n<N,\\ r_n', & \text{若 } n \geqslant N;\end{cases} \qquad s_n=\begin{cases} s_N'-\dfrac{\alpha}{4}, & \text{若 } n<N,\\ s_n', & \text{若 } n \geqslant N.\end{cases}$$

则 $\langle r_n\rangle, \langle s_n\rangle \in E$ 并且 $r_n<r<s_n(\forall n \in \mathbb{N}), x=\widetilde{\langle r_n\rangle}, y=\widetilde{\langle s_n\rangle}, x<\widetilde{r}<y$.

定理 2.9 (Archimedes 性质)

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, 若 $0<x<y$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $y<\widetilde{N} x$.

证明 因为 $x>0$, 故由引理2.1知, 存在 $\langle r_n\rangle \in E$ 及正有理数 $\dfrac{q}{p}$ 使得

$$x=\widetilde{\langle r_n\rangle}, \frac{1}{p} \leqslant \frac{q}{p} \leqslant r_n.(\forall n \in \mathbb{N})$$

令 $y=\widetilde{\langle s_n\rangle}$, 由于 $\langle s_n\rangle$ 有界, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $|s_n| \leqslant m\ (\forall n \in \mathbb{N})$. 记 $N=p(m+1)$, 则 $\widetilde{N} x=\widetilde{\langle N r_n\rangle}$,

并且
$$s_n \leqslant m < m+1 = p(m+1)\frac{1}{p} \leqslant N r_n.$$
因此 $y < \widetilde{N} x$.

✍ 习 题 2.3

1. 证明定理 2.5 的 1)、2).
2. 证明：$\forall x, y \in \mathbb{R}$, 若 $x \in \mathbb{R}^+_*$, $xy \in \mathbb{R}^+$, 则 $y \in \mathbb{R}^+$.
3. 设 $x, y \in \mathbb{R}$, 证明：
   1) $x \leqslant y$ 的充要条件是 $-y \leqslant -x$；
   2) $0 < x < y$ 的充要条件是 $0 < y^{-1} < x^{-1}$.
4. 证明定理 2.6的推论2.1.
5. 证明在实数集 $\mathbb{R}$ 上定义的序关系 $\leqslant$ 与加法、乘法运算是相容的，即：
   1) 若 $x \leqslant y$, $x' \leqslant y'$, 则 $x + x' \leqslant y + y'$；
   2) 设 $x \leqslant y$, 若 $z \geqslant 0$, 有 $xz \leqslant yz$；若 $z \leqslant 0$, 有 $yz \leqslant xz$；
   3)
   $$0 < xy \iff 0 < x,\ 0 < y \text{ 或 } x < 0,\ y < 0;$$
   $$xy < 0 \iff 0 < x,\ y < 0 \text{ 或 } x < 0,\ 0 < y.$$
6. 设 x 是一个无理实数, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, 且 $ad - bc \neq 0$. 证明：
   $$\frac{\widetilde{a}x + \widetilde{b}}{\widetilde{c}x + \widetilde{d}} = (\widetilde{a}x + \widetilde{b})(\widetilde{c}x + \widetilde{d})^{-1}$$
   是无理实数.
7. 证明：$\forall x \in \mathbb{R}$, 存在唯一的整数, 记为 $\widetilde{[x]}$ 使得 $\widetilde{[x]} \leqslant x < \widetilde{[x]+1}$. ($\widetilde{[x]}$ 称为 x 的整数部分),
8. 设 $x \in \mathbb{R}^+$, 我们把满足 $z^2 = x$ 的非负实数 z 记作 $\sqrt{x}$. 证明：若 $\sqrt{x}$ 与 $\sqrt{y}$ 都是无理实数, 则 $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ 也是无理实数.
9. 证明：无理实数集 $\widetilde{\mathbb{Q}}^c$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，即：
   $$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow \exists z \in \widetilde{\mathbb{Q}}^c, \text{ 使得 } x < z < y.$$
10. 本题介绍 Dedekind 实数构造法：
   1) 设 $\mathbb{Q}$ 是有理数集, $X \subset \mathbb{Q}$ 是任一子集. 若它满足下列三个条件：
      i) $X \neq \varnothing$, $X \neq \mathbb{Q}$;
      ii) 若 $r \in X$, $s \in \mathbb{Q}$ 且 $s < r$, 则 $s \in X$；
      iii) 若 $r \in X$, 则存在 $s \in X$, 使得 $r < s$.

      则称 X 是一个 Dedekind 实数.

      现设 X 是任一 Dedekind 实数. 如果 $\mathbb{Q} \setminus X$ 有最小者, 则称 X 是第一类 Dedekind 实数； 反之则称 X 是第二类 Dedekind 实数.
      a) 证明集合 $X = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < 1\}$ 是第一类 Dedekind 实数；
      b) 证明集合 $Y = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < 0 \text{ 或 } r^2 < 2\}$ 是第二类 Dedekind 实数；
      c) 证明 X_0 是第一类 Dedekind 实数的充分必要条件是存在有理数 r_0, 使得
      $$X_0 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < r_0\}.$$

2) 我们用 R 表示所有 Dedekind 实数集合. 在 R 上定义关系 $\leqslant$ 如下:

$$\forall X, Y \in R, X \leqslant Y \Leftrightarrow X \subset Y.$$

证明: $\leqslant$ 是 R 上的一个序关系.

2.4 实数集 $\mathbb{R}$ 的扩展

1. $\mathbb{R}$ 的第一个扩展

将实数集 $\mathbb{R}$ 添加两个新的元素 $-\infty$ 与 $+\infty$ 所得新的集合记为 $\overline{\mathbb{R}}$. $\mathbb{R}$ 上的序关系 "$\leqslant$" 加上下述约定:

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\infty < x < +\infty, -\infty \leqslant -\infty, +\infty \leqslant +\infty$$

所得 $\overline{\mathbb{R}}$ 上的一个关系显然也是序关系. 因此, $\overline{\mathbb{R}}$ 关于这个序关系是一个全序集. 它是 $\mathbb{R}$ 的第一个扩展.

$\overline{\mathbb{R}}$ 通常称为**有终端的直线**.

2. $\mathbb{R}$ 的第二个扩展

我们来考虑乘积集合 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. 在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上定义加法 "$+$"、乘法 "$\cdot$" 与数乘运算:

$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

i) $(a, b) + (c, d) \triangleq (a + c, b + d)$;

ii) $(a, b) \cdot (c, d) \triangleq (ac - bd, ad + bc)$;

iii) $\lambda(a, b) \triangleq (\lambda a, \lambda b)$.

定义 2.5

定义了上述三个运算的集合 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 称为复数集, 记为 $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}$ 的每一个元素 (a, b) 称为复数. ♣

关于复数集 $\mathbb{C}$ 的性质, 我们有下述定理.

定理 2.10

1. 复数集 $\mathbb{C}$ 关于加法与乘法运算是一个交换域, 即 $\mathbb{C}$ 关于加法是交换群; $\mathbb{C} - \{(0, 0)\}$ 关于乘法是交换群; $\mathbb{C}$ 的加法对乘法满足分配律.
2. 映射 $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} (\forall x \in \mathbb{R}, \pi(x) = (x, 0) \in \mathbb{C})$ 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\pi(\mathbb{R})$ 上的同构映射, 即

i) $\pi : \mathbb{R} \to \pi(\mathbb{R})$ 是一一映射;

ii) $\pi(x + y) = \pi(x) + \pi(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$;

iii) $\pi(xy) = \pi(x) \cdot \pi(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. ♡

定理的证明留给读者作为练习.

利用映射 π, 我们可以规定:

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x, 0) \triangleq x.$$

如果我们引入记号

$$(0, 1) \triangleq \mathrm{i},$$

则由复数的乘法定义, 我们得到

$$\mathrm{i}^2 \triangleq \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

现设 $z=(a,b)\in\mathbb{C}$ 是任一复数，由

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+b(0,1)$$

得到

$$z=a+ib$$

这就是复数的通常表示法.

定义 2.6

对任意一个复数 $z=a+ib\in\mathbb{C}$,

1. i 称为虚数单位.
2. a 称为复数 z 的实部，b 称为复数 z 的虚部系数，并记为 $a=\operatorname{Re} z, b=\operatorname{Im} z$.
3. $a-ib$ 称为复数 $z=a+ib$ 的共轭复数，记为 $\bar{z}$.
4. 非负实数 $\sqrt{a^2+b^2}$ 称为复数 $z=a+ib$ 的模，记为 $|z|$.
5. 复数 $z=a+ib(z\neq(0,0))$ 的辐角就是满足

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

的实数 θ 的模 2π 类. 通常用 $\arg z$ 表示这个模 2π 类中的任一元素.

容易验证下述定理.

定理 2.11

模 $|z|$ 与辐角 $\arg z$ 具有下述性质：

1. $\forall z\in\mathbb{C},|z|\geqslant 0$, 且 $|z|=0\Longleftrightarrow z=(0,0)$;
2. $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$

$$|z_1-z_2|=|z_2-z_1|$$
$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,$$
$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$$

3. $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}-\{(0,0)\}$,

$$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2(\bmod 2\pi)$$

习 题 2.4

1. 证明：在实数集 $\mathbb{R}$ 上定义的序关系 $\leqslant$，如果加上如下约定：

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad -\infty<x<+\infty,\quad -\infty\leqslant-\infty,\quad +\infty\leqslant+\infty,$$

所得关系是 $\overline{\mathbb{R}}$ 上的一个序关系.

2. 证明定理 2.10.
3. 证明定理 2.11.

2.5 实数集 $\mathbb{R}$ 的特殊点、集

这一节我们初步介绍一些反映实数集 $\mathbb{R}$ 拓扑结构的特殊点、集. 这不仅有助于我们加深对 $\mathbb{R}$ 的进一步认识, 而且这些点、集在以后的一元实值函数的分析性质的研究中将发挥重要作用.

1. $\mathbb{R}$ 的度量

我们首先介绍实数的绝对值概念.

定义 2.7

$\forall x \in \mathbb{R}, x$ 的绝对值 $|x|$ 定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & 若\ x \geqslant 0, \\ -x, & 若\ x < 0. \end{cases}$$

♣

绝对值有下面两个最基本的性质.

性质 2.1 $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

1. $|x| \geqslant 0, |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$；
2. $|x| = |-x|, -|x| \leqslant x \leqslant |x|$；
3. $|xy| = |x||y|$；
4. $\forall \varepsilon > 0, |x| \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$；
5. $|x \pm y| \leqslant |x| + |y|, ||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.

证明

1. 直接由绝对值定义推出.
2. $|x| = |-x|$ 也可由绝对值定义推得. 现在证明 $|x| \geqslant x$. 为此只需证明 $|x| - x \in \mathbb{R}^+$.
   若 $x \geqslant 0$, 则 $|x| - x = x - x = 0 \in \mathbb{R}^+$;
   若 $x < 0$, 则 $|x| - x = (-x) + (-x) \in \mathbb{R}^+ + \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$. 因此 $|x| \geqslant x$. 类似可证 $x \geqslant -|x|$.
3. 若 $xy \geqslant 0$, 则 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ 或 $x \leqslant 0, y \leqslant 0$. 因此
   $$|xy| = \begin{cases} xy = |x| \cdot |y|, 若\ x \geqslant 0, y \geqslant 0; \\ xy = (-x) \cdot (-y) = |x||y|, 若\ x \leqslant 0, y \leqslant 0. \end{cases}$$
   若 $xy \leqslant 0$, 则 $x \geqslant 0, y \leqslant 0$ 或 $x \leqslant 0, y \geqslant 0$, 因此
   $$|xy| = \begin{cases} -(xy) = x \cdot (-y) = |x||y|, 若\ x \geqslant 0, y \leqslant 0; \\ -(xy) = (-x) \cdot y = |x||y|, 若\ x \leqslant 0, y \geqslant 0. \end{cases}$$
   因此 $|xy| = |x||y|$.
4. 设 $\varepsilon > 0$, 且 $|x| \leqslant \varepsilon$.
   若 $x \geqslant 0$, 则 $|x| = x$, 从而 $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$. 因此 $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$.
   若 $x < 0$, 则 $|x| = -x$. 于是 $-x \leqslant \varepsilon$. 由此得到 $-\varepsilon \leqslant x < 0$. 因此 $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$.
   反之设 $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$.
   若 $x \geqslant 0$, 则 $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$. 从而 $|x| \leqslant \varepsilon$.
   若 $x < 0$, 则 $-\varepsilon \leqslant x < 0$, 从而 $0 < -x \leqslant \varepsilon$. 因此 $|x| \leqslant \varepsilon$.
5. 由 2) 我们有
   $$-|x| \leqslant x \leqslant |x|, -|y| \leqslant y \leqslant |y|.$$

因此

$$-(|x|+|y|)=-|x|+(-|y|)\leqslant x+y\leqslant |x|+|y|.$$

由 4) 得到

$$|x+y|\leqslant |x|+|y|.$$

对第二个不等式，我们有

$$|x-y|=|x+(-y)|\leqslant |x|+|-y|=|x|+|y|.$$

最后关于不等式 $||x|-|y||\leqslant |x-y|$, 由于

$$|x|=|x-y+y|\leqslant |x-y|+|y|$$
$$|y|=|y-x+x|\leqslant |y-x|+|x|=|x-y|+|x|$$

故

$$-|x-y|\leqslant |x|-|y|\leqslant |x-y|.$$

由 4) 得到

$$||x|-|y||\leqslant |x-y|$$

性质 2.2 $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$,

1. $|x-y|\geqslant 0, |x-y|=0 \iff x=y$；
2. $|x-y|=|y-x|$
3. $|x-y|\leqslant |x-z|+|z-y|$；

证明 可由性质2.5推出.

正因为绝对值 $|x-y|$ 具有性质 2.5, 故引入下述定义.

定义 2.8

$\forall x,y\in\mathbb{R}$, 实数值 $|x-y|$ 称为 x 与 y 之间的度量，实数集 $\mathbb{R}$ 连同这个度量一起称为实数度量空间，简称为实数空间. ♣

显然， $\mathbb{R}$ 上的这个绝对值度量不是别的，正是我们通常所说的实数轴上任意两点之间的 Euclidean 距离.

一元函数的分析就是以这个实数度量空间为基本空间的.

2. $\mathbb{R}$ 的一些重要集合

设 $a,b\in\mathbb{R}, a\leqslant b$, 我们定义下面四个集合：

$$\begin{aligned}
&\text{闭区间 } [a,b]\triangleq\{x\in\mathbb{R}\mid a\leqslant x\leqslant b\},\\
&\text{开区间 } (a,b)\triangleq\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\},\\
&\text{左闭右开区间 } [a,b)\triangleq\{x\in\mathbb{R}\mid a\leqslant x<b\},\\
&\text{左开右闭区间 } (a,b]\triangleq\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leqslant b\}.
\end{aligned}\tag{2.2}$$

注意，若 $a=b$, 则 $[a,b]=\{a\},(a,b)=[a,b)=(a,b]=\varnothing$.

此外，我们还定义下面几个集合：

$$\begin{aligned}
&(-\infty,a]\triangleq\{x\in\mathbb{R}\mid x\leqslant a\},(-\infty,a)\triangleq\{x\in\mathbb{R}\mid x<a\},\\
&[a,+\infty)\triangleq\{x\in\mathbb{R}\mid x\geqslant a\},(a,+\infty)\triangleq\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\},\\
&\mathbb{R}\triangleq(-\infty,+\infty),\overline{\mathbb{R}}\triangleq[-\infty,+\infty].
\end{aligned}\tag{2.3}$$

(2.2)中的各区间称为 $\mathbb{R}$ 的有限区间. (2.3)中的各集合称为无限区间. 有限区间与无限区间统称为区间.

3. 邻域

定义 2.9

设 $a \in \mathbb{R}$.

1. 包含 a 的任一开区间 (α, β) 称为 a 的一个邻域. 我们用 $\mathscr{N}(a)$ 表示由 a 的所有邻域组成的邻域系.
   特别地, $\forall \delta > 0$,
   $$B(a, \delta) \triangleq \{x \in \mathbb{R} | |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta)$$
   称为以 a 为中心 δ 为半径的 δ 邻域.
2. $\forall \delta > 0$,
   $$\overset{\circ}{B}(a, \delta) \triangleq \{x \in \mathbb{R} | 0 < |x-a| < \delta\}$$
   称为以 a 为中心 δ 为半径的去心 δ 邻域.
   $$B_+(a, \delta) \triangleq \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < a+\delta\}$$
   $$B_-(a, \delta) \triangleq \{x \in \mathbb{R} \mid a-\delta < x \leqslant a\}$$
   分别称为 a 的右侧与左侧 δ 邻域.
   $$\overset{\circ}{B}_+(a, \delta) \triangleq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < a+\delta\},$$
   $$\overset{\circ}{B}_-(a, \delta) \triangleq \{x \in \mathbb{R} \mid a-\delta < x < a\}$$
   分别称为 a 的右侧与左侧去心 δ 邻域.
3. 开区间 $(a, +\infty)$ 与 $(-\infty, a)$ 分别称为 $+\infty$ 与 $-\infty$ 邻域.

♣

性质 2.3 (Hausdorff 分离性) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 且 $x \neq y, \exists \delta > 0$ 使得

$$B(x, \delta) \cap B(y, \delta) = \varnothing$$

证明 取 $\delta = \dfrac{|x-y|}{3}$.

4. 聚点、孤立点、内点

定义 2.10

设 $X \subset \mathbb{R}$ 是任一集合. $a \in \mathbb{R}$.

1. 我们称 a 是 X 的 (有限) 聚点, 如果
   $$\forall \delta > 0, X \cap \overset{\circ}{B}(a, \delta) \neq \varnothing;$$
2. 我们称 a 是 X 的右侧聚点, 如果
   $$\forall \delta > 0, X \cap \overset{\circ}{B}_+(a, \delta) \neq \varnothing;$$
3. 我们称 a 是 X 的左侧聚点, 如果
   $$\forall \delta > 0, X \cap \overset{\circ}{B}_-(a, \delta) \neq \varnothing;$$
4. 我们称 a 是 X 的双侧聚点, 如果 a 是 X 的右侧聚点又是 X 的左侧聚点.

♣

注 由上述定义可知: 若 a 是 X 的聚点, 则它至少是一个单侧聚点; X 的聚点可以属于 X, 也可以不属

于 X.

例题 2.6 考虑集合 $X=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$,0 是 X 的唯一聚点. $0\notin X$.

例题 2.7 考虑区间 $(a,b]$.$\forall x\in(a,b]$, x 都是 $(a,b]$ 的聚点, 但 a 是右侧聚点, b 是左侧聚点, 而其它的点是 $(a,b]$ 的双侧聚点.

定义 2.11

设 $X\subset\mathbb{R}$ 是任一集合, $a\in X$.

1. 我们称 a 是 X 的孤立点, 如果
$$\exists\delta>0, X\cap B(a,\delta)=\{a\}.$$
2. 我们称 a 是 X 的内点, 如果
$$\exists\delta>0, B(a,\delta)\subset X.$$

   由 X 的所有内点组成的集合称为 X 的内部, 记为 $\mathring{X}$.

例题 2.8 例2.6中的集合 X 的每一个元素 $\frac{1}{n}(n\in\mathbb{N})$ 都是孤立点. X 的内部 $\mathring{X}=\varnothing$; 例 2.5中的集合 $(a,b]$ 没有孤立点, $(a,b]$ 的内部为 (a,b).

例题 2.9 考虑开区间 (a,b). 显然 (a,b) 没有孤立点, 并且 (a,b) 的内部为 (a,b).

定义 2.12

设 $X\subset\mathbb{R}$ 是任一集合. 我们称 $+\infty(-\infty)$ 是 X 的正 (负) 无穷远聚点, 如果
$$\forall M>0, X\cap(M,+\infty)\neq\varnothing\,(X\cap(-\infty,-M)\neq\varnothing).$$

例题 2.10 考虑集合 $X=\mathbb{Z}$, 显然 $\mathbb{Z}$ 有 $\pm\infty$ 无穷远聚点. $\mathbb{Z}$ 没有有限聚点.

例题 2.11 考虑集合
$$X=\left\{\frac{1}{n}+\left((-1)^n+1\right)n \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\},$$
$$Y=\left\{\frac{1}{n}+\left((-1)^n-1\right)n \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}.$$
X 有 $+\infty$ 无穷远聚点, Y 有 $-\infty$ 无穷远聚点, X 与 Y 有有限聚点 0 .

5. 开集、闭集

定义 2.13

设 $X\subset\mathbb{R}$ 是任一集合.

1. 我们称 X 是开集, 如果
$$(\forall x\in X)(\exists\delta>0)\Longrightarrow B(x,\delta)\subset X.$$
2. 我们称 X 是闭集, 如果 $\mathbb{R}-X$ 是开集.

显然空集 $\varnothing$ 与 $\mathbb{R}$ 既是开集又是闭集. 任何一个开区间 (a,b) 是开集, 而闭区间 $[a,b]$ 是闭集, 任何一个集合 X 的内部 $\mathring{X}$ 是开集.

习题 2.5

1. 证明下列各关系式：

   1)
   $$|x+y| = |x| + |y| \text{ 当且仅当 } xy \geqslant 0,$$
   $$|x+y| < |x| + |y| \text{ 当且仅当 } xy < 0.$$

   2)
   $$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

2. 证明绝对值的性质 2.
3. 指出下列集合 X 的 (有限或无穷远) 聚点：

   1) $X = \left\{ \dfrac{1+(-1)^n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$；

   2) $X = \left\{ n^{(-1)^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$；

   3) $X = \left\{ (-1)^n \left(1+\dfrac{1}{n}\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$；

   4) $X = \left\{ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{N} \right\}$.

4. 有理数集 $\mathbb{Q}$ 及无理数集 $\mathbb{Q}^c$ 的聚点是哪些？$\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{Q}^c$ 有孤立点与内点吗？
5. 设 $X \subset \mathbb{R}$ 是任一非空集合. 证明 $a \in \mathbb{R}$ 是 X 的聚点的充分必要条件是:a 的每一个邻域 $U \in \mathscr{N}(a)$ 都包含 X 的无限多个元素.
6. 回答下列问题：

   1) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right)$ 是非空开集吗？

   2) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ 是非空开集吗？是闭集吗？

   3) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(-1, 1+\frac{1}{n}\right)$ 是既非开又非闭集吗？

   4) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$ 是闭集吗？

7. 证明对任意 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$, 区间 $[a, b)$ 在 $\mathbb{R}$ 中既不是开集也不是闭集.

第三章 实数的连续性

这一章我们首先介绍实数序列的极限概念，然后研究了序列极限的基本性质，最后证明了实数的连续性.

3.1 实数序列的极限

首先我们介绍实数序列的极限定义.

1. 实数序列的极限定义

定义 3.1

从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{R}$ 的任一映射 $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 称为一个实数序列，简记为 $\langle x_n\rangle$. $x_n(n\in\mathbb{N})$ 称为此实数序列的第 n 项或通项.

♣

例题 3.1 设

1. $x_n=\dfrac{a^n}{n!}(n\in\mathbb{N})$；
2. $x_n=f(n)(n\in\mathbb{N})$, 这里 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 是任一函数；
3. $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\quad(n\in\mathbb{N}), x_1=0$,

则这些 $\langle x_n\rangle$ 都是实数序列，第 3 个实数序列称为递推序列.

对于一个实数序列 $\langle x_n\rangle$, 我们关心的是通项 x_n 随 n 增大时的变化趋势. 为此引入下述定义.

定义 3.2

设 $\langle x_n\rangle$ 是任一实数序列，我们称 $\langle x_n\rangle$ 收敛，如果存在 $a\in\mathbb{R}$, 它具有下述性质：

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N)\Longrightarrow|x_n-a|<\varepsilon.$$

这时也称实数序列 $\langle x_n\rangle$ 收敛于 a 或以 a 为极限，并记为

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=a,\text{ 或 } x_n\to a(n\to+\infty).$$

用邻域的语言来描述序列的极限就是

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=a\Longleftrightarrow(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N)$$

$$\Longrightarrow x_n\in B(a,\varepsilon).$$

序列极限的这种数学描述通常称为 "$\varepsilon-N$" 极限语言.

♣

由上述序列极限的定义可知，实数序列 $\langle x_n\rangle$ 收敛于 a 的实质是：通项 x_n 与实数 a 的差的绝对值 $|x_n-a|$ 随 n 增大的变化趋势最终要任意小而不管 x_n 接近 a 的方式如何.

例题 3.2 考虑下列三个实数序列 $\langle x_n\rangle,\langle y_n\rangle,\langle z_n\rangle$：

$$x_n=\frac{1}{n},y_n=(-1)^n\frac{1}{n},z_n=\frac{2+(-1)^n}{n}(\forall n\in\mathbb{N}).$$

由于

$$|x_n-0|=\frac{1}{n},|y_n-0|=\frac{1}{n},|z_n-0|\leqslant\frac{3}{n},$$

故 $\forall \varepsilon > 0$, 若取 $N = \left[\frac{3}{\varepsilon}\right] + 1$, 则

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow |x_n - 0| < \varepsilon, |y_n - 0| < \varepsilon, |z_n - 0| < \varepsilon.$$

根据上述定义，此即表明

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} z_n = 0$$

但是 x_n, y_n, z_n 接近极限 0 的方式各不相同 (参见图3.1):

对于序列 $\langle x_n \rangle$： 通项 $x_n = \frac{1}{n}$ 又从 0 的右侧趋于 0 .

对于序列 $\langle y_n \rangle$： 通项 $y_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ 从 0 的左右侧趋于 0 .

对于序列 $\langle z_n \rangle$： 通项 $z_n = \frac{2 + (-1)^n}{n}$ 以时而接近 0 又时而离开 0 的方式趋于 0 .

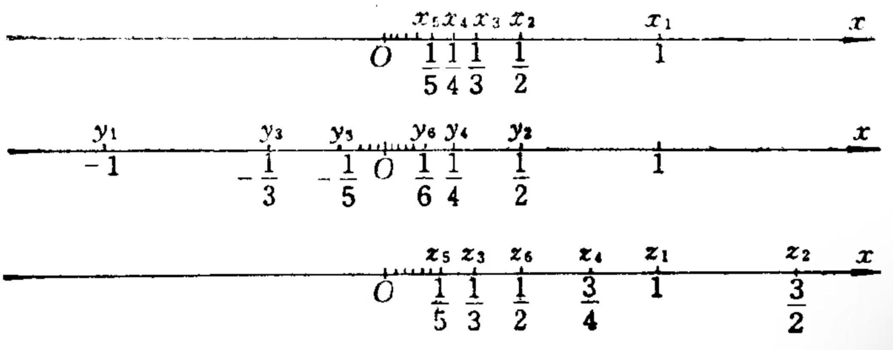

图 3.1

定义 3.3

我们称实数序列 $\langle x_n \rangle$ 发散，如果 $\langle x_n \rangle$ 不收敛.

由序列收敛的定义可知：

$$\langle x_n \rangle \text{ 发散 } \Longleftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} x_n \neq a \Longleftrightarrow (\forall a \in \mathbb{R})\,(\exists \varepsilon_a > 0)\,(\forall n \in \mathbb{N})$$
$$(\exists k_n \in \mathbb{N}, k_n \geqslant n) \Longrightarrow \left|x_{k_n} - a\right| \geqslant \varepsilon_a.$$

例题 3.3 证明：实数序列 $\langle 1 + (-1)^n \rangle$ 发散.

事实上，$\forall a \in \mathbb{R}$, 由

$$\begin{aligned} 2 = |2 - a + a| &\leqslant |2 - a| + |a| \\ &= \left|1 + (-1)^{2n} - a\right| + \left|1 + (-1)^{2n-1} - a\right| \end{aligned}$$

推知 $\left|1 + (-1)^{2n} - a\right| \geqslant 1$ 或 $\left|1 + (-1)^{2n-1} - a\right| \geqslant 1$, 因此

$$(\forall a \in \mathbb{R})\,(\exists \varepsilon_a = 1 > 0)\,(\forall n \in \mathbb{N})(\exists 2n \in \mathbb{N} \text{ 或 } 2n-1 \in \mathbb{N}, 2n, 2n-1 \geqslant n)$$
$$\Longrightarrow \left|1 + (-1)^{2n} - a\right| \geqslant 1 \text{ 或 } \left|1 + (-1)^{2n-1} - a\right| \geqslant 1,$$

此即表明 $\langle 1 + (-1)^n \rangle$ 发散.

直接从序列极限的定义可推出下述等价命题成立：

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \Longrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant N)$$

$$\Longleftrightarrow |x_n-a|\leqslant M\varepsilon.$$

这里 M 是与 n 无关的正数. 熟悉这一点，将给我们今后证明序列的极限带来方便.

现在我们介绍几个常用的方法.

2. 用 ε-N 极限语言证明序列极限的方法

直接用 ε-N 极限语言证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ 没有万能的方法，总的原则是将差式 $|x_n-a|$ 适当地放大成 $|x_n-a|\leqslant A_n$ 的形式，使得表达式 A_n 的形式尽可能的简洁，并由 $A_n<\varepsilon$ 可方便地求出极限定义中所指的自然数 N.

下面就是几个一般的证明方法.

1. 直接变形求 A_n.

例题 3.4 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1})=0$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, 由于

$$\begin{aligned}
&|\sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1})-0|\\
=&\sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1})\\
=&\frac{\sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1})\left(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n(n-1)}+\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n(n-1)}+\sqrt[3]{(n-1)^2}}\\
=&\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n(n-1)}+\sqrt[3]{(n-1)^2}}\\
<&\frac{1}{\sqrt[3]{n}}.
\end{aligned}$$

故 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}<\varepsilon$ 得到 $n>\dfrac{1}{\varepsilon^3}$. 令 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon^3}\right]+1$, 则

$$\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant N \Longrightarrow |\sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1})-0|<\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1})=0$.

例题 3.5 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)=1$. $\forall n\in\mathbb{N}$, 由于

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=&\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
=&1-\frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

故

$$\left|\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}.$$

$\forall\varepsilon>0$, 由 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ 得到 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. 令 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 则

$$\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant N \Longrightarrow \left|\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}-1\right|<\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=1$.

2. 利用不等式求 A_n .

例题 3.6 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot2n}=0$.

由不等式 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a\geqslant0,b\geqslant0)$ 得到

$$2=\frac{1+3}{2}\geqslant\sqrt{1\cdot3},\quad 4=\frac{3+5}{2}\geqslant\sqrt{3\cdot5},\cdots$$
$$2n=\frac{(2n-1)+(2n+1)}{2}\geqslant\sqrt{(2n-1)(2n+1)}$$

将这些不等式相乘得

$$\begin{aligned}2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n&\geqslant\sqrt{1\cdot3}\cdot\sqrt{3\cdot5}\cdot\ldots\cdot\sqrt{(2n-1)(2n+1)}\\&=1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\sqrt{2n+1}.\end{aligned}$$

由此得到

$$\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$\forall\varepsilon>0$, 由 $\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$ 得到 $n>\frac{1}{\varepsilon^2}$. 令 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+1$, 则

$$\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N\Longrightarrow\left|\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}-0\right|<\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}=0$.

例题 3.7 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

由于 $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(n!)^2&=n!\cdot n!\\&=1\cdot n\cdot2\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot k(n-k+1)\cdot\ldots\cdot n\cdot1,\end{aligned}$$

并且 $\forall k,n\in\mathbb{N},k\leqslant n$ 有 $k(n-k+1)\geqslant n$, 故

$$(n!)^2\geqslant n\cdot n\cdot\ldots\cdot n\cdot\ldots\cdot n=n^n.$$

由此推得 $\sqrt[n]{n!}\geqslant\sqrt{n}$ 或

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\forall\varepsilon>0$, 由 $\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$ 得到 $n>\frac{1}{\varepsilon^2}$. 令 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+1$, 则

$$\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N\Longrightarrow\left|\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}-0\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

3. 利用二项式展开求 A_n .

例题 3.8 证明：$\forall q\in\mathbb{R},|q|<1,\ \lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0.$

若 $q=0$, 则结论显然成立.

若 $q \neq 0$, 则由于 $|q|<1$ 有 $\frac{1}{|q|}>1$. 令 $a=\frac{1}{|q|}-1$, 则 $a>0$ 并且

$$|q|=\frac{1}{1+a}, |q|^n=\frac{1}{(1+a)^n}$$

由二项式展开公式得到

$$(1+a)^n=1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2+\cdots+a^n>na,$$

所以

$$|q^n-0|=|q|^n=\frac{1}{(1+a)^n}<\frac{1}{na}.$$

$\forall \varepsilon=0$, 由 $\frac{1}{na}<\varepsilon$ 得到 $n>\frac{1}{a\varepsilon}$. 令 $N=\left[\frac{1}{a\varepsilon}\right]+1$, 则

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Longrightarrow |q^n-0|<\frac{1}{na}<\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n=0$.

例题 3.9 证明：$\forall q \in \mathbb{R}, |q|<1, \lim\limits_{n \to +\infty} nq^n=0$.

若 $q=0$, 则结论显然成立.

若 $q \neq 0$, 则像上一题一样, 令 $a=\frac{1}{|q|}-1>0$. 则

$$n|q|^n=\frac{n}{(1+a)^n}(n \in \mathbb{N})$$

由于

$$(1+a)^n=1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2+\cdots+a^n>\frac{n(n-1)}{2}a^2$$

故

$$|nq^n-0|=n|q|^n<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}a^2}=\frac{2}{(n-1)a^2} \quad (n \geqslant 2).$$

$\forall \varepsilon>0$, 由 $\frac{2}{(n-1)a^2}<\varepsilon$ 得到 $n>1+\frac{2}{a^2\varepsilon}$. 令 $N=1+\left[1+\frac{2}{a^2\varepsilon}\right]$, 则

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Longrightarrow |nq^n-0|<\frac{2}{(n-1)a^2}<\varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{n \to +\infty} nq^n=0$.

4. 分析法求 A_n

例题 3.10 证明：$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!}=0(a \neq 0)$.

首先 $\forall n, m \in \mathbb{N}$ 且 $m \leqslant n$, 我们有

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{|a|^n}{n!}=\left(\frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdots \cdots \frac{|a|}{m-1}\right) \cdot\left(\frac{|a|}{m} \cdots \cdots \frac{|a|}{n-1}\right) \cdot \frac{|a|}{n}.$$

若取 $m \geqslant |a|$, 则

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|<\frac{|a|^{m-1}}{(m-1)!} \cdot 1 \cdots \cdots 1 \cdot \frac{|a|}{n}=\frac{M}{n}.$$

这里 $M=\frac{|a|^m}{(m-1)!}>0. \forall \varepsilon>0$, 由 $\frac{M}{n}<\varepsilon$ 得到 $n>\frac{M}{\varepsilon}$, 令 $N=\max\left(m,\left[\frac{M}{\varepsilon}\right]+1\right)$, 则

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|<\frac{M}{n}<\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

例题 3.11 证明：若 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$.

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, 故由定义

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists N_1\in\mathbb{N})\,(\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N_1)\implies|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此 $\forall n\geqslant N_1$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-a\right|&=\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n-na}{n}\right|\\&\leqslant\left|\frac{(x_1-a)+\cdots+(x_{N_1}-a)}{n}\right|+\left|\frac{(x_{N_1+1}-a)+\cdots+(x_n-a)}{n}\right|\\&<\frac{\left|(x_1-a)+\cdots+(x_{N_1}-a)\right|}{n}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\\&<\frac{M}{n}+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

这里 $M=\left|(x_1-a)+\cdots+(x_{N_1}-a)\right|\geqslant0$. 由 $\dfrac{M}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 得到 $n>\dfrac{2M}{\varepsilon}$. 令 $N=\max\left(N_1,\left[\dfrac{2M}{\varepsilon}\right]+1\right)$, 则

$$\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N\implies\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-a\right|<\frac{M}{n}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$.

习题 3.1

1. 证明下列结论等价：
   1) $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$;
   2) $(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N)\Rightarrow|x_n-a|<M\varepsilon$, ($M$ 为常数);
   3) $(\forall k\in\mathbb{N})(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N)\Rightarrow|x_n-a|<\dfrac{1}{k}$.
2. 证明：实数序列 $\langle(-1)^n\rangle$ 发散.
3. 证明：对任意 $a\in\mathbb{R}$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{[na]}{n}=a$.
4. 证明：若 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}|x_n|=|a|$. 举例说明逆命题不成立.
5. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$ 当且仅当 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n+1}=a$.
6. 用 ε-N 定义语言证明下列极限：
   1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$;
   2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$;
   3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0(a>1,\ k\in\mathbb{N})$;
   4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^k}=1(k\in\mathbb{N})$;
   5) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[k]{n})^{\frac{1}{n}}=1(k\in\mathbb{N})$;
   6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)=0$;

7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\dfrac{1}{2}$；

8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}\right)=2$；

9) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdots\cdot\dfrac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}=2$；

10) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)=3.$

7. 设 $\langle x_n\rangle$ 是任一实数序列，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, 证明：
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}=0.$$

8. 设 $a_0,a_1,\ldots,a_k\in\mathbb{R}$，且满足 $a_0+a_1+\cdots+a_k=0$, 证明：
$$\lim_{n\to+\infty}\left(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_k\sqrt{n+k}\right)=0.$$

9. 设 $\langle x_n\rangle$ 是任一实数序列，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$.

1) 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_1+2x_2+\cdots+nx_n}{n^2}=\dfrac{a}{2}$.

2) 利用 1) 之结论计算下列各极限值 $(0<a<1)$：
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\left(a+2^2a^2+\cdots+n^2a^n\right),$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\left(1+\sqrt{2^3}+\sqrt[3]{3^4}+\cdots+\sqrt[n]{n^{n+1}}\right).$$

10. 分别利用极限定义和反证法证明：序列 $\langle\sin n\rangle$ 发散.

11. 设 $\langle a_n\rangle$ 是一个实数序列，令
$$b_n=a_{n-1}+2a_n,(n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2),$$
证明：若 $\langle b_n\rangle$ 收敛，则 $\langle a_n\rangle$ 也收敛，并且 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=3\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$.

12. 设实数序列 $\langle a_n\rangle$ 满足条件：$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-a_{n-2})=0$, 证明：
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(a_n-a_{n-1})=0.$$

13. 设 $X\subset\mathbb{R}$ 是任一非空集合. 证明：X 是闭集的充分必要条件是
$$\forall x_n\in X(n\in\mathbb{N})\text{且 } x_n\to x\,(n\to+\infty),\quad\text{则 } x\in X.$$

3.2 收敛序列的性质

1. 收敛序列的一般性质

性质 3.1 如果实数序列 $\langle x_n\rangle$ 收敛，则此序列的极限是唯一的.

证明 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=b$ 并且 $a\neq b$. 于是由 $\mathbb{R}$ 的 Hausdorff 分离性，存在 $\delta>0$ 使得
$$B(a,\delta)\cap B(b,\delta)=\varnothing.$$
另一方面，对 $\delta>0$, 存在 $N_1,N_2\in\mathbb{N}$, 使得
$$\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N_1\Longrightarrow x_n\in B(a,\delta),$$
$$\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N_2\Longrightarrow x_n\in B(b,\delta).$$

令 $N = \max(N_1, N_2)$, 则

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow x_n \in B(a,\delta) \cap B(b,\delta).$$

这与 $B(a,\delta) \cap B(b,\delta) = \varnothing$ 相矛盾. 因此 $a = b$.

性质 3.2 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, 则任意改变 $\langle x_n \rangle$ 的有限多项后所得新的实数序列 $\langle y_n \rangle$ 也有 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$.

证明留给读者.

性质 3.3 如果实数序列 $\langle x_n \rangle$ 收敛, 则 $\langle x_n \rangle$ 是有界的. 即

$$(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow |x_n| \leqslant M.$$

证明 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. 于是对 $\varepsilon = 1$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N &\Longrightarrow |x_n - a| < 1 \\ &\Longrightarrow |x_n| \leqslant |x_n - a| + |a| < 1 + |a|. \end{aligned}$$

令 $M = \max(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{N-1}|, 1 + |a|)$, 则

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n| \leqslant M.$$

性质 3.4 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, 则对任一映射 $k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, k(n) < k(n+1), \forall n \in \mathbb{N}$, 也有 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k(n)} = a$. (序列 $\langle x_{k(n)} \rangle$ 称为 $\langle x_n \rangle$ 的子序列, $\langle x_{k(n)} \rangle$ 也常记为 $\langle x_{k_n} \rangle$)

证明 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, 所以由定义,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

现设 $k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是任一映射, 满足 $k(n) < k(n+1), \forall n \in \mathbb{N}$(这种映射称为严格单调上升映射). 那么由归纳法可证:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, k(n) \geqslant n. \text{ 由此推得 } \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N &\Longrightarrow k(n) > N \\ &\Longrightarrow \left| x_{k(n)} - a \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k(n)} = a$.

例题 3.12 利用性质3.2证明实数序列 $\langle 1 + (-1)^n \rangle$ 发散.

定义严格单调上升映射 $k, l: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 如下:

$$k(n) = 2n, l(n) = 2n - 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

那么

$$1 + (-1)^{k(n)} = 2, 1 + (-1)^{l(n)} = 0 \forall n \in \mathbb{N}.$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[1 + (-1)^{k(n)}\right] = 2, \lim\limits_{n\to+\infty} \left[1 + (-1)^{(n)}\right] = 0$. 由性质3.2知, 序列 $\langle 1 + (-1)^n \rangle$ 发散.

例题 3.13 设 $p \in \mathbb{N}, \langle x_n \rangle$ 是一实数序列满足 $x_n = x_{n+p} (\forall n \in \mathbb{N})$. 证明, 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, 则 $x_n \equiv a \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

为此, 考虑 p 个严格单调上升映射 $k^{(i)}: \mathbb{N} \to \mathbb{N} (i = 1, 2, \cdots, p)$, 它定义为:

$$k^{(i)}(n) = i + (n-1)p, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, 故 $\forall i = 1, 2, \cdots, p, \lim\limits_{n\to+\infty} x_{k^{(i)}(n)} = a$.

另一方面, 由假设 $x_n = x_{n+p} (\forall n \in \mathbb{N})$, 我们有

$$x_{k^{(i)}(n)} = x_{k^{(i)}(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}. (i = 1, 2, \cdots, p)$$

因此 $x_{k^{(i)}(n)} \equiv a(\forall n \in \mathbb{N})(i=1,2,\cdots,p)$ 从而 $x_n \equiv a(\forall n \in \mathbb{N})$.

2. 收敛序列极限的运算性质

性质 3.5 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$. 则实数序列 $\langle x_n + y_n\rangle, \langle x_n y_n\rangle, \left\langle \dfrac{x_n}{y_n}\right\rangle (b \neq 0)$ 也收敛，并且

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = a + b$;
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n = ab$;
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}(b \neq 0)$.

证明 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, 所以

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Longrightarrow \begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon, \\ |y_n - b| < \varepsilon, |y_n| < |b| + \varepsilon. \end{cases}$$

由此推得

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \begin{cases} |(x_n + y_n) - (a+b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < 2\varepsilon, \\ |x_n y_n - ab| \leqslant |y_n|\,|x_n - a| + |a|\,|y_n - b| < (|a| + |b| + \varepsilon)\varepsilon. \end{cases}$$

因此 $\langle x_n + y_n\rangle$ 及 $\langle x_n y_n\rangle$ 收敛，并且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = a + b,\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n = ab$.

若 $b \neq 0$, 则不妨设 $0 < \varepsilon < \dfrac{|b|}{2}$, 由 $|y_n - b| < \varepsilon$ 推得 $|y_n| > |b| - \varepsilon \geqslant \dfrac{|b|}{2}(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N)$, 因此

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| &= \frac{|x_n b - y_n a|}{|b|\,|y_n|} \\ &\leqslant \frac{2}{|b|^2}(|x_n b - ab| + |y_n a - ab|) \\ &< \frac{2}{|b|^2}(|a| + |b|)\varepsilon. \end{aligned}$$

从而 $\left\langle \dfrac{x_n}{y_n}\right\rangle$ 收敛，并且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

推论 3.1

若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a, b \in \mathbb{R}$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n + b) = a + b,\quad \lim_{n\to+\infty} x_n b = ab,$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}(a \neq 0).$$

例题 3.14 由于 $\forall p \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^p} = 0$ 及

$$\frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_m n^m + b_{m-1}n^{m-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \frac{a_k + a_{k-1}\frac{1}{n} + \cdots + a_1\frac{1}{n^{k-1}} + a_0\frac{1}{n^k}}{b_m + b_{m-1}\frac{1}{n} + \cdots + b_1\frac{1}{n^{m-1}} + b_0\frac{1}{n^m}} \cdot n^{k-m}$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_m n^m + b_{m-1}n^{m-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \dfrac{a_k}{b_m}, \text{ 若 } k = m, \\ 0, \text{ 若 } k < m. \end{cases}$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^3 - 1}{2n^3 + n^2 + 1} = \frac{3}{2},\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2 + n + 1}{5n^3 + 2n - 1} = 0$$

3. 收敛序列的不等式性质

性质 3.6 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, 并且 $a > r(a < r)$ 则

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Longrightarrow x_n > r\ (x_n < r).$$

证明 设 $a > r$. 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. 对于 $\varepsilon = a - r > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N &\Longrightarrow |x_n - a| < a - r\\ &\Longrightarrow x_n > a - (a - r) = r.\end{aligned}$$

类似可证 $a < r$ 的情形.

性质 3.7 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$ 并且 $a > b(a < b)$ 则

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Longrightarrow x_n > y_n\ (x_n < y_n).$$

证明 设 $a > b$. 于是存在 $r \in \mathbb{R}$ 使得 $a > r > b$. 由 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a > r > b = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ 及性质3.2知,

$$(\exists N_1 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_1) \Longrightarrow x_n > r,$$
$$(\exists N_2 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_2) \Longrightarrow y_n < r.$$

令 $N = \max(N_1, N_2)$, 则

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow x_n > y_n.$$

对 $a < b$, 可类似证明.

性质 3.8 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, 则

$$\forall n \geqslant N, x_n \geqslant y_n\ (x_n \leqslant y_n) \Longrightarrow a \geqslant b(a \leqslant b).$$

证明 用反证法, 由性质3.2立即推出.

推论 3.2

如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ 并且 $\forall n \geqslant N, x_n \geqslant r\ (x_n \leqslant r)$, 则 $a \geqslant r(a \leqslant r)$.

注 即使在性质3.2中将不等号 "$\geqslant$ ($\leqslant$)" 换成严格不等号 "$>$ ($<$)", 也不一定有 $a > b(a < b)$.

例如, 取 $x_n = \dfrac{1}{n}, y_n = -\dfrac{1}{n}(n \in \mathbb{N})$. 显然有

$$x_n > y_n(\forall n \in \mathbb{N}), \text{但是} \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 0.$$

性质 3.9 设实数序列 $\langle x_n\rangle, \langle y_n\rangle, \langle z_n\rangle$ 满足下述条件:

1. $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N)$;
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$,

则 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$.

证明 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$, 我们有

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N_0 \in \mathbb{N}, N_0 \geqslant N)\ (\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0) \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon, |y_n - a| < \varepsilon.$$

由此推得

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 &\Longrightarrow a - \varepsilon < x_n, \quad y_n < a + \varepsilon\\ &\Longrightarrow a - \varepsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < a + \varepsilon\\ &\Longrightarrow |z_n - a| < \varepsilon.\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$.

性质3.2常称为序列极限的两边夹法则.

例题 3.15 设 $x_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}, y_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}, z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}.(n \in \mathbb{N})$. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 1$.

证明 首先由不等式

$$1 < \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \leqslant \sqrt{1+\frac{1}{n}} < 1+\frac{1}{n} (\forall n \in \mathbb{N})$$

及性质 3.2 推得 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}} = 1$, 因此

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$$

另一方面，由于

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ &< \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = y_n \end{aligned}$$

故 $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n (\forall n \in \mathbb{N})$. 从而由性质 3.2 得到

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = 1$$

例题 3.16 设 $\langle x_n \rangle$ 是任一实数序列, 并且 $x_n \leqslant x_{n+1} (\forall n \in \mathbb{N})$. 证明：若 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = a$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

首先由 $x_n \leqslant x_{n+1} (\forall n \in \mathbb{N})$ 我们有

$$y_n = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \leqslant x_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

现在任意固定 $n \in \mathbb{N}. \forall m \geqslant n$,

$$\begin{aligned} y_m &= \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}+\cdots+x_m}{m} \\ &= \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{m} + \frac{x_{n+1}+\cdots+x_m}{m} \\ &\geqslant \frac{x_1+\cdots+x_n}{m} + \left(\frac{m-n}{m}\right) x_n \end{aligned}$$

两边令 $m \to +\infty$, 由性质 3.2 得到

$$a = \lim_{m\to+\infty} y_m \geqslant \lim_{m\to+\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{m} + \lim_{m\to+\infty} \left(\frac{m-n}{m}\right) x_n = x_n.$$

由此得到不等式

$$y_n \leqslant x_n \leqslant a \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$, 故由性质 3.2 立即推得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

✍ 习 题 3.2

1. 设 $\langle x_n\rangle$ 是任一实数序列，满足条件 $x_n \leqslant x_{n+1}, (\forall n \in \mathbb{N})$ 或 $x_n \geqslant x_{n+1}, (\forall n \in \mathbb{N})$，如果存在 $\langle x_n\rangle$ 的一个子序列 $\langle x_{k(n)}\rangle$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k(n)} = a$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.
2. 计算下列极限：
   1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$；
   2) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n}$；
   3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n+2}$；
   4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}\right)$；
   5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(k+p)(k+p+q)}, (p,q \in \mathbb{N})$；
   6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
3. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$. 证明：
   1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \max(a_n, b_n) = \max(a, b)$；
   2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \min(a_n, b_n) = \min(a, b)$.
4. 设 $\langle a_n\rangle$ 是任一严格正的实数序列，并且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. 证明：
   1) 集合 $\{n \in \mathbb{N} \mid \forall k \geqslant n,\ a_k \leqslant a_n\}$ 是无限集；
   2) 集合 $\{n \in \mathbb{N} \mid \forall k \leqslant n,\ a_n \leqslant a_k\}$ 是无限集.
5. 设 $\langle a_n\rangle$,$\langle b_n\rangle$ 是任意两个实数序列，满足：$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$. 定义新序列 $\langle c_n\rangle$ 如下：
$$c_n = \frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1), (n \in \mathbb{N}).$$
   1) 证明：存在常数 $M > 0$，使得
$$|c_n - ab| \leqslant \frac{M}{n}\sum_{i=1}^{n}(|a_i - a| + |b_i - b|);$$
   2) 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = ab$.
6. 设 $\langle a_n\rangle$, $\langle b_n\rangle$ 是任意两个实数序列，满足：
   1) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$；
   2) 存在常数 $M > 0$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$, $|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n| \leqslant M$.

   证明：
$$\lim_{n\to+\infty} (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1) = 0.$$
7. 试利用两边夹法则证明下列极限：
   1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2}\right] = 0$；
   2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} a_i, (a_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, k)$；
   3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(\sqrt[n]{n} - 1)} = 1$；
   4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$，其中 $a_n > 0$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.

8. 设 $\langle x_n \rangle$ 是任一实数序列.
   1) 证明：如果子序列 $\langle x_{2n} \rangle$,$\langle x_{2n+1} \rangle$ 和 $\langle x_{3n} \rangle$ 都收敛，那么序列 $\langle x_n \rangle$ 收敛；
   2) 设 $a, b \in \mathbb{N}$ 是两个互质自然数，$u, v \in \mathbb{N}$ 满足 $bv - au = 1$. 假设子序列 $\langle x_{bn} \rangle$ 收敛，并且 $\forall r \in \{0, 1, \ldots, a-1\}$，子序列 $\langle x_{an+r} \rangle$ 收敛.
   证明：这些子序列 $\langle x_{bn} \rangle$,$\langle x_{an+r} \rangle$ 及 $\langle x_{abn+bvr} \rangle$ 收敛于同一极限 l，由此推出序列 $\langle x_n \rangle$ 收敛于 l.
9. 设 $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是任一严格单调上升映射，且 $\varphi \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
   1) 证明：存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N, \varphi(n) > n$；
   2) 记 $\varphi^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$，并归纳地定义 $\varphi^{n+1} = \varphi \circ \varphi^n (\forall n \in \mathbb{N} \cup 0)$，证明：$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N, \varphi^k(n) \geqslant n + k.(k \in \mathbb{N})$
   3) 设 $\langle x_n \rangle$ 是任一实数序列使得 $x_{\varphi(n)} = x_n (\forall n \in \mathbb{N})$. 证明：如果序列 $\langle x_n \rangle$ 收敛，则从某一项开始，x_n 为常数.

3.3 无穷小、无穷大序列

有两类特殊的实数序列——无穷小与无穷大序列——值得注意.

1. 无穷小、无穷大序列

定义 3.4

设 $\langle x_n \rangle$ 是任一实数序列.

1. 如果 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$, 则称 $\langle x_n \rangle$ 是无穷小序列；
2. 如果 $\langle x_n \rangle$ 具有下述性质：

$$(\forall M > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Longrightarrow |x_n| > M,$$

则称 $\langle x_n \rangle$ 是无穷大序列.

特别地，如果

$$(\forall M > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Longrightarrow x_n > M\ (x_n < -M)\,,$$

则称 $\langle x_n \rangle$ 是正 (负) 无穷大序列. 有时也称 $\langle x_n \rangle$ 趋于 $+\infty(-\infty)$, 并记为

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty \left(\lim_{n \to +\infty} x_n = -\infty \right)$$

♣

例题 3.17 设 $q \in \mathrm{R}$. 若 $|q| < (>)1$, 则实数序列 $\langle q^n \rangle$ 是无穷小 (大) 序列.

在 §1 例 3.8 中我们已经证明了 $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0(|q| < 1)$, 因此当 $|q| < 1$ 时，实数序列 $\langle q^n \rangle$ 是无穷小序列.

现在证明当 $|q| > 1$ 时，$\langle q^n \rangle$ 是无穷大序列.

为此令 $|q| = 1 + a$, 则 $a > 0$. 于是

$$|q^n| = |q|^n = (1 + a)^n > na$$

$\forall M > 0$, 由 $na > M$ 得到 $n > \dfrac{M}{a}$.

令 $N = \left[\dfrac{M}{a} \right] + 1$, 则

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow |q^n| > na > M.$$

因此 $\langle q^n \rangle$ 是无穷大序列.

例题 3.18 $\forall k \in \mathbb{N}$, 实数序列 $\langle n^k \rangle$ 与 $\langle -n^k \rangle$ 分别是正无穷大序列与负无穷大序列.

2. 无穷小、无穷大序列的性质

定理 3.1

设 $\langle x_n \rangle$ 是任一实数序列.

1. 若 $\langle x_n \rangle$ 是无穷小序列, 并且 $x_n \neq 0\,(\forall n \geqslant N_0)$ 则 $\left\langle \dfrac{1}{x_n} \right\rangle$ 是无穷大序列;
2. 若 $\langle x_n \rangle$ 是无穷大序列, 则 $\left\langle \dfrac{1}{x_n} \right\rangle$ 是无穷小序列.

证明

1. 设 $\langle x_n \rangle$ 是无穷小序列并且 $x_n \neq 0\,(\forall n \geqslant N_0)$, 则

$$(\forall M > 0)(\exists N \in \mathbb{N}, N \geqslant N_0)\,(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Longrightarrow |x_n| < \frac{1}{M}$$

由此推得

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \left| \frac{1}{x_n} \right| > M$$

因此 $\left\langle \dfrac{1}{x_n} \right\rangle$ 是无穷大序列.

2. 若 $\langle x_n \rangle$ 是无穷大序列. 则由定义

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Longrightarrow |x_n| > \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow \left| \frac{1}{x_n} \right| < \varepsilon.$$

因此 $\left\langle \dfrac{1}{x_n} \right\rangle$ 是无穷小序列.

例题 3.19 由于 $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a^n}{n^n} = 0 (a \neq 0)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n q^n = 0 (|q| < 1)$, 故 $\left\langle \dfrac{a^n}{n^n} \right\rangle$ 与 $\langle n q^n \rangle$ 是无穷小序列. 因而 $\left\langle \dfrac{n^n}{a^n} \right\rangle$ 与 $\left\langle \dfrac{1}{n q^n} \right\rangle$ 是无穷大序列.

定理 3.2

设 $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle$ 是两个实数序列.

1. 若 $\langle x_n \rangle$ 是无穷大序列, 则 $\langle x_n \rangle$ 不是有界序列, 并且 $\langle x_n \rangle$ 的任意子序列 $\langle x_{k_n} \rangle$ 也是无穷大序列.
2. 若 $\langle x_n \rangle$ 是无穷小序列, $\langle y_n \rangle$ 是有界序列, 则 $\langle x_n y_n \rangle$ 是无穷小序列.
3. 若 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a, \langle y_n \rangle$ 是无穷大序列, 则 $\langle x_n \pm y_n \rangle$ 是无穷大序列.
4. 若 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a, a \neq 0, \langle y_n \rangle$ 是无穷大序列, 则 $\langle x_n y_n \rangle$ 是无穷大序列.

证明留给读者作为练习.

上述定理3.2结论 3) 中若 $\langle x_n \rangle$ 是无穷大序列, 则 $\langle x_n \pm y_n \rangle$ 不一定是无穷大序列, 结论 4) 中若 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$, 则 $\langle x_n y_n \rangle$ 也不一定是无穷大序列. 在这两种情况下, 当 $n \to +\infty$ 时 $x_n \pm y_n$ 与 $x_n y_n$ 的变化可出现下述各种情形.

3. 不定型

$\infty - \infty$: 若 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = +\infty$, 则序列 $\langle x_n - y_n \rangle$ 称为 $\infty - \infty$ 不定型序列. 例如

i) $x_n = n + \frac{1}{n}, y_n = n(n \in \mathbb{N})$, 则

$$x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0(n \to +\infty);$$

ii) $x_n = 2n, y_n = n(n \in \mathbb{N})$, 则

$$x_n - y_n = n \to +\infty(n \to +\infty);$$

iii) $x_n = n + (-1)^n, y_n = n(n \in \mathbb{N})$, 则

$$x_n - y_n = (-1)^n \text{ 发散 } (n \to +\infty).$$

$0 \cdot \infty$：若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0, \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \pm\infty$, 则序列 $\langle x_n y_n \rangle$ 称为 $0 \cdot \infty$ 不定型序列. 例如

i) $x_n = \frac{1}{n}, y_n = n(n \in \mathbb{N})$, 则 $x_n y_n \equiv 1.(n \in \mathbb{N})$；

ii) $x_n = \frac{1}{n}, y_n = n^2(n \in \mathbb{N})$, 则

$$x_n y_n = n \to +\infty(n \to +\infty);$$

iii) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, y_n = n(n \in \mathbb{N})$, 则

$$x_n y_n = (-1)^n \text{ 发散 } (n \to +\infty).$$

$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$: 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \pm\infty, \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \pm\infty$ 或 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0, \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, 则 $\left\langle \frac{x_n}{y_n} \right\rangle$ 称为 $\frac{\infty}{\infty}$ 或 $\frac{0}{0}$ 不定型序列.

这后面两种不定型实际上可化为 $0 \cdot \infty$ 不定型, 因为只需写 $\frac{x_n}{y_n}$ 为 $\frac{1}{x_n} \cdot y_n$ 或 $x_n \cdot \frac{1}{y_n}$ 即可.

关于不定型序列的极限计算, 要具体情况具体分析, 目前有一个可供我们使用的方法就是 Stolz 定理 (见习题 5).

✍ 习 题 3.3

1. 设 $\langle a_n \rangle$ 是任一实数序列, $a_n \geqslant 0(\forall n \in \mathbb{N})$, 并且存在 $c > 0$ 使得 $\forall m, n \in N, m < n, a_n \leqslant c a_m$. 证明：如果 $\langle a_n \rangle$ 有子序列 $\langle a_{k_n} \rangle$ 使得
$$\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = 0, \text{则} \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$
2. 设 $\langle x_n \rangle$ 是一个无界实数序列, 则从 $\langle x_n \rangle$ 中可以选出一个无穷大子序列, 特别地, 如果 $\langle x_n \rangle$ 是无上 (下) 界实数序列, 则从 $\langle x_n \rangle$ 中可以选出一个严格单调上升 (下降) 的正 (负) 无穷大子序列.
3. 设 $\langle a_n \rangle$ 是一个实数序列, 并且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda, |\lambda| < 1$, 证明
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$
利用此结论证明下列极限：

   1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0(a \in \mathbb{R})$;

   2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b(b-1)\cdots(b-n+1)\cdot a^n}{n!} = 0(|a| < 1,\ b \in \mathbb{R})$;

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2}\cdot a^n=0(|a|<1)$.

4. 设 $\langle a_n\rangle$ 是一个正实数序列，并且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda,\lambda>1$. 证明

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty.$$

利用此结论证明下列极限：

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3\cdot 6\cdot 9\cdots 3n}{7\cdot 10\cdot 13\cdots(3n+4)}\cdot a^n=+\infty(a>1)$；

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot a^{2n}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}=+\infty(|a|>1)$；

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{n-1}{n^3-1}}\cdot a^n=+\infty(a>1)$.

5. 证明下述 Stolz 定理：设 $\langle x_n\rangle,\langle y_n\rangle$ 是两个实数序列，满足：

1) $y_n<y_{n+1}(\forall n\in\mathbb{N})$；

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=+\infty$；

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=a\in\mathbb{R}\cup\pm\infty$.

则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

试利用此结论证明下列各极限：

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{a^{2n}}=0(|a|>1)$；

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\dfrac{1}{k+1}(\forall k\in\mathbb{N})$；

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^k+3^k+\cdots+(2n+1)^k}{n^{k+1}}=\dfrac{2^k}{k+1}(\forall k\in\mathbb{N})$；

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k}-\dfrac{n}{k+1}\right)=\dfrac{1}{2}$；

5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}=\pm\infty$, 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\pm\infty$.

6. 设 $a_k>0$, $k\in\mathbb{N}$, 定义序列 $\langle A_n\rangle$ 如下：

$$A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,\forall n\in\mathbb{N}.$$

假设 $\langle A_n\rangle$ 发散，但 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_nA_n^{-1}=0$. 证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1A_1^{-1}+a_2A_2^{-1}+\cdots+a_nA_n^{-1}}{\log A_n}=1.$$

7. 设 $\langle a_n\rangle,\langle b_n\rangle$ 是两个正数序列，并且：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{na_n}=a,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{nb_n}=b,$$

$a+b>0$. 证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1b_1+2a_2b_2+\cdots+na_nb_n}{n^2a_nb_n}=\frac{ab}{a+b}.$$

8. 设 $\langle a_n\rangle,\langle b_n\rangle$ 是两个实数序列, 满足条件:
   1) $b_n<b_{n+1}(\forall n\in\mathbb{N})$, $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=+\infty$;
   2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=a\in\mathbb{R}$.

   证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_n}=0.$$

3.4 实数的连续性

在第 2 章 § 1 例 2.3中我们证明了以

$$r_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}(n\in\mathbb{N})$$

为通项的序列 $\langle r_n\rangle$ 是一个有理数 Cauchy 序列. 下面我们来证明 $\langle r_n\rangle$ 并没有有理数极限.

事实上, 由 r_n 的表达式我们有

$$\begin{aligned}r_{n+1}+\frac{1}{(n+1)!}&=r_n+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}\\&=r_n+\frac{2}{(n+1)!}<r_n+\frac{1}{n!}(n\geqslant 2)\end{aligned}$$

由此推得 $\forall n\geqslant 2,\forall k\in\mathbb{N}$,

$$r_n<r_{n+1}<r_{n+k}+\frac{1}{(n+k)!}<r_{n+1}+\frac{1}{(n+1)!}<r_n+\frac{1}{n!}$$

如果存在 $\frac{q}{p}\in\mathbb{Q}$, 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}r_n=\frac{q}{p}$, 则在上述不等式中令 $k\to+\infty$ 取极限即得到

$$r_n<\frac{q}{p}<r_n+\frac{1}{n!}.$$

特别取 $n=p$, 并两边同乘以 p 得到

$$0<\left(q-pr_p\right)(p-1)!<1$$

这显然是矛盾的, 因为 $\left(q-pr_p\right)(p-1)$! 是一个整数.

那么我们要问: 序列 $\langle r_n\rangle$ 在实数域 $\mathbb{R}$ 中是否收敛呢? 答案是肯定的. 这一节的目的就是要证明: 每一个实数 Cauchy 序列在 $\mathbb{R}$ 中收敛. 这一性质通常称为 $\mathbb{R}$ 的完备性.

$\mathbb{R}$ 的完备性可以用下列 7 个定理中的每一个定理独立地刻划:

1. Cauchy 收敛准则.
2. 确界存在定理.
3. 单调序列极限存在定理.
4. 区间套定理.
5. 聚点定理.
6. Bolzano-Weierstrass 定理.
7. Cantor 有限覆盖定理.

这七个定理也称为实数的连续性定理. 下面我们将按上述顺序证明它们的等价性.

首先我们证明下述引理.

引理 3.1

设 $x \in \mathbb{R}$. 则对 x 的任一代表 $\langle x_n \rangle$ 有

$$\lim_{n\to+\infty} \tilde{x}_n = x.$$

证明 设 $\varepsilon > 0$. 根据第 2 章 §2 引理2.1知，存在正有理数 α, 使得 $0 < \tilde{\alpha} < \varepsilon$. 由于 $\langle x_n \rangle$ 是有理数 Cauchy 序列，对 $a > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\begin{aligned} \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geqslant N &\Longrightarrow |x_n - x_m| < \alpha \\ &\Longrightarrow -\alpha < x_n - x_m < \alpha. \end{aligned}$$

固定 $n \in \mathbb{N}$. 令

$$r_m = \begin{cases} 0, & \text{若 } m = 1, 2, \cdots, N-1; \\ x_n - x_m, & \text{若 } m \geqslant N. \end{cases}$$

则 $\langle r_m \rangle$ 是有理数 Cauchy 序列，并且 $\tilde{x}_n - x = \widetilde{\langle r_m \rangle}$, 以及

$$-\alpha < r_m < \alpha (\forall m \in \mathbb{N}).$$

根据 $\mathbb{R}$ 的序关系定义，我们有

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N &\Longrightarrow -\tilde{\alpha} < \tilde{x}_n - x < \tilde{\alpha} \\ &\Longrightarrow -\varepsilon < \tilde{x}_n - x < \varepsilon \\ &\Longrightarrow |\tilde{x}_n - x| < \varepsilon \end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{x}_n = x$.

1. Cauchy 收敛准则

定义 3.5

我们称实数序列 $\langle x_n \rangle$ 为 Cauchy 序列，如果它具有下述性质：

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geqslant N) \Longrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

显然，当 $\langle x_n \rangle$ 为有理数序列时，上述定义与第 2 章 §1 的有理数 Cauchy 序列定义是一致的.

定理 3.3 (Cauchy 收敛准则)

实数序列 $\langle x_n \rangle$ 收敛的充分必要条件是 $\langle x_n \rangle$ 为 Cauchy 序列.

证明 必要性 设 $\langle x_n \rangle$ 收敛于 a. 那么

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Longrightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geqslant N \Longrightarrow |x_n - x_m| < |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon.$$

此即表明 $\langle x_n \rangle$ 是 Cauchy 序列.

充分性 设 $\langle x_n \rangle$ 是 Cauchy 序列. 那么

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N_1 \in \mathbb{N})\ (\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geqslant N_1) \Longrightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

另一方面，由有理实数集 $\widetilde{\mathbb{Q}}$ 在 $\mathbb{R}$ 中的稠密性，对每一个 $x_n \in \mathbb{R}$, 存在 $r_n \in \mathbb{Q}$, 使得

$$|x_n - \tilde{r}_n| > \widetilde{\frac{1}{n}} (\forall n \in \mathbb{N}).$$

我们证明由此得到的序列 $\langle r_n \rangle$ 是有理数 Cauchy 序列.

为此，我们注意到 $\widetilde{\langle \frac{1}{n} \rangle} = 0$, 因此由上述引理知 $\lim\limits_{n \to +\infty} \widetilde{\frac{1}{n}} = 0$. 从而存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geqslant N_2 \Longrightarrow \widetilde{\frac{1}{n}} < \frac{\varepsilon}{3}, \widetilde{\frac{1}{m}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

令 $N_0 = \max(N_1, N_2)$, 则

$$\begin{aligned}
\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geqslant N_0 \Longrightarrow |r_n - r_m| &= |\widetilde{r}_n - \widetilde{r}_m| \\
&\leqslant |\widetilde{r}_n - x_n| + |x_n - x_m| + |x_m - \widetilde{x_m}| \\
&< \widetilde{\frac{1}{n}} + \frac{\varepsilon}{3} + \widetilde{\frac{1}{m}} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

现在令 $a = \widetilde{\langle r_n \rangle}$, 由上述引理3.1, $\lim\limits_{n \to +\infty} \widetilde{r_n} = a$. 因此存在 $N_3 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_3 \Longrightarrow |\widetilde{r_n} - a| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

最后令 $N = \max(N_0, N_3)$. 则

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow |x_n - a| < |x_n - \widetilde{r}_n| + |\widetilde{r}_n - a| < \varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$.

例题 3.20 对于本节开头所提的有理数序列 $\langle r_n \rangle$

$$r_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} (n \in \mathbb{N}),$$

由于它是 Cauchy 序列，故根据 Cauchy 收敛准则，此序列在 $\mathbb{R}$ 中收敛. 以后我们将知道这个序列的极限就是无理数 e(e 的定义见第 5 章 §4).

例题 3.21 设

$$x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} (n \in \mathbb{N}).$$

证明实数序列 $\langle x_n \rangle$ 收敛.

证明 根据 Cauchy 收敛准则，我们只需证明 $\langle x_n \rangle$ 是 Cauchy 序列. 事实上，$\forall n, k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|x_{n+k} - x_n| &= \left| \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+k)^2} \right| \\
&< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} \right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

由此我们有

$$(\forall \varepsilon > 0) \left(\exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 \right) (\forall n, k \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Longrightarrow |x_{n+k} - x_n| < \varepsilon.$$

因此 $\langle x_n \rangle$ 是 Cauchy 序列.

注 因 $\mathbb{R}$ 的任何一个 Cauchy 序列都收敛，故我们称实数度量空间 $\mathbb{R}$ 是完备度量空间.

Cauchy 收敛准则完全是利用实数序列本身的信息来判断序列收敛与否的，它避免了用极限定义证明序列收敛需预先估计极限数的弊病. 因此在收敛性问题的研究中有着广泛的应用.

2. 集合的上、下确界

定义 3.6

设 $X \subset \mathbb{R}$ 是任一集合.

1. 我们称 X 是上 (下) 有界集，如果

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in X) \Longrightarrow x \leqslant M (\geqslant M).$$

M 称为 X 的上 (下) 界.

2. 我们称 X 是有界集，如果 X 既是上有界的，又是下有界的. ♣

由上述定义可知

1. 若 X 是上 (下) 有界集，M 是 X 的一个上 (下) 界，则所有比 M 大 (小) 的实数 M' 都是 X 的上 (下) 界.
2. X 是有界集 $\Longleftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in X, m \leqslant x \leqslant M$

$$\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}_*^+, \forall x \in X, |x| \leqslant M.$$

下面我们研究：若 X 是上 (下) 有界集，X 是否有最小上界 (最大下界)，为此我们引入下述定义.

定义 3.7

设 $X \subset \mathbb{R}$ 是任一集合. 若 X 是上 (下) 有界集，并且存在实数 $A(B)$，它具有下述性质：

i) $A(B)$ 是 X 的上 (下) 界，

ii) 若 $M(m)$ 是 X 的任一上 (下) 界，则

$$A \leqslant M (B \geqslant m),$$

则我们称 $A(B)$ 是 X 的上确界 (下确界). 记为

$$A = \sup X \text{ 或 } A = \sup_{x \in X} x \left(B = \inf X \text{ 或 } B = \inf_{x \in X} x \right).$$

♣

注 集合 X 的上确界或下确界可能属于 X，也可能不属于 X. 如果 X 有元素 x_0 是 X 的上 (下) 界，则 $x_0 = \sup X$ ($x_0 = \inf X$). 例如：

1. $X = (-\infty, 1]$ 是上有界集. $\sup X = 1 \in X$；
2. $X = (0, +\infty)$ 是下有界集. $\inf X = 0 \notin X$；
3. $X = (0, 1)$ 是有界集. $\inf X = 0 \notin X, \sup X = 1 \notin X$.

注 直接由定义可推出下述性质.

上、下确界的特征性质：

$$A = \sup X \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{i) } \forall x \in X, x \leqslant A; \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} \in X, A - \varepsilon < \bar{x}. \end{cases}$$

$$B = \inf X \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{i) } \forall x \in X, \quad x \geqslant B; \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \bar{x} \in X, \bar{x} < B + \varepsilon. \end{cases}$$

定理 3.4 (确界存在定理)

设 $X\subset\mathbb{R}$ 是任一非空集合. 若 X 是上 (下) 有界集, 则 $\sup X(\inf X)$ 存在.

证明 我们只需对 X 为上有界集的情形进行证明. 因为若 X 为下有界集, 则 ($-X$) 是上有界集, 且 $\inf X=-\sup(-X)$.

设 $a_0\in X, b_0$ 是 X 的任一上界. 我们构造两个序列 $\langle a_n\rangle,\langle b_n\rangle$ 使得它们具有下述性质:

i) $a_n\in X, b_n$ 是 X 的上界, 并且

$$a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n(\forall n\geqslant 0);$$

ii) $b_n-a_n\leqslant\dfrac{1}{2^n}(b_0-a_0)\,(\forall n\geqslant 0)$.

显然 $n=0$ 时成立. 假设已经构造了 $a_0,a_1,\cdots,a_n,b_0,b_1\cdots,b_n$, 它们具有上述性质 i)、ii).

下面构造 a_{n+1},b_{n+1} .

若 $\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)$ 是 X 的上界, 则令 $a_{n+1}=a_n, b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)$.

若 $\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)$ 不是 X 的上界, 则存在 $a_{n+1}\in X$ 使得 $a_{n+1}>\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)$. 这时令 $b_{n+1}=b_n$.

在这两种情况下, 我们都有

$$a_{n+1}\in X, b_{n+1}\text{ 是 } X \text{ 的上界},$$

$$a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n,$$

$$b_{n+1}-a_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}(b_n-a_n)\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}(b_0-a_0)\,.$$

根据归纳法, 满足性质 i)、ii) 的实数序列 $\langle a_n\rangle$ 与 $\langle b_n\rangle$ 就完全构造出来了.

由于 $0\leqslant b_n-a_n\leqslant\dfrac{1}{2^n}(b_0-a_0)\,(\forall n\geqslant 0)$, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$, 因此 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$, 使得 $0<b_N-a_N<\varepsilon$. 从而

$$\begin{aligned}\forall n,k\in\mathbb{N},n\geqslant N &\Longrightarrow a_N\leqslant a_n\leqslant a_{n+k}\leqslant b_{n+k}\leqslant b_n\leqslant b_N\\ &\Longrightarrow |a_{n+k}-a_n|\leqslant b_N-a_N<\varepsilon.\end{aligned}$$

因此 $\langle a_n\rangle$ 是 Cauchy 序列. 由 Cauchy 收敛准则知, 存在 $c\in\mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=c$.

下面证明 $c=\sup X$.

首先由 $b_n=(b_n-a_n)+a_n(\forall n\in\mathbb{N})$ 知 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=c$. 因此 $\forall x\in X$, 由 $x\leqslant b_n(\forall n\in\mathbb{N})$ 推得 $x\leqslant c$, 此即表明 c 是 X 的上界.

现设 M 是 X 的任一上界. 那么 $\forall n\in\mathbb{N},a_n\leqslant M$, 从而 $c\leqslant M$. 因此 $c=\sup X$.

例题 3.22 设 $A=\left\{\dfrac{m}{n}\,\middle|\, m,n\in\mathbb{N},m<n\right\}$. 证明:

$$\inf A=0,\sup A=1.$$

事实上, $\forall\dfrac{m}{n}\in A,0<\dfrac{m}{n}<1$, 故 0 与 1 分别是集合 A 的下界与上界.

现设 $1>\varepsilon>0$. 由实数的 Archimedes 性质知, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $1<n\varepsilon,1<n(1-\varepsilon)$. 由此得到

$$\frac{1}{n}<\varepsilon,1<n(1-\varepsilon)<[n(1-\varepsilon)]+1\leqslant n(1-\varepsilon)+1<n.$$

若令 $m=[n(1-\varepsilon)]+1$, 则 $m\in\mathbb{N},m<n$ 并且

$$0<\frac{1}{n}<\varepsilon,1-\varepsilon<\frac{m}{n}<1\Longrightarrow\inf A=0,\sup A=1.$$

3. 单调序列极限

定义 3.8

设 $\langle x_n\rangle$ 是任一实数序列.

1. 若集合 $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ 是上 (下) 有界的，则称序列 $\langle x_n\rangle$ 是上 (下) 有界的. 若 $\langle x_n\rangle$ 既上有界又下有界，则称序列 $\langle x_n\rangle$ 是有界的.
2. 我们称 $\langle x_n\rangle$ 是单调上升 (下降) 序列，如果
$$\forall n\in\mathbb{N}, x_n\leqslant x_{n+1}\,(x_n\geqslant x_{n+1}).$$
我们称 $\langle x_n\rangle$ 是严格单调上升 (下降) 序列，如果
$$\forall n\in\mathbb{N}, x_n< x_{n+1}\,(x_n> x_{n+1}).$$
3. 单调上升序列与单调下降序列统称为单调序列.

♣

定理 3.5 (单调序列极限存在定理)

若实数序列 $\langle x_n\rangle$ 是单调上升有上界 (下降有下界) 的，则 $\langle x_n\rangle$ 收敛，并且
$$\lim_{n\to+\infty} x_n=\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n\left(\lim_{n\to+\infty} x_n=\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n\right)$$

♡

证明 我们只对单调上升的情形进行证明. 因为若 $\langle x_n\rangle$ 单调下降，则 $\langle -x_n\rangle$ 单调上升.

由于 $\langle x_n\rangle$ 有上界，故 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ 存在，由上确界特征性质知，
$$\forall\varepsilon>0, \exists x_N \text{ 使得 } \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n-\varepsilon<x_N\leqslant\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$$
于是由 $\langle x_n\rangle$ 的单调上升性推得
$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant N &\Longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n-\varepsilon<x_N\leqslant x_n<\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n+\varepsilon\\ &\Longrightarrow \left|x_n-\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n\right|<\varepsilon.\end{aligned}$$
因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

注 若 $\langle x_n\rangle$ 是单调上升无上界 (下降无下界) 序列，则显然有 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty(-\infty)$. 因此，若这时我们规定 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n=+\infty$ ($\inf x_n=-\infty$)，则我们有下述统一形式的单调序列极限存在定理.

定理 3.6

若 $\langle x_n\rangle$ 是单调上升 (下降) 实数序列，则
$$\lim_{n\to+\infty} x_n=\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n\left(\lim_{n\to+\infty} x_n=\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n\right).$$

♡

例题 3.23 设 $a>0, b>0$, 令
$$a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{a}{a_{n-1}}\right), a_0=b(n\in\mathbb{N}).$$
证明 递推序列 $\langle a_n\rangle$ 收敛，并且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\sqrt{a}$.

事实上，首先我们有 $a_n>0(\forall n\in\mathbb{N})$. 由此我们有
$$a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{a}{a_{n-1}}\right)\geqslant\sqrt{a_{n-1}\cdot\frac{a}{a_{n-1}}}=\sqrt{a}(\forall n\in\mathbb{N}),$$

并且

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{a_{n-1}^2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(1+1) = 1(\forall n \in \mathbb{N}).$$

此即表明 $\langle a_n \rangle$ 是单调下降有下界的实数序列，故由定理 3.5 知 $\langle a_n \rangle$ 收敛，令 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lambda$. 则

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to+\infty} a_{n-1} + \frac{a}{\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n-1}}\right),$$

或

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{a}{\lambda}\right) \Longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{a}.$$

因为 $a_n > 0(\forall n \in \mathbb{N})$, 所以 $\lambda = -\sqrt{a}$ 舍去，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{a}$.

例题 3.24 证明：实数序列 $\left\langle\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\rangle$ 收敛.

为此，我们首先证明下述不等式：

$$\forall 0 \leqslant a < b, \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} < (n+1)b^n(\forall n \in \mathbb{N}). \tag{3.1}$$

事实上

$$\begin{aligned}\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} &= b^n + ab^{n-1} + a^2b^{n-2} + \cdots + a^{n-1}b + a^n \\ &< b^n + b^n + b^n + \cdots + b^n + b^n \\ &= (n+1)b^n\end{aligned}$$

由不等式(3.1)我们得到

$$b^n[b-(n+1)(b-a)] < a^{n+1}(\forall n \in \mathbb{N}). \tag{3.2}$$

1. 在(3.2)中令 $a = \left(1+\frac{1}{n+1}\right), b = 1+\frac{1}{n}$, 则(3.2)式变为

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

因此序列 $\left\langle\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\rangle$ 是单调上升的.

2. 在(3.1)中令 $a = 1, b = 1+\frac{1}{2n}$, 则(3.2)式变为

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n < 2$$

从而 $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4$. 由此推得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4.$$

因此序列 $\left\langle\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\rangle$ 上有界.

根据定理 3.5, 实数序列 $\left\langle\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\rangle$ 收敛. 在第 5 章 §4 我们将证明此序列极限等于 e, 于是

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

4. 闭区间套

定理 3.7 (区间套定理)

若闭区间族 $\{[a_n,b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足下列两个条件:

1. $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]\ (\forall n\in\mathbb{N})$,
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$.

则存在 $c\in\mathbb{R}$ 使得 $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]=\{c\}$

证明 由条件 1) 知

$$a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n,\forall n\in\mathbb{N}$$

所以 $\langle a_n\rangle$ 是单调上升有上界 b_1 的实数序列, $\langle b_n\rangle$ 是单调下降有下界 a_1 的实数序列. 根据定理3.5知 $\langle a_n\rangle$ 与 $\langle b_n\rangle$ 都收敛. 由条件 2) 知

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\sup_{n\in\mathbb{N}}a_n=\inf_{n\in\mathbb{N}}b_n=\lim_{n\to+\infty}b_n.$$

令 $c=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}a_n=\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}b_n$, 则

$$a_n\leqslant c\leqslant b_n,\forall n\in\mathbb{N}\Longrightarrow c\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]$$

为了证明 $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]=\{c\}$, 我们证明: 若 $x\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]$, 则 $x=c$. 这是显然的, 因为

$$x,c\in[a_n,b_n]\ (\forall n\in N)\Longrightarrow|x-c|\leqslant b_n-a_n\to 0(n\to+\infty)$$

所以 $x=c$.

注意, 如果上述定理中的闭区间族改为开区间族 $\{(a_n,b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, 或 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)\neq 0$, 则定理的结论可以不成立.

例题 3.25 对开区间族 $\left\{\left(0,\dfrac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, 显然有 $\left(0,\dfrac{1}{n+1}\right)\subset\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-0\right)=0$, 但 $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(0,\dfrac{1}{n}\right)=\varnothing$.

例题 3.26 对闭区间族 $\left\{\left[0,1+\dfrac{1}{n}\right]\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, 我们有 $\left[0,1+\dfrac{1}{n+1}\right]\subset\left[0,1+\dfrac{1}{n}\right]\forall n\in\mathbb{N}$, 但 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}-0\right)=1$. 这时,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left[0,1+\frac{1}{n}\right]=[0,1].$$

5. 集合的聚点

定理 3.8 (聚点定理)

任意一个有界无限实数集至少有一个聚点.

证明 设 A 是任一有界无限实数集. 于是存在 $a_0,b_0\in\mathbb{R}$ 使得 $A\subset[a_0,b_0]$.

令 $\delta=b_0-a_0$, 则 $\delta>0$. 考虑子区间 $\left[a_0,a_0+\dfrac{\delta}{2}\right]$ 与 $\left[a_0+\dfrac{\delta}{2},b_0\right]$. 由于

$$A=\left(A\cap\left[a_0,a_0+\frac{\delta}{2}\right]\right)\cup\left(A\cap\left[a_0+\frac{\delta}{2},b_0\right]\right),$$

并且 A 为无限集, 故 $A\cap\left[a_0,a_0+\dfrac{\delta}{2}\right]$ 与 $A\cap\left[a_0+\dfrac{\delta}{2},b_0\right]$ 中至少有一个是无限集, 不妨令 $A\cap\left[a_0,a_0+\dfrac{\delta}{2}\right]$

为无限集.

记 $[a_1,b_1]=\left[a_0,a_0+\frac{\delta}{2}\right]$, 则 $b_1-a_1=\frac{\delta}{2}>0$. 由于

$$A\cap[a_1,b_1]=\left(A\cap\left[a_1,a_1+\frac{\delta}{4}\right]\right)\cup\left(A\cap\left[a_1+\frac{\delta}{4},b_1\right]\right)$$

为无限集, 故 $A\cap\left[a_1,a_1+\frac{\delta}{4}\right]$ 与 $A\cap\left[a_1+\frac{\delta}{4},b_1\right]$ 中至少有一个是无限集, 不妨令 $A\cap\left[a_1,a_1+\frac{\delta}{4}\right]$ 为无限集.

令 $[a_2,b_2]=\left[a_1,a_1+\frac{\delta}{4}\right]$, 则 $b_2-a_2=\frac{\delta}{4}>0$, $A\cap[a_2,b_2]$ 为无限集. 如此不断地进行二等分, 我们得到一闭区间族 $\{[a_n,b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使得

i) $A\cap[a_n,b_n]$ 为无限集 $(\forall n\in\mathbb{N})$,

ii) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]\,(\forall n\in\mathbb{N})$,

iii) $b_n-a_n=\frac{\delta}{2^n}\to 0(n\to+\infty)$.

根据区间套定理, 存在 $c\in\mathbb{R}$ 使得 $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]=\{c\}$.

现在任取 $x_1\in A\cap[a_1,b_1]$. 由于 $A\cap[a_2,b_2]$ 是无限集, 取 $x_2\in A\cap[a_2,b_2]$ 且 $x_2\neq x_1$. 假设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 已经选取好了, 使得

$$x_i\in A\cap[a_i,b_i],x_i\neq x_j,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n.$$

由于 $A\cap[a_{n+1},b_{n+1}]$ 是无限集, 故存在 $x_{n+1}\in A\cap[a_{n+1},\,b_{n+1}]$ 使得 $x_{n+1}\neq x_i,i=1,2,\cdots,n$. 根据归纳法, 实数序列 $\langle x_n\rangle$ 就完全构造出来了, 并且满足条件:

$$x_n\in A\cap[a_n,b_n],x_n\neq x_m,n\neq m,n,m\in\mathbb{N}.$$

下面我们来证明序列 $\langle x_n\rangle$ 收敛于 c.

事实上, 由于 $c\in[a_n,b_n]\,(\forall n\in\mathbb{N})$, 所以

$$|x_n-c|\leqslant b_n-a_n<\frac{\delta}{2^n}(\forall n\in\mathbb{N}).$$

令 $n\to+\infty$ 即得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$. 由于 $x_n(n\in\mathbb{N})$ 互异, 故 c 是集合 A 的聚点.

6. 有界序列的收敛子序列

定理 3.9 (Bolzano-Weierstrass 定理)

任何一个有界实数序列 $\langle x_n\rangle$ 都有收敛的子序列.

证明 令 $A=\{x_n\mid n\in\mathbb{N}\}$. 则 A 是有限集或无限集.

1. 设 A 是有限集. 于是 $A=\{x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m}\}$.$\forall j=1,2,\cdots,m$, 令 $N_j=\left\{n\in\mathbb{N}\mid x_n=x_{i_j}\right\}$, 则 $\mathbb{N}=\bigcup\limits_{j=1}^{m}N_j$. 由于有限集的并仍然是有限集, 因此至少存在某一个 $N_s(1\leqslant s\leqslant m)$ 是无限集. 因为 N_s 是可数集, 故存在严格单调上升映射 $k:\mathbb{N}\to N_s$.

   现在, $x_{k(n)}=x_{i_s}(\forall n\in\mathbb{N})$. 因此 $\langle x_{k(n)}\rangle$ 是 $\langle x_n\rangle$ 的一个常值子序列, 它当然收敛.
2. 设 A 是无限集, 根据聚点定理, A 至少有一个聚点 c, 并且由聚点定理的证明过程可知, 从 A 中可以选出一个元素互异的子序列 $\langle x_{k(n)}\rangle$ 使得 $\langle x_{k(n)}\rangle$ 收敛于 c.

例题 3.27 证明若 $\langle x_n\rangle$ 不是无穷大序列, 则 $\langle x_n\rangle$ 一定有收敛的子序列.

这是因为若 $\langle x_n\rangle$ 不是无穷大序列, 则由定义可知:

$$(\exists M>0)(\forall n\in N)\,(\exists k_n\in N,k_n\geqslant n)\Longrightarrow\left|x_{k_n}\right|\leqslant M.$$

不失一般性，我们可以假设 $k_n < k_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. 由此得到的 $\langle x_n \rangle$ 的子序列 $\langle x_{k_n} \rangle$ 是有界的，根据 Bolzano-Weierstrass 定理，$\langle x_{k_n} \rangle$ 从而 $\langle x_n \rangle$ 有收敛的子序列存在.

7. 有限覆盖

定义 3.9

设 $X \subset \mathbb{R}$ 是任一非空集合. $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一子集族.

1. 若 $X \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, 则称 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 X 的一个覆盖.
2. 设 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 X 的一个覆盖，并且存在有限个 $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \cdots, U_{\lambda_m}$ 使得 $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_{\lambda_i}$, 则称 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 有有限子覆盖.

例题 3.28 设 $X = (0,1), U_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right)$ $(n \in \mathbb{N})$, 则

$$(0,1) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

因此 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $(0,1)$ 的一个覆盖.

例题 3.29 设 $X = [0,1], V_1 = [-1,0], V_n = \left[\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$ $(n \geqslant 2)$ 则

$$[0,1] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$$

因此 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $[0,1]$ 的一个覆盖.

例题 3.30 设 $X = (0,+\infty), W_n = \left(\frac{1}{n}, n\right)$ $(n \in \mathbb{N})$, 则

$$(0,+\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n.$$

因此 $\{W_n\}_{n\in N}$ 是 $(0,+\infty)$ 的一个覆盖.

定理 3.10 (Cantor 有限覆盖定理)

设 $[a,b]$ 是任一有限闭区间. 则 $[a,b]$ 的任一开区间族覆盖 $\{(a_\lambda, b_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 有有限子覆盖.

证明 分三步进行.

第一步：证明开区间族覆盖 $\{(a_\lambda, b_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 具有下述性质：

$$(\exists\delta > 0)(\forall x \in [a,b])(\exists\lambda \in \Lambda) \Longrightarrow (x-\delta, x+\delta) \subset (a_\lambda, b_\lambda). \tag{3.3}$$

(数 δ 称为覆盖 $(a_\lambda, b_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的 Lebesgue 数)

用反证法证明. 假设(3.3)不成立. 则

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists x_n \in [a,b])\ (\forall\lambda \in \Lambda) \Longrightarrow \left(x_n - \frac{1}{n}, x_n + \frac{1}{n}\right) \not\subset (a_\lambda, b_\lambda). \tag{3.4}$$

由此得一实数序列 $\langle x_n \rangle$. 根据 Bolzano-Weierstrass 定理，$\langle x_n \rangle$ 有收敛的子序列. 不失一般性，我们可以假设 $\langle x_n \rangle$ 本身收敛，并令 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$. 则 $\bar{x} \in [a,b]$.

由于 $[a,b] \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda, b_\lambda)$, 故存在 $\bar{\lambda} \in \Lambda$ 使得 $\bar{x} \in (a_{\bar{\lambda}}, b_{\bar{\lambda}})$. 于是 $\eta = \min\left(\bar{x} - a_{\bar{\lambda}}, b_{\bar{\lambda}} - \bar{x}\right) > 0$.

取 $n \in \mathbb{N}$ 充分大使得 $\frac{1}{n} < \frac{\eta}{2}$ 及 $|x_n - \bar{x}| < \frac{\eta}{2}$, 则

$$\forall x \in \left(x_n - \frac{1}{n}, x_n + \frac{1}{n}\right) \Longrightarrow |x - \bar{x}| \leqslant |x - x_n| + |x_n - \bar{x}| < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta$$

此即表明 $\left(x_n-\frac{1}{n},x_n+\frac{1}{n}\right)\subset(a_{\bar{\lambda}},b_{\bar{\lambda}})$. 这与(3.4)相矛盾. 因此(3.3)成立. 显然 $\{(x-\delta,x+\delta)\}_{x\in[a,b]}$ 是 $[a,b]$ 的一个覆盖.

第二步：证明开区间族 $\{(x-\delta,x+\delta)\}_{x\in[a,b]}$ 有限覆盖了 $[a,b]$.

仍然用反证法证明. 假设它不能有限覆盖 $[a,b]$. 任取 $\bar{x}_1\in[a,b]$, 则 $(\bar{x}_1-\delta,\bar{x}_1+\delta)$ 不能覆盖 $[a,b]$. 从而存在 $\bar{x}_2\in[a,b]-(\bar{x}_1-\delta,\bar{x}_1+\delta)$. 于是 $|\bar{x}_2-\bar{x}_1|\geqslant\delta$.

现在假设已经选取了 $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n\in[a,b]$, 使得

$$\left|\bar{x}_i-\bar{x}_j\right|\geqslant\delta,\forall i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j.$$

由于 $\{(\bar{x}_1-\delta,\bar{x}_1+\delta),(\bar{x}_2-\delta,\bar{x}_2+\delta),\cdots,(\bar{x}_n-\delta,\bar{x}_n+\delta)\}$ 不能覆盖 $[a,b]$, 故必有

$$\bar{x}_{n+1}\in[a,b]-\bigcup_{i=1}^{n}(\bar{x}_i-\delta,\bar{x}_i+\delta).$$

显然 $|\bar{x}_{n+1}-\bar{x}_i|\geqslant\delta,\forall i=1,2,\cdots,n.$

根据归纳法，我们得到一点序列 $\langle\bar{x}_n\rangle$ 使得

$$\bar{x}_n\in[a,b](\forall n\in\mathbb{N}),\left|\bar{x}_i-\bar{x}_j\right|\geqslant\delta,\forall i,j\in\mathbb{N},i\neq j.$$

这样一来，我们将得到矛盾. 因为一方面由于 $\left|\bar{x}_i-\bar{x}_j\right|\geqslant\delta(\forall i,j\in\mathbb{N},i\neq j)$ 知序列 $\langle\bar{x}_n\rangle$ 不可能有任何收敛子序列，另一方面由于 $\langle\bar{x}_n\rangle$ 是有界序列，故由 Bolzano-Weierstrass 定理知 $\{(\langle\bar{x}_n\rangle$ 必然有收敛子序列. 此矛盾正好证明了 $[a,b]$ 的开覆盖 $\{(x-\delta,x+\delta)\}_{x\in[a,b]}$ 有有限子覆盖. 令

$$[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^{m}(x_i-\delta,x_i+\delta)$$

第三步：证明 $\{(a_\lambda,b_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 有有限子覆盖.

根据(3.3), 对每一个 $x_i(i=1,2,\cdots,m)$ 存在 $\lambda_i\in\Lambda$ 使得 $(x_i-\delta,x_i+\delta)\subset(a_{\lambda_i},b_{\lambda_i})$. 因此

$$[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^{m}(a_{\lambda_i},b_{\lambda_i})$$

注 Cantor 有限覆盖定理中三个条件：1)$[a,b]$ 的闭性，2)$[a,b]$ 的有界性，3) 覆盖的开性对保证覆盖具有有限覆盖性是非常重要的，否则，定理的结论可以不成立.

例如，例3.28中的覆盖 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 没有有限子覆盖. 因为 $(0,1)$ 不是闭区间；例3.29中的覆盖 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 也没有有限子覆盖，因为 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 不是开区间族覆盖；例3.30中的覆盖 $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 同样没有有限子覆盖，因为 $(0,+\infty)$ 不是有界的.

表征实数集 $\mathbb{R}$ 的完备性的七个定理到此证明完毕. 读者可以发现，除了 Cauchy 收敛准则的证明是独立的外，其它的都是用前一定理证明后一定理的. 因此为了完成这七个连续性定理的等价性证明，我们还必须用 Cantor 有限覆盖定理证明 Cauchy 收敛准则.

Cantor 有限覆盖定理 $\Longrightarrow$ Cauchy 收敛准则.

必要性 同定理3.3的证明.

充分性 设 $\langle x_n\rangle$ 是任一 Cauchy 序列. 那么 $\langle x_n\rangle$ 是有界序列. 于是存在 $M>0$ 使得

$$x_n\in[-M,M]\quad(\forall n\in\mathbb{N}).$$

下面我们用反证法证明 $\langle x_n\rangle$ 收敛. 假设 $\langle x_n\rangle$ 发散. 那么 $\forall a\in[-M,M]$, 序列 $\langle x_n\rangle$ 不收敛于 a . 于是由定义

$$(\exists\varepsilon(a)>0)(\forall n\in\mathbb{N})\,(\exists k_n\in\mathbb{N},k_n\geqslant n)\Longrightarrow\left|x_{k_n}-a\right|\geqslant\varepsilon(a).$$

由于 $\langle x_n\rangle$ 是 Cauchy 序列, 对 $\varepsilon(a)>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\forall n,m\in\mathbb{N},n,m\geqslant N\Longrightarrow |x_n-x_m|<\frac{1}{2}\varepsilon(a).$$

因 $k_N\geqslant N$, 所以

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N\Longrightarrow |x_n-a|&=\left|x_n-x_{k_N}+x_{k_N}-a\right|\\&\geqslant\left|x_{k_N}-a\right|-\left|x_n-x_{k_N}\right|\\&>\varepsilon(a)-\frac{1}{2}\varepsilon(a)=\frac{1}{2}\varepsilon(a).\end{aligned}$$

这个不等式表明在开区间 $\left(a-\frac{1}{2}\varepsilon(a),a+\frac{1}{2}\varepsilon(a)\right)$ 中最多包含序列 $\langle x_n\rangle$ 的 N 项. 由于 $a\in[-M,M]$ 的任意性, 我们得到闭区间 $[-M,M]$ 的一个开区间族覆盖 $\{(a-\frac{1}{2}\varepsilon(a),a+\frac{1}{2}\varepsilon(a))\}_{a\in[-M,M]}$. 根据 Cantor 有限覆盖定理, 存在有限个 $a_1,a_2,\cdots,a_m\in[-M,M]$ 使得

$$[-M,M]\subset\bigcup_{i=1}^{m}\left(a_i-\frac{1}{2}\varepsilon\left(a_i\right),a_i+\frac{1}{2}\varepsilon\left(a_i\right)\right).$$

由于每一个开区间 $(a_i-\frac{1}{2}\varepsilon\left(a_i\right),a_i+\frac{1}{2}\varepsilon\left(a_i\right))(i=1,2,\cdots,m)$ 最多只包含序列 $\langle x_n\rangle$ 的有限项, 那么 $[-M,M]$ 中就只包含 $\langle x_n\rangle$ 的有限项, 这与 $x_n\in[-M,M](\forall n\in\mathbb{N})$ 的事实相矛盾, 因此序列 $\langle x_n\rangle$ 收敛.

✍ 习 题 3.4

1. 设 $\langle a_n\rangle$,$\langle b_n\rangle$ 是两个 Cauchy 序列.
   1) 证明：序列 $\langle|a_n|\rangle$,$\langle a_n\pm b_n\rangle$,$\langle a_nb_n\rangle$ 都是 Cauchy 序列；
   2) 在什么条件下, $\left\langle\dfrac{a_n}{b_n}\right\rangle$ 是 Cauchy 序列？
2. 设 $\langle a_n\rangle$ 是任一实数序列, 证明：
$$\langle a_n\rangle\text{ 是 Cauchy 序列}\iff(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\geqslant N)\Rightarrow|a_n-a_N|<\varepsilon.$$
3. 设 $\langle a_n\rangle$ 是任一 Cauchy 序列, 试利用极限定义证明：如果 $\langle a_n\rangle$ 有收敛子序列, 则 $\langle a_n\rangle$ 收敛.
4. 设 $\langle a_n\rangle$ 是一实数序列, 满足条件：
$$(\exists M>0)(\forall n\in\mathbb{N})\Rightarrow|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|<M,$$
   证明：序列 $\langle a_n\rangle$ 收敛.
5. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是任一函数, 满足条件：
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\lambda|x-y|,\forall x,y\in\mathbb{R},(0\leqslant\lambda<1).$$
   1) 若 $a_1\in\mathbb{R}$, 且 $a_{n+1}=f(a_n)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$, 证明：$\langle a_n\rangle$ 是 Cauchy 序列；
   2) 考虑 Kepler 方程 $x=a\sin x+b$, 这里 $0<a<1$, $b\in\mathbb{R}$, 证明：Kepler 方程有唯一解存在.
6. 用 Cauchy 收敛准则证明实数序列 $\langle\sin n\rangle$ 发散.
7. 设 $A\subset\mathbb{R}$ 是非空上有界集.
   1) 证明：集合 $-A=\{-x|x\in A\}$ 是下有界集, 并且 $\sup A=-\inf(-A)$；
   2) 证明：A 的所有上界组成的集合 B 是下有界集, 并且 $\inf B=\sup A$；
   3) 证明：若 $x\in A$ 并且 $x<\sup A$, $\sup(A-\{x\})=\sup A$；
   4) 证明：若 $x\in A$ 并且 $\sup(A-\{x\})<\sup A$, $x=\sup A$.

8. 设 $A, B \subset \mathbb{R}$ 是两个非空集合.

   1) 若 $A \subset B$，则 $\sup A \leqslant \sup B$，$\inf A \geqslant \inf B$；

   2) 若 $\forall x \in A$，$\forall y \in B$，$x \leqslant y$，则 $\sup A \leqslant \inf B$；

   3) 若 $A \cup B = \mathbb{R}$，并满足 2) 中的条件，则 $\sup A = \inf B$.

9. 设 $A, B \subset \mathbb{R}$ 是两个非空集合，定义：

$$A + B = \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}, AB = \{xy \mid x \in A,\ y \in B\}.$$

   1) 证明：若 A, B 是上有界集，则 $A + B$,AB,$A \cup B$,$A \cap B(\neq \varnothing)$ 都是上有界集，并且

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B,$$

$$\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B, (\forall x \in A,\ y \in B,\ x > 0,\ y > 0),$$

$$\sup(A \cup B) = \sup(\sup A, \sup B),$$

$$\sup(A \cap B) \leqslant \inf(\sup A, \sup B).$$

   2) 证明：若 A, B 是下有界集，则 $A + B$,AB,$A \cup B$,$A \cap B(\neq \varnothing)$ 都是下有界集，并且：

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B,$$

$$\inf(AB) = \inf A \cdot \inf B, (\forall x \in A,\ y \in B,\ x > 0,\ y > 0),$$

$$\inf(A \cup B) = \inf(\inf A, \inf B),$$

$$\inf(A \cap B) \geqslant \sup(\inf A, \inf B).$$

10. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是一个非空集合. 证明：I 是一个区间当且仅当

$$\forall x, y \in I,\ x < y \Rightarrow (x, y) \subset I.$$

11. 设 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非空上有界集族，记

$$A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda, B = \{\sup A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}.$$

   证明：A 是上有界集的充要条件是 B 是上有界集，并且此时 $\sup A = \sup B$.

12. 设 $A \subset \mathbb{R}$ 是一个非空集，使得 A 与 $\mathbb{R} - A$ 是 $\mathbb{R}$ 的两个开集.

   1) 证明：A 不是上有界集；

   2) 假设 $\mathbb{R} - A \neq \varnothing$，令 $x \in \mathbb{R} - A$，并设 $B = \{y \in A \mid x \leqslant y\}$，证明：$B \neq \varnothing$，并且 B 有下确界 m 满足 $x < m$；

   3) 证明：$m \notin A$，$m \notin \mathbb{R} - A$，由此推出 $A = \mathbb{R}$.

13. 设 $\langle a_n \rangle$ 是任一有界实数序列，满足不等式：$2a_n \leqslant a_{n-1} + a_{n+1}, \forall n > 1$. 令 $b_n = a_{n+1} - a_n$.

   1) 证明：$\langle b_n \rangle$ 是单调上升序列；

   2) 证明：$\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$.

14. 设 $x_0 > 0$，定义序列 $\langle x_n \rangle$ 为：$x_n = \sqrt{2x_{n-1}} (n \in \mathbb{N})$. 证明：此序列收敛，并求其极限.

15. 设 $0 < a_1 < b_1$，定义递推关系如下：

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

   证明：$\langle a_n \rangle$ 与 $\langle b_n \rangle$ 收敛于同一极限.

16. 设 $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$，函数 $f : [a, b] \to [a, b]$ 满足条件：

$$\forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

定义序列 $\langle x_n \rangle$ 为：$x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + f(x_n)), x_1 \in [a,b]$. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ 存在，并且 $x = f(x)$.

17. 设 $a > 0$，$b > 0$，$c > 0$，定义初始值为：
$$\frac{3}{u_0} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, v_0 = \sqrt[3]{abc}, w_0 = \frac{a+b+c}{3},$$
证明：由下述递推公式
$$\frac{3}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n}, \quad v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n v_n w_n}, \quad w_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3}$$
所定义的序列 $\langle u_n \rangle, \langle v_n \rangle, \langle w_n \rangle$ 收敛于同一极限.

18. 设 $a_0 > 0, \langle a_n \rangle$ 是由下述递推关系式所定义的实数序列：
$$2a_n = \frac{1}{2} + a_{n-1}^2 \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$
用 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$ 表示方程 $x^2 - 2x + \dfrac{1}{2} = 0$ 的两个实根. 试分别讨论初始值 a_0 为下列四种情况时的序列 $\langle a_n \rangle$ 的收敛性：
1)$a_0 = a$ 或 β,　2)$a_0 \in (0,\alpha)$,　3)$a_0 \in (\alpha,\beta)$,　4)$a_0 > \beta$.

19. 设 $a_0 \geqslant 0, a_n = \dfrac{1}{2 - \sqrt{a_{n-1}}}(\forall n \in \mathbb{N})$.
   1) 写出函数 $x \longmapsto f(x) = \dfrac{1}{2-\sqrt{x}}$ 的定义域 Dom(f), 证明：$\forall a_0 > 4$, 序列 $\langle a_n \rangle$ 无定义.
   2) 求解函数方程 $f(x) = x$. 设 ω 是它的最大不动点.
   3) 讨论 $a_0 \in [0,\omega], a_0 \in (\omega, 4)$ 时序列 $\langle a_n \rangle$ 的可定义性及其收敛性.
   4) 由此推得 $\langle a_n \rangle$ 收敛，当且仅当 $a_0 \in [0,\omega]$. 并求出其极限.

20. 设 $\langle a_n \rangle$ 是任一正实数序列，定义：
$$x_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_n}}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$
   1) 证明：若 $\langle a_n \rangle$ 是常值序列，则序列 $\langle x_n \rangle$ 收敛，并求出其极限.
   2) 设 $a_n = ab^{2^n}(n \in \mathbb{N})$, 这里 $a > 0, b > 0$. 证明相应的序列 $\langle x_n \rangle$ 收敛，并求其极限.
   3) 证明：实数序列 $\langle x_n \rangle$ 收敛，当且. 仅当序列 $\left\langle (a_n)^{2-n} \right\rangle$ 是上有界的.
   4) 利用上述结论研究下列三种情况下的序列 $\langle x_n \rangle$ 的收敛性.
$$a_n = n, a_n = n!, a_n = n^n.$$

21. 有界实数序列 $\langle x_n \rangle$ 收敛于 a 的充分必要条件是 $\langle x_n \rangle$ 的所有收敛子序列有极限 a .

22. 设 $\langle x_n \rangle$ 是一实数序列，$x_n \geqslant 0(\forall n \in \mathbb{N})$. 假设 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,(x_n + x_{2n}) = 1$.
   1) 令 $y_n = n x_n (n \in \mathbb{N})$，证明：$\langle y_n \rangle$ 是有界序列；
   2) 证明：若 $\langle y_n \rangle$ 收敛，则其极限为 $\dfrac{2}{3}$；
   3) 利用第 21 题结论，证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} n x_n = \dfrac{2}{3}$.

23. 设 X 是任一非空集合. 若 a 是 X 的上 (下) 确界，并且 $a \notin X$. 证明：
   1) 存在实数序列 $\langle x_n \rangle, x_n \in X(n \in \mathbb{N})$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.
   2) a 是 X 的聚点.

24. 设集合 $E = \left\{ \left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)^{m+n} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$，记 E' 为 E 的聚点集. 证明：$E' = \{0, \mathrm{e}\}$. 为此.
   1) 令
$$E_1 = \left\{ \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)^{m+n} \mid n \geqslant m \geqslant 2 \right\}, E_2 = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+n} \mid n \in \mathbb{N} \right\},$$

若 E_1' E_2' 分别表示 E_1 E_2 的聚点集，证明：$E' = E_1' \cup E_2'$.

2) 证明：$E_1' = \{0\}, E_2' = \{\mathrm{e}\}$. 因此 $E' = \{0, \mathrm{e}\}$.

25. 设 $G \subset \mathbb{R}$ 是一非空集合. 我们称 G 是实数加群 $\mathbb{R}$ 的一个加子群，如果 G 具有下述性质：
    1) 若 $x, y \in G$，则 $x + y \in G$；
    2) 若 $x \in G$，则 $-x \in G$.
    1) 证明：$\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{R}$ 的加子群，$\forall a \in \mathbb{R}$，$a\mathbb{Z}$ 也是加子群；
    2) 证明：$\forall a, b \in \mathbb{R}$，$G(a, b) = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{R}$ 的加子群；
    3) 现设 G 是 $\mathbb{R}$ 的任一加子群，并且 $G \neq \{0\}$. 考虑集合

$$G^* = \{x \in G \mid x > 0\}.$$

    a) 证明 $G^* \neq \varnothing$. 令 $\alpha = \inf G^*$.
    b) 若 $\alpha > 0$, 证明：$\alpha \in G^*$ 并且 $G = \alpha\mathbb{Z}$.
    c) 若 $\alpha = 0$, 证明：G 在 $\mathbb{R}$ 中稠密 (即 $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in G$ 使得 $|y - x| < \varepsilon$) .
    d) 若 F 是 $\mathbb{R}$ 的任一个异于 $\mathbb{R}$ 的闭加子群，则存在 $a \in \mathbb{R}$ 使得 $F = a\mathbb{Z}$.
    e) 若 E 是 $\mathbb{R}$ 的任一非闭加子群，则 E 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.
    f) 若 $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, 并且 $\dfrac{b}{a}$ 为无理数，证明加子群 $G(a, b) \neq \mathbb{R}$ 并且在 $\mathbb{R}$ 中稠密.
26. 利用区间套定理证明任一有限闭区间 $[a, b]$ 的点是不可数的.
27. 利用确界存在定理、区间套定理证明 Cantor 有限覆盖定理.
28. 设 $I = [0, 1]$. $A, B \subset I$ 是两个非空子集，使得 $\mathscr{A} = \{[0, a)\}_{a \in A} \bigcup (b, 1]\}_{b \in B}$ 是 I 的一个覆盖. 证明 $\mathscr{A}$ 有有限子覆盖.
29. 设 $[a, b]$ 是一有限闭区间. $\mathscr{C} = \{[a_\lambda, b_\lambda]\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 $[a, b]$ 的一闭子区间族. 我们称 $\mathscr{C}$ 是 $[a, b]$ 的一个完全覆盖，如果它具有下述性质：

$$(\forall x \in [a, b])(\exists \delta(x) > 0)(\forall [\alpha, \beta] \subset [a, b] \text{ 且 } x \in [\alpha, \beta], |\beta - \alpha| < \delta(x)) \Longrightarrow [\alpha, \beta] \in \mathscr{C}.$$

    1) 设 $\mathscr{C}$ 是 $[a, b]$ 的任一完全覆盖. 证明 $\mathscr{C}$ 包含 $[a, b]$ 的一个分割，即存在 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 使得 $\forall i = 1, 2, \cdots, n, [x_{i-1}, x_i] \in \mathscr{C}$ (提示：用反证法及区间套定理证明)
    2) 设 $\{(a_\lambda, b_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 $[a, b]$ 的任一开区间族覆盖. 令 $\mathscr{C} = \{I \mid I$ 是 $[a, b]$ 的闭子区间且 $\exists \lambda \in \Lambda, I \subset (a_\lambda, b_\lambda)\}$. 证明 $\mathscr{C}$ 是 $[a, b]$ 的一个完全覆盖，由此并利用 1) 推出 Cantor 有限覆盖定理.
    3) 设 $X \subset \mathrm{R}$ 是任一有界无限点集. 令 $X \subset [a, b]$ 及 $\mathscr{C} = \{I \mid I$ 是 $[a, b]$ 的闭子区间且 $I \cap X$ 为有限集 $\}$. 证明：$\mathscr{C}$ 是 $[a, b]$ 的一个完全覆盖，由此并利用 1) 推出聚点定理.

3.5 序列的上、下极限集

设 $\langle x_n \rangle$ 是任一实数序列. 若 $\langle x_n \rangle$ 有极限 $a \in \overline{\mathbb{R}}$, 则它的所有子序列都有同一极限. 若 $\langle x_n \rangle$ 发散，则 $\langle x_n \rangle$ 的子序列的收敛情形就复杂了，对这些子序列的收敛性的研究将有助于我们对序列 $\langle x_n \rangle$ 本身的认识.

1. 上、下极限的定义

我们考虑序列 $\langle x_n \rangle$ 的下述四种情况：

1. $\langle x_n \rangle$ 有上界：这时实数序列
$$n \longmapsto \sup_{m\geqslant n} x_m (n \in \mathbb{N})$$
是单调下降的. 因此极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{m\geqslant n} x_m\right)$ 有限或 $-\infty$.
2. $\langle x_n \rangle$ 有下界：这时实数序列
$$n \longmapsto \inf_{m\geqslant n} x_m (n \in \mathbb{N})$$
是单调上升的. 于是极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\inf\limits_{m\geqslant n} x_m\right)$ 有限或 $+\infty$.
3. $\langle x_n \rangle$ 无上界：这时 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{m\geqslant n} x_m = +\infty$.
4. $\langle x_n \rangle$ 无下界：这时 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\inf\limits_{m\geqslant n} x_m = -\infty$.

根据上述分析, 我们引进序列上、下极限的下述定义.

定义 3.10

设 $\langle x_n \rangle$ 是任一实数序列, 它的上极限 $\overline{\lim\limits_{n\to-\infty}}\, x_n$ 与下极限 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, x_n$ 定义如下：

1. 若 $\langle x_n \rangle$ 有上界, 则 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, x_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{m\geqslant n} x_m\right)$.
2. 若 $\langle x_n \rangle$ 有下界, 则 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, x_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\inf\limits_{m\geqslant n} x_m\right)$.
3. 若 $\langle x_n \rangle$ 无上界, 则 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, x_n = +\infty$.
4. 若 $\langle x_n \rangle$ 无下界, 则 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, x_n = -\infty$.

♣

由上述定义可知, 若 $\langle x_n \rangle$ 是有界序列, 则其上, 下极限 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, x_n$ 与 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, x_n$ 存在并且有限.

例题 3.31 考虑实数序列 $\langle(-1)^n\rangle$ 与 $\langle(-1)^n n\rangle$.

显然, 我们有
$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\,(-1)^n = 1, \qquad \underline{\lim_{n\to+\infty}}\,(-1)^n = -1$$
$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\,(-1)^n n = +\infty, \quad \underline{\lim_{n\to+\infty}}\,(-1)^n n = -\infty$$

例题 3.32 考虑实数序列 $\left\langle \dfrac{1}{n} + \left((-1)^n - 1\right) n \right\rangle$.

由于
$$\sup_{m\geqslant n}\left(\frac{1}{m} + \left((-1)^m - 1\right) m\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & 若\ n = 2k; \\ \dfrac{1}{n+1}, & 若\ n = 2k+1. \end{cases}$$
$$\inf_{m\geqslant n}\left(\frac{1}{m} + \left((-1)^m - 1\right) m\right) = -\infty.$$

故
$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left(\frac{1}{n} + ((-1)^n - 1)n\right) = \lim_{n\to+\infty}\sup_{m\geqslant n}\left(\frac{1}{m} + ((-1)^m - 1)m\right) = 0,$$
$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\left(\frac{1}{n} + ((-1)^n - 1)n\right) = -\infty.$$

2. 上、下极限的性质

描述序列上、下极限之间的关系有下述定理

定理 3.11

设 $\langle x_n\rangle$ $\langle y_n\rangle$ 是任意两个实数序列，则

1. $\varliminf\limits_{n\to+\infty} x_n=-\varlimsup\limits_{n\to+\infty}(-x_n)$，$\varliminf\limits_{n\to+\infty} x_n\leqslant\varlimsup\limits_{n\to+\infty} x_n$.
2. 若 $x_n\leqslant y_n(\forall n\in\mathbb{N})$, 则

$$\varliminf_{n\to+\infty} x_n\leqslant\varliminf_{n\to+\infty} y_n,\ \varlimsup_{n\to+\infty} x_n\leqslant\varlimsup_{n\to+\infty} y_n$$

证明

1. 不论 $\langle x_n\rangle$ 的有界性如何，下述关系式恒成立：

$$\inf_{m\geqslant n} x_n=-\sup_{m\geqslant n}(-x_m),\ \inf_{m\geqslant n} x_m\leqslant\sup_{m\geqslant n} x_m(\forall n\in\mathbb{N})$$

于是由序列上、下极限的定义立即推知

$$\varliminf_{n\to+\infty} x_n=-\varlimsup_{n\to+\infty}(-x_n),\ \varliminf_{n\to+\infty} x_n\leqslant\varlimsup_{n\to+\infty} x_n$$

2. 由于 $x_n\leqslant y_n(n\in\mathbb{N})$, 故不论 $\langle x_n\rangle$ $\langle y_n\rangle$ 的有界性如何，下述不等式总是成立：

$$\inf_{m\geqslant n} x_m\leqslant\inf_{m\geqslant n} y_m,\ \sup_{m\geqslant n} x_m\leqslant\sup_{m\geqslant n} y_m(\forall n\in\mathbb{N})$$

若 $\langle x_n\rangle$ 有下界，则 $\langle y_n\rangle$ 也有下界，从而

$$\varliminf_{n\to+\infty} x_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{m\geqslant n} x_m\right)\leqslant\lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{m\geqslant n} y_m\right)=\varliminf_{n\to+\infty} y_n$$

若 $\langle x_n\rangle$ 无下界，则 $\varliminf\limits_{n\to+\infty} x_n=-\infty$, 从而不论 $\langle y_n\rangle$ 是否有下界，恒有

$$-\infty=\varliminf_{n\to+\infty} x_n\leqslant\varliminf_{n\to+\infty} y_n.$$

同理可证关于上极限的不等式.

因此

$$\varliminf_{n\to+\infty} x_n\leqslant\varliminf_{n\to+\infty} y_n,\ \varlimsup_{n\to+\infty} x_n\leqslant\varlimsup_{n\to+\infty} y_n.$$

下面我们来看看序列的上、下极限是如何刻划序列本身特性的.

定理 3.12

设 $\langle x_n\rangle$ 是任一实数序列.

1. $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} x_n=a\in\overline{\mathbb{R}}$ 则

$$a=-\infty\iff\lim_{n\to+\infty} x_n=-\infty,$$

$$a=+\infty\iff(\forall M>0)(\exists k_1<k_2<\cdots<k_n<\cdots)\Longrightarrow x_{k_n}>M,$$

$$a\in\mathbb{R}\iff(\forall\varepsilon>0)\begin{cases}(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N)\Longrightarrow x_n<a+\varepsilon,\\(\exists k_1<k_2<\cdots<k_n<\cdots)\Longrightarrow x_{k_n}>a-\varepsilon.\end{cases}$$

2. $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ 则

$$a = +\infty \iff \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty,$$

$$a = -\infty \iff (\forall M > 0)\ (\exists k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots) \implies x_{k_n} < -M,$$

$$a \in \mathbb{R} \iff (\forall \varepsilon > 0) \begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \implies a - \varepsilon < x_n, \\ (\exists k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots) \implies x_{k_n} < a + \varepsilon.. \end{cases}$$

证明 由于 $\varliminf\limits_{n\to+\infty} x_n = -\varlimsup\limits_{n\to+\infty}(-x_n)$, 故我们只对上极限情形进行证明.

(必要性) 若 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} x_n = a = -\infty$, 则由 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{m\geqslant n} x_m\right)$ 知

$$(\forall M > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N) \Rightarrow \sup_{m\geqslant n} x_m < -M \Rightarrow x_n < -M,$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.

若 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, 则由定义, 序列 $\langle x_n\rangle$ 无上界. 从而

$$(\forall M > 0)(\exists k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots) \Rightarrow x_{k_n} > M.$$

若 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, 则由 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{m\geqslant n} x_m\right)$ 知

$$\begin{aligned} &(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N) \\ &\Rightarrow a - \varepsilon < \sup_{m\geqslant n} x_m < a + \varepsilon \\ &\Rightarrow x_n < a + \varepsilon. \end{aligned}$$

另一方面, 由上确界特性我们得到

$$\exists k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots \implies x_{k_n} > a - \varepsilon.$$

(充分性) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$. 则由定义

$$\begin{aligned} (\forall M > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) &\implies x_n < -M \\ &\implies \sup_{m\geqslant n} x_m \leqslant -M. \end{aligned}$$

因此 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.

若 $(\forall M > 0)(\exists k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots) \implies x_{k_n} > M$. 则序列 $\langle x_n\rangle$ 无上界, 由定义知 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

若 $(\forall \varepsilon > 0) \begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \implies x_n < a + \varepsilon \\ (\exists k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots) \implies a - \varepsilon < x_{k_n} \end{cases}$ 则

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \sup_{m\geqslant n} x_m \leqslant a + \varepsilon.$$

另一方面, 由于 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N$ 有 $k_n \geqslant n \geqslant N$, 故

$$\sup_{m\geqslant n} x_m \geqslant x_{k_n} > a - \varepsilon.$$

因此

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow a-\varepsilon < \sup_{m \geqslant n} x_m \leqslant a+\varepsilon.$$

此即表明 $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\sup\limits_{m \geqslant n} x_m\right)=a$, 即 $\varlimsup\limits_{n \to +\infty} x_n=a$.

推论 3.3

设 $\langle x_n \rangle$ 是任一实数序列, $a \in \mathbb{R}$, 则

$$\lim_{n \to +\infty} x_n=a, \Longleftrightarrow \varliminf_{n \to +\infty} x_n=\varlimsup_{n \to +\infty} x_n=a.$$

证明 (必要性) 设 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n=a$. 由定义

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Longrightarrow a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon.$$

于是由定理3.12知, $\varliminf\limits_{n \to +\infty} x_n=\varlimsup\limits_{n \to +\infty} x_n=a$.

(充分性) 设 $\varliminf\limits_{n \to +\infty} x_n=\varlimsup\limits_{n \to +\infty} x_n=a$. 则由定理3.12知,

$$(\forall \varepsilon>0)\begin{cases}(\exists N_1 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N_1) \Longrightarrow a-\varepsilon<x_n. \\ (\exists N_2 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N_2) \Longrightarrow x_n<a+\varepsilon.\end{cases}$$

令 $N=\max(N_1, N_2)$, 则

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n=a$.

下面的定理给出了上、下极限与子序列极限之间关系.

定理 3.13

设 $\langle x_n \rangle$ 是任一实数序列, 则

1. $\varlimsup\limits_{n \to +\infty} x_n$ 是 $\langle x_n \rangle$ 的所有收敛子序列的极限的最大者.
2. $\varliminf\limits_{n \to +\infty} x_n$ 是 $\langle x_n \rangle$ 的所有收敛子序列的极限的最小者.

证明 因为 $\varliminf\limits_{n \to +\infty} x_n=-\varlimsup\limits_{n \to +\infty}(-x_n)$, 故我们只需证明结论 1).

首先假设 $\langle x_n \rangle$ 无上界.

这时 $\varlimsup\limits_{n \to +\infty} x_n=+\infty$. 由于 $\langle x_n \rangle$ 无上界, 故存在 $\langle x_n \rangle$ 的一个子序列 $\langle x_{k_n} \rangle$ 使得 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{k_n}=+\infty$, 因此 $\varlimsup\limits_{n \to +\infty} x_n$ 是 $\langle x_n \rangle$ 的所有收敛子序列的极限的最大者.

其次假设 $\langle x_n \rangle$ 有上界.

这时 $\varlimsup\limits_{n \to +\infty} x_n=\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\sup\limits_{m \geqslant n} x_m\right)$ 有限或 $-\infty$. 下面分别讨论之.

1. $\varlimsup\limits_{n \to +\infty} x_n=A \in \mathbb{R}$.

   我们首先证明存在 $\langle x_n \rangle$ 的一个子序列 $\langle x_{m_n} \rangle$ 使得 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{m_n}=A$. 令 $a_n=\sup\limits_{m \geqslant n} x_m$. 于是 $A=\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

   对 $\varepsilon=1>0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $A \leqslant a_{N_1}<A+1$. 另一方面, 由于 $a_{N_1}=\sup\limits_{m \geqslant N_1} x_m$, 故存在

$m_1 \geqslant N_1$ 使得 $a_{N_1} - 1 < x_{m_1} \leqslant a_{N_1}$, 从而

$$A - 1 \leqslant a_{N_1} - 1 < x_{m_1} < A + 1$$

对 $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, 同样由于 $A = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n$, 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$, 且 $N_1 < N_2$ 使得 $A \leqslant a_{N_2} < A + \frac{1}{2}$. 再由 $a_{N_2} = \sup\limits_{m \geqslant N_2} x_m$ 推知, 存在 $m_2 > m_1$ 且 $m_2 > N_2$ 使得 $a_{N_2} - \frac{1}{2} < x_{m_2} < a_{N_2}$, 从而

$$A - \frac{1}{2} \leqslant a_{N_2} - \frac{1}{2} < x_{m_2} < A + \frac{1}{2}.$$

此过程可无限地继续下去. 于是我们得到 $\langle x_n \rangle$ 的一子序列 $\langle x_{m_n} \rangle$, 使得

$$A - \frac{1}{n} \leqslant a_{N_n} - \frac{1}{n} < x_{m_n} < A + \frac{1}{n}, N_{n-1} < N_n < m_n < m_{n+1}$$

$(\forall n \in \mathbb{N})$. 此即等价于 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{m_n} = A$.

现在假设 $\langle x_{s_n} \rangle$ 是 $\langle x_n \rangle$ 的任一收敛子序列并且 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{s_n} = A'$. 我们来证明 $A' \leqslant A$.

事实上, 由 $\langle a_n \rangle$ 的单调下降性, $\forall n \in \mathbb{N}$, 存在 $l_n \in \mathbb{N}$, 使得

$$a_{s_n} \leqslant a_{N_{l_n}}, l_n \to +\infty (n \to +\infty)$$

从而

$$x_{s_n} \leqslant a_{s_n} \leqslant a_{N_{l_n}} < x_{m_{l_n}} + \frac{1}{l_n} (\forall n \in \mathbb{N}).$$

两边令 $n \to +\infty$ 取极限即得 $A' \leqslant A$. 此即表明 A 是 $\langle x_n \rangle$ 的所有收敛子序列极限的最大者.

2. $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} x_n = -\infty$. 这时, 由于 $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n = -\infty$, 故 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k_n \geqslant 1$ 使得 $a_{k_n} < -n$. 而 $a_{k_n} = \sup\limits_{m \geqslant k_n} x_m$, 故

$$\forall l \geqslant k_n, x_l \leqslant a_{k_n} < -n,$$

由此可知 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -\infty$, 因此 $\langle x_n \rangle$ 的所有子序列的极限都是 $-\infty$,

这个定理也正好解释了为什么我们称 $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} x_n$ 与 $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty}} x_n$ 为序列 $\langle x_n \rangle$ 的上极限与下极限.

作为这一节的结束, 我们给出一个实数序列, 它的所有收敛子序列的极限形成一个闭区间.

例题 3.33 考虑实数序列 $\langle \cos n \rangle$. 证明:

1. $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \cos n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \cos n = -1$,
2. $\forall A \in [-1, 1]$, 存在 $\langle \cos n \rangle$ 的子序列 $\langle \cos k_n \rangle$ 使得 $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos k_n = A$.

证明 首先, 我们注意到 $|\cos n| \leqslant 1 (n \in \mathbb{N})$, 因此 $\langle \cos n \rangle$ 的所有收敛子序列的极限属于闭区间 $[-1, 1]$. 由于 $\cos 2n\pi = 1, \cos(2n+1)\pi = -1 (\forall n \in \mathbb{N})$, 故

$$\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \cos n = 1, \quad \underline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \cos n = -1$$

为了证明 2), 我们只需证明集合 $\{\cos n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 在 $[-1, 1]$ 中稠密, 即证明

$$\forall x, y \in [-1, 1] \text{ 且 } x < y, \exists p \in \mathbb{N} \Longrightarrow x < \cos p < y.$$

令 $\alpha, \beta \in [0, \pi]$, 使得 $\cos \beta = x, \cos \alpha = y$, 于是 $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$. 定义集合

$$G(1, 2\pi) = \{p + 2\pi q \mid p, q \in \mathbb{Z}\}.$$

根据 §4 习题 25 的结论知 $G(1, 2\pi)$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密. 因此存在 $p, q \in \mathbb{Z}$ 使得 $p + 2\pi q \in (\alpha, \beta)$, 由此推得

$$x = \cos \beta < \cos(p + 2\pi q) < \cos \alpha = y$$

或

$$x < \cos p < y$$

由于 cos 是偶函数, 故可以认为 $p \in \mathbb{N}$, 从而集合 $\{\cos n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 在 $[-1,1]$ 中稠密.

习 题 3.5

1. 计算下列各上、下极限:
   1) $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{(-1)^n}{n}$, $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{(-1)^n}{n}$;
   2) $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} n(-1)^n$, $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} n(-1)^n$;
   3) $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} (-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} (-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$;
   4) $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \left[\dfrac{1}{n}+(1+(-1)^n)n\right]$, $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \left[\dfrac{1}{n}+(1+(-1)^n)n\right]$;
   5) $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$, $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)\cos\dfrac{2n\pi}{3}$.
2. 设 $\langle x_n\rangle,\langle y_n\rangle$ 是任意两个有界实数序列. 证明:
   1) $\forall\lambda>0$, $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(\lambda x_n)=\lambda\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(\lambda x_n)=\lambda\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n$
   2)
   $$\underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n+\underline{\lim_{n\to+\infty}} y_n \leqslant \underline{\lim_{n\to+\infty}}(x_n+y_n) \leqslant \underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n+\overline{\lim_{n\to+\infty}} y_n,$$
   $$\underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n+\overline{\lim_{n\to+\infty}} y_n \leqslant \overline{\lim_{n\to+\infty}}(x_n+y_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n+\overline{\lim_{n\to+\infty}} y_n$$
   3) 若 $x_n \geqslant 0, y_n \geqslant 0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$, 则
   $$\underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n\cdot\underline{\lim_{n\to+\infty}} y_n \leqslant \underline{\lim_{n\to+\infty}}(x_ny_n) \leqslant \underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n\cdot\overline{\lim_{n\to+\infty}} y_n,$$
   $$\underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n\cdot\overline{\lim_{n\to+\infty}} y_n \leqslant \overline{\lim_{n\to+\infty}}(x_ny_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n\cdot\overline{\lim_{n\to+\infty}} y_n.$$
3. 设 $\langle x_n\rangle$ 收敛, $\langle y_n\rangle$ 有界. 证明:
   $$\overline{\lim_{n\to+\infty}}(x_n+y_n)=\lim_{n\to+\infty} x_n+\overline{\lim_{n\to+\infty}} y_n,$$
   $$\underline{\lim_{n\to+\infty}}(x_n+y_n)=\lim_{n\to+\infty} x_n+\underline{\lim_{n\to+\infty}} y_n.$$
4. 设 $\langle x_n\rangle,\langle y_n\rangle$ 满足条件:
   $$\lim_{n\to+\infty} x_n<0, \langle y_n\rangle \text{ 有界, 且 } \overline{\lim_{n\to+\infty}} x_ny_n=\lim_{n\to+\infty} x_n\cdot\overline{\lim_{n\to+\infty}} y_n.$$
   证明: 序列 $\langle y_n\rangle$ 收敛.
5. 设 $\langle x_n\rangle,\langle y_n\rangle,\langle z_n\rangle$ 满足:
   $$x_n\leqslant z_n\leqslant y_n\ (\forall n\in\mathbb{N}),\ \overline{\lim_{n\to+\infty}} y_n\leqslant\underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n.$$
   证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.
6. 设 $\langle x_n\rangle$ 是任一严格正的实数序列. 证明:
   $$\overline{\lim_{n\to+\infty}} n\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n}-1\right)\geqslant 1.$$

第四章 一元实值函数的极限

这一章我们介绍一元实值函的极限概念及其性质，特别研究了一类重要函数——连续函数的若干特性.

4.1 函数极限的定义

设 f 是任一映射. 若

$$\mathrm{Dom}(f) = X \subset \mathbb{R}, \mathrm{Ran}(f) \subset \mathbb{R},$$

则今后我们称 $f : X \to \mathbb{R}$ 为一元实值函数，或简称为一元函数或函数.

1. (a, A) 型函数极限

定义 4.1

设 $f : X \to \mathbb{R}$ 是任一函数，$a \in \mathbb{R}$ 是 X 的一聚点. $A \in \mathbb{R}$ 是一定数.

1. 我们称函数 f 当 x 趋于 a 时极限存在并以 A 为极限，如果下述性质成立：

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X \cap \mathring{B}(a, \delta)) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

这时，记为

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to a).$$

2. 我们称函数 f 当 $x > a$ 且趋于 a 时右极限存在并以 A 为右极限，如果 a 是右侧聚点，并且下述性质成立：

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(\forall x \in X \cap \mathring{B}_{+}(a, \delta)\right) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

这时，记为

$$\lim_{x \to a^{+}} f(x) = A = f\left(a^{+}\right) \text{ 或 } f(x) \to A = f\left(a^{+}\right)\left(x \to a^{+}\right)$$

3. 我们称函数 f 当 $x < a$ 且趋于 a 时左极限存在并以 A 为左极限，如果 a 是左侧聚点，并且下述性质成立：

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(\forall x \in X \cap \mathring{B}_{-}(a, \delta)\right) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

这时，记为

$$\lim_{x \to a^{-}} f(x) = A = f\left(a^{-}\right) \text{ 或 } f(x) \to A = f\left(a^{-}\right)\left(x \to a^{-}\right)$$

♣

注

1. 由于 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 等价于 $f(x) \in B(A, \varepsilon)$，故上述三个极限定义可表示为下面的形式：

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \Longrightarrow f(X \cap \mathring{B}(a, \delta)) \subset B(A, \varepsilon),$$

$$\lim_{x \to a^{+}} f(x) = A \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \Longrightarrow f\left(X \cap \mathring{B}_{+}(a, \delta)\right) \subset B(A, \varepsilon),$$

$$\lim_{x \to a^{-}} f(x) = A \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \Longrightarrow f\left(X \cap \mathring{B}_{-}(a, \delta)\right) \subset B(A, \varepsilon).$$

2. 从上面的三个极限定义可以看出，极限 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A\left(\lim\limits_{x \to a^{+}} f(x) = A, \lim\limits_{x \to a^{-}} f(x) = A\right)$ 反映的

是函数 f 当 $x \to a\,(x \to a^+$ 或 $x \to a^-)$ 时的变化趋势. 因此 a 是否属于 X 无关紧要, 即使 $a \in X$, 函数 f 当 $x \to a\,(a^+$ 或 $a^-)$ 时也不一定有向 $f(a)$ 变化的趋势.

3. 从几何意义上来看, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 表示 $\forall \varepsilon > 0$, 总能找到一个 $\delta = 0$, 使得函数 f 在集合 $X \cap \mathring{B}(a,\delta)$ 上的限制 $f\Big|_{X\cap\mathring{B}(a,\delta)}$ 的图形包含在平面长方形区域 $[a-\delta, a+\delta] \times [A-\varepsilon, A+\varepsilon]$ 的内部, 即

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X \cap \mathring{B}(a,\delta),\ y = f(x)\right\} \subset (a-\delta, a+\delta) \times (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$$

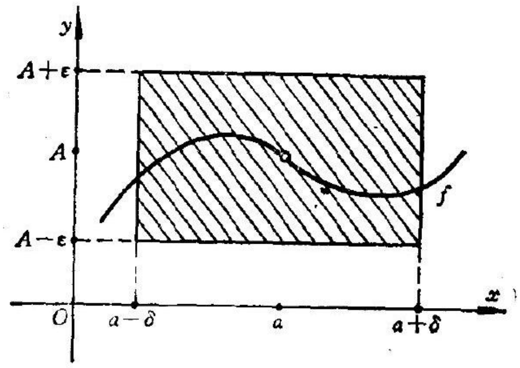

图 4.1

下面我们来看几个函数极限的例子

例题 4.1 考虑如下定义的函数 $f:\mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$ 与函数 $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \forall x > 0, \\ -x, & \forall x < 0. \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x, & \forall x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ -x, & \forall x < 0 \end{cases}$$

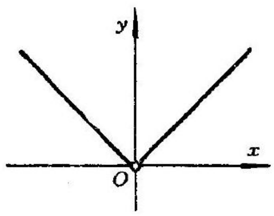

图 4.2

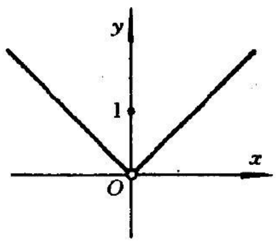

图 4.3

由于 $\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}, |f(x)-0| = |g(x)-0| = |x|$. 故

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathring{B}(0,\delta)) \Longrightarrow \begin{cases} |f(x)-0| < \varepsilon, \\ |g(x)-0| < \varepsilon. \end{cases}$$

因此

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

这里 $0 \notin \mathrm{Dom}(f), 0 \in \mathrm{Dom}(g)$, 但 $0 \neq g(0)$.

例题 4.2 考虑函数 $x \longmapsto x^p \sin\frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}, (p > 0)$ 证明:

$$\lim_{x\to 0} x^p \sin\frac{1}{x} = 0.$$

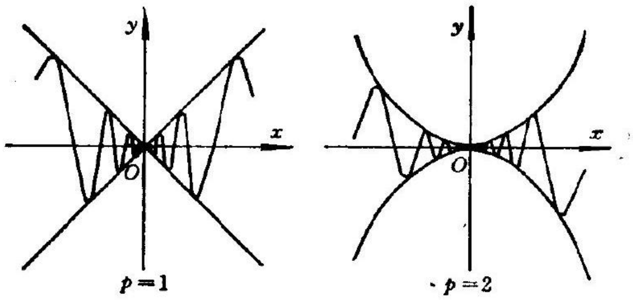

图 4.4

事实上, $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, 我们有

$$\left|x^p \sin\frac{1}{x} - 0\right| \leqslant |x|^p$$

$\forall \varepsilon > 0$, 由 $|x|^p < \varepsilon$ 得到 $|x| < \sqrt[p]{\varepsilon}$, 令 $\delta = \sqrt[p]{\varepsilon}$, 则

$$\forall x \in \mathring{B}(0,\delta) \Longrightarrow \left|x^p \sin\frac{1}{x} - 0\right| \leqslant |x|^p < \varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0} x^p \sin\frac{1}{x} = 0$.

例题 4.3 考虑符号函数

$$x \longmapsto \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \forall x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & \forall x < 0 \end{cases}$$

证明:

$\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ 不存在, $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1$.

事实上, 若 $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x) = A$, 则

$$\begin{aligned}(\forall 0 < \varepsilon < 1)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathring{B}(0,\delta)\\ &\Longrightarrow |\operatorname{sgn}(x) - A| < \varepsilon \\ &\Longrightarrow 2 \leqslant |1 - A| + |A - (-1)| < 2\varepsilon \\ &\Longrightarrow \varepsilon > 1\end{aligned}$$

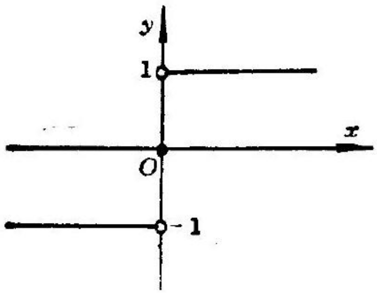

图 4.5

这与 $\varepsilon < 1$ 假设相矛盾，因此 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$ 不存在.

但是由于 $\forall x > 0, \operatorname{sgn}(x) = 1$； $\forall x < 0, \operatorname{sgn}(x) = -1$，故

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon > 0)\begin{cases}\left(\forall x \in \mathring{B}_+(0,\delta)\right) \Longrightarrow |\operatorname{sgn}(x) - 1| = 0 < \varepsilon,\\ \left(\forall x \in \mathring{B}_-(0,\delta)\right) \Longrightarrow |\operatorname{sgn}(x) - (-1)| = 0 < \varepsilon\end{cases}$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}(x) = -1$.

例4.3实际上揭示了下面的一般结论，即

定理 4.1

设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是任一函数，$a \in \mathbb{R}$ 是 X 的一个双侧聚点，那么

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = A.$$

证明 (必要性) 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. 那么由定义

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X \cap \mathring{B}(a,\delta)) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

特别地

$$\forall x \in X \cap \mathring{B}_+(a,\delta) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$
$$\forall x \in X \cap \mathring{B}_-(a,\delta) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = A$.

(充分性) 设 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = A$, 由定义有

$$(\forall \varepsilon > 0)\begin{cases}(\exists \delta_1 > 0)\left(\forall x \in X \cap \mathring{B}_+(a,\delta_1)\right) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,\\ (\exists \delta_2 > 0)\left(\forall x \in X \cap \mathring{B}_-(a,\delta_2)\right) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon..\end{cases}$$

令 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 则 $\delta > 0$, 并且

$$\forall x \in X \cap \mathring{B}(a,\delta) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

为了进一步理解函数的 (a, A) 型极限的定义，我们再考虑下面两个例子.

例题 4.4 考虑所谓的 Dirichlet 函数

$$x \longmapsto D(x) = \begin{cases}1, & x \in \mathbb{Q},\\ 0, & x \in \mathbb{Q}^c.\end{cases}$$

证明：$\forall a \in \mathbb{R}, \lim\limits_{x\to a} D(x)$ 不存在.

事实上，若存在 $a_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{x\to a_0} D(x) = l \in \mathbb{R}$, 则

$$\left(\forall 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\right)(\exists \delta > 0)\left(\forall x \in \mathring{B}(a_0, \delta) \Longrightarrow |D(x) - l| < \varepsilon.\right)$$

于是特别有

$$\forall x \in \mathring{B}(a_0, \delta) \cap \mathbb{Q}, |D(x) - l| = |1 - l| < \varepsilon,$$
$$\forall x \in \mathring{B}(a_0, \delta) \cap \mathbb{Q}^c, |D(x) - l| = |0 - l| < \varepsilon.$$

由此推得

$$1 = |1 - l + l| \leqslant |1 - l| + |l| < 2\varepsilon,$$

或 $\varepsilon > \frac{1}{2}$, 这与 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ 假设矛盾. 故 $\forall a \in \mathbb{R}, \lim\limits_{x\to a} D(x)$ 不存在.

例题 4.5 考虑如下定义的 Riemann 函数 R：

$$R(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \in \mathbb{Q}^c, \\ 1, & \text{若 } x = 0, \\ \dfrac{1}{p}, & \text{若 } x = \dfrac{q}{p}, p \in \mathbb{N}, p \text{ 与 } q \text{ 互质} \end{cases}$$

证明：$\forall a \in \mathbb{R}, \lim\limits_{x\to a} R(x) = 0$.

为此任取 $a \in \mathbb{R}$.

若 $a = 0$；则 $\forall \delta > 0$,

$$R(x) = \begin{cases} 0, \forall x \in \mathring{B}(0, \delta) \cap \mathbb{Q}^c, \\ \dfrac{1}{p}, \forall x \in \mathring{B}(0, \delta) \cap \mathbb{Q}, x = \dfrac{q}{p}, p \in \mathbb{N}, p, q \text{ 互质} \end{cases}$$

若 $a \neq 0$：则存在 $\delta_0 > 0$ 使得 $0 \notin \mathring{B}(a, \delta_0)$, 于是

$$R(x) = \begin{cases} 0, \forall x \in \mathring{B}(a, \delta_0) \cap \mathbb{Q}^c, \\ \dfrac{1}{p}, \forall x \in \mathring{B}(a, \delta_0) \cap \mathbb{Q}, x = \dfrac{q}{p}, p \in \mathbb{N}, p, q \text{ 互质} \end{cases}$$

由此可知，不论 $a = 0$ 与否,

$$R(x) = \begin{cases} 0, \forall x \in \mathring{B}(a, \delta_0) \cap \mathbb{Q}^c, \\ \dfrac{1}{p}, \forall x \in \mathring{B}(a, \delta_0) \cap \mathbb{Q}, x = \dfrac{q}{p}, p \in \mathbb{N}, p, q \text{ 互质} \end{cases}$$

$\forall \varepsilon > 0$, 由 $\frac{1}{p} \geqslant \varepsilon$ 知 $p \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$. 显然在 $\mathring{B}(a, \delta_0)$ 中分母 $p \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$ 的有理数 $\frac{q}{p}$ 只有有限多个. 因此存在 $0 < \delta < \delta_0$, 使得在 $\mathring{B}(a, \delta)$ 中所有有理数 $\frac{q}{p}$ 的分母 $p > \frac{1}{\varepsilon}$. 从而

$$\forall x \in \mathring{B}(a, \delta) \cap \mathbb{Q}, x = \frac{q}{p}, p \in \mathbb{N}, p, q \text{ 互质} \quad \Longrightarrow |R(x)| = \frac{1}{p} < \varepsilon.$$

上述分析表明：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得

$$\forall x \in \mathring{B}(a, \delta), |R(x) - 0| < \varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{x\to a} R(x) = 0$.

2. $(\pm\infty, A)$ 型函数极限

定义 4.2

设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是任一函数，$A \in \mathbb{R}$.

1. 设 $+\infty$ 是 X 的无穷远聚点. 我们称函数 f 当 x 趋于 $+\infty$ 时极限存在并且以 A 为极限，如果下述性质成立：
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0)(\forall x \in X \cap (M, +\infty)) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$
这时，记为
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to +\infty)$$
2. 设 $-\infty$ 是 X 的无穷远聚点：我们称函数 f 当 x 趋于 $-\infty$ 时极限存在并且以 A 为极限，如果下述性质成立：
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0)(\forall x \in X \cap (-\infty, -M)) \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$
这时，记为
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to -\infty)$$
我们也可用邻域语言表述这两类极限定义.
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0), f(X \cap (M, +\infty)) \subset B(A, \varepsilon),$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0), f(X \cap (-\infty, -M)) \subset B(A, \varepsilon).$$

♣

从几何意义上来看，$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$ 表明：对任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在一个正数 $M > 0$，使得函数 f 在集合 $X \cap (M, +\infty)$ 上的图像完全位于平面带形区域 $(M, +\infty) \times (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ 内；同理，$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$ 表示函数在 $X \cap (-\infty, -M)$ 上的图像完全位于带形区域 $(-\infty, -M) \times (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ 内 (如图4.6所示).

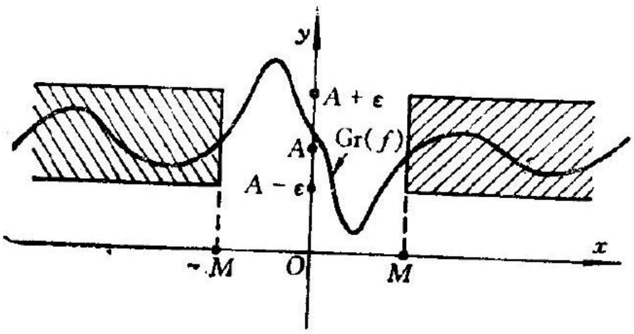

图 4.6

例题 4.6 考虑函数 $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$. 证明：
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$
事实上，$\forall \varepsilon > 0$，由 $\left|\dfrac{1}{x^2} - 0\right| = \dfrac{1}{x^2} < \varepsilon$ 得到 $|x| > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. 若令 $M = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$，则
$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in (M, +\infty) \\ \forall x \in (-\infty, -M) \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

例题 4.7 考虑函数 $x\longmapsto\cos\dfrac{1}{x},x\in\mathbb{R}-\{0\}$. 证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\cos\frac{1}{x}=1$$

事实上，由于 $\forall x\in\mathbb{R},|\sin x|\leqslant|x|$, 故 $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$,

$$\left|\cos\frac{1}{x}-1\right|=\left|2\sin^2\frac{1}{2x}\right|\leqslant 2\cdot\frac{1}{4x^2}=\frac{1}{2x^2}.$$

因此，$\forall\varepsilon>0$, 由 $\dfrac{1}{2x^2}<\varepsilon$ 得到 $|x|>\dfrac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$. 若令 $M=\dfrac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$, 则

$$\left.\begin{array}{l}\forall x\in(M,+\infty)\\ \forall x\in(-\infty,-M)\end{array}\right\}\Rightarrow\left|\cos\frac{1}{x}-1\right|<\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\dfrac{1}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\cos\dfrac{1}{x}=1$.

例题 4.8 考虑函数 $x\longmapsto\dfrac{x^2-1}{2\left(x^2+x-2\right)},x\in\mathbb{R}-\{1,-2\}$. 证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{2\left(x^2+x-2\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{2\left(x^2+x-2\right)}=\frac{1}{2}$$

事实上，由于 $\forall x\neq 1,-2$, 我们有

$$\left|\frac{x^2-1}{2\left(x^2+x-2\right)}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{-2(x-1)}{2(x-1)(x+2)}\right|=\frac{1}{|x+2|}.$$

故若首先限制 $|x|>2$, 则 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\dfrac{1}{|x+2|}\leqslant\dfrac{1}{|x|-2}<\varepsilon$ 得到 $|x|>2+\dfrac{1}{\varepsilon}$. 令 $M=2+\dfrac{1}{\varepsilon}$, 则

$$\left.\begin{array}{l}\forall x\in(M,+\infty)\\ \forall x\in(-\infty,-M)\end{array}\right\}\Rightarrow\left|\frac{x^2-1}{2\left(x^2+x-2\right)}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{2\left(x^2+x-2\right)}=\dfrac{1}{2},\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{2\left(x^2+x-2\right)}=\dfrac{1}{2}$.

例题 4.9 考虑函数 $x\longmapsto\sin x,x\in\mathbb{R}$. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在.

事实上，如果存在 $A\in\mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x=A$, 则

$$(\forall 0<\varepsilon<1)(\exists M>0)(\forall x\in(M,+\infty))\Longrightarrow|\sin x-A|<\varepsilon.$$

于是对 n 充分大，$2n\pi-\dfrac{\pi}{2},2n\pi+\dfrac{\pi}{2}>M$. 从而

$$\left|\sin\left(2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)-A\right|=|(-1)-A|<\varepsilon,$$
$$\left|\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)-A\right|=|1-A|<\varepsilon.$$

由此推得

$$2=|1-(-1)|=|1-A+A-(-1)|\leqslant|1-A|+|A-(-1)|<2\varepsilon.$$

于是 $\varepsilon>1$, 这与 $0<\varepsilon<1$ 假设相矛盾. 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在.

习题 4.1

1. 用极限定义证明下列各极限：

1) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$ 2) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}(a>0,\ n\in\mathbb{N})$

3) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^3-2)=1$ 4) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-x)=15$

5) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{[x]}{x}=1$ 6) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2-1}{3x^2-x}=\frac{2}{3}$

7) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^2-1}{x^2+x+1}=3$ 8) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\frac{1}{2}$

2. 证明：极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ 不存在.

3. 证明：若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$，其中 $a\in\mathbb{R}$ 或 $a=\pm\infty$.

4. 设函数 $x\mapsto x-[x]$，$x\in\mathbb{R}$.

 1) 证明：$\forall n\in\mathbb{Z}$，$\lim\limits_{x\to n}(x-[x])$ 不存在；

 2) 证明：$\forall a\notin\mathbb{Z}$，$\lim\limits_{x\to a}(x-[x])$ 存在.

5. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是以 T 为周期的周期函数. 证明：若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则 $f(x)\equiv A$，$\forall x\in\mathbb{R}$.

6. 对函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{若 } x\in\mathbb{Q}, \\ -x, & \text{若 } x\in\mathbb{Q}^c, \end{cases}$$

证明：$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，且对任意 $a\neq 0$，$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在.

7. 设 $[a,b]$ 是任一有限闭区间. 假设对任意 $x_0\in[a,b]$，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在. 试用两种不同的方法证明：存在 $M>0$，使得对任意 $x\in[a,b]$，有 $|f(x)|\leqslant M$.

8. 设 $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，其中 $n\geqslant 1$，$a_n\neq 0$. 试用极限定义证明：$\lim\limits_{x\to\pm\infty}|P_n(x)|=+\infty$.

4.2 函数极限的性质

函数极限的性质与收敛序列极限的大多数性质是类似的. 这里我们只对 (a,A) 型的函数极限性质进行叙述和证明. 对于 $(\pm\infty,A)$ 型的情形，读者可仿照 (a,A) 型的性质自己去论述.

1. 函数极限的一般性质

性质 4.1 如果函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 当 $x\to a$ 时有极限存在，则极限是唯一的.

证明 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A'$ 并且 $A\neq A'$. 那么由 $\mathbb{R}$ 的 Hausdorff 分离性知，存在 $\varepsilon_0>0$ 使得

$$B(A,\varepsilon_0)\cap B\left(A',\varepsilon_0\right)=\varnothing.$$

另一方面，对于 $\varepsilon_0>0$，存在 $\delta_1>0,\delta_2>0$ 使得

$$f\left(X\cap\mathring{B}(a,\delta_1)\right)\subset B(A,\varepsilon_0),$$
$$f\left(X\cap\mathring{B}(a,\delta_2)\right)\subset B\left(A',\varepsilon_0\right).$$

令 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则 $\delta>0$，并且

$$f(X\cap\mathring{B}(a,\delta))\subset B(A,\varepsilon_0)\cap B\left(A',\varepsilon_0\right).$$

于是 $f(X\cap\mathring{B}(a,\delta))=\varnothing$，这与 a 为 X 的聚点相矛盾，因此 $A=A'$.

性质 4.2 若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, 则 f 在 a 处是局部有界的. 即

$$(\exists M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X \cap \mathring{B}(a, \delta)) \Longrightarrow |f(x)| \leqslant M.$$

证明 因为 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, 所以由定义, 对 $\varepsilon = 1 > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\begin{aligned} \forall x \in X \cap \mathring{B}(a, \delta) &\Longrightarrow |f(x) - A| < 1 \\ &\Longrightarrow |f(x)| \leqslant |A| + |f(x) - A| < |A| + 1. \end{aligned}$$

取 $M = 1 + |A|$ 即可.

性质 4.3 (Cauchy 收敛准则) 函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 当 x 趋于 a 时极限存在的充分必要条件是:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(\forall x, x' \in X \cap \mathring{B}(a, \delta)\right) \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

证明 (必要性) 设 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. 由定义有

$$\begin{aligned} &(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(\forall x, x' \in X \cap \mathring{B}(a, \delta)\right) \\ &\Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon/2, \left|f(x') - A\right| < \varepsilon/2 \\ &\Longrightarrow \left|f(x) - f(x')\right| \leqslant |f(x) - A| + \left|A - f(x')\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

(充分性) 假设条件满足, 即

$$\begin{aligned} &(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(\forall x, x' \in X \cap \mathring{B}(a, \delta)\right) \\ &\Longrightarrow \left|f(x) - f(x')\right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

证明分两步进行.

1° 证明: 存在一个收敛的实数序列 $\langle f(x_n) \rangle$.

因为 $a \in \mathbb{R}$ 是 X 的聚点, 所以 $\forall n \in \mathrm{N}, X \cap \mathring{B}\left(a, \frac{1}{n}\right) \neq \varnothing$.

任取 $x_n \in X \cap \mathring{B}\left(a, \frac{1}{n}\right)$ $(n \in \mathrm{N})$. 于是我们得到一实数序列 $\langle f(x_n) \rangle$.

由于 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, 故对 $\delta > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geqslant N \Longrightarrow \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} < \delta, \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{N} < \delta.$$

于是

$$\begin{aligned} \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geqslant N &\Longrightarrow x_n, x_m \in X \cap \mathring{B}\left(a, \frac{1}{N}\right) \\ &\Longrightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

此即表明 $\langle f(x_n) \rangle$ 是 Cauchy 实数序列. 由 $\mathbb{R}$ 的完备性知 $\langle f(x_n) \rangle$ 收敛, 令 $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = A$.

2° . 证明: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

因为 $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = A$, 所以由定义

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Longrightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon.$$

于是由已知条件及 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N, x_n \in X \cap \mathring{B}(a, \delta)$ 知,

$$\begin{aligned} \forall x \in X \cap \mathring{B}(a, \delta) &\Longrightarrow |f(x) - f(x_n)| < \varepsilon \\ &\Longrightarrow |f(x) - A| \leqslant |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - A| \\ &\quad < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

反映函数极限与序列极限之间联系的是下面的重要定理.

性质 4.4 (Heine 定理) 函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 当 x 趋于 a 时有极限 A 的充分必要条件是:

$$\forall x_n\in X-\{a\}(n\in\mathbb{N})\text{ 且 }x_n\to a(n\to+\infty),\ \lim_{n\to+\infty} f\left(x_n\right)=A.$$

证明 (必要性) 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$. $x_n\in X-\{a\}$, 并且 $x_n\to a\ (n\to+\infty)$. 由定义

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in X\cap\mathring{B}(a,\delta))\Longrightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

$$(\text{ 对 }\ \delta>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N)\Longrightarrow x_n\in\mathring{B}(a,\delta).$$

从而

$$\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N\Longrightarrow\left|f\left(x_n\right)-A\right|<\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_n\right)=A$.

(充分性) 假设条件成立, 即

$$\forall x_n\in X-\{a\}(n\in\mathbb{N}),x_n\to a(n\to+\infty),\text{ 则 }\lim_{n\to+\infty} f\left(x_n\right)=A.$$

我们用反证法证明. 假设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq A$, 则

$$(\exists\varepsilon_0>0)\ (\forall n\in\mathbb{N})\left(\exists x_n\in X\cap\mathring{B}\left(a,\frac{1}{n}\right)\right)\Longrightarrow\left|f\left(x_n\right)-A\right|\geqslant\varepsilon_0 \tag{4.1}$$

由此得一实数序列 $\langle x_n\rangle$, 它满足: $x_n\in X-\{a\},x_n\to a(n\to+\infty)$. 于是 $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_n\right)=A$, 在式(4.1)中令 $n\to+\infty$ 得到 $\varepsilon_0\leqslant 0$. 这与 $\varepsilon_0>0$ 矛盾, 故必有 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

例题 4.10 考虑函数 $x\longmapsto\sin\dfrac{1}{x},x\in\mathbb{R}-\{0\}$ 及 $x\longmapsto\sin x,x\in\mathbb{R}$. 利用 Heine 定理证明:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在, 2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sin x$ 不存在.

证明 为此, 1) 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi},x_n'=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}(n\in\mathbb{N})$. 则 $x_n,x_n'\in\mathbb{R}-\{0\}(\forall n\in\mathbb{N})$, 并且 $x_n\to 0,x_n'\to 0(n\to+\infty)$ 但是

$$\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{x_n}=0,\ \lim_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{x_n'}=1$$

因此由 Heine 定理知, $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

取 $x_n=2n\pi,x_n'=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}(n\in\mathbb{N})$, 则 $x_n\to+\infty,x_n'\to+\infty(n\to+\infty)$. 由于

$$\sin x_n=0,\sin x_n'=1,$$

故由 Heine 定理知, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在.

函数 $x\longmapsto\sin\dfrac{1}{x},x\in\mathbb{R}-\{0\}$ 的图形如图4.7所示.

例题 4.11 考虑函数 $x\longmapsto x-[x],x\in\mathbb{R}$(因此 $x-[x]$ 是 x 的小数部分), 证明: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x-[x]$ 不存在.

证明 为此取 $x_n=n,x_n'=n+\dfrac{1}{2}(n\in\mathbb{N})$, 则 $x_n\to+\infty,x_n'\to+\infty\ (n\to+\infty)$, 由于

$$x_n-[x_n]=0,x_n'-\left[x_n'\right]=\frac{1}{2}(\forall n\in\mathbb{N}),$$

故

$$\lim_{n\to+\infty}\left(x_n-[x_n]\right)=0,\ \lim_{n\to+\infty}\left(x_n'-\left[x_n'\right]\right)=\frac{1}{2}.$$

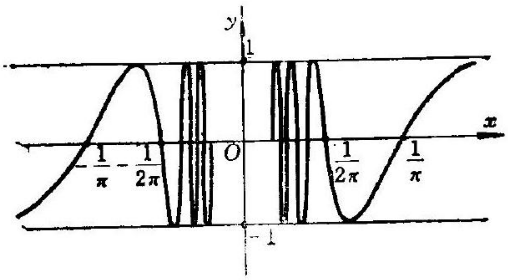

图 4.7

由 Heine 定理知, $\lim\limits_{x \to +\infty} x - [x]$ 不存在.

同理可证 $\lim\limits_{x \to -\infty} x - [x]$ 也不存在.

函数 $x \longmapsto x - [x], x \in \mathbb{R}$ 的图形如图4.8所示.

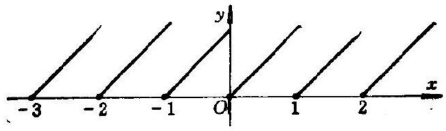

图 4.8

2. 函数极限的不等式性质

性质 4.5 若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A > r(< r)$, 则

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in X \cap \mathring{B}(a, \delta)) \Longrightarrow f(x) > r(< r).$$

证明 我们只对 $A > r$ 的情形证明. 由于 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A > r$, 故对 $\varepsilon = \dfrac{A-r}{2} > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \forall x \in X \cap \mathring{B}(a, \delta) &\Longrightarrow |f(x) - A| < \frac{A-r}{2} \\ &\Longrightarrow f(x) > A - \frac{A-r}{2} = \frac{A+r}{2} > r. \end{aligned}$$

性质 4.6 设 f, g 是任意两个函数,

$$X = \operatorname{Dom}(f) \cap \operatorname{Dom}(g) \neq \varnothing,$$

$a \in \mathbb{R}$ 是 X 的聚点, 并且

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \lim\limits_{x \to a} g(x) = B$;
2. $A > B(A < B)$,

则

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in X \cap \mathring{B}(a, \delta)) \Longrightarrow f(x) > g(x)(f(x) < g(x)).$$

证明 我们只对 $A > B$ 的情形证明. 令 $r = \dfrac{A+B}{2}$, 则由 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A > r > B = \lim\limits_{x \to a} g(x)$ 及性质4.2知

$$(\exists \delta_1 > 0)\left(\forall x \in X \cap \mathring{B}(a, \delta_1)\right) \Longrightarrow f(x) > r,$$

$$(\exists \delta_2 > 0)\left(\forall x \in X \cap \mathring{B}(a, \delta_2)\right) \Longrightarrow g(x) < r.$$

令 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 则

$$\forall x \in X \cap \mathring{B}(a, \delta) \Longrightarrow f(x) > g(x).$$

性质 4.7 设 f, g 是任意两个函数,

$$X = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \neq \varnothing,$$

$a \in \mathbb{R}$ 是 X 的聚点, 并且

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \lim\limits_{x \to a} g(x) = B$;
2. $(\exists \delta > 0)(\forall x \in X \cap \mathring{B}(a, \delta)) \Longrightarrow f(x) \geqslant g(x)(f(x) \leqslant g(x))$,

则

$$A \geqslant B(A \leqslant B).$$

证明 用反证法, 由性质4.2立即推出.

注 在条件 2) 中即使把 $f(x) \geqslant g(x)(f(x) \leqslant g(x))$ 换成严格不等式 $f(x) > g(x)(f(x) < g(x))$, 也不一定有 $A > B(A < B)$. 例如函数

$$x \longmapsto 2x^2, x \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ 与 } x \longmapsto x^2, x \in \mathbb{R} - \{0\},$$

显然有 $2x^2 > x^2 (\forall x \in \mathbb{R} - \{0\})$, 但 $\lim\limits_{x \to 0} 2x^2 = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$.

性质 4.8 设 f, g, h 是任意三个函数,

$$X = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \cap \mathrm{Dom}(h) \neq \varnothing,$$

$a \in \mathbb{R}$ 是 X 的聚点, 并且

1. $(\exists \delta > 0)(\forall x \in X \cap \mathring{B}(a, \delta)) \Longrightarrow f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$:
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = A$, 则

$$\lim_{x \to a} h(x) = A.$$

证明 因为 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = A$, 所以由定义

$$\begin{aligned}
&(\forall \varepsilon > 0) \left(\exists \delta' > 0\right) (\forall x \in X \cap \mathring{B}(a, \delta)) \\
&\Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, |g(x) - A| < \varepsilon \\
&\Longrightarrow A - \varepsilon < f(x), g(x) < A + \varepsilon.
\end{aligned}$$

令 $\eta = \min\left(\delta, \delta'\right)$, 则由上述不等式及条件 1) 推得

$$\begin{aligned}
\forall x \in X \cap \mathring{B}(a, \eta) &\Longrightarrow A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon \\
&\Longrightarrow |h(x) - A| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{x \to a} h(x) = A$,

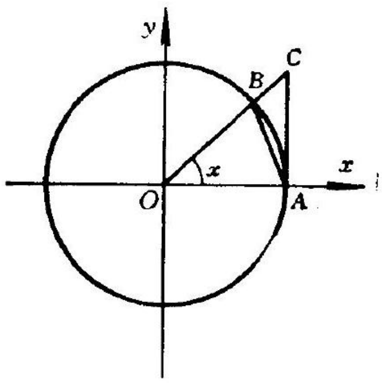

图 4.9

例题 4.12 证明：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

证明 首先设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. 如图4.9所示，A, B 是单位圆周上两点，使得

$$\angle AOB = x$$

则由图形可知

$$\text{三角形 } AOB \text{ 的面积 } S_1=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x.$$

$$\text{扇形 } AOB \text{ 的面积 } S_2=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x.$$

$$\text{三角形 } AOC \text{ 的面积 } S_3=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x.$$

并且 $S_1<S_2<S_3$. 由此得到不等式

$$\sin x<x<\tan x.$$

两边同除以 $\sin x\neq 0$, 得 $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$ 或

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

现设 $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$, 则 $0<(-x)<\dfrac{\pi}{2}$, 代入上式得

$$\cos(-x)<\frac{\sin(-x)}{(-x)}<1$$

或

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

因此我们有下述不等式：

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1, \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)-\{0\}.$$

易证 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, 故由性质4.2立即推得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

3. 函数极限的运算性质

性质 4.9 设 f, g 是任意两个函数，

$$X=\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)\neq\varnothing,$$

$a\in\mathbb{R}$ 是 X 的聚点，并且

$$\lim_{x\to a}f(x)=A, \lim_{x\to a}g(x)=B,$$

则

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=A+B$,
2. $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=AB$,
3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, 若 $B\neq 0$

证明 因为 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, 所以

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in X\cap\mathring{B}(a,\delta))$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}|f(x)-A|<\varepsilon\\ |g(x)-B|<\varepsilon, |g(x)|<|B|+\varepsilon\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}|[f(x)+g(x)]-(A+b)|\leqslant|f(x)-A|+|g(x)-B|<2\varepsilon,\\ |f(x)g(x)-AB|<|g(x)|\,|\,(f(x)-A\,|\,+|A||g(x)-B|<(\varepsilon+|A|+|B|)\varepsilon.\end{cases}$$

因此 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=A+B$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=AB$.

若 $B\neq 0$, 则只要 $\delta>0$ 充分小, 由性质 4.2 知 $\forall x\in X\cap\mathring{B}(a,\delta)$, $|g(x)|>\dfrac{|B|}{2}$. 于是

$$\begin{aligned}\forall x\in X\cap\mathring{B}(a,\delta)\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\right|&\\ &=\frac{|Bf(x)-Ag(x)|}{|g(x)B|}\\ &\leqslant\frac{2(|B||f(x)-A|+|A||g(x)-B|)}{|B|^2}\\ &<\frac{2(|A|+|B|)}{|B|^2}\cdot\varepsilon\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

例题 4.13 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}(a\neq 0, b\neq 0)$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{ax}{bx}\cdot\frac{bx}{\sin bx}\right)\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{a}{b}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin bx}{bx}}\\ &=1\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}}\\ &=\frac{a}{b}.\end{aligned}$$

例题 4.14 计算 $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{(x-2\pi)^2}$.

令 $y=x-2\pi$. 则 $y\to 0$, 并且

$$\begin{aligned}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{(x-2\pi)^2}&=\frac{1}{y^2}[\cos(2y+4\pi)-\cos(3y+6\pi)]\\ &=\frac{1}{y^2}(\cos 2y-\cos 3y)\\ &=\frac{2}{y^2}\sin\frac{5y}{2}\sin\frac{y}{2}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2\pi}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{(x-2\pi)^2}&=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin\frac{5y}{2}\sin\frac{y}{2}}{y^2}\\&=\frac{5}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{5y}{2}}{\frac{5y}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\\&=\frac{5}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{5y}{2}}{\frac{5y}{2}}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}=\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

例题 4.15 计算 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n+x^{n-1}+\cdots+x-n}{x-1}(n\in\mathbb{N})$.

由于 $\forall k\in\mathbb{N}, x^k-1=(x-1)\left(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1\right)$, 并且 $\lim\limits_{x\to 1}x^k=1$, 故

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 1}\frac{x^n+x^{n-1}+\cdots+x-n}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x^n-1)+\left(x^{n-1}-1\right)+\cdots+(x-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\right)+\lim_{x\to 1}\left(x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1\right)+\cdots+1\\&=\lim_{x\to 1}x^{n-1}+\lim_{x\to 1}x^{n-2}+\cdots+\lim_{x\to 1}x+1+\lim_{x\to 1}x^{n-2}+\lim_{x\to 1}x^{n-3}+\cdots+\lim_{x\to 1}x+1+\cdots+1\\&=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{个}}+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-1\text{个}}+\cdots+1\\&=n+(n-1)+\cdots+1\\&=\frac{1}{2}n(n+1).\end{aligned}$$

✍ 习 题 4.2

1. 计算下列各极限：

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2}$

3) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin nx}{\sin mx}\ (n,m\in\mathbb{N})$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos px-\cos qx}{x^2}\ (p,q\in\mathbb{N})$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$ 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin(\sin x))}{x}$

11) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$ 12) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$

2. 分别确定参数 $a,b,c\in\mathbb{R}$, 使得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2}{x+1}-ax^2-bx-c\right)=0 \text{ 与 } 1.$$

3. 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=B$. 证明：

$$\lim_{x\to a}\max(f(x),g(x))=\max(A,B),\ \lim_{x\to a}\min(f(x),g(x))=\min(A,B).$$

4. 设 $f: X \to \mathbb{R}$, $g: Y \to \mathbb{R}$ 是任意两个函数，使得 $f(X) \subset Y$，$a \in \mathbb{R}$ 是 X 的聚点，且 $\lim_{x\to a} f(x) = A, A \in \mathbb{R}$ 是 Y 的聚点 $\lim_{y\to A} g(y) = B$.

   1) 试问：$\lim_{x\to a} g\circ f(x) = B$ 吗？研究例子：

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)^2, & x \neq 0, \end{cases} \quad g(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \neq 0. \end{cases}$$

   2) 若 $\exists \delta > 0$，使得 $A \notin f\left(X \cap \mathring{B}(a,\delta)\right)$，证明：

$$\lim_{x\to a} g\circ f(x) = B.$$

5. 用 Cauchy 收敛准则证明 $\lim_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

6. 证明：$\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x} - \left[\dfrac{1}{x}\right]\right)$ 与 $\lim_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x} - \left[\dfrac{1}{x}\right]\right)$ 都不存在. 画出函数 $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \left[\dfrac{1}{x}\right], x \in \mathbb{R} - \{0\}$ 的图形.

7. 设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是任一函数，$a \in \mathbb{R}$ 是 X 的聚点. 证明：若对任意序列 $\{x_n\} \subset X - \{a\}(n \in \mathbb{N})$，当 $x_n \to a(n \to +\infty)$，并且满足 $|x_{n+1} - a| < |x_n - a|(\forall n \in \mathbb{N})$ 时，都有 $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A$，则 $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

4.3 无穷小与无穷大

与实数序列一样，对于函数来说，也有两类极限过程——无穷小与无穷大需要特别研究.

1. 无穷小与无穷大的定义

定义 4.3

设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是任一函数. $a \in \mathbb{R}$ 是 X 的一个聚点.

1. 若 $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, 则我们称函数 f 是 $\langle a, 0\rangle$ 型无穷小.
2. 若 f 具有下述性质：

$$(\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X \cap \mathring{B}(a,\delta)) \Longrightarrow |f(x)| > M,$$

则我们称函数 f 是 $\langle a, \infty\rangle$ 型无穷大.

特别地，若

$$(\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X \cap \mathring{B}(a,\delta)) \Longrightarrow f(x) > M(f(x) < M),$$

则我们称函数 f 是 $\langle a, +\infty\rangle$ 型无穷大 ($\langle a, -\infty\rangle$ 型无穷大) 或称函数 f 当 x 趋于 a 时有极限 $+\infty$($-\infty$)，并记为

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \left(\lim_{x\to a} f(x) = -\infty\right).$$

♣

例题 4.16 考虑函数 $(n \in \mathbb{N})$

$$x \longmapsto f(x) = (x-a)^n, x \in \mathbb{R}, \text{ 与 } x \longmapsto g(x) = \frac{1}{(x-a)^n},$$

$x \in \mathbb{R} - \{a\}$. 证明：f 是 $\langle a, 0\rangle$ 型无穷小，g 是 $\langle a, \infty\rangle$ 型无穷大.

证明 事实上，对于函数 $f:\forall\varepsilon>0$，由 $|(x-a)^n|<\varepsilon$ 得到 $|x-a|<\sqrt[n]{\varepsilon}$. 令 $\delta=\sqrt[n]{\varepsilon}$，则

$$\forall x\in\overset{\circ}{B}(a,\delta)\Longrightarrow|(x-a)^n-0|<\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{x\to a}(x-a)^n=0$，从而函数 f 是 $\langle a,0\rangle$ 型无穷小.

对于函数 $g:\forall M>0$，由 $\left|\dfrac{1}{(x-a)^n}\right|>M$ 得到 $|x-a|^n<\dfrac{1}{M}$ 或 $|x-a|<\dfrac{1}{\sqrt[n]{M}}$，令 $\delta=\dfrac{1}{\sqrt[n]{M}}$，则 $\delta>0$，并且

$$\forall x\in\overset{\circ}{B}(a,\delta)\Longrightarrow\left|\frac{1}{(x-a)^n}\right|>M.$$

因此函数 g 是 $\langle a,\infty\rangle$ 型无穷大.

定理 4.2

设 $f:X\to\mathbb{R}$ 是任一函数，$a\in\mathbb{R}$ 是 X 的一个聚点.

1. 若 f 是 $\langle a,0\rangle$ 型无穷小，并且 $\forall x\in X\cap\overset{\circ}{B}(a,\delta)$，$f(x)\neq0$，则函数 $\dfrac{1}{f}$ 是 (a,∞) 型无穷大.
2. 若 f 是 $\langle a,\infty\rangle$ 型无穷大，则 $\dfrac{1}{f}$ 是 $\langle a,0\rangle$ 型无穷小.

证明 1) 设 f 是 $\langle a,0\rangle$ 型无穷小. $M>0$. 于是

$$(\exists\delta'>0)\left(\forall x\in X\cap\overset{\circ}{B}\left(a,\delta'\right)\right)\Longrightarrow|f(x)|<\frac{1}{M}.$$

令 $\eta=\min\left(\delta,\delta'\right)$，则 $\eta>0$ 并且

$$\forall x\in X\cap\overset{\circ}{B}(a,\eta)\Longrightarrow\left|\frac{1}{f(x)}\right|>M.$$

因此 $\dfrac{1}{f}$ 是 $\langle a,\infty\rangle$ 型无穷大.

2) 设 f 是 (a,∞) 型无穷大. $\forall\varepsilon>0$. 由定义

$$(\exists\delta>0)(\forall x\in X\cap\overset{\circ}{B}(a,\delta))\Rightarrow|f(x)|>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow\left|\frac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon$$

因此 $\dfrac{1}{f}$ 是 $\langle a,0\rangle$ 型无穷小.

除了上面我们介绍的无穷小与无穷大类型外，我们还可以定义下述各种类型的无穷小与无穷大，与这些类型相对应的定理4.2的叙述和证明我们都留给读者作为练习自己去完成.

无穷小：$\langle a^+,0\rangle$, $\langle a^-,0\rangle$, $\langle+\infty,0\rangle$, $\langle-\infty,0\rangle$ 型

无穷大：$\langle a^+,\infty\rangle$, $\langle a^+,+\infty\rangle$, $\langle a^+,-\infty\rangle$, $\langle a^-,\infty\rangle$, $\langle a^-,+\infty\rangle$, $\langle a^-,-\infty\rangle$, $\langle+\infty,\infty\rangle$, $\langle+\infty,+\infty\rangle$, $\langle+\infty,-\infty\rangle$, $\langle-\infty,\infty\rangle$, $\langle-\infty,+\infty\rangle$, $\langle-\infty-\infty\rangle$ 型.

例题 4.17 考虑函数 $x\longmapsto f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}, x\in\mathbb{R}_*^+$. 证明：$f$ 是 $\langle 0^+,+\infty\rangle$ 型无穷大.

事实上，$\forall M>0$，由 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}>M$ 得到 $x<\dfrac{1}{M^2}$. 若令 $\delta=\dfrac{1}{M^2}$，则 $\delta>0$，并且

$$\forall x\in\overset{\circ}{B}_+(0,\delta)\Longrightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}>M.$$

因此 f 是 $\langle 0^+,+\infty\rangle$ 型无穷大.

例题 4.18 考虑函数

$$x\longmapsto P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}.$$

证明：若 $a_n>0$，则 P_n 是 $\langle+\infty,+\infty\rangle$ 型无穷大.

为此我们首先有：$\forall x>0$,

$$P_n(x)=a_nx^n\left(1+a_{n-1}\frac{1}{x}+\cdots+a_1\frac{1}{x^{n-1}}+a_0\frac{1}{x^n}\right)$$

由于 $\forall k\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^k}=0$, 故

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+a_{n-1}\frac{1}{x}+\cdots+a_1\frac{1}{x^{n-1}}+a_0\frac{1}{x^n}\right)=1$$

从而存在 $A>0$ 使得

$$\begin{aligned}\forall x\in(A,+\infty)&\Longrightarrow 1+a_{n-1}\frac{1}{x}+\cdots+a_1\frac{1}{x^{n-1}}+a_0\frac{1}{x^n}>\frac{1}{2}\\&\Longrightarrow P_n(x)>\frac{1}{2}a_nx^n\end{aligned}$$

于是 $\forall M>0$, 由 $\frac{1}{2}a_nx^n>M$ 得到 $x>\sqrt[n]{\frac{2M}{a_n}}$, 令 $\Delta=\max\left(A,\sqrt[n]{\frac{2M}{a_n}}\right)$, 则 $\Delta>0$ 并且

$$\forall x\in(\Delta,+\infty)\Longrightarrow P_n(x)>M.$$

因此函数 P_n 是 $(+\infty,+\infty)$ 型无穷大.

2. 不定型

对于一元函数来说，像实数序列一样，也有 $\infty-\infty, 0\cdot\infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 不定型. 例如

$\frac{0}{0}$ 不定型

1. $f(x)=x^2, g(x)=x$. 则 f,g 是 $\langle 0,0\rangle$ 型无穷小，$\frac{f}{g}$ 是 $\langle 0,0\rangle$ 型无穷小.
2. $f(x)=x, g(x)=x^2$. 则 f,g 是 $\langle 0,0\rangle$ 型无穷小，$\frac{f}{g}$ 是 $\langle 0,\infty\rangle$ 型无穷大.
3. $f(x)=(-1)^{[\frac{1}{x}]}x, g(x)=x$. 则 f,g 是 $\langle 0,\rangle$ 型无穷小，但 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}(-1)^{[\frac{1}{x}]}$ 不存在.

$\frac{\infty}{\infty}$ 不定型

1. $f(x)=\frac{1}{x^3}, g(x)=\frac{1}{x}$. 则 f,g 是 $(0,\infty)$ 型无穷大，$\frac{f}{g}$ 是 $\langle 0,+\infty\rangle$ 型无穷大.
2. $f(x)=\frac{1}{x}, g(x)=\frac{1}{x^3}$. 则 f,g 是 $\langle 0,\infty\rangle$ 型无穷大，$\frac{f}{g}$ 是 $\langle 0,\rangle$ 型无穷小.
3. $f(x)=\frac{(-1)^{[\frac{1}{x}]}}{x}, g(x)=\frac{1}{x}$. 则 f,g 是 $\langle 0,\infty\rangle$ 型无穷大，但 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}(-1)^{[\frac{1}{x}]}$ 不存在.

$0\cdot\infty$ 不定型

对于这种不定型，我们可以把它化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型，例如

设 f 是 $\langle a,0\rangle$ 型无穷小，g 是 $\langle a,\infty\rangle$ 型无穷大，则

1. $\frac{1}{g}$ 是 $\langle a,0\rangle$ 型无穷小，从而 $f\cdot g=\frac{f}{\frac{1}{g}}$ 是 $\frac{0}{0}$ 不定型.
2. 若 $f\neq 0$, 则 $\frac{1}{f}$ 是 $\langle a,\infty\rangle$ 型无穷大，从而 $f\cdot g=\frac{g}{\frac{1}{f}}$ 是 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型.

$\infty-\infty$ 不定型

对于这种不定型，一般也可以把它化 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型.

例如，设 f,g 是 $\langle a,\infty\rangle$ 型无穷大. 我们有

$$f-g=f\left(1-\frac{g}{f}\right)\ (\text{若 } f\neq 0)$$

1. 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=A(\neq 1)$, 则 $f-g$ 是 $\langle a,\infty\rangle$ 型无穷大.
2. 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$, 则 $f-g=\dfrac{1-\frac{g}{f}}{\frac{1}{f}}$ 是 $\dfrac{0}{0}$ 不定型. $f-g=\dfrac{f}{\frac{1}{1-g/f}}$ 又是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 不定型.

例题 4.19 计算 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 3x}{\tan x}$.

这是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 不定型. 令 $y=\dfrac{\pi}{2}-x$, 则 $y\to 0$,

$$\frac{\tan 3x}{\tan x}=\frac{\tan\left(\frac{3\pi}{2}-3y\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}=\frac{\cot 3y}{\cot y}=\frac{\cos 3y\cdot\sin y}{\sin 3y\cdot\cos y}.$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 3x}{\tan x}&=\lim_{y\to 0}\frac{\cos 3y\sin y}{\sin 3y\cos y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\sin 3y}\\&=\frac{1}{3}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{3y}{\sin 3y}\\&=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

例题 4.20 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$.

这是 $\infty-\infty$ 不定型.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{3/2}}}}+1}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

关于函数不定型的极限计算方法, 我们在第 6 章和第 8 章中将要进一步研究. 目前就介绍到这里为止.

✍ 习 题 4.3

1. 对函数 $x\mapsto P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, $x\in\mathbb{R}$, 分 n 为奇数, 偶数, $a_n>0$,$a_n<0$, 详细研究 P_n 可能有的无穷大类型.
2. 计算下列各极限:
   1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$,
   2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}(m,n\in\mathbb{N})$,
   3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}(a>0,\ m,n\in\mathbb{N})$,
   4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}(a>0)$,

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}(n\in\mathbb{N})$,

6) $\lim\limits_{x\to 0\pm}\dfrac{3x+|x|}{5x-3|x|}$,

7) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$,

8) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^{1/3}\left[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}\right]$,

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}-x\right]$,

10) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}(n\in\mathbb{N})$.

3. 考虑函数 $x\mapsto f(x)=\dfrac{1}{x}\left(1+\sin\dfrac{1}{x}\right)$, $x\in\mathbb{R}-\{0\}$. 证明：函数 f 在任何一个去心邻域 $\mathring{B}(0,\delta)$ 上是无界的, 但 f 并不是 $\langle 0,+\infty\rangle$ 型无穷大.

4. 设 $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是任一函数 $(a\in\mathbb{R})$ 满足条件：

   1) $\forall b>a$, $\exists M>0$, 使得 $\forall x\in(a,b)$, $|f(x)|\leqslant M$；

   2) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=+\infty\ (-\infty)$.

   证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty\ (-\infty)$.

4.4 单调函数的极限

我们首先介绍函数的上, 下确界.

1. 函数的上, 下确界

定义 4.4

设 $f:X\to\mathbb{R}$ 是任一函数.

1. 我们称 f 在 X 上是上 (下) 有界的, 如果

$$\mathrm{Ran}(f)=\{f(x)\in\mathbb{R}\mid x\in X\}$$

   是上 (下) 有界集. $\mathrm{Ran}(f)$ 的上 (下) 界称为 f 在 X 上的上 (下) 界.

2. 如果 f 在 X 上是上 (下) 有界的, 则 $\mathrm{Ran}(f)$ 的上 (下) 确界就称为 f 在 X 上的上 (下) 确界, 记为

$$\sup_{x\in X}f(x)\left(\inf_{x\in X}f(x)\right).$$

3. 我们称 f 在 X 上有界, 如果 f 在 X 上既是上有界的又是下有界的.

♣

由上述定义立即推知：

$$\begin{aligned}
f\text{ 在 }X\text{ 上上（下）有界}&\iff \exists M\in\mathbb{R},\forall x\in X, f(x)\leqslant M(\geqslant M).\\
f\text{ 在 }X\text{ 上有界}&\iff \exists m,M\in\mathbb{R},\forall x\in X, m\leqslant f(x)\leqslant M.\\
&\iff \exists M>0,\forall x\in X,|f(x)|\leqslant M.\\
A\text{ 是 }f\text{ 在 }X\text{ 上的上 (下) 确界}&\iff \text{i)}\ \forall x\in X,\ f(x)\leqslant A\ (\geqslant A),\\
&\qquad \text{ii)}\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\bar{x}\in X,\ \text{s.t. } A-\varepsilon<f(\bar{x})\ (f(\bar{x})<A+\varepsilon).
\end{aligned}$$

注 如果函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 在 X 上无上(下)界，那么

$$(\forall n\in\mathbb{N})\,(\exists x_n\in X)\Longrightarrow f\left(x_n\right)>n(<-n).$$

因此，为了今后叙述上的统一起见，我们称 f 在 X 上有上(下)确界 $+\infty(-\infty)$，并仍记为

$$\sup_{x\in X} f(x)=+\infty\left(\inf_{x\in X} f(x)=-\infty\right)$$

例题 4.21 考虑正弦, 余弦函数

$$x\longmapsto\sin x, x\in\mathbb{R};\quad x\longmapsto\cos x, x\in\mathbb{R}.$$

由于

$$|\sin x|\leqslant 1,|\cos x|\leqslant 1,\forall x\in\mathbb{R},$$

故这两个函数在 $\mathbb{R}$ 都是有界的，并且

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\sin x=\sup_{x\in\mathbb{R}}\cos x=1,\inf_{x\in\mathbb{R}}\sin x=\inf_{x\in\mathbb{R}}\cos x=-1.$$

例题 4.22 考虑函数 $x\longmapsto f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $x\in\mathbb{R}_*^+$. 证明：

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_*^+} f(x)=+\infty,\quad\inf_{x\in\mathbb{R}_*^+} f(x)=2.$$

证明 事实上，由于 $\forall M>0,\exists x=2M$, 使 $x+\dfrac{1}{x}>M$, 故此函数 f 在 $\mathbb{R}_*^+$ 上无上界，从而 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_*^+} f(x)=+\infty$.

其次，由于 $\forall x\in\mathbb{R}_*^+$, $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2=\dfrac{(x-1)^2}{x}\geqslant 0$, 故 2 是函数 f 的一个下界. 又由于

$$\forall\delta>0,1+\delta+\frac{1}{1+\delta}=2+\frac{\delta^2}{1+\delta},$$

故

$$\begin{aligned}(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\Longrightarrow f(1+\delta)&=1+\delta+\frac{1}{1+\delta}\\&=2+\frac{\delta^2}{1+\delta}<2+\varepsilon.\end{aligned}$$

因此 $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}_*^+} f(x)=2$.

例题 4.23 对于正切函数 $x\longmapsto\tan x, x=\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, 显然有

$$\sup_{x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\tan x=+\infty,\quad\inf_{x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\tan x=-\infty.$$

2. 单调函数的极限

我们先介绍单调函数的定义.

定义 4.5

设 $f:X\to\mathbb{R}$ 是任一函数.

1. 我们称 f 在 X 上是单调上升(下降)的，如果：
$$\forall x_1,x_2\in X,x_1<x_2\Longrightarrow f\left(x_1\right)\leqslant f\left(x_2\right)\left(f\left(x_1\right)\geqslant f\left(x_2\right)\right).$$
2. 我们称 f 在 X 上是严格单调上升(下降)的，如果：
$$\forall x_1,x_2\in X,x_1<x_2\Longrightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)\left(f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)\right).$$

3. 单调上升与单调下降函数称为单调函数.

例题 4.24 对上面例4.22的函数 $x \longmapsto x+\frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}_*^+$, 出于

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_*^+, x_1<x_2,\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)-\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)=\left(x_2-x_1\right) \cdot \frac{x_1 x_2-1}{x_1 x_2}$$

故此函数在 $\mathbb{R}_*^+$ 上不是单调的, 但它在 $[1,+\infty)$ 上是严格单调上升的, 而在 $(0,1)$ 上是严格单调下降的.

关于单调函数的极限, 我们有下述定理.

定理 4.3

设 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是任一单调函数, $x_0 \in X$ 是一聚点, $c=\inf X, d=\sup X$.

1. 设 f 在 X 上单调上升.
   若 x_0 是右侧聚点, 则 $f\left(x_0^+\right)$ 存在且 $f\left(x_0\right) \leqslant f\left(x_0^+\right)$.
   若 x_0 是左侧聚点, 则 $f\left(x_0^-\right)$ 存在且 $f\left(x_0\right) \geqslant f\left(x_0^-\right)$.
   对 c 与 d, 则有
   $$\lim _{x \rightarrow c^+} f(x)=\inf _{x \in X} f(x), \lim _{x \rightarrow d^-} f(x)=\sup _{x \in X} f(x).$$
2. 设 f 在 X 上单调下降.
   若 x_0 是右侧聚点, 则 $f\left(x_0^+\right)$ 存在且 $f\left(x_0\right) \geqslant f\left(x_0^+\right)$.
   若 x_0 是左侧聚点, 则 $f\left(x_0^-\right)$ 存在且 $f\left(x_0\right) \leqslant f\left(x_0^-\right)$.
   对 c 与 d, 则有
   $$\lim _{x \rightarrow 0^+} f(x)=\sup _{x \in X} f(x), \lim _{x \rightarrow d^-} f(x)=\inf _{x \in X} f(x).$$

证明 我们只对 f 是单调上升情形证明. 对单调下降函数 f, 可换 f 为 $-f$, 从而结论 2) 由 1) 推出.

若 x_0 是 X 的右侧聚点, 则

$$\forall x \in X \cap B_+\left(x_0, \eta\right), f\left(x_0\right) \leqslant f(x) \Longrightarrow f\left(x_0\right) \leqslant \inf _{x \in X \cap B_+\left(x_0, \eta\right)} f(x)=B.$$

于是 $\forall \varepsilon>0$, 由下确界性质知, 存在 $\bar{x} \in X \cap \mathring{B}_+\left(x_0, \eta\right)$, 使得 $f(\bar{x})<B+\varepsilon$. 令 $\delta=\bar{x}-x_0$, 则 $0<\delta<\eta$. 由 f 的单调上升性我们有

$$\begin{aligned}\forall x \in X \cap B_+\left(x_0, \delta\right) & \Longrightarrow B-\varepsilon<f(x) \leqslant f(\bar{x})<B+\varepsilon \\ & \Longrightarrow|f(x)-B|<\varepsilon .\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{x \rightarrow x_0^+} f(x)=f\left(x_0^+\right)$ 存在, 并且 $f\left(x_0\right) \leqslant B=f\left(x_0^+\right)$.

若 x_0 是 X 的左侧聚点, 则

$$\forall x \in X \cap B_-\left(x_0, \eta\right), f(x) \leqslant f\left(x_0\right) \Longrightarrow \sup _{x \leqslant X \cap B_-\left(x_0, \eta\right)} f(x)=A \leqslant f\left(x_0\right) .$$

于是 $\forall \varepsilon>0$, 由上确界性质知, 存在 $\bar{\bar{x}} \in X \cap \mathring{B}_-\left(x_0, \eta\right)$ 使得 $A-\varepsilon<f(\bar{\bar{x}})$. 令 $\delta=x_0-\bar{\bar{x}}$, 则 $\theta<\delta<\eta$, 由 f 的单调上升性我们有

$$\begin{aligned}\forall x \in X \cap B_-\left(x_0, \delta\right) & \Longrightarrow A-\varepsilon<f(\bar{\bar{x}}) \leqslant f(x)<A+\varepsilon \\ & \Longrightarrow|f(x)-A|<\varepsilon .\end{aligned}$$

因此 $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f\left(x_0^-\right)$ 存在，并且 $A = f\left(x_0^-\right) \leqslant f(x_0)$.

对于 $\lim_{x\to c^+} f(x) = \inf_{x\in X} f(x)$ 及 $\lim_{x\to d^-} f(x) = \sup_{x\in X} f(x)$ 可类似证明.

例题 4.25 考虑函数 $x \to [x], x \in \mathbb{R}$.

此函数在 $\mathbb{R}$ 上单调上升，无上，下界，且

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in (n, n+1), [x] = n.$$

因此 $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\lim_{x\to n^+}[x] = n$, $\lim_{x\to n^-}[x] = n-1$； $\forall x_0 \in (n, n+1)$, $\lim_{x\to x_0}[x] = n$；

$$\lim_{x\to-\infty}[x] = -\infty; \quad \lim_{x\to+\infty}[x] = +\infty.$$

习题 4.4

1. 设 $f : X \to \mathbb{R}$ 是任一函数. 我们称 f 在点 $a \in X$ 处是局部有界的，如果

$$\exists \delta > 0 \text{ 使得 } f \text{ 在 } X \cap B(a, \delta) \text{ 上有界}.$$

我们称 f 在 X 上是局部有界，如果 f 在 X 的每一点 x 处都是局部有界的.

1) 证明：若 f 在 X 上有界，则 f 在 X 上局部有界.

2) 举例说明：f 在 X 上局部有界不一定意味着 f 在 X 上有界.

2. 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \notin \mathbb{Q}, \\ p, & \text{若 } x = \dfrac{q}{p},\ p > 0,\ p, q \text{ 互质}. \end{cases}$$

证明：f 在 $\mathbb{R}$ 的任一点 x 处都不是局部有界的.

3. 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x = 0, \\ \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{若 } x \neq 0. \end{cases}$$

1) 证明：f 在 $x = 0$ 处不是局部有界的.

2) 证明：$\lim_{x\to 0} f(x) \neq \pm\infty$.

3) 证明：对任意 $\delta > 0$，f 在 $\mathbb{R} - B(0, \delta)$ 上是有界的.

4. 确定函数 $f(x) = \dfrac{1}{x} - \left[\dfrac{1}{x}\right]$ 在 $\mathbb{R} - \{0\}$ 上的上确界与下确界.

5. 设 f, g 是任意两个函数，且 $X = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \neq \varnothing$. 证明下列不等式成立：

1) $\sup_{x\in X}[f(x) + g(x)] \leqslant \sup_{x\in X} f(x) + \sup_{x\in X} g(x)$；

2) $\inf_{x\in X}[f(x) + g(x)] \geqslant \inf_{x\in X} f(x) + \inf_{x\in X} g(x)$；

3) $\sup_{x\in X} f(x)g(x) = \left(\sup_{x\in X} f(x)\right) \cdot \left(\sup_{x\in X} g(x)\right)$ $(f \geqslant 0, g \geqslant 0)$；

4) $\inf_{x\in X} f(x)g(x) \geqslant \left(\inf_{x\in X} f(x)\right) \cdot \left(\inf_{x\in X} g(x)\right)$ $(f \geqslant 0, g \geqslant 0)$.

6. 设 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 是任一单调上升函数. 证明以下三个结论互相等价：

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在；

2) 实数序列 $\langle f(n) \rangle$ 收敛；

3) f 在 $\mathbb{R}^+$ 上有上界.

7. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是一个区间，$f : I \to \mathbb{R}$ 是任一函数. 我们称 f 在 $x_0 \in I$ 处是增大的，如果存在 $\delta > 0$，使得

$$f(x) - f(x_0) \begin{cases} > 0, & \forall x \in I \cap \mathring{B}_+(x_0, \delta), \\ < 0, & \forall x \in I \cap \mathring{B}_-(x_0, \delta). \end{cases}$$

1) 证明：函数

$$x \longmapsto \tilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x(1 + x\sin\dfrac{1}{x}), & x \neq 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处是增大的，但对任意 $\varepsilon > 0$，函数 f 不是在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 的每一点 x 处都增大的.

2) 证明：如果函数 f 在 I 的每一点 x 处都是增大的，则 f 在 I 上是严格单调上升的；反之，若 f 在 I 上严格单调上升，则 f 在 I 的每一点 x 处都是增大的.

8. 设 $f : X \to \mathbb{R}$ 是任一函数，a 是 X 的一个聚点 (a 可以是 $\pm\infty$). 设 $x_n \in X - \{a\}$ 且 $x_n \to a (n \to +\infty)$. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$(有限或 $\pm\infty$)，则称 A 为函数 f 在 a 处的子序列极限. 令

$$E = \{A \in \overline{\mathbb{R}} \mid A \text{ 是 } f \text{ 在 } a \text{ 处的子序列极限 }\}.$$

称 $\sup E$ 为函数 f 当 $x \to a$ 时的上极限，记为 $\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)$；称 $\inf E$ 为函数 f 当 $x \to a$ 时的下极限，记为 $\underline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)$.

1) 证明：$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 当且仅当 $\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x) = \underline{\lim\limits_{x\to a}} f(x) = A$，其中 A 为有限或 $\pm\infty$.

2) 证明：

$$\overline{\lim_{x\to a}} f(x) = \lim_{\delta\to 0+} \sup_{0<|x-a|<\delta} f(x) = \inf_{\delta>0}\left(\sup_{0<|x-a|<\delta} f(x)\right),$$

$$\underline{\lim_{x\to a}} f(x) = \lim_{\delta\to 0+}\left(\inf_{0<|x-a|<\delta} f(x)\right) = \sup_{\delta>0}\left(\inf_{0<|x-a|<\delta} f(x)\right).$$

3) 对 $a = +\infty$，证明：

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} f(x) = \lim_{M\to+\infty}\left(\sup_{x\geqslant M} f(x)\right) = \inf_{M>0}\left(\sup_{x\geqslant M} f(x)\right),$$

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}} f(x) = \lim_{M\to+\infty}\left(\inf_{x\geqslant M} f(x)\right) = \sup_{M>0}\left(\inf_{x\geqslant M} f(x)\right).$$

4) 计算下列各函数 f 的上极限与下极限：

$$f(x) = \frac{1}{x+1}\sin\frac{1}{x} \quad (x \to 0),$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1}\cos x \quad (x \to \pm\infty),$$

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \quad (x \to 0).$$

4.5 函数的连续与间断

函数极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ 中 $a \in X$ 的情形需要进一步的研究.

1. 函数的连续点

定义 4.6

设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是任一函数，$x_0 \in X$.

1. 我们称函数 f 在 x_0 处连续或 x_0 是 f 的连续点，如果下述性质成立：
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(\forall x \in X \cap B\left(x_0, \delta\right)\right) \Longrightarrow \left|f(x) - f\left(x_0\right)\right| < \varepsilon,$$
或
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \Longrightarrow f\left(X \cap B\left(x_0, \delta\right)\right) \subset B\left(f\left(x_0\right), \varepsilon\right).$$
我们称函数 f 在 X 上连续，如果 f 在 X 的每一点处连续.
2. 我们称函数 f 在 x_0 处右连续或 x_0 是 f 的右连续点，如果下述性质成立：
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(\forall x \in X \cap B_{+}\left(x_0, \delta\right)\right) \Longrightarrow \left|f(x) - f\left(x_0\right)\right| < \varepsilon,$$
或
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \Longrightarrow f\left(X \cap B_{+}\left(x_0, \delta\right)\right) \subset B\left(f\left(x_0\right), \varepsilon\right).$$
3. 我们称函数 f 在 x_0 处左连续或 x_0 是 f 的左连续点，如果下述性质成立：
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(\forall x \in X \cap B_{-}\left(x_0, \delta\right)\right) \Longrightarrow \left|f(x) - f\left(x_0\right)\right| < \varepsilon,$$
或
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \Longrightarrow f\left(X \cap B_{-}\left(x_0, \delta\right)\right) \subset B\left(f\left(x_0\right), \varepsilon\right).$$

♣

下面是两个最简单的连续函数的例子.

例题 4.26 $\forall n \in \mathbb{N}$, 幂函数 $x \longmapsto x^n, x \in \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

事实上，任取一点 $x_0 \in \mathbb{R}$. 令 $|x - x_0| < 1$, 则
$$\begin{aligned}
\left|x^n - x_0^n\right| &= \left|\left(x - x_0\right)\left(x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + \cdots + x_0^{n-1}\right)\right| \\
&\leqslant \left|x - x_0\right|\left(|x|^{n-1} + |x|^{n-2}\left|x_0\right| + \cdots + \left|x_0\right|^{n-1}\right) \\
&< \left|x - x_0\right|\left[\left(\left|x_0\right| + 1\right)^{n-1} + \left(\left|x_0\right| + 1\right)^{n-2}\left|x_0\right| + \cdots + \left|x_0\right|^{n-1}\right] \\
&< n\left(\left|x_0\right| + 1\right)^{n-1}\left|x - x_0\right|.
\end{aligned}$$
$\forall \varepsilon > 0$, 由 $n\left(\left|x_0\right| + 1\right)^{n-1}\left|x - x_0\right| < \varepsilon$ 得到
$$\left|x - x_0\right| < \varepsilon / n\left(\left|x_0\right| + 1\right)^{n-1}$$
若令 $\delta = \min\left(\varepsilon / n\left(\left|x_0\right| + 1\right)^{n-1}, 1\right)$, 则
$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|x - x_0\right| < \delta \Longrightarrow \left|x^n - x_0^n\right| < n\left(\left|x_0\right| + 1\right)^{n-1}\left|x - x_0\right| < \varepsilon.$$
因此幂函数 $x \longmapsto x^n, x \in \mathbb{R}$ 在 x_0 处连续，由 $x_0 \in \mathbb{R}$ 的任意性知，此幂函数在 $\mathbb{R}$ 上连续.

例题 4.27 正弦函数 $x \longmapsto \sin x, x \in \mathbb{R}$ 与余弦函数 $x \longmapsto \cos x, x \in \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$, 由于 $|\sin x| \leqslant |x| (\forall x \in \mathbb{R})$, 故
$$\begin{aligned}
\left|\sin x - \sin x_0\right| &= 2\left|\sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}\right| \\
&\leqslant 2 \cdot \frac{\left|x - x_0\right|}{2} = \left|x - x_0\right|
\end{aligned}$$
于是
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon > 0)\left(\forall x \in \mathbb{R}, \left|x - x_0\right| < \delta\right) \Longrightarrow \left|\sin x - \sin x_0\right| < \varepsilon.$$

此即表明正弦函数 $x \longmapsto \sin x, x \in \mathbb{R}$ 在 x_0 处连续，再由 x_0 的任意性推知，正弦函数在 $\mathbb{R}$ 上连续.

同理可证余弦函数 $x \longmapsto \cos x, x \in \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

从上面函数在一点处的连续, 右 (左) 连续的定义可推出下述几个简单结论：

1. 若 $x_0 \in X$ 是孤立点，则 f 在 x_0 处连续.
2. 若 $x_0 \in X$ 是聚点, 右侧聚点, 左侧聚点，则

$$f \text{ 在 } x_0 \text{ 处连续} \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

$$f \text{ 在 } x_0 \text{ 处右连续} \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0),$$

$$f \text{ 在 } x_0 \text{ 处左连续} \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

3. 若 $x_0 \in X$ 是双侧聚点，则

$$f \text{ 在 } x_0 \text{ 处连续} \Longleftrightarrow f \text{ 在 } x_0 \text{ 处左, 右连续}.$$

2. 函数的间断点

定义 4.7

设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是任一函数，$x_0 \in X$. 若 f 在 x_0 处不连续，则我们称 f 在 x_0 处间断，x_0 称为 f 的间断点或不连续点.

♣

根据 f 在 x_0 处连续的定义可知,

$$\begin{aligned} & x_0 \in X \text{ 是 } f \text{ 的间断点} \\ \Longleftrightarrow & (\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall \delta > 0)(\exists \bar{x} \in X \cap B(x_0, \delta)) \Longrightarrow |f(\bar{x}) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0. \end{aligned}$$

现在我们来研究间断点的分类.

定义 4.8

设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是任一函数，$x_0 \in X$.

1. x_0 是 X 的右侧聚点.

   若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f\left(x_0^+\right)$ 存在，但 $f\left(x_0^+\right) \neq f(x_0)$, 则称 x_0 是 f 的第一类右侧间断点.

   若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 不存在，或等于 $\pm\infty$, 则称 x_0 是 f 的第二类右侧间断点.
2. x_0 是 X 的左侧聚点.

   若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f\left(x_0^-\right)$ 存在，但 $f\left(x_0^-\right) \neq f(x_0)$, 则称 x_0 是 f 的第一类左侧间断点.

   若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 不存在，或等于 $\pm\infty$, 则称 x_0 是 f 的第二类左侧间断点.
3. x_0 是 X 的双侧聚点.

   若 x_0 同时是 f 的第一类右, 左侧间断点，则称 x_0 是 f 的第一类间断点.

   若 x_0 是 f 的第一类间断点，并且 $f\left(x_0^+\right) = f\left(x_0^-\right)$，则称 x_0 是 f 的可去间断点.

   若 x_0 是 f 的非第一类间断点的间断点，则我们称 x_0 是 f 的第二类间断点.

♣

注 当 x_0 是函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 的可去间断点时，我们可以改变 f 在 x_0 处的定义使得修改后的函数在 x_0 处连续. 为此我们令

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \in X, x \neq x_0 \\ f\left(x_0^+\right) = f\left(x_0^-\right), x = x_0 \end{cases}$$

显然函数 $\widetilde{f}: X \to \mathbb{R}$ 在 x_0 处连续.

如果 x_0 是 f 的第一类右 (左) 侧间断点, 则也可类似地改变 f 在 x_0 处的定义, 使得修改后的函数在 x_0 处右 (左) 连续.

例题 4.28 考虑如下定义的函数 $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x > 0, \\ 1, & x \leqslant 0; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0 \neq f(0)$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1 \neq g(0)$, 故 $x = 0$ 是函数 f 的第一类右侧间断点, 0 是函数 g 的第一类间断点, 并且是可去间断点.

例题 4.29 考虑符号函数 $x \longmapsto \operatorname{sgn}(x), x \in \mathbb{R}$.

由于 $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1, \operatorname{sgn}(0) = 0$, 故 $x = 0$ 是第一类间断点, 但不是可去间断点.

例题 4.30 考虑函数

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

在 §2 例4.10中已证 $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ 不存在. 因此 0 是此函数 f 的第二类间断点.

例题 4.31 考虑函数

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, 故 0 是此函数 f 的第二类间断点.

关于函数的间断点, 我们自然要问:

1. 是否存在函数 $f: I \to \mathbb{R}$($I \subset \mathbb{R}$ 是一区间), 使得 I 的所有点是第一类的可去间断点?
2. 是否存在函数 $f: I \to \mathbb{R}$, 使得属于 I 的 f 的所有间断点是第一类的可去间断点?
3. 是否存在函数 $f: I \to \mathbb{R}$, 使得属于 I 的 f 的所有间断点是第二类间断.

第一个问题的答案是否定的 (见习题 12). 第二, 三两个问题的回答是肯定的.

例题 4.32 考虑 Riemann 函数

$$x \mapsto R(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}^c; \\ 1, & x = 0; \\ \dfrac{1}{p}, & x = \dfrac{q}{p}, p \in \mathbb{N};\quad q \in \mathbb{Z}, p, q \text{ 互质}. \end{cases}$$

由于 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = 0$, 故 Riemann 函数 R 在每一个无理点处连续, 而在每一个有理点处间断. 因此 Riemann 函数的所有间断点是第一类的可去间断点. 虽然此间断点集 $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$. 但它在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

例题 4.33 考虑 Dirichlet 函数

$$x \longmapsto D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

由于 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} D(x)$ 不存在, 故 Dirichlet 函数定义域 $\mathbb{R}$ 的每一点都是它的第二类间断点.

下面我们来研究

3. 单调函数的间断点

定理 4.4

任一单调函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 的所有间断点 (若存在) 都是第一类的.

证明 设 $x_0 \in X$ 是 f 的任一间断点. 根据定理4.3知, 若 x_0 是 X 的右 (左) 侧或双侧聚点, 则 $f\left(x_0^+\right)\left(f\left(x_0^-\right)\right)$ 或 $f\left(x_0^+\right), f\left(x_0^-\right)$ 存在, 因此 x_0 是第一类的间断点.

定义 4.9

设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是任一单调函数, $x_0 \in X$ 是 f 的任一间断点.

1. 若 x_0 是 X 的右 (左) 侧间断点, 则我们称数
$$s\left(x_0^+\right)=\left|f\left(x_0^+\right)-f\left(x_0\right)\right|\left(s\left(x_0^-\right)=\left|f\left(x_0^-\right)-f\left(x_0\right)\right|\right)$$
为 f 在 x_0 处的右 (左) 侧跃度.
2. 若 x_0 是 X 的双侧间断点, 则我们称数
$$s\left(x_0\right)=\left|f\left(x_0^+\right)-f\left(x_0^-\right)\right|$$
为 f 在 x_0 处的跃度.

定理 4.5

设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是任一单调函数.

1. 令 $A=\inf X, B=\sup X$, 则 $\forall \lambda>0, \forall a, b \in \mathbb{R}$, 并且 $A<a<b<B$, f 在 $X \cap[a, b]$ 上最多只有有限个右 (左) 侧跃度大于 λ 的右 (左) 侧间断点.
2. f 在 X 上的间断点集是一可数集.

证明

1. 我们只需考虑 f 是单调上升及右侧间断点的情形.
首先由确界性质知, 存在 $\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in X$ 使得 $A<\bar{x}<a<b<\bar{\bar{x}}<B$. 现设 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是 f 在 $X \cap[a, b]$ 上的 k 个右侧间断点. 我们证明下述不等式成立:
$$\sum_{i=1}^k\left[f\left(x_i^+\right)-f\left(x_i\right)\right] \leqslant f(\bar{\bar{x}})-f(\bar{x})$$
事实上, 由 $\bar{x}<x_i<x_{i+1}<\bar{\bar{x}}(i=1,2, \cdots, k-1)$ 及 f 的单调上升性知, $f\left(x_1\right)-f(\bar{x}) \geqslant 0, f(\bar{\bar{x}})-f\left(x_k^+\right) \geqslant 0, f\left(x_{i+1}\right)-f\left(x_i^+\right) \geqslant 0(i=1,2, \cdots, k-1)$. 由此推得
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k\left[f\left(x_i^+\right)-f\left(x_i\right)\right]= & \sum_{i=1}^k\left[f\left(x_i^+\right)-f\left(x_i\right)\right]+f(\bar{x})-f(\bar{\bar{x}})+f(\bar{\bar{x}})-f(\bar{x}) \\
= & f(\bar{\bar{x}})-f(\bar{x})-\left[f\left(x_1\right)-f(\bar{x})\right]-\left[f(\bar{\bar{x}})-f\left(x_k^+\right)\right]-\sum_{i=1}^{k-1}\left[f\left(x_{i+1}\right)-f\left(x_i^+\right)\right] \\
\leqslant & f(\bar{\bar{x}})-f(\bar{x}).
\end{aligned}$$
如果在右侧间断点 $x_i(i=1,2, \cdots, k)$ 处的右侧跃度 $s\left(x_i^+\right)=f\left(x_i^+\right)-f\left(x_i\right)>\lambda$, 则由上述不

等式得到

$$k\lambda < f(\bar{\bar{x}}) - f(\bar{x}). \tag{4.2}$$

由于 $f(\bar{\bar{x}}) - f(\bar{x})$ 是与 k 无关的常数，故满足不等式(4.2)的 k 不能无限的大. 因此 f 在 $X \cap [a,b]$ 上最多只有有限个右侧跃度大于 λ 的有侧间断点.

对左侧间断点的情形可类似证明.

2. 我们用 E 表示 f 在 X 上的间断点集.

设 $A, B \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}$, 我们用 $E_n, E_n^{(+)}, E_n^{(-)}$ 分别表示 f 在 $X \cap \left[A + \frac{1}{n}, B - \frac{1}{n}\right]$ 上的间断点集, 右侧间断点, 左侧间断点集. 则

$$E_n = E_n^{(+)} \bigcup E_n^{(-)}, E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

若令

$$E_{nk}^{(+)} = \left\{ x \in E_n^{(+)} \middle| s\left(x^+\right) > \frac{1}{k} \right\}$$
$$E_{nk}^{(-)} = \left\{ x \in E_n^{(-)} \middle| s\left(x^-\right) > \frac{1}{k} \right\}$$

则我们有

$$E_n^{(+)} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_{nk}^{(+)}, E_n^{(-)} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_{nk}^{(-)}$$

因此

$$E = \bigcup_{n \in n} \bigcup_{k \in N} \left(E_{nk}^{(+)} \bigcup E_{nh_k^-}^{(-)} \right)$$

根据 1) 所证, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, E_{nk}^{(+)}$ 与 $E_{nk}^{(-)}$ 是有限集, 故 $\bigcup_{q \in N} \bigcup_{k \in N} \left(E_{nk}^{(+)} \bigcup E_{nk}^{(-)} \right)$ 是可数集, 从而 E 是可数集.

对 A, B 的其他情形, 只需将上述证明稍作修改, 即可类似证明.

例题 4.34 对于函数 $x \longmapsto [x], x \in \mathbb{R}$, 从 §4 例 4.30 的证明可知:

1. $\forall n \in \mathbb{Z}$, 此函数在 $(n, n+1)$ 上连续.
2. $\forall n \in \mathbb{Z}, n$ 是此函数的第一类间断点. 因此该函数的全部间断点的集合为 $\mathbb{Z}$, 它是一个可数无限集.

✍ 习 题 4.5

1. 确定下列各函数 $x \mapsto f(x)$, $x \in X$ 的间断点集及间断点的类型, 并画出函数的图形.

$$1)\, f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right),\ x \neq 0 \qquad 2)\, f(x) = \left[\frac{1}{x}\right],\ x \neq 0$$

$$3)\, f(x) = \begin{cases} x^3, & |x| \leqslant 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases} \qquad 4)\, f(x) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right), & |x| \leqslant 1 \\ |x-1|, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$5)\, f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x), & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad 6)\, f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$7)\, f(x) = \begin{cases} \cot^2(\pi x), & x \notin \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad 8)\, f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-|x|}, & |x| \neq 1 \\ 1, & |x| = 1 \end{cases}$$

2. 研究函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\tan x}, & x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}, \\ 1, & x = n\pi + \dfrac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

的间断点类型.

3. 证明：函数

$$f(x) = \begin{cases} x\left[\dfrac{1}{x}\right], & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处连续.

4. 证明：函数 $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上连续.

5. 证明：函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

只在 $x = 0$ 处连续.

6. 证明：函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1-x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

在 $x = \dfrac{1}{2}$ 处连续.

7. 设函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 满足条件：
   1) 对任意 $x, y \in X$ 且 $x + y \in X$, 有 $f(x) + f(y) = f(x+y)$;
   2) f 在 $x = 0$ 处连续.

   证明：对任意 $x_0 \in X$, f 在 x_0 处连续.

8. 设函数 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上有界. 定义函数 $i, s, \widetilde{i}, \widetilde{s}: [a,b] \to \mathbb{R}$ 如下：对 $\forall x \in [a,b]$,

$$i(x) = \inf_{a \leqslant t < x} f(t), \quad s(x) = \sup_{a \leqslant t < x} f(t),$$

$$\widetilde{i}(x) = \inf_{a \leqslant t < x} f(t), \quad \widetilde{s}(x) = \sup_{a \leqslant t < x} f(t).$$

证明：

1) 函数 i, s 在 $[a,b]$ 的每一点 x 处左连续.
2) 举例说明函数 $\widetilde{i}, \widetilde{s}$ 在 $[a,b]$ 上不一定右连续.
3) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则函数 $\widetilde{i}, \widetilde{s}$ 在 $[a,b]$ 上连续.
4) 若函数 f 在 $x_0 \in [a,b]$ 处连续, 并且 $f(x_0) < \widetilde{s(x_0)}$, 则存在 x_0 的一个邻域 (α,β), 使得 $\widetilde{s}$ 在 (α,β) 上取常值.

9. 设 $f:(0,1) \to \mathbb{R}$ 是任一连续函数, $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 是两个实数序列, 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. 假设对任意 $x \in (0,1)$, 存在 $N(x) \in \mathbb{N}$, 使得对任意 $n \geqslant N(x)$, 有 $f(x+a_n) = f(x+b_n)$.
   1) 证明：若 $0 < a_n = b_{n+1}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立, 则 f 是常值函数.
   2) 若 $0 < b_n < a_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立, 问：f 一定是常值函数吗?

10. 设 $A \subset \mathbb{R}$ 是任一非空集合. A 的直径 $D(A)$ 定义为:
$$D(A) = \sup_{x,y\in A} |x-y|.$$
设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是任一有界函数. 对任意 $x \in X$, 令
$$\omega(f,x) = \inf_{U \in \mathscr{N}(x)} D(f(U \cap X)).$$
   1) 证明：f 在 x 处连续当且仅当 $\omega(f,x) = 0$.
   2) 证明：对任意 $\varepsilon > 0$, 集合 $E = \{x \in X \mid \omega(f,x) \geqslant \varepsilon\}$ 是闭集.

11. 设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ 是任一函数, 使得对任意 $\varepsilon > 0$, 集合 $E_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant \varepsilon\}$ 是有限集.
   1) 证明：对任意区间 $[a,b] \subset \mathbb{R}$, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi) = 0$.
   2) 证明：若 $x_0 \in \mathbb{R}$ 且 $f(x_0) = 0$, 则 f 在 x_0 处连续.

12. 设 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ 是任一函数, 使得它的每一个间断点都是可去间断点.
   1) 证明：$\forall \varepsilon > 0$, $E_\varepsilon = \left\{ x \in [a,b] \mid \left| \lim\limits_{y\to x} f(y) - f(x) \right| > \varepsilon \right\}$ 是有限集.
   2) 证明：f 的间断点集是可数集. 由此推知, 不存在函数 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, 使得 $[a,b]$ 的每一点是 f 的可去间断点.

证明 (1) 对于每个 $x \in E_\varepsilon$，存在 $\delta_x > 0$ 使得对于所有 $y \in (x-\delta_x, x+\delta_x) \cap [a,b] \backslash \{x\}$，有 $|f(y) - g(x)| < \varepsilon/2$，其中 $g(x) = \lim\limits_{y\to x} f(y)$.

因为 $|g(x) - f(x)| > \varepsilon$，对于任何 $y \in (x-\delta_x, x+\delta_x) \cap [a,b] \backslash \{x\}$，有：
$$|f(y) - f(x)| \geq |g(x) - f(x)| - |f(y) - g(x)| > \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2$$
这意味着在 x 的邻域内，f 的值与 $f(x)$ 相差至少 $\varepsilon/2$. 如果 E_ε 是无限的，那么根据 Bolzano — Weierstrass 定理，E_ε 有一个极限点 $c \in [a,b]$. 但是，在 c 的任何邻域内都有 $x \in E_\varepsilon$，使得 f 在 x 附近的值与 $f(x)$ 相差至少 $\varepsilon/2$，这与 $\lim\limits_{y\to c} f(y)$ 的存在性矛盾（因为 f 在 c 点有极限，应该可以在足够小的邻域内控制 $f(y)$ 的波动）. 因此，E_ε 必须是有限的.

(2) f 的间断点集是：
$$D = \left\{ x \in [a,b] \mid f(x) \neq \lim_{y\to x} f(y) \right\}$$
对于每个 $x \in D$，存在 $\varepsilon_x > 0$ 使得 $\left| f(x) - \lim\limits_{y\to x} f(y) \right| > \varepsilon_x$. 我们可以将 D 表示为：
$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$$

因为对于任何 $x \in D$，存在 n 使得 $\left|f(x)-\lim\limits_{y \to x} f(y)\right|>1/n$，即 $x \in E_{1/n}$. 由 (1)，每个 $E_{1/n}$ 是有限的，因此 D 是可数多个有限集的并，是可数集.

如果 $[a,b]$ 的每一点都是 f 的可去间断点，那么 $D=[a,b]$，即 $[a,b]$ 是可数集. 但 $[a,b]$ 是不可数的，矛盾. 因此，不存在这样的函数.

4.6 连续函数性质

连续函数除了具有函数极限的一般性质外，还有它本身的许多特性.

1. 连续函数的一般性质

定理 4.6

设函数 $f,g: X \to \mathbb{R}$ 在 $x_0 \in X$ 处连续，则

1. $f \pm g, fg, \dfrac{f}{g}\left(g\left(x_0\right) \neq 0\right)$ 都在点 x_0 处连续.
2. f 在 x_0 处是局部有界的.
3. 若 $f\left(x_0\right)>r(<r)$, 则存在 $\delta>0$ 使得
$$\forall x \in X \cap B\left(x_0, \delta\right), f(x)>r(<r).$$
4. 若 $\exists \delta>0$, 使得 $\forall x \in X \cap B\left(x_0, \delta\right), f(x) \geqslant g(x)$, 则 $f\left(x_0\right) \geqslant g\left(x_0\right)$.
5. 若 $f\left(x_0\right)>g\left(x_0\right)$, 则存在 $\delta>0$ 使得
$$\forall x \in X \cap B\left(x_0, \delta\right), f(x)>g(x).$$

此定理可由函数极限的相应性质推出，证明从略.

定理 4.7

设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是任一函数，$x_0 \in X$, 则 f 在 x_0 处连续的充分必要条件是：
$$\forall x_n \in X(n \in \mathbb{N}),\text{ 且 } x_n \to x_0(n \to +\infty) \lim_{n \to +\infty} f\left(x_n\right)=f\left(x_0\right)$$

此定理可由函数极限的性质4.2(Heine 定理)，令 $A=f\left(x_0\right)$ 推出.

例题 4.35 $\forall n \in \mathbb{N}$, 任意一个实系数的 n 次多项式函数
$$x \mapsto P_n(x)=a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0, x \in \mathbb{R}$$
在 $\mathbb{R}$ 连续.

例题 4.36 $\forall n, m \in \mathbb{N}$. 任意一个实系数的有理分式函数
$$x \longmapsto \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0}{b_m x^m+b_{n-1} x^{m-1}+\cdots+b_1 x+b_0}$$
在其定义域 X 上连续.

例题 4.37 由于 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}, \cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$, 故正切函数 $x \longmapsto \tan x, x \in \mathbb{R}-\left\{k \pi+\dfrac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$, 余切函数 $x \longmapsto \cot x, x \in \mathbb{R}-\{k \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 在各自定义域上连续.

2. 连续函数的特性

定理 4.8 (复合函数的连续性)

设函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 与 $g: Y \to \mathbb{R}$ 满足下列条件:

1. f 在 X 上连续, g 在 Y 上连续;
2. $Z = \mathrm{Dom}(g \circ f) \neq \varnothing$.

则复合函数 $g \circ f: Z \to \mathbb{R}$ 在 Z 上连续.

证明 任取一点 $x_0 \in Z = \mathrm{Dom}(g \circ f)$. 由于 $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathrm{Dom}(f) \cap f^{-1}(\mathrm{Dom}(g))$, 故 $x_0 \in X, y_0 = f(x_0) \in Y$.

现在由 g 在 $y_0 = f(x_0)$ 处连续知

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0) \Longrightarrow g(Y \cap B(f(x_0), \eta)) \subset B(g(f(x_0)), \varepsilon).$$

另一方面, 由于 f 在 x_0 处连续, 故

$$(\text{对 } \eta > 0)(\exists \delta > 0) \Longrightarrow f(X \cap B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \eta).$$

于是

$$\begin{aligned}
g \circ f(Z \cap B(x_0, \delta)) &= g \circ f\left(X \cap f^{-1}(Y) \cap B(x_0, \delta)\right) \\
&= g\left(f\left(f^{-1}(Y \cap X \cap B(x_0, \delta))\right)\right) \\
&\subset g\left(f\left(f^{-1}(Y)\right) \cap f(X \cap B(x_0, \delta))\right) \\
&\subset g(Y \cap B(f(x_0), \eta)) \\
&\subset B(g(f(x_0)), \varepsilon) \\
&= B(g \circ f(x_0), \varepsilon).
\end{aligned}$$

因此 $g \circ f$ 在 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性知 $g \circ f$ 在 $\mathbb{Z}$ 上连续.

例题 4.38 考虑函数 $x \longmapsto \sqrt{|\cos x|}, x \in \mathbb{R}$.

此函数可以看作下述三个函数的复合:

$$x \stackrel{f}{\longmapsto} \cos x, x \in \mathbb{R}, y \stackrel{g}{\longmapsto} |y|, y \in \mathbb{R}, z \stackrel{h}{\longmapsto} \sqrt{z}, z \in \mathbb{R}^+.$$

即

$$\sqrt{|\cos x|} = h \circ g \circ f(x), x \in \mathbb{R}.$$

由于函数 f, g, h 在各自定义域上连续, 故由上述定理知 (两次应用定理4.8), 函数 $h \circ g \circ f$ 也明函数 $x \longmapsto \sqrt{|\cos x|}, x \in \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

定理 4.9 (Weierstrass 定理)

设 $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ 是任一连续函数, 则

1. f 在 $[a, b]$ 上有界.
2. f 达到它的上, 下确界, 即存在 $x', x'' \in [a, b]$ 使得
$$f(x') = \inf_{x \in [a,b]} f(x), f(x'') = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$
3. f 取介于 $f(x')$ 与 $f(x'')$ 之间的一切值, 即
$$f([a, b]) = [f(x'), f(x'')].$$

证明 1) 用反证法，假设 f 在 $[a,b]$ 上无界，则

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists x_n \in [a,b]) \Longrightarrow |f(x_n)| > n \tag{4.3}$$

由此得一实数序列 $\langle x_n \rangle$. 由 Bolzano-Weierstrass 定理不妨设序列 $\langle x_n \rangle$ 本身收敛. 令 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$, 则 $\bar{x} \in [a,b]$. 由 f 的连续性知，函数值序列 $\langle f(x_n) \rangle$ 收敛于 $f(\bar{x})$, 于是序列 $\langle f(x_n) \rangle$ 有界. 这显然与上述式(4.3)相矛盾. 因此 f 在 $[a,b]$ 上有界.

2) 令

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

则由 1) 知，$m, M \in \mathbb{R}$.

由上确界特性知，

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists x_n \in [a,b]) \Longrightarrow M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M. \tag{4.4}$$

由此得一实数序列 $\langle x_n \rangle$, 它是有界的，由 Bolzano-Weierstrass 定理，不失一般性，可以假设序列 $\langle x_n \rangle$ 本身收敛. 令 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x''$. 于是 $x'' \in [a,b]$. 由 f 的连续性得到

$$f(x'') = \lim_{n\to+\infty} f(x_n).$$

最后在不等式(4.4)中令 $n \to +\infty$ 取极限得到

$$f(x'') = M.$$

下确界的情形可类似证明.

3) 若 $x' = x''$, 则 $f(x') = f(x'')$. 于是 f 在 $[a,b]$ 上为常值函数，结论自然成立. 因此不妨设 $x' \neq x''$ 且 $x' < x''$. 令 $y_0 \in [f(x'), f(x'')]$. 考虑集合

$$G = \left\{ x \in [x', x''] \,\middle|\, f(x) \leqslant y_0 \right\}.$$

因为 $x' \in G$, 所以 $G \neq \varnothing$. G 是有界集. 于是 $c = \sup G$ 存在，并且 $x' \leqslant c \leqslant x''$. 我们证明 $f(c) = y_0$.

首先证明 $f(c) \leqslant y_0$, 事实上，由上确界的特性知，存在实数序列 $\langle x_n \rangle$ 使得 $x_n \in G (n \in \mathbb{N}), x_n \to c (n \to +\infty)$. 由于 $f(x_n) \leqslant y_0$, 故由 f 的连续性知，$f(c) \leqslant y_0$.

若 $f(c) < y_0$, 则 $c < x''$. 于是由 f 在 c 处的连续性，存在 $\delta > 0$ 使得

$$c < c + \delta < x'' \quad \text{并且} \quad f(c+\delta) < y_0$$

此即表明 $c + \delta \in G$, 这与 c 的定义相矛盾. 因此 $f(c) = y_0$.

推论 4.1

设 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ 是任一连续函数，则对任一介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的值 μ, 存在 $c \in [a,b]$ 使得

$$f(c) = \mu.$$

特别地，若 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则存在 $c \in (a,b)$ 使得

$$f(c) = 0.$$

从几何上来看，此推论表明，正 xOy 平面上平行于 x 轴的直线 $y = \mu$ 必与函数 f 的图形相交. 若 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则 f 的图形必穿过 x 轴.

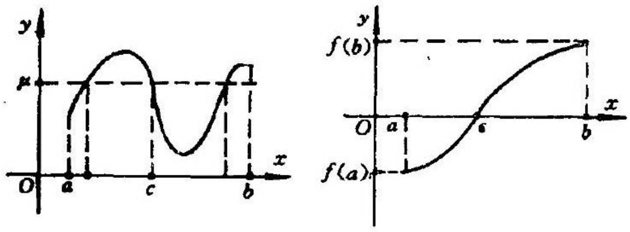

图 4.10

推论 4.2

设 $I\subset\mathbb{R}$ 是任一区间，$f: I\to\mathbb{R}$ 是任一连续函数，则 $f(I)$ 也是一个区间.

证明 根据第 3 章 §4 习题 10 的结论，我们只需证明：

$$\forall y_1,y_2\in f(I) \text{ 且 } y_1<y_2 \Longrightarrow [y_1,y_2]\subset f(I)$$

令 $x_1,x_2\in I$，使 $y_1=f(x_1), y_2=f(x_2)$. 不妨设 $x_1<x_2$. 于是由上述定理知，

$$[y_1,y_2]\subset\left[\inf_{x\in[x_1,x_2]}f(x),\ \sup_{x\in[x_1,x_2]}f(x)\right]=f([x_1,x_2])\subset f(I).$$

例题 4.39 任意一个实系数的奇次代数方程

$$a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+\cdots+a_1x+a_0=0\,(a_{2n+1}\neq 0)$$

至少有一个实根.

事实上，定义函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\begin{aligned}f(x)&=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+\cdots+a_1x+a_0x\in\mathbb{R}\\&=a_{2n+1}x^{2n+1}\left(1+\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}\cdot\frac{1}{x}+\cdots+\frac{a_1}{a_{2n+1}}\cdot\frac{1}{x^{2n}}+\frac{a_0}{x^{2n+1}}\right)\end{aligned}$$

右边括号内的表达式当 $|x|$ 充分大以后恒为正值，因此存在 $M>0$，使得 $f(M)$ 与 $a_{2n+1}M^{2n+1}$ 同号，$f(-M)$ 与 $-a_{2n+1}M^{2n+1}$ 同号，从而 $f(M)\cdot f(-M)<0$. 由于 f 在 $[-M,M]$ 上连续，故由上述推论 4.1 知，至少存在一点 $c\in(-M,M)$ 使得 $f(c)=0$.

3. 一致连续性

设 $X\subset\mathbb{R}$ 是任一非空集合，$f:X\to\mathbb{R}$ 在 X 上连续. 于是 $\forall x_0\in X$, 由连续性定义知

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta_{x_0}>0)\,(\forall x\in X,|x-x_0|<\delta_{x_0})\Longrightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

这里 δ_{x_0} 与 x_0 有关,

如果 $\delta=\inf\limits_{x_0\in X}\delta_{x_0}>0$, 则显然我们有：

$$\forall x,x'\in X,|x-x'|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

但一般说来，可能出现 $\inf\limits_{x_0\in X}\delta_{x_0}=0$ 的情形.

例如考虑函数 $f:(0,1]\to\mathbb{R}$：

$$\forall x\in(0,1], f(x)=\frac{1}{x}.$$

$\forall x_0\in(0,1],\forall x\in\left[\frac{x_0}{2},1\right]$, 我们有

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=\frac{|x-x_0|}{xx_0}<\frac{2|x-x_0|}{x_0^2}.$$

$\forall \varepsilon > 0$, 由 $\dfrac{2|x-x_0|}{x_0^2} < \varepsilon$ 得到 $|x-x_0| < \dfrac{\varepsilon x_0^2}{2}$. 若令 $\delta_{x_0} = \dfrac{x_0^2\varepsilon}{2}$, 则 $\delta_{x_0} > 0$, 于是对 $0 < \varepsilon < 1$, 我们有：

$$\forall x \in (0,1], |x-x_0| < \delta_{x_0} \Longrightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon.$$

很显然，这里 $\inf\limits_{x_0\in(0,1]} \delta_{x_0} = \inf\limits_{x_0\in(0,1]} \dfrac{x_0^2\varepsilon}{2} = 0$, 换句话说，不存在 $\delta > 0$ 使得

$$\forall x, x' \in (0,1],\ \left|x-x'\right| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}\right| < \varepsilon.$$

为了研究这种 "一致性"δ 的存在性，我们引进一致连续性的下述定义.

定义 4.10

设 $X \subset \mathbb{R}$ 是任一非空集合，$f : X \to \mathbb{R}$ 是任一函数，我们称 f 在 X 上是一致连续的，如果下述性质成立：

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(\forall x, x' \in X, \left|x-x'\right| < \delta\right) \Longrightarrow \left|f(x) - f\left(x'\right)\right| < \varepsilon.$$

♣

下面的定理指出了一个一致连续函数类.

定理 4.10

设 $X \subset \mathbb{R}$ 是有界闭集，若函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 连续，则 f 是一致连续的.

♡

证明 用反证法. 假设 f 在 X 上不一致连续. 则

$$(\exists \varepsilon_0 > 0)\,(\forall \delta > 0)\left(\exists x', x'' \in X, \left|x'-x''\right| < \delta\right) \Longrightarrow \left|f\left(x'\right) - f\left(x''\right)\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

取 $\delta = \dfrac{1}{n}(n \in \mathbb{N})$. 于是存在 $x_n', x_n'' \in X$ 使得

$$\left|x_n' - x_n''\right| < \frac{1}{n}, \left|f\left(x_n'\right) - f\left(x_n''\right)\right| \geqslant \varepsilon_0(\forall n \in \mathbb{N}).$$

由此得到两个实数序列 $\left\langle x_n'\right\rangle$ 与 $\left\langle x_n''\right\rangle$, 它们都是有界的. 由 Bolzano-Weierstrass 定理知，序列 $\left\langle x_n'\right\rangle$ 有收敛子序列，不妨设 $\left\langle x_n'\right\rangle$ 本身收敛. 令 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n' = \bar{x}$. 由于 X 是闭集，故 $\bar{x} \in X$.

另一方面，由

$$\left|x_n' - x_n''\right| < \frac{1}{n}, x_n'' = \left(x_n'' - x_n'\right) + x_n'(\forall n \in \mathbb{N})$$

知，$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_n' - x_n''\right) = 0$, 从而序列 $\left\langle x_n''\right\rangle$ 收敛，并且

$$\lim_{n\to+\infty} x_n'' = \lim_{n\to+\infty}\left(x_n'' - x_n'\right) + \lim_{n\to+\infty} x_n' = \bar{x}$$

现在对不等式 $\left|f\left(x_n'\right) - f\left(x_n''\right)\right| \geqslant \varepsilon_0(\forall n \in \mathbb{N})$ 令 $n \to +\infty$ 取极限，由 f 的连续性推知

$$\varepsilon_0 \leqslant \lim_{n\to\infty} f\left(x_n'\right) - \lim_{n\to+} f\left(x_n''\right)| = |f(\bar{x}) - f(\bar{x})| = 0.$$

这与 $\varepsilon_0 > 0$ 矛盾.

因此 f 在 X 上一致连续.

例题 4.40 正弦，余弦函数 $x \longmapsto \sin x, x \longmapsto \cos x, x \in \mathbb{R}$, 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

事实上，$\forall x, x' \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\left|\sin x - \sin x'\right| = 2\left|\sin\frac{x-x'}{2}\right|\left|\cos\frac{x+x'}{2}\right| \leqslant \left|x-x'\right|$$

于是

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta=\varepsilon)\left(\forall x,x'\in\mathbb{R},\left|x-x'\right|<\delta\right)\Rightarrow\left|\sin x-\sin x'\right|<\varepsilon.$$

因此正弦函数 $x\to\sin x,x\in\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

同理可证余弦函数 $x\longmapsto\cos x,x\in\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

例题 4.41 函数 $x\longmapsto\dfrac{1}{x},x\in(0,1]$, 在 $(0,1]$ 上不是一致连续的, 但 $\forall 0<a<1$, 此函数在 $[a,1]$ 上是一致连续的.

由于 $[a,1]$ 是有限闭区间, 收由上述定理知, 此函数在 $[a,1]$ 上一致连续. 为了证明它在 $(0,1]$ 上不一致连续. 令

$$x_n=\frac{1}{2n},x_n'=\frac{1}{n}(\forall n\in\mathbb{N}),$$

则 $\left|x_n-x_n'\right|=\dfrac{1}{2n}\to 0(n\to+\infty)$, 但 $\left|\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_n'}\right|=n>1$.

此即表明此函数在 $(0,1]$ 上不一致连续.

定理 4.11

设 $X\subset\mathbb{R}$ 是任一有界集, $f:X\to\mathbb{R}$ 在 X 上一致连续, 则 f 在 X 上连续, 有界.

证明 f 的连续性是显然的. 假设 f 在 X 上无界. 那么

$$(\forall n\in\mathbb{N})\left(\exists x_n\in X\right)\Longrightarrow\left|f\left(x_n\right)\right|>n.$$

由此得一实数序列 $\langle x_n\rangle$. 由 Bolzano-Weierstrass 定理知, 不妨设 $\langle x_n\rangle$ 本身收敛.

另一方面, 由于 f 在 X 上一致连续, 故由定义有:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left(\forall x,x'\in X,\left|x-x'\right|<\delta\right)\Longrightarrow\left|f(x)-f\left(x'\right)\right|<\varepsilon$$

又因为 $\langle x_n\rangle$ 收敛, 所以 $\langle x_n\rangle$ 是 Cauchy 序列, 从而对上述 $\delta>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得

$$\forall n,m\in\mathbb{N},n,m\geqslant N\Longrightarrow\left|x_n-x_m\right|<\delta.$$

由此得到

$$\forall n,m\in\mathbb{N},n,m\geqslant N\Longrightarrow\left|f\left(x_n\right)-f\left(x_m\right)\right|<\varepsilon.$$

此即表明 $\langle f\left(x_n\right)\rangle$ 是 Cauchy 实数序列. 从而序列 $\langle f\left(x_n\right)\rangle$ 有界, 这显然与前面的不等式 $\left|f\left(x_n\right)\right|>n(\forall x\in\mathbb{N})$ 相矛盾. 因此 f 在 X 上有界.

现在我们用此定理来重新证明例 4.41 的函数 $x\longmapsto\dfrac{1}{x},x\in\left(0,1\right]$, 在 $(0,1]$ 上不一致连续就十分简单, 因为此函数在 $(0,1]$ 上无界.

定理4.11的逆命题不成立.

例题 4.42 函数 $x\longrightarrow\sin\dfrac{1}{x},x\in\left(0,1\right]$, 在 $(0,1]$ 上有界, 并且连续, 但不一致连续.

事实上, 对 $\varepsilon_0=1$, 及 $\forall\delta>0,\exists n\in\mathbb{N}$ 使得

$$x'=\frac{1}{2n\pi},x''=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\in(0,1]\text{ 且 }\left|x'-x''\right|<\delta$$

但是

$$\left|\sin\frac{1}{x'}-\sin\frac{1}{x''}\right|=\left|\sin 2n\pi-\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|=1.$$

✍ 习题 4.6

1. 设 $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ 是任意两个连续函数.
   1) 证明：$E = \{x \in (a, b) \mid f(x) \neq 0\}$ 是开集.
   2) 证明：$F = \{x \in (a, b) \mid f(x) > g(x)\}$ 是开集.
   3) 证明：$G = \{x \in (a, b) \mid f(x) = g(x)\}$ 是闭集.
2. 设连续函数 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ 满足不等式
$$0 < g(x) < f(x), \forall x \in [a, b].$$
   证明：存在 $k > 1$ 使得 $kg(x) \leqslant f(x), \forall x \in [a, b]$.
3. 设连续函数 $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ 满足条件
$$f(0) = 0, f(1) = 1, g(0) = 1, g(1) = 0.$$
   证明：$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \exists x \in [0, 1]$ 使得 $f(x) = \lambda g(x)$.
4. 设 $f, g : [a, b] \to [a, b]$ 是任意两个连续函数.
   1) 证明：至少存在一个 $x_0 \in [a, b]$，使得 $f(x_0) = x_0$.
   2) 若 $f \circ g = g \circ f$，则至少存在一个 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $f(x_0) = g(x_0)$.
5. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是任一区间，$f : I \to \mathbb{R}$ 是任一函数.
   1) 证明：若 f 在 I 上连续，并且 $f(I) \subset \mathbb{Q}$，则 f 是常值函数.
   2) 证明：若 f 在 I 上连续，并且 $f(I) \subset \mathbb{Q}^c$，则 f 是常值函数.
   3) 证明：若 I 不为单元集，并且 $f(I \cap \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}^c, f(I \cap \mathbb{Q}^c) \subset \mathbb{Q}$，则 f 在 I 上不可能连续.
6. 设连续函数 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ 满足条件：
$$f(x) \neq 0, f^2(x) = g^2(x), \forall x \in [a, b].$$
   证明：下述两种情形中有且只有一种情形出现：
   1) $f(x) = g(x), \forall x \in [a, b]$.
   2) $f(x) = -g(x), \forall x \in [a, b]$.
7. 设 $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ 是任一连续函数，并且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$(有限或 $\pm\infty$).
   1) 证明：f 取介于 $f(a)$ 与 A 之间的一切值.
   2) 证明：若 $A = +\infty$，则 f 是下有界的，并且 f 达到它的下确界.
8. 设 $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. 证明：
   1) 若 $a_0 < 0$，则 $P_n(x) = 0$ 至少有一个正根.
   2) 若 $a_0 < 0$ 且 n 为偶数，则 $P_n(x) = 0$ 至少有一个负根.
   3) 若 n 为偶数，则存在 $\bar{x} \in \mathbb{R}$ 使得 $P_n(x) \geqslant P_n(\bar{x}), \forall x \in \mathbb{R}$. 由此推出：存在实数 m 使得 $\forall b \geqslant m$，方程 $P_n(x) = b$ 有实解存在，而 $\forall b < m$，方程 $P_n(x) = b$ 没有实解存在.
9. 设 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ 是任一有限闭区间，$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是任一连续函数.
   1) 令
$$\mathscr{A} = \{I \mid I \text{ 是 } [a, b] \text{ 的闭子区间使得 } f \text{ 在 } I \text{ 上有界}\}.$$
      证明：$\mathscr{A}$ 是 $[a, b]$ 的一个完全覆盖. 由此推出 f 在 $[a, b]$ 上有界.
   2) 设 $f \neq 0$ 在 $[a, b]$ 上. 令
$$\mathscr{B} = \{I \mid I \text{ 是 } [a, b] \text{ 的闭子区间且 } f \text{ 在 } I \text{ 上不变号}\}.$$

证明：$\mathscr{B}$ 是 $[a,b]$ 的一个完全覆盖. 由此推出：若 $f(a)f(b)<0$, 则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=0$.

3) $\forall\varepsilon>0$, 令

$$\mathscr{C}=\left\{I \mid I \text{ 是 } [a,b] \text{ 的闭子区间使得 } \forall x,y\in I,\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon/2\right\}.$$

证明：$\mathscr{C}$ 是 $[a,b]$ 的一个完全覆盖. 由此推出 f 在 $[a,b]$ 上一致连续.

10. 直接用定义证明：函数 $x\mapsto\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$, 在 $[0,1]$ 上一致连续.
11. 证明：函数 $x\mapsto x^2$ 在 $x\in[0,a]$ 上一致连续, 但在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续 (这里 $a>0$).
12. 证明：函数 $x\mapsto\sin x^2, x\in\mathbb{R}$, 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续.
13. 设函数 $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\in\mathbb{R}$. 证明：$f$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.
14. 设 $X\subset\mathbb{R}$ 是任一闭集, $f:X\to\mathbb{R}$ 是任一单调的有界连续函数. 证明：f 在 X 上一致连续.
15. 设 $X\subset\mathbb{R}$ 是任一非空集合, $f:X\to\mathbb{R}$ 是任一函数, $a\in X$ 是 X 的一个聚点. 我们说 f 在 a 处是上 (下) 半连续的, 如果下述性质成立：

$$\forall\lambda>f(a)\ (\lambda<f(a)),\ \exists\delta>0,\ \forall x\in X\cap B(a,\delta)\Rightarrow\lambda>f(x)\ (\lambda<f(x)).$$

1) 证明：f 在 a 处下半连续的充分必要条件是函数 $-f$ 在 a 处是上半连续的.

2) 证明：f 在 a 处连续当且仅当 f 在 a 处既上半连续, 又下半连续.

3) 证明：Dirichlet 函数

$$x\mapsto D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$$

在任一有理点 a 处是上半连续的, 而在任一无理点 a 处是下半连续的.

4) 考虑函数

$$x\mapsto f(x)=\begin{cases}0, & x=0;\\ \dfrac{1}{x^k}, & x\neq0,\end{cases}\quad(k\in\mathbb{N}).$$

证明：若 k 是偶数时, f 在 0 处是下半连续的；若 k 是奇数时, f 在 0 处既不是上半连续的, 也不是下半连续的.

5) 证明：f 在 a 处下半连续当且仅当 $f(a)=\varliminf\limits_{x\to a}f(x)$.

6) 设 $X\subset\mathbb{R}$ 是任一开区间, 则 f 在 X 上下半连续 (即 $\forall a\in X$, f 在 a 处下半连续) 当且仅当 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, 集合 $\{x\in X \mid f(x)>\lambda\}$ 是开集.

7) 设 $A\subset\mathbb{R}$ 是任一集合, 证明 A 是开集当且仅当 A 的特征函数 χ_A 在 $\mathbb{R}$ 上是下半连续的, 而 A 是闭集当且仅当 χ_A 在 $\mathbb{R}$ 上是上半连续的.

4.7 单调连续函数的反函数

1. 反函数存在性

定理 4.12

设 $I\subset\mathbb{R}$ 是任一非空区间，$f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ 是任一严格单调上升 (下降) 的连续函数. 则

1. $f:I\longrightarrow f(I)$ 是一一映射.
2. f 的逆映射 $f^{-1}:f(I)\longrightarrow I$ 也是严格单调上升 (下降) 的连续函数 (f^{-1} 通常称为 f 的反函数).

证明 我们假设 f 是严格单调上升的. 对严格单调下降的情形可类似证明.

1. 因为 f 是严格单调上片的，所以 f 是单射，从而 $f:I\longrightarrow(I)$ 是一一映射. 因此 f 的逆映射 $f^{-1}:f(I)\longrightarrow I$ 存在.
2. 设 $y_1,y_2\in f(I)$ 且 $y_1<y_2$. 若 $f^{-1}(y_1)\geqslant f^{-1}(y_2)$, 则由 f 的严格单调上升性及 $f\circ f^{-1}=\mathrm{id}_{f(I)}$ 知
$$y_1=f\circ f^{-1}(y_1)\geqslant f\circ f^{-1}(y_2)=y_2,$$
这与假设相矛有. 因此 $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$, 即 f^{-1} 是严格单调上升函数.

下面证明 f^{-1} 在 $f(I)$ 上连续. 任取 $y_0\in f(I)$.

由于 I 是区间，故 $f(I)$ 也是一个区间.

1. $y_0\in f(\mathring{I})$：于是 $f^{-1}\left(y_0^-\right),f^{-1}\left(y_0^+\right)$ 存在. 为了证明 f^{-1} 在 y_0 处连续，我们只需证明 $f^{-1}\left(y_0^{-1}\right)=f^{-1}\left(y_0^+\right)=f\left(y_0\right)$.
首先由 f^{-1} 的单调上升性，找们有：
$$\forall y\in f(I)\ \text{且}\ y<y_0,f^{-1}(y)<f^{-1}\left(y_0^-\right),$$
$$\forall y\in f(I)\ \text{且}\ y_0<y,f^{-1}\left(y_0\right)<f(y).$$
因此
$$f^{-1}((-\infty,y_0)\bigcap f(I))\subset(-\infty,f^{-1}(y_0^-)],$$
$$f^{-1}((y_0,+\infty)\bigcap f(I))\subset[f^{-1}(y_0^+),+\infty).$$
从而
$$\begin{aligned}I&=f^{-1}(f(I))\\&=f^{-1}(((-\infty,y_0)\cap f(I))\cup\{y_0\}\cup((y_0,+\infty)\cap f(I)))\\&=f^{-1}((-\infty,y_0)\cap f(I))\cup f^{-1}(y_0)\cup f^{-1}((y_0,+\infty)\cap f(I))\\&\subset(-\infty,f^{-1}(y_0^+)]\cup f^{-1}(y_0)\cup[f^{-1}(y_0^+),+\infty).\end{aligned}$$
因为 I 是一个区间，并且 $f^{-1}\left(y_0^-\right)\leqslant f^{-1}\left(y_0\right)\leqslant f^{-1}\left(y_0^+\right)$, 所以必然有 $f^{-1}\left(y_0^-\right)=f^{-1}\left(y_0\right)=f^{-1}\left(y_0^+\right)$.
2. $y_0=\inf f(I)$： 则 $f^{-1}\left(y_0\right)\leqslant f^{-1}\left(y_0^+\right)$. 由于
$$\begin{aligned}I&=f^{-1}(f(I))\\&=f^{-1}\left(\{y_0\}\cup((y_0,+\infty)\cap f(I))\right)\\&\subset f^{-1}\left(y_0\right)\cup\left[f^{-1}\left(y_0^+\right),+\infty\right).\end{aligned}$$
故 $f^{-1}\left(y_0\right)=f^{-1}\left(y_0\right)$. 两此 f^{-1} 在 y_0 处右连续.

3. $y_0 = \sup f(I)$：则 $f^{-1}\left(y_0^-\right) \leqslant f^{-1}(y_0)$. 由于

$$\begin{aligned} I &= f^{-1}(f(I)) \\ &= f^{-1}\left(((-\infty, y_0) \cap f(I)) \cup \{y_0\}\right) \\ &\subset \left(-\infty, f^{-1}(y_0)\right] \cup f^{-1}(y_0), \end{aligned}$$

因此 $f^{-1}\left(y_0^-\right) = f^{-1}(y_0)$. 即 f 在 y_0 处左连续.

2. 函数 f 的图形与反函数 f^{-1} 的图形

根据函数图形的定义我们有

$$\operatorname{Gr}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in I\},$$

$$\operatorname{Gr}\left(f^{-1}\right) = \left\{\left(y, f^{-1}(y)\right) \mid y \in f(I)\right\}.$$

$\forall y \in f(I)$, 令 $x \in I$ 使得 $y = f(x)$, 则 $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$, 因此

$$\operatorname{Gr}\left(f^{-1}\right) = \{(f(x), x) \mid x \in I\}.$$

由于在平面直角坐标系 $\{0, x, y\}$ 中点 $(x, f(x))$ 与点 $(f(x), x)$ 关于直线 $y = x$ 对称，故在同一直角坐标系 $\{0;\ x, y\}$ 下，$\operatorname{Cr}(f)$ 与 $\operatorname{Gr}\left(f^{-1}\right)$ 关于直线 $y = x$ 对称 (图4.11).

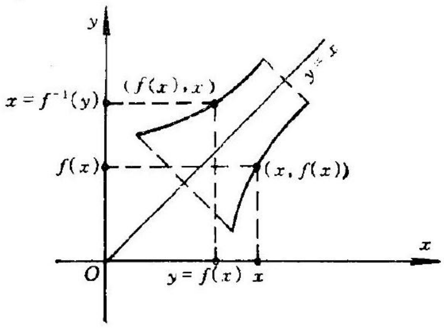

图 4.11

3. 三角函数的反函数

1. 由于正弦函数 sin 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的限制 $x \longmapsto \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 是严格单调上升的连续函数，并且

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \sin x = -1, \ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$$

故它有从 $[-1, 1]$ 到 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的严格上升的连续反函数. 我们记这个反函数为

$$x \longmapsto \arcsin x, x \in [-1, 1].$$

2. 由于余弦函数 cos 在 $[0, \pi]$ 上的限制 $x \longmapsto \cos x, x \in [0, \pi]$ 是严格单调下降的连续函数，并且

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1, \ \lim_{x \to \pi} \cos x = -1,$$

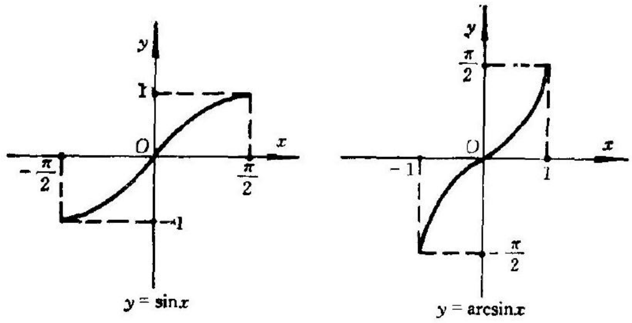

图 4.12

故它有从 $[-1,1]$ 到 $[0,\pi]$ 上的严格单调下降的连续反函数. 我们记这个反函数为

$$x \longmapsto \arccos x, x \in [-1,1].$$

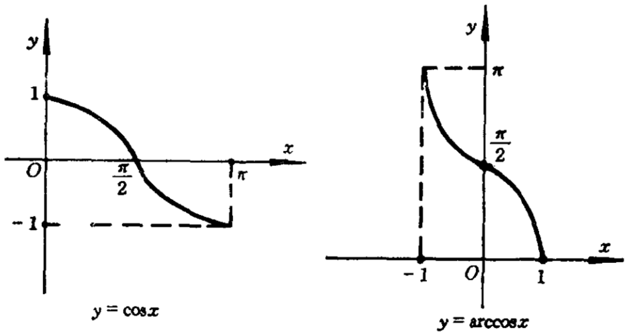

图 4.13

3. 由于正切函数 tan 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的限制 $x \longmapsto \tan x, x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 是严格单调上升的连续函数, 并且

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty. \ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty.$$

故它有从 $(-\infty,+\infty)$ 到 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的严格单调上升的连续反函数. 我们记这个反函数为

$$x \longmapsto \arctan x, x \in (-\infty,+\infty).$$

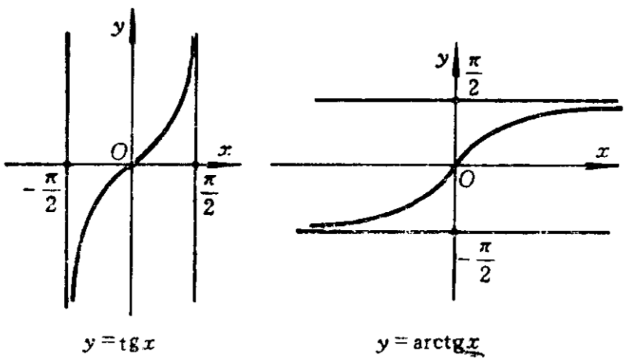

图 4.14

4. 由于余切函数 cot 在 $(0,\pi)$ 上的限制 $x \longmapsto \cot x, x \in (0,\ \pi)$，是严格单调下降的连续函数，并且

$$\lim_{x\to 0^+} \cot x = +\infty,\ \lim_{x\to \pi^-} \cot x = -\infty$$

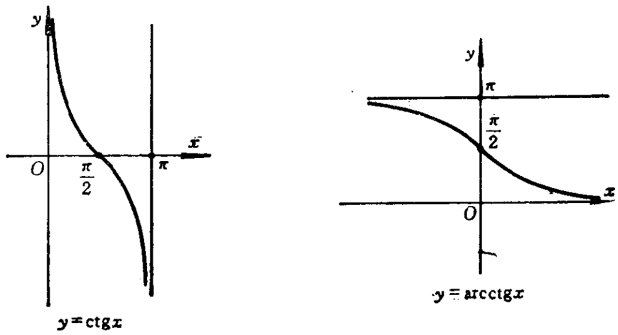

图 4.15

故它有从 $(-\infty,+\infty)$ 到 $(0,\pi)$ 上的严格单调下降的连续反函数. 我们记这个反函数为

$$x \longmapsto \operatorname{arccot} x, x \in (-\infty,+\infty).$$

✍ 习 题 4.7

1. 直接用 ε-δ 语言证明定理 4.12中的反函数 $f^{-1}: f(I) \longrightarrow I$ 的连续性.
2. 证明下列各等式：

$$\begin{aligned}
&1)\quad \arcsin(-x) = -\arcsin x &&2)\quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x\\
&3)\quad \arctan(-x) = -\arctan x &&4)\quad \operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x\\
&5)\quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} &&6)\quad \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

3. 考虑函数 $f(y) = y - \lambda \sin y,\ y \in \mathbb{R}(0 \leqslant \lambda < 1)$.
   1) 证明：f 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 上的严格单调上升的连续函数.
   2) 证明：存在唯一的连续反函数 $x \longmapsto y(x), x \in \mathbb{R}$，满足方程
   $$y - \lambda \sin y = x(\forall x \in \mathbb{R}).$$
4. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是任一非空区间，$f: I \to \mathbb{R}$ 是任一单调函数. 证明下列结论等价：
   1) f 在 I 上连续；
   2) $f(I)$ 是一个区间.
5. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是任一非空区间，$f: I \to \mathbb{R}$ 是任一连续单射.
   1) 证明：$\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2,\ f$ 在 $[x_1, x_2]$ 上是单调的.
   2) 由此推出 f 在 I 上是严格单调的.

第五章 一元实值函数的积分

这一章我们介绍一元实值函数的 Riemann 积分理论. 利用积分函数我们严格定义了对数函数、指数函数及幂函数等基本初等函数.

5.1 阶梯函数的积分

1. 区间的分割

定义 5.1

设 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 是任一有限闭区间, $[a,b]$ 的一个分割就是一组实数 $\sigma=(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 使得

$$a=a_0<a_1<\cdots<a_{n-1}<a_n=b,$$

$a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 称为 σ 的分点. $\delta(\sigma)=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}(a_{i+1}-a_i)$ 称为分割 σ 的步长. ♣

例题 5.1 $\forall n\in\mathbb{N},\sigma_n=\left(a,a+\dfrac{b-a}{n},a+2\cdot\dfrac{b-a}{n},\cdots,a\ +(n-1)\dfrac{b-a}{n},b\right)$ 是 $[a,b]$ 的一个等步长为 $\delta\left(\sigma_n\right)=\dfrac{b-a}{n}$ 的分割.

例题 5.2 设 σ 与 σ' 是 $[a,b]$ 的任意两个分割. 合并 σ 与 σ' 的分点后所得到的 $[a,b]$ 的一个分割记为 $\sigma\vee\sigma'$.

显然 $\sigma\vee\sigma'$ 可以通过在 $\sigma\left(\sigma'\right)$ 上逐步添加 $\sigma'(\sigma)$ 的一个分点的方法来得到.

设 $\sigma=(a_0,a_1,\cdots,a_n),\sigma'=\left(a_0',a_1',\cdots,a_m'\right),\sigma\vee\sigma'=(b_0,b_1,\cdots,b_k)$, 则 $\forall i=0,1,\cdots,k-1,\exists j\in\{0,1,\cdots,n-1\},s\in\{0,1,\cdots,m-1\}$ 使得

$$[b_i,b_{i+1}]\subset\left[a_j,a_{j+1}\right],[b_i,b_{i+1}]\subset\left[a_s',a_{s+1}'\right].$$

2. 阶梯函数的积分

定义 5.2

设 $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 是一函数. 如果存在 $[a,b]$ 的一个分割 $\sigma=(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 及一个向量 $\xi=[c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}]\in\mathbb{R}^n$ 使得

$$f(x)=c_i,\forall x\in(a_i,a_{i+1})(i=0,1,\cdots,n-1),$$

则我们称 f 是阶梯函数. $[\sigma,\xi]\triangleq[a_0,a_1,\cdots,a_n;\ \ c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}]$ 称为适合于 f 的二元组. ♣

例题 5.3 $\forall a,b,c\in\mathbb{R},0<a<b$, 常值函数 $x\longmapsto c,x\in[a,b]$ 是阶梯函数; 符号函数 $x\longmapsto\operatorname{sgn}(x),x\in[-a,b]$ 是阶梯函数; 函数 $x\longmapsto[x],x\in[1,3.5]$ 也是阶梯函数.

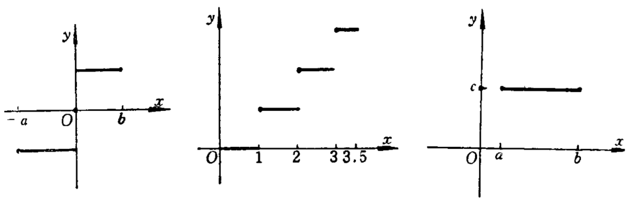

图 5.1

注 适合于阶梯函数 f 的二元组 $[\sigma,\xi]$ 不是唯一的. 例如若 $[\sigma,\xi]=[a_0,a_1,\cdots,a_n;\ c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}]$ 适合于阶梯函数 f，则在 (a_1,a_{i+1}) 上任意加入一个分点 $\bar{x}$ 后，我们得到 $[a,b]$ 的另一个分割 $\sigma'=(a_0,a_1,\cdots,a_i,\bar{x},a_{i+1},\cdots,a_n)$ 及另一个向量 $\xi'=[c_0,c_1,\cdots c_i,c_i,c_{i+1},\cdots,c_{n-1}]$ 满足

$$f(x)=c_k,\quad \forall x\in(a_k,a_{k+1}),k=0,1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n-1,$$

$$f(x)=c_i,\quad \forall x\in(a_i,\bar{x})\bigcup(\bar{x},a_{i+1}).$$

因此 $[\sigma',\xi']$ 也适合于 f.

另一方面. 如果分割 $\sigma=(a_0,a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$ 的分点 a_i 满是 $c_{i-1}=c_i=f(a_i)$，则删去 σ 的分点 a_i 后得到 $[a,b]$ 的另一分割 $\sigma''=(a_0,a_1,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_n)$ 及另一向量 $\xi''=[c_0,c_1,\cdots,c_{i-1},c_{i+1},\cdots,c_{n-1}]$ 满足

$$f(x)=c_k,\forall x\in(a_k,a_{k+1}),k=0,1,\cdots,i-2,i+1,\cdots,n-1,$$

$$f(x)=c_i,\forall x\in(a_{i-1},a_{i+1}).$$

因此 $[\sigma'',\xi'']$ 也适合于 f.

引理 5.1

设 $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 是任一阶梯函数，$[\sigma,\xi]$ 适合于 f，σ' 是 $[a,b]$ 的任一分割，则存在向量 η 使得 $[\sigma\vee\sigma',\eta]$ 适合于 f.

证明 设 $[\sigma,\xi]=[a_0,a_1,\cdots,a_n;\ c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}]$. 由于 $\sigma\vee\sigma'$ 也是 $[a,b]$ 的一个分割，故若令

$$\sigma\vee\sigma'=(b_0,b_1,\cdots,b_m),$$

则 $\forall i=0,1,\cdots,m-1$，存在 $j(i)\in\{0,1,\cdots,n-1\}$ 使得 $(b_i,b_{i+1})\subset(a_{j(i)},a_{j(i)+1})$，于是

$$f(x)=c_{j(i)},\forall x\in(b_i,b_{i+1}),\forall i=0,1,\cdots,m-1.$$

令 $d_i=c_{j(i)}(i=0,1,\cdots,m-1)$ 及 $\eta=[d_0,d_1,\cdots,d_{m-1}]$，则 $[\sigma\vee\sigma',\eta]$ 适合于 f.

命题 5.1

设 $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 是任一阶梯函数，$[\sigma,\xi]=[a_0,a_1,\cdots,a_n;\ c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}]$ 与 $[\sigma',\xi']=[a'_0,a'_1,\cdots,a'_m;\ c'_0,c'_1,\cdots,c'_{m-1}]$ 都适合于 f，则

$$\sum_{i=0}^{n-1}c_i\left(a_{i+1}-a_i\right)=\sum_{j=0}^{m-1}c'_j\left(a'_{j+1}-a'_j\right).$$

证明 我们记

$$I[\sigma,\xi]=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\left(a_{i+1}-a_i\right)$$

$$I[\sigma',\xi']=\sum_{j=0}^{m-1}c'_j\left(a'_{j+1}-a'_j\right)$$

根据引理，存在一个向量 η 使得 $[\sigma\vee\sigma',\eta]$ 适合于 f. 只需要证明

$$I[\sigma,\xi]=I[\sigma\vee\sigma',\eta]=I[\sigma',\xi'].$$

我们首先假设 $\sigma \vee \sigma'$ 比 σ 多一个分点 $\bar{x}$. 令 $\bar{x} \in (a_i, a_{i+1})$. 那么

$$\sigma \vee \sigma' = (a_0, a_1, \cdots, a_i, \bar{x}, a_{i+1}, \cdots, a_n),$$

$$\eta = [c_0, c_1, \cdots, c_i, c_i, c_{i+1}, \cdots, c_{n-1}],$$

于是

$$\begin{aligned} I\left[\sigma \vee \sigma', \eta\right] =& c_0\left(a_1 - a_0\right) + c_1\left(a_2 - a_1\right) + \cdots + c_i\left(\bar{x} - a_i\right) \\ & + c_i\left(a_{i+1} - \bar{x}\right) + \cdots + c_{n-1}\left(a_n - a_{n-1}\right) \\ =& c_0\left(a_1 - a_0\right) + c_1\left(a_2 - a_1\right) + \cdots + c_i\left(a_{i+1} - a_i\right) + \cdots + c_{n-1}\left(a_n - a_{n-1}\right) \\ =& I[\sigma, \xi]. \end{aligned}$$

对一般的 σ 与 σ', 由于 $\sigma \vee \sigma'$ 可以通过在 σ 逐步添加 σ' 的分点的方法来得到, 故由归纳法我们有 $I\left[\sigma \vee \sigma', \eta\right] = I[\sigma, \xi]$.

同理, 存在向量 η' 使得 $\left[\sigma' \vee \sigma, \eta'\right]$ 也适合于 f, 并且 $I\left[\sigma' \vee \sigma, \eta'\right] = I\left[\sigma', \xi'\right]$.

由于 $\sigma \vee \sigma' = \sigma' \vee \sigma$, 故 $\eta = \eta'$. 因此 $I\left[\sigma \vee \sigma', \eta\right] = I\left[\sigma' \vee \sigma, \eta'\right]$, 从而 $I[\sigma, \eta] = I\left[\sigma \vee \sigma', \eta_1\right] = I\left[\sigma', \xi'\right]$.

上述命题表明, $I[\sigma, \xi]$ 是一个只与 f 有关而与适合于 f 的二元组 $[\sigma, \xi]$ 的选择无关的定数. 因此我们可以引入下述定义.

定义 5.3

设 $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 是任一阶梯函数, $[\sigma, \xi] = [a_0, a_1, \cdots, a_n;\ c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}]$ 适合于 f . 则实数

$$I(f) = c_0\left(a_1 - a_0\right) + c_1\left(a_2 - a_1\right) + \cdots + c_{n-1}\left(a_n - a_{n-1}\right)$$

称为 f 在 $[a, b]$ 上的积分, 记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 于是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\left(a_{i+1} - a_i\right)$$

♣

例题 5.4 $\forall c \in \mathbb{R}$, 常值函数 $x \longmapsto c, x \in [a, b](a < b)$ 的积分

$$\int_a^b c\mathrm{d}x = c(b - a)$$

例题 5.5 符号函数 $x \longmapsto \operatorname{sgn}(x), x \in [a, b](a < b)$ 的积分

$$\int_a^b \operatorname{sgn}(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} b - a, & \text{若 } 0 \leqslant a < b, \\ a + b, & \text{若 } a < 0 < b, \\ a - b, & \text{若 } a < b \leqslant 0. \end{cases}$$

从阶梯函数积分的定义可知, 积分值 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 f 在分点 a_i 的值 $f\left(a_i\right)(i = 0, 1, \cdots, n)$ 无关. 因此改变阶梯函数 f 在分点 a_i 的值所得新的阶梯函数 g 与 f 在 $[a, b]$ 上有相同的积分值.

从几何上看, 阶梯函数 f 的积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示在平面直角坐标系 $\{O, x, y\}$ 的 x 轴上以 $[a_i, a_{i+1}]$ 为底边, 以 c_i 为“高”的长方形“面积”的代数和.

3. 阶梯函数积分的性质

我们用 $\mathscr{E}[a, b]$ 表示所有定义在 $[a, b]$ 上的阶梯函数的集合.

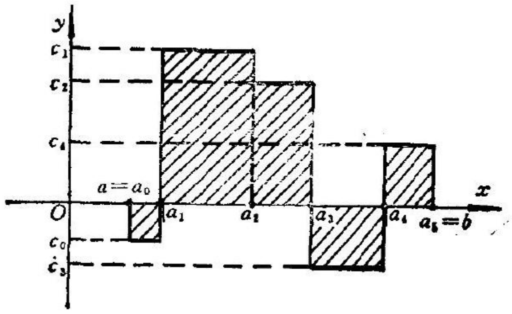

图 5.2

定理 5.1

设 $f,g\in\mathscr{E}[a,b],\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，则

1. $\alpha f+\beta g\in\mathscr{E}[a,b]$，并且
$$\int_a^b[\alpha f+\beta g](x)\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$
2. 若 $f\geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.
3. 若 $f\geqslant g$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
4. $|f|\in\mathscr{E}[a,b]$，并且 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$.

证明

1. 设 $[\sigma,\xi]$ 与 $[\sigma',\xi']$ 分别适合于 f 与 g . 令 $\sigma\vee\sigma'=(a_0,a_1,\cdots,a_n)$. 由引理知存在两个向量
$$\eta=[c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}],\zeta=[d_0,d_1,\cdots,d_{n-1}],$$
使得 $[\sigma\vee\sigma',\eta]$ 与 $[\sigma\vee\sigma',\zeta]$ 分别适合于 f 与 g. 若令
$$a\eta+\beta\zeta=[\alpha c_0+\beta d_0,ac_1+\beta d_1,\cdots,ac_{n-1}+\beta d_{n-1}],$$
则 $[\sigma\vee\sigma',\alpha\eta+\beta\zeta]$ 适合于 $\alpha f+\beta g$，因此 $\alpha f+\beta g\in\mathscr{E}[a,b]$. 由阶梯函数积分定义，我们有
$$\begin{aligned}\int_a^b[\alpha f+\beta g](x)\mathrm{d}x&=\sum_{i=0}^{n-1}(\alpha c_i+\beta d_i)(a_{i+1}-a_i)\\&=\alpha\sum_{i=0}^{n-1}c_i(a_{i+1}-a_i)+\beta\sum_{i=0}^{n-1}d_i(a_{i+1}-a_i)\\&=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$
2. 若 $f\geqslant 0$，则 $c_i\geqslant 0(i=0,1,\cdots,n-1)$，因此
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}c_i(a_{i+1}-a_i)\geqslant 0$$
3. 若 $f\geqslant g$，则 $c_i\geqslant d_i(i=0,1,2,\cdots,n-1)$ 因此
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}c_i(a_{i+1}-a_i)\geqslant\sum_{i=0}^{n-1}d_i(a_{i+1}-a_i)=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

4. 令

$$|\eta| = [|c_0|, |c_1|, \cdots, |c_{n-1}|],$$

则 $[\sigma \vee \sigma', |\eta|]$ 适合于 $|f|$，因此 $|f| \in \mathscr{E}[a,b]$，并且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} c_i\,(a_{i+1}-a_i)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |c_i|\,(a_{i+1}-a_i) = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

现在设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是任一阶梯函数. 我们作下述约定:

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0, \int_b^b f(x)\mathrm{d}x = 0$$

定理 5.2

设 $f \in \mathscr{E}[a,b]$，则 $\forall c \in [a,b]$，$f|_{[a,\ c]} \in \mathscr{E}[a,c], f|_{[c,b]} \in \mathscr{E}[c,b]$ 并且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f|_{[a,c]}(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f|_{[c,b]}(x)\mathrm{d}x.$$

证明 设 $[\sigma,\xi] = [a_0, a_1, \cdots, a_n, c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}]$ 适合于 f. 令 $c \in [a_{i_0}, a_{i_0+1}]$, 不妨设 $c \in (a,b)$，因为若 $c=a$ 或 $c=b$，则根据上述约定，定理显然成立.

1. 若 $c = a_{i_0}$，则存在 $[a,c]$ 的一个分割 $\sigma_1 = (a_0, a_1, \cdots, a_{i_0})$ 及相应向量 $\xi_1 = [c_0, c_1, \cdots, c_{i_0-1}]$，$[c,b]$ 的一个分割 $\sigma_2 = [a_{i_0},\ \ a_{i0+1}, \cdots, a_n)$ 及相应向量 $\xi_2 = [c_{i_0}, c_{i_0+1}, \cdots, c_{n-1}]$ 使得

$$f|_{[a,c]}(x) = c_i, \forall x \in (a_i, a_{i+1}), i = 0, 1, \cdots, i_0-1,$$

$$f|_{[c,b]}(x) = c_i, \forall x \in (a_i, a_{i+1}), i = i_0, i_0+1, \cdots, n-1.$$

因此 $[\sigma_1,\xi_1]$ 适合于 $f|_{[a,c]}$, $[\sigma_2,\xi_2]$ 适合于 $f|_{[c,b]}(x)$. 从而 $f|_{[a,c]} \in \mathscr{E}[a,c], f|_{[c,b]} \in \mathscr{E}[c,b]$，并且由积分定义有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i\,(a_{i+1}-a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{i_0-1} c_i\,(a_{i+1}-a_i) + \sum_{i=i_0}^{n-1} c_i\,(a_{i+1}-a_i) \\ &= \int_a^c f|_{[a,c]}(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f|_{[c,b]}(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

2. 若 $c \in (a_i, a_i+1)$，则存在 $[a,c]$ 的一个分割 $\sigma_1 = (a_0\ ,\ \ a_1, \cdots, a_{i_0}, c)$ 及相应向量 $\xi_1 = [c_0, c_1, \cdots, c_{i_0}]$,
$[c,b]$ 的一个分割 $\sigma_2 = (c, a_{i_0+1}, \cdots, a_n)$ 及相应向量 $\xi_2 = [c_{i_0}, c_{i_0+1}, \cdots, c_{n-1}]$ 使得

$$f|_{[a,c]}(x) = c_i, \forall x \in (a_i, a_{i+1}), i = 0, 1, \cdots, i_0-1,$$

$$f|_{\{a,c\}}(x) = c_{i_0}, \forall x \in (a_{i_0}, c),$$

$$f|_{[c,b]}(x) = c_i, \forall x \in (a_i, a_{i+1}), i = i_0+1, i_0+2, \cdots, n-1,$$

$$f|_{[c,b]}(x) = c_{i_0}, \forall x \in (c, a_{i_0+1}).$$

因此 $[\sigma_1,\xi_1]$ 适合于 $f\big|_{[a,c]}$, $[\sigma_2,\xi_2]$ 适合于 $f\big|_{[c,b]}$，从而 $f\big|_{[a,c]}\in\mathscr{E}[a,c]$, $f\big|_{[c,b]}\in\mathscr{E}[c,b]$，并且

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i\left(a_{i+1}-a_i\right)\\ &= \sum_{i=0}^{i_0-1} c_i\left(a_{i+1}-a_i\right)+c_{i_0}\left(a_{i_0+1}-a_{i_0}\right)+\sum_{i=i_0+1}^{n-1} c_i\left(a_{i+1}-a_i\right)\\ &= \sum_{i=0}^{i_0-1} c_i\left(a_{i_{+1}}-a_i\right)+c_{i_0}\left(c-a_{i_0}\right)+c_{i_0}\left(a_{i_0+1}-c\right)+\sum_{i=i_0+1}^{n-1} c_i\left(a_{i+1}-a_i\right)\\ &= \int_a^c f\big|_{[a;\ \ c]}(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f\big|_{[c,b]}(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

为简单起见，今后一律用 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 表示 $\int_a^c f\big|_{[a,c]}(x)\mathrm{d}x$，用 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示 $\int_c^b f\big|_{[c,b]}(x)\mathrm{d}x$.

✍ 习 题 5.1

1. 考虑如下定义的函数 $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$：

$$f(x)=\frac{1}{n},\forall x\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right],\forall n\in\mathbb{N}.$$

   f 是 $[0,1]$ 上的阶梯函数吗？

2. 只取有限个值的函数 $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 一定是阶梯函数吗？考虑定义在 $[a,b]$ 上的 Dirichlet 函数：

$$x\longmapsto D(x)=\begin{cases}1, & x\in[a,b]\cap\mathbb{Q},\\ 0, & x\in[a,b]\cap\mathbb{Q}^c.\end{cases}$$

3. 设 $f,g\in\mathscr{E}[a,b]$. 证明：$fg\in\mathscr{E}[a,b]$；若 $g\neq0$，则 $\dfrac{f}{g}\in\mathscr{E}[a,b]$.

4. 设 $f\in\mathscr{E}[a,b]$，$g:[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$ 是任一函数，且 $f([a,b])\subset[c,d]$. 证明：复合函数 $g\circ f\in\mathscr{E}[a,b]$.

5. 设 $f\in\mathscr{E}[a,b]$，$\forall M\in\mathbb{R}$，我们定义 $f^*:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 如下：

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x), & \text{若 } f(x)\leqslant M,\\ M, & \text{若 } f(x)>M,\end{cases}\quad\forall x\in[a,b].$$

   证明：$f^*\in\mathscr{E}[a,b]$；并且 $f^*\leqslant f$.

6. 设 $f,g\in\mathscr{E}[a,b]$，定义函数 $m,M:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 如下：

$$m(x)=\min(f(x),g(x)),M(x)=\max(f(x),g(x)),\forall x\in[a,b].$$

   证明：$m,M\in\mathscr{E}[a,b]$；特别地若令 $f^+,f^-:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 为

$$f^+(x)=\max(f(x),0),\ f^-(x)=\max(-f(x),0),\forall x\in[a,b],$$

   则 $f^+,f^-\in\mathscr{E}[a,b]$，并且 $f^+\geqslant0,f^-\geqslant0,f=f^+-f^-$.

5.2 Riemann 可积函数

现在我们来介绍一般一元实值函数的 Riemann 积分理论.

1. 问题的提出

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是任一有界正函数. 我们用 G 表示平面上由直线 $x=a, x=b, x$ 轴以及 f 的曲线 Γ 所围的"曲边梯形".

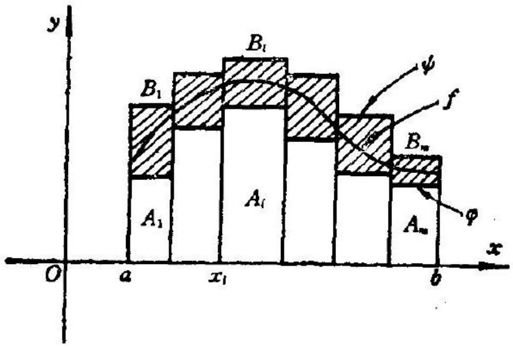

图 5.3

对于这样的一个曲边梯形 G，当 Γ 不是一条线段时，如何定义 G 是可求"面积"的？又如何定义 G 的"面积"？这是我们非常关心的一个实际问题. 很自然的一个想法就是：用若干直线 $x=x_i$ ($a\leqslant x_i\leqslant b$) 去分割 G 以得到若干个子曲边梯形 G_i 例如

$$G=G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_m$$

对每一个 G_i，我们找两个长方形 A_i, B_i 使得 $A_i\subset G_i\subset B_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$. A_i 与 B_i 的面积，记为 $|A_i|$ 与 $|B_i|$，是我们会计算的.

现在我们可以想象的是：如果对任意的 $\varepsilon>0$，可适当的分割 G 为 $G=\bigcup\limits_{i=1}^{m}G_i$，并且对每一个 G_i 可适当地选择 A_i, B_i 使得

$$\bigcup_{i=1}^{m}A_i\subset G\subset\bigcup_{i=1}^{m}B_i, 0\leqslant\sum_{i=1}^{m}|B_i|-\sum_{i=1}^{m}|A_i|<\varepsilon,$$

那么曲边梯形 G 应该认为是可以求"面积"的，并且可以把 $\sum\limits_{i=1}^{m}|A_i|$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{m}|B_i|$ 当作 G 的"面积"的近似值.

由于 $\sum\limits_{i=1}^{m}|A_i|$ 与 $\sum\limits_{i=1}^{m}|B_i|$ 实际上就是某两个阶梯函数 $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ 与 $\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ 的和分值，即 $\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{i=1}^{m}|A_i|$，$\int_a^b\psi(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{i=1}^{m}|B_i|$，故上面我们所说的 G 是可求面积的，就等价于：

$$\forall\varepsilon>0, \exists\varphi,\psi\in\mathscr{E}[a,b]\ \text{使得}\ \varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x), \forall x\in[a,b], \int_a^b[\psi(x)-\varphi(x)]\mathrm{d}x<\varepsilon,$$

并且这时积分值 $\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x$ 或 $\int_a^b\psi(x)\mathrm{d}x$ 就是 G 的面积的近似值.

上述这种十分自然的想法就是我们下面要介绍的，一般一元实值有界函数 Riemann 可积性概念的基础.

2. Riemann 可积性定义

定义 5.4

设 $[a,b]$ 是任一有限闭区间，$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是任一函数，我们称 f 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的

(简称为可积), 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists \varphi, \psi \in \mathscr{E}[a,b]$ 使得

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x), \forall x \in [a,b], \int_a^b [\psi(x)-\varphi(x)]\mathrm{d}x < \varepsilon$$

因此从分析的角度来看，函数 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，等价于：可以分别从 f 的上方与下方用阶梯函数 ψ 与 φ 来逼近 f，并且这两个阶梯函数 ψ 与 φ 在 $[a,b]$ 上的积分之差 $\int_a^b [\psi(x)-\varphi(x)]\mathrm{d}x$ 能够任意的小.

例题 5.6 任意一个阶梯函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的.

因为我们可以取 $\varphi=\psi=f$.

例题 5.7 Dirichlet 函数 $x \longmapsto D(x) = \begin{cases} 1, & 若 \ x \in [a,b]\cap\mathbb{Q}, \\ 0, & 若 \ x\in[a,b]\cap\mathbb{Q}^c. \end{cases}$ 在 $[a,b]$ 上不是 Riemann 可积的.

事实上，设 $\varphi,\psi\in\mathscr{E}[a,b]$ 并且满足不等式

$$\varphi(x)\leqslant D(x)\leqslant\psi(x) \quad \forall x\in[a,b].$$

由 §1 的引理5.1知，存在 $[a,b]$ 的一个分割 $\sigma=(a_0,\cdots,a_n)$ 及两个向量 $\xi=[c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}],\eta=[d_0,d_1,\cdots,d_{n-1}]$ 使得 $[\sigma,\xi]$ 适合于 φ, $[\sigma,\eta]$ 适合于 ψ. 因此

$$\forall i=0,1,\cdots,n-1, \forall x\in(a_i,a_{i+1}), c_i=\varphi(x)\leqslant D(x)\leqslant\psi(x)=d_i$$

但 $D(x)=1$，若 $x\in(a_i,a_{i+1})\cap\mathbb{Q}$； $D(x)=0$ 若 $x\in(a_i,a_{i+1})\cap\mathbb{Q}^c$，故

$$c_i\leqslant 0, 1\leqslant d_i, \forall i=0,1,\cdots,n-1.$$

从而

$$\begin{aligned}\int_a^b[\psi(x)-\varphi(x)]\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{n-1}(d_i-c_i)(a_{i+1}-a_i)\\ &\geqslant \sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)=b-a\end{aligned}$$

由此可知，Dirichlet 函数 D 在 $[a,b]$ 上不是 Riemann 可积的.

Riemann 可积定义的一个直接推论是下述定理.

定理 5.3

若函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

证明 因为 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，故由定义知，对 $\varepsilon=1$，存在 $\varphi,\psi\in\mathscr{E}[a,b]$ 使得

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x), \forall x\in[a,b].$$

若令 $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}(|\varphi(x)|,|\psi(x)|)$，则

$$|f(x)|\leqslant M, \forall x\in[a,b].$$

此即表明 f 在 $[a,b]$ 上有界.

下面定理给出函数 Riemann 可积的一个充分必要条件.

定理 5.4

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是任一有界函数，则下述结论互相等价：

1. f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.
2. $\forall\varepsilon>0,\exists h,k\in\mathscr{E}[a,b]$，使得
$$|f(x)-h(x)|\leqslant k(x),\forall x\in[a,b],\int_a^b k(x)\mathrm{d}x<\varepsilon.$$
3. 存在阶梯函数族 $\{h_n,k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，这里 $h_n,k_n\in\mathscr{E}[a,b]$ ($\forall n\in\mathbb{N}$) 使得
$$|f(x)-h_n(x)|\leqslant k_n(x),\forall x\in[a,b],\forall n\in\mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty}\int_a^b k_n(x)\mathrm{d}x=0$$
($\{h_n,k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为适合于 f 的阶梯函数族)

证明 2)$\Longleftrightarrow$ 3) 显然. 我们证明 1)$\Longleftrightarrow$ 2).

首先设 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 由定义知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\varphi,\psi\in\mathscr{E}[a,b]$ 使得
$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x),\forall x\in[a,b],\int_a^b[\psi(x)-\varphi(x)]\mathrm{d}x<\varepsilon.$$
于是
$$0\leqslant f(x)-\varphi(x)\leqslant\psi(x)-\varphi(x),\forall x\in[a,b].$$
令 $h(x)=\varphi(x),k(x)=\psi(x)-\varphi(x),\forall x\in[a,b]$，则 h，$k\in\mathscr{E}[a,b]$，并且
$$|f(x)-h(x)|\leqslant k(x),\forall x\in[a,b],\int_a^b k(x)\mathrm{d}x<\varepsilon.$$
反之假设 $\forall\varepsilon>0,\exists h,k\in\mathscr{E}[a,b]$，使得
$$|f(x)-h(x)|\leqslant k(x),\forall x\in[a,b],\int_a^b k(x)\mathrm{d}x<\varepsilon$$
于是
$$h(x)-k(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)+h(x),\forall x\in[a,b].$$
若令 $\varphi(x)=h(x)-k(x),\psi(x)=h(x)+k(x),\forall x\in[a,b]$, 则 $\phi,\psi\in\mathscr{E}[a,b]$，并且
$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x),\forall x\in[a,b],\int_a^b[\psi(x)-\varphi(x)]\mathrm{d}x=2\int_a^b k(x)\mathrm{d}x<2\varepsilon.$$
因此 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

3. Riemann 积分的定义

在未给出函数的 Riemann 积分定义之前，我们首先来研究由上述定理 5.4给出的阶梯函数族 $\{h_n,k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的下述重要性质.

引理 5.2

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是任一 Riemann 可积函数，$\{h_n,\,k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 与 $\left\{\widetilde{h}_n,\widetilde{k}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是适合于 f 的任意两个阶梯函数族. 则

1. 实数序列 $\left\langle\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x\right\rangle$ 与 $\left\langle\int_a^b\widetilde{h}_n(x)\mathrm{d}x\right\rangle$ 都收敛.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b\widetilde{h}_n(x)\mathrm{d}x$

证明 我们首先证明 $\left\langle \int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x \right\rangle$ 收敛.

事实上，由于 $\{h_n, k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 与 $\left\{\widetilde{h}_n, \widetilde{k}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足定理5.4的性质 3)，所以

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Longrightarrow |f(x) - h_n(x)| \leqslant k_n(x), \left|f(x) - \widetilde{h}_n(x)\right| \leqslant \widetilde{k}_n(x),$$
$$\forall x \in [a,b], \int_a^b k_n(x)\mathrm{d}x < \varepsilon/2, \int_a^b \widetilde{k}_n(x)\mathrm{d}x < \varepsilon/2.$$

于是

$$\begin{aligned}\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geqslant N, \forall x \in [a,b] \Longrightarrow |h_n(x) - h_m(x)| &\leqslant |h_n(x) - f(x)| + |f(x) - h_m(x)| \\ &\leqslant k_n(x) + k_m(x)\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geqslant N \Rightarrow \left|\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b h_m(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_a^b |h_n(x) - h_m(x)|\mathrm{d}x \\ &< \int_a^b k_n(x)\mathrm{d}x + \int_a^b k_m(x)\mathrm{d}x \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\end{aligned}$$

此即表明 $\left\langle \int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x \right\rangle$ 是实数 Cauchy 序列，由 Cauchy 收敛准则知 $\left\langle \int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x \right\rangle$ 收敛.

同理可证 $\left\langle \int_a^b \widetilde{h}_n(x)\mathrm{d}x \right\rangle$ 收敛.

下面我们来证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \widetilde{h}_n(x)\mathrm{d}x$.

事实上，$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N$ 我们有

$$\begin{aligned}\left|h_n(x) - \widetilde{h}_n(x)\right| &\leqslant |h_n(x) - f(x)| + \left|f(x) - \widetilde{h}_n(x)\right| \\ &\leqslant k_n(x) + \widetilde{k}_n(x), \forall x \in [a,b].\end{aligned}$$

由此推得 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N$,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \widetilde{h}_n(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_a^b \left|h_n(x) - \widetilde{h}_n(x)\right| \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_a^b k_n(x)\mathrm{d}x + \int_a^b \widetilde{k}_n(x)\mathrm{d}x \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\end{aligned}$$

此即表明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \widetilde{h}_n(x)\mathrm{d}x\right) = 0$，因此

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \widetilde{h}_n(x)\mathrm{d}x.$$

引理说明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x$ 是一个只与 f 有关而与适合于 f 的阶梯函数族 $\{h_n, k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的选择无关的定数. 因此，我们引入下述定义就是合理的.

定义 5.5

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是任一 Riemann 可积函数，$\{h_n,k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是适合于 f 的任一阶梯函数族. 对于 $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，实数序列 $\left\langle\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x\right\rangle$ 的极限称为 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分 (简称为积分)，记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 于是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x$$

♣

注 若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是一个阶梯函数，我们知道 f 是 Riemann 可积的. 现在我们要问，f 作为阶梯函数的积分与 f 作为 Riemann 可积函数的积分是否一致？答案是肯定的.

为此，我们不妨用 $(E)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 表示阶梯函数 g 的积分，令 $h_n=f,k_n=0,\forall n\in\mathbb{N}$，则阶梯函数族 $\{h_n,k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 适合于函数 f，根据定义，f 的 Riemann 积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}(E)\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}(E)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(E)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(E)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

这也就是我们在上述 Riemann 积分的定义中仍用符号 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示一般 Riemann 可积函数的 Riemann 积分的缘故.

4. Riemann 可积函数类

定理 5.5

任何一个连续函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上是可积的.

♡

证明 因为 f 在 $[a,b]$ 上连续，所以 f 在 $[a,b]$ 上一致连续. 从而

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\eta>0)\left(\forall x,x'\in[a,b],\left|x-x'\right|<\eta\right)\Rightarrow\left|f(x)-f\left(x'\right)\right|<\varepsilon/(b-a).$$

设 $\sigma=(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 是 $[a,b]$ 的一个分割，使得 $\delta(\sigma)<\eta$. 令

$$m_i=\inf_{x\in[a_i,a_{i+1}]}f(x),\ M_i=\sup_{x\in[a_i;\quad a_{i+1}]}f(x),i=0,1,\cdots,n-1.$$

于是 $0\leqslant M_i-m_i<\varepsilon/b-a\quad(i=0,1,\cdots,n-1)$.

下面我们定义阶梯函数 $\varphi,\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\varphi(x)=\begin{cases}m_i, & 若\ x\in\left(a_i,a_{i+1}\right),i=0,1,\cdots,n-1,\\ f\left(a_i\right), & 若\ x=a_i,i=0,1,\cdots,n;\end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases}M_i, & 若\ x\in\left(a_i,a_{i+1}\right),i=0,1,\cdots,n-1,\\ f\left(a_i\right), & 若\ x=a_i,i=0,1,\cdots,n.\end{cases}$$

显然我们有

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x), \forall x \in [a,b],$$

$$\begin{aligned}\int_a^b (\psi-\varphi)(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)(a_{i+1}-a_i)\\ &< \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)=\varepsilon\end{aligned}$$

因此 f 在 $[a,b]$ 上可积.

推论 5.1

若函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 只有有限多个第一类间断点，则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

证明 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 f 在 (a,b) 内的所有间断点，并且假设

$$a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n<a_{n+1}=b,$$

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta>0$ 充分小使得 $0<\delta<\varepsilon$，并且

$$a_i+\delta<a_{i+1}-\delta(i=0,1,\cdots,n).$$

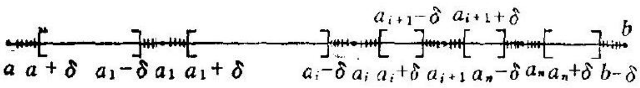

图 5.4

在每一个闭区间 $[a_i+\delta,a_{i+1}-\delta]$ 上，f 是连续的，于是 f 在 $[a_i+\delta,a_{i+1}-\delta]$ 上可积，从而存在阶梯函数 $\varphi_i,\psi_i:[a_i+\delta\ ,\ \ a_{i+1}-\delta]\to\mathbb{R}$，使得

$$\varphi_i(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi_i(x),\forall x\in[a_i+\delta,a_{i+1}-\delta]\,(i=0,1,\cdots,n)$$

$$\int_{a_i+\delta}^{a_{i+1}-\delta}(\psi_i-\varphi_i)(x)\mathrm{d}x<\varepsilon\quad(i=0,1,\cdots,n)$$

另一方面，函数 f 在 $[a,b]$ 上显然有界，故存在 $m,M\in\mathbb{R}$ 使得

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,\forall x\in[a,b].$$

现在我们定义阶梯函数 $\varphi,\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\varphi(x)=\left\{\begin{array}{lll} m, & 若\ x\in[a,a+\delta)\cup(b-\delta,b]\cup\bigcup_{i=1}^{n}(a_i-\delta,a_i+\delta), & M\\ \varphi_i(x), & 若\ x\in(a_i+\delta,a_{i+1}-\delta),i=0,1,\cdots,n, & \psi_i(x)\\ f(a_i-\delta), & 若\ x=a_i-\delta,i=1,2,\cdots,n+1, & f(a_i-\delta)\\ f(a_i+\delta), & 若\ x=a_i+\delta,i=0,1,\cdots,n. & f(a_i+\delta)\end{array}\right\}=\psi(x)$$

显然我们有

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x), \forall x \in [a,b],\\
&\quad\int_a^b (\psi-\varphi)(x)\mathrm{d}x\\
&= \int_a^{a+\delta} (\psi-\varphi)(x)\mathrm{d}x + \int_{b-\delta}^{b} (\psi-\varphi)(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n}\int_{a_i-\delta}^{a_i+\delta} (\psi-\varphi)(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=0}^{n}\int_{a_i+\delta}^{a_{i+1}-\delta} (\psi-\varphi)(x)\mathrm{d}x\\
&\leqslant (M-m)\delta + (M-m)\delta + 2n(M-m)\delta + (n+1)\varepsilon\\
&< [2(n+1)(M-m)+n+1]\varepsilon.
\end{aligned}$$

由此可知 f 在 $[a,b]$ 上可积.

定理 5.6

任何一个单调函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上是可积的.

证明 不失一般性, 我们假设 f 是单调上升函数.

若 $f(a)=f(b)$, 则 f 为常值函数, 它显然在 $[a,b]$ 上可积.

下面我们设 $f(a)<f(b)$.

$$\forall \varepsilon>0,\ \text{取 } n \text{ 充分大使得 } \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}<\varepsilon$$

设 $\sigma=\left(a, a+\dfrac{b-a}{n}, a+2\cdot\dfrac{b-a}{n}, \cdots, a+(n-1)\dfrac{b-a}{n} b\right)$ 是 $[a,b]$ 的等步长 $\dfrac{b-a}{n}$ 的分割, 于是我们有

$$f(a_i)=m_i=\inf_{x\in[a_i,a_{i+1}]} f(x) \leqslant M_i=\sup_{x\in[a_i,a_{i+1}]} f(x)=f(a_{i+1}), (i=0,1,2,\cdots,n-1).$$

现在定义阶梯函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 如下:

$$\varphi(x)=\left\{\begin{array}{lll} m_i & \text{若 } x\in(a_i,a_{i+1}), i=0,1,\cdots,n & M_i\\ f(a_i) & \text{若 } x=a_i, i=0,1,\cdots,n & f(a_i)\end{array}\right\}=\psi(x).$$

显然

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x), \forall x \in [a,b],\\
&\int_a^b (\psi-\varphi)(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)(a_{i+1}-a_i)\\
&\qquad = \sum_{i=0}^{n-1}[f(a_{i+1})-f(a_i)]\frac{b-a}{n}\\
&\qquad = \frac{b-a}{n}[f(b)-f(a)]\\
&\qquad < \varepsilon
\end{aligned}$$

因此 f 在 $[a,b]$ 上可积.

例题 5.8 考虑如下定义的函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$:

$$f(0)=0, f(x)=\frac{1}{n}, \forall x\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right], (n\in\mathbb{N})$$

显然函数 f 在 $[0,1]$ 上是单调上升的, 因此 f 在 $[0,1]$ 上可积.

下面我们介绍有界函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann 可积的第三个定理. 它是定理 5.5 及其推论的推广.

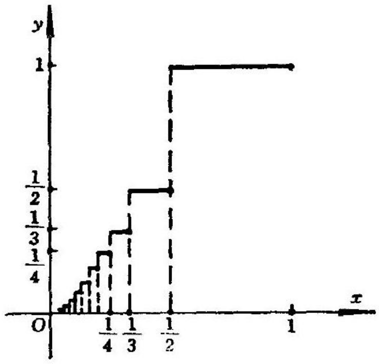

图 5.5

为此先介绍零测度集的概念.

定义 5.6

设 $E \subset \mathbb{R}$ 是任一集合，我们称 E 是零测度集，如果 $\forall \varepsilon > 0$，存在有限多个有界闭区间 $[a_i, b_i]\,(i = 1, 2, \cdots, m)$ 使得

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{m} [a_i, b_i]\,, \text{并且} \ \sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i) < \varepsilon.$$

♣

直接由此定义可推出下面几个简单结论：

1. $\mathbb{R}$ 的任何有限点集是零测度集
2. 若 $\langle x_n \rangle$ 是 $\mathbb{R}$ 的收敛点序列，则 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是零测度集.
3. 若 E 是零测度集，则 E 的任一子集 F 也是零测度集， $\bar{E}$ 也是零测度集.
4. 若 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是零测度集，则 $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ 也是零测度集.

定理 5.7

若有界函数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 的间断点集是零测度集，则 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积.

♡

这个定理我们暂不在这里证明，因为它是第 19 章定理 **??** $n = 1$ 的情形.

但我们提醒读者注意：定理5.7的逆不成立，因此 f 的间断点集是零测度集不是 f Riemann 可积的充分必要条件.

例题 5.9 考虑定义在 $[0, 1]$ 上的 Riemann 函数

$$x \longmapsto R(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}^c; \\ 1, & \text{若 } x = 0; \\ \dfrac{1}{p}, & \text{若 } x \in (0,1] \cap \mathbb{Q}, x = \dfrac{q}{p}, p, q \text{ 互质}. \end{cases}$$

我们知道此函数的间断点集 $E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$，但它不是零测度集，因为如果 E 是零测度集，则 $\bar{E} = [0,1]$ 也是零测度集，这显然矛盾.

下面证明此函数在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积，并且 $\displaystyle\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$，由 $\dfrac{1}{p} > \dfrac{1}{n}$ 知 $p < n$. 故在 $[0, 1]$ 中满足 $\dfrac{1}{p} > \dfrac{1}{n}$ 的有理数只有有限个，记它们为

$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = 1$. 定义阶梯函数 $h_n, k_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ 为:

$$h_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \in (x_i, x_{i+1}), i = 0, 1, \cdots, m-1, \\ R(x) & \text{若 } x = x_i, i = 0, 1, \cdots, m; \end{cases}$$

$$k_n(x) = \frac{1}{n}, \forall x \in [0,1].$$

显然我们有

$$|R(x) - h_n(x)| \leqslant k_n(x), \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 k_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

因此由定理5.4知, R 在 $[0,1]$ 上可积, 并且

$$\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 h_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} h_n(x)\mathrm{d}x = 0$$

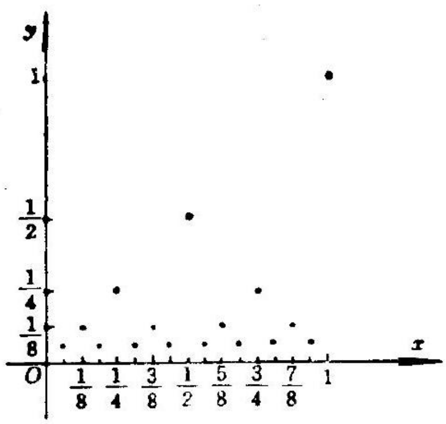

图 5.6

现在我们要问: 是否存在使 f Riemann 可积的充分必要条件呢? 回答是肯定的. 为此必须推广零测度集概念, 这一工作将在第 19 章进行.

5. Riemann 可积函数的性质

我们用 $\mathscr{R}[a,b]$ 表示由定义在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积函数组成的集合, 它是非空的, 因 $\mathscr{E}[a,b] \subset \mathscr{R}[a,b]$.

定理 5.8

设 $f, g \in \mathscr{R}[a,b], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则

1. $\alpha f + \beta g \in \mathscr{R}[a,b]$, 且 $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
2. 若 $f \geqslant 0$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.
3. 若 $f \geqslant g$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
4. $|f| \in \mathscr{R}[a,b]$, 且 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

证明

1. 因为 $f,g\in\mathscr{R}[a,b]$，所以存在两个阶梯函数族 $\{k_n,k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，$\left\{\widetilde{h}_n,\widetilde{k}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得

$$|f(x)-h_n(x)|\leqslant k_n(x),\forall x\in[a,b],\forall n\in\mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty}\int_a^b k_n(x)\mathrm{d}x=0,$$

$$\left|g(x)-\widetilde{h}_n(x)\right|\leqslant\widetilde{k}_n(x),\forall x\in[a,b],\forall n\in\mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \widetilde{k}_n(x)\mathrm{d}x=0,$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x,\ \int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \widetilde{h}_n(x)\mathrm{d}x.$$

于是 $\alpha h_n+\beta\widetilde{h_n},\alpha k_n+\beta\widetilde{k_n}\in\mathscr{E}[a,b],\forall n\in\mathbb{N}$，并且

$$\left|[\alpha f+\beta g](x)-\left[\alpha h_n+\beta\widetilde{h_n}\right](x)\right|\leqslant\left[\alpha k_n+\beta\widetilde{k_n}\right](x),$$

$\forall x\in[a,b],\forall n\in\mathbb{N}.\ \lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b\left[ak_n+\beta\widetilde{k_n}\right](x)\mathrm{d}x=\alpha\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b k_n(x)\mathrm{d}x+\beta\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b\widetilde{k}_n(x)\mathrm{d}x=0.$

因此由定理5.4知，$\alpha f+\beta g\in\mathscr{R}[a,b]$，并且

$$\begin{aligned}\int_a^b[\alpha f+\beta g](x)\mathrm{d}x&=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b\left[ah_n+\beta\widetilde{h}_n\right](x)\mathrm{d}x\\&=\alpha\lim_{n\to+\infty}\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x+\beta\lim_{n\to+\infty}\int_a^b\widetilde{h}_n(x)\mathrm{d}x\\&=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2. 因为 $f\geqslant 0$，所以若令

$$h_n^*(x)=\begin{cases}h_n(x), & 若\ h_n(x)\geqslant 0,\\ 0, & 若\ h_n(x)<0,\end{cases}\ \forall x\in[a,b],$$

则 $h_n^*\in\mathscr{E}[a,b]$ 并且由 $|f(x)-h_n(x)|\leqslant k_n(x)$ 得到

$$h_n^*(x)-k_n(x)\leqslant f(x)\leqslant h_n^*(x)+k_n(x),\forall x\in[a,b].$$

因此

$$\left|f(x)-h_n^*(x)\right|\leqslant k_n(x),\forall x\in[a,b],\forall n\in\mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b k_n(x)\mathrm{d}x=0.$$

此即表明阶梯函数族 $\{h_n^*,k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 适合函数 f，由积分定义，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b h_n^*(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

3. 若 $f\geqslant g$，则 $f-g\geqslant 0$，从而由 1) 及 2) 知

$$0\leqslant\int_a^b(f-g)(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

4. 由于

$$||f(x)|-|h_n(x)||\leqslant|f(x)-h_n(x)|\leqslant k_n(x)$$

$$\forall x\in[a,b],\forall n\in\mathbb{N}\ \lim_{n\to+\infty}\int_a^b k_n(x)\mathrm{d}x=0$$

故阶梯函数族 $\{|h_n|,k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 适合于函数 $|f|$，由定理5.4， $|f|\in\mathscr{R}[a,b]$，并且由积分定义及定

理5.1知

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty}\int_a^b |h_n(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \lim_{n\to+\infty}\left|\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\end{aligned}$$

定理 5.9

若 $f,g\in\mathscr{R}[a,b]$，则 $fg\in\mathscr{R}[a,b]$.

证明

1. 首先假设 $f\geqslant 0, g\geqslant 0$. 因 f,g 有界，故存在 $M>0$，使得

$$0\leqslant f(x)\leqslant M, 0\leqslant g(x)\leqslant M, \forall x\in[a,b].$$

由于 $f,g\in\mathscr{R}[a,b]$，故由定义知，$\forall\varepsilon>0$，存在 $\varphi,\psi,\widetilde{\varphi}$，$\widetilde{\psi}\in\mathscr{E}[a,b]$，使得

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x), \forall x\in[a,b], \int_a^b[\psi(x)-\varphi(x)]\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2M},$$

$$\widetilde{\varphi}(x)\leqslant g(x)\leqslant\widetilde{\psi}(x), \forall x\in[a,b], \int_a^b[\widetilde{\psi}(x)-\widetilde{\varphi}(x)]\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

我们定义函数 $h,k,\widetilde{h},\widetilde{k}:[a,b]\to\mathbb{R}$ 如下：$\forall x\in[a,b]$

$$h(x)=\begin{cases}\varphi(x), & 若\ \varphi(x)\geqslant 0,\\ 0, & 若\ \varphi(x)<0;\end{cases}\quad k(x)=\begin{cases}\psi(x), & 若\ \psi(x)\leqslant M,\\ M, & 若\ \psi(x)>M;\end{cases}$$

$$\widetilde{h}(x)=\begin{cases}\widetilde{\varphi}(x), & 若\ \widetilde{\varphi}(x)\geqslant 0,\\ 0, & 若\ \widetilde{\varphi}(x)<0;\end{cases}\quad \widetilde{k}(x)=\begin{cases}\widetilde{\psi}(x), & 若\ \widetilde{\psi}(x)\leqslant M,\\ M, & 若\ \widetilde{\psi}(x)>M;\end{cases}$$

则 $h,k,\widetilde{h},\widetilde{k}\in\mathscr{E}[a,b]$ 并且

$$\varphi(x)\leqslant h(x)\leqslant f(x)\leqslant k(x)\leqslant\psi(x), \forall x\in[a,b], \int_a^b[k(x)-h(x)]\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b[\psi(x)-\varphi(x)]\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2M},$$

$$\widetilde{\varphi}(x)\leqslant\widetilde{h}(x)\leqslant g(x)\leqslant\widetilde{k}(x)\leqslant\widetilde{\psi}(x), \forall x\in[a,b], \int_a^b[\widetilde{k}(x)-\widetilde{h}(x)]\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b[\widetilde{\psi}(x)-\widetilde{\varphi}(x)]\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

由于 $h\widetilde{h},r\widetilde{h}\subseteq\mathscr{E}[a,b]$，并且 $f\geqslant 0,g\geqslant 0$，故我们有

$$(h\widetilde{h})(x)\leqslant(fg)(x)\leqslant(k\widetilde{k})(x), \forall x\in[a,b]$$

$$\begin{aligned}&\int_a^b[k\widetilde{k}-h\widetilde{h}](x)\mathrm{d}x\\ =&\int_a^b\widetilde{k}(x)[k-h](x)\mathrm{d}x+\int_a^b h(x)[\widetilde{k}-\widetilde{h}](x)\mathrm{d}x\\ \leqslant& M\int_a^b[k(x)-h(x)]\mathrm{d}x+M\int_a^b[\widetilde{k}(x)-\widetilde{h}(x)]\mathrm{d}x\\ <& M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon\end{aligned}$$

因此 $fg\in\mathscr{B}[a,b]$.

2. 对一般的 f,g，令

$$m=\inf_{x\in[a,b]}f(x), \widetilde{m}=\inf_{x\in[a,b]}g(x), f^*=f-m, g^*=g-\widetilde{m},$$

则 $f^*\geqslant 0, g^*\geqslant 0$，并且 $f^*,g^*\in\mathscr{R}[a,b]$，由 1) 所证 $f^*g^*\in\mathscr{R}[a,b]$，于是由

$$f^*g^*=(f-m)(g-\widetilde{m})=fg-\widetilde{m}f-mg+m\widetilde{m}$$

知，$fg\in\mathscr{R}[a,b]$.

定理 5.10

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是任一函数，$c\in[a,b]$. 那么 $f\in\mathscr{R}[a,b]$ 的充分必要条件是 $f\big|_{[a,c]}\in\mathscr{R}[a,c], f\big|_{[c,b]}\in\mathscr{R}[c,b]$. 并且这时

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

证明 1)(必要性) 设 $f\in\mathscr{R}[a,b]$. 若 $c=a$ 或 $c=b$，则由我们的约定知，定理显然成立. 因此我们设 $c\in(a,b)$. 由定理 5.4知，存在阶梯函数族 $\{h_n,k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得

$$|f(x)-h_n(x)|\leqslant k_n(x),\forall x\in[a,b],\forall n\in\mathbb{N},\lim_{n\to+\infty}\int_a^b k_n(x)\mathrm{d}x=0,\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x$$

现在我们令

$$\widetilde{h}_n=h_n|_{[a,c]},\widetilde{k}_n=k_n|_{[a,c]};\quad h_n^*=h_n|_{[c,b]},k_n^*=k_n|_{[c,b]},(n\in\mathbb{N})$$

则 $\widetilde{h}_n,\widetilde{k}_n\in\mathscr{E}[a,c],h_n^*,k_n^*\in\mathscr{E}[c,b](\forall n\in\mathbb{N})$，并且

$$|f|_{[a,c]}(x)-\widetilde{h}_n(x)|\leqslant\widetilde{k}_n(x),\forall x\in[a,c],\forall n\in\mathbb{N},\int_a^c\widetilde{k}_n(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b k_n(x)\mathrm{d}x,$$

$$|f|_{[c,b]}(x)-h_n^*(x)|\leqslant k_n^*(x),\forall x\in[c,b],\forall n\in\mathbb{N},\int_c^b k_n^*(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b k_n(x)\mathrm{d}x.$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^c\widetilde{k}(x)\mathrm{d}x=0,\ \lim\limits_{n\to+\infty}\int_c^b k_n^*(x)\mathrm{d}x=0$，
从而 $f\big|_{[a,c]}\in\mathscr{R}[a,c], f\big|_{[c,b]}\in\mathscr{R}[c,b]$，并且

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x\triangleq\int_a^c f\Big|_{[a,c]}(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_a^c\widetilde{h}_n(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\triangleq\int_c^b f\Big|_{[c,b]}(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_c^b h_n^*(x)\mathrm{d}x$$

由于对阶梯函数 $h_n\in\mathscr{E}[a,b]$，我们有

$$\int_a^b h_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^c\widetilde{h}_n(x)\mathrm{d}x+\int_c^b h_n^*(x)\mathrm{d}x.$$

两边令 $n\to+\infty$ 取极限得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

2)(充分性) 设 $f\big|_{[a.c]}\in\mathscr{R}[a,c], f\big|_{[c,b]}\in\mathscr{R}[c,b]$. 不妨设 $c\in(a,b)$. 于是 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\varphi_1,\psi_1\in\mathscr{E}[a,c]$ 及，$\varphi_2,\psi_2\in\mathscr{E}[c,b]$ 使得

$$\varphi_1(x)\leqslant f\big|_{[a,c]}(x)\leqslant\psi_1(x),\forall x\in[a,c],\int_a^c[\psi_1(x)-\varphi_1(x)]\,\mathrm{d}x<\varepsilon/2,$$

$$\varphi_2(x)\leqslant f\big|_{[c,b]}(x)\leqslant\psi_2(x),\forall x\in[c,b],\int_c^b[\psi_2(x)-\varphi_2(x)]\,\mathrm{d}x<\varepsilon/2.$$

定义函数 $\varphi,\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ 如下:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi_1(x) & 若\ \ x\in[a,c)\\ f(c) & 若\ \ x=c\\ \varphi_2(x) & 若\ \ x\in(c,b]\end{cases}\quad \left.\begin{matrix}\psi_1(x)\\ f(c)\\ \psi_2(x)\end{matrix}\right\}=\psi(x)$$

则 $\varphi,\psi\in\mathscr{E}[a,b]$, 并且

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x),\forall x\in[a,b],$$

$$\int_a^b[\psi(x)-\varphi(x)]\mathrm{d}x=\int_a^c[\psi_1(x)-\varphi_1(x)]\,\mathrm{d}x+\int_c^b[\psi_2(x)-\varphi_2(x)]\,\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

因此 $f\in\mathscr{R}[a,b]$.

现在我们作如下约定:

若 $f\in\mathscr{R}[a,b]$, 则 $\forall c,d\in[a,b]$ 且 $c<d$,

$$\int_d^c f(x)\mathrm{d}x\triangleq-\int_c^d f(x)\mathrm{d}x.$$

推论 5.2

设 $a,b,c\in\mathbb{R}$ 并且

$$f:[\min(a,b,c),\max(a,b,c)]\to\mathbb{R}$$

Riemann 可积. 则 f 在由 a,b,c 确定的每一个有限闭区间上 Riemann 可积, 并且成立下述等式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

证明 我们只对 $a<b<c$ 的情形进行证明. 其他情形的证明完全类似.

由定理 5.10知, $f\big|_{[a,b]}\in\mathscr{R}[a,b], f\big|_{[b,c]}\in\mathscr{R}[b,c]$, 并且

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

由此得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

根据我们的约定, $-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x=\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$, 因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

例题 5.10 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是任一 Riemann 可积函数. $a_0\in[a,b]$ 是任一固定实数. 根据定理5.10及我们的约定, $\forall x\in[a,b]$, $\int_{a_0}^x f(t)\mathrm{d}t$ 有意义. 因此我们可以定义一个函数 $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ 如下:

$$\forall x\in[a,b],F(x)=\int_{a_0}^x f(t)\mathrm{d}t$$

函数 F 称为 f 的积分函数. 证明: F 在 $[a,b]$ 上一致连续.

事实上，$\forall x_1,\ x_2 \in [a,b]$，由上述推论我们有

$$\begin{aligned} |F(x_1) - F(x_2)| &= \left| \int_{a_0}^{x_1} f(t)\mathrm{d}t - \int_{a_0}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t \right| \\ &= \left| \int_{x_2}^{x_1} f(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant |x_1 - x_2| \cdot \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|. \end{aligned}$$

由于 f 在 $[a,b]$ 上有界，故 $M = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)| < +\infty$.

$\forall \varepsilon > 0$，由 $(1+M)|x_1 - x_2| < \varepsilon$ 得到 $|x_1 - x_2| < \dfrac{\varepsilon}{1+M}$. 若令 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1+M}$，则

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \text{ 且 } |x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |F(x_1) - F(x_2)| < M|x_1 - x_2| < \epsilon.$$

因此 F 在 $[a,b]$ 上一致连续.

可积函数的积分函数，在我们后面的 §4 中有重要应用.

定理 5.11 (第一积分中值公式)

设 $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$ 并且 g 在 $[a,b]$ 上不变号. 令

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), M = \sup_{x\in[a,b]} f(x),$$

则存在 $\lambda \in [m, M]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

特别地，若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $c \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(c) \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

证明 首先由于 f 在 $[a,b]$ 上有界，故 $m, M \in \mathbb{R}$ 并且

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \forall x \in [a,b].$$

由于 g 在 $[a,b]$ 上不变号，不妨设 $g \geqslant 0$，将上述不等式乘以 g 得到

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x), \forall x \in [a,b].$$

由定理5.8有

$$m \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant M \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

1) 若 $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$，则 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$，从而任取 $\lambda \in [m, M]$，成立

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

2) 若 $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \neq 0$，则由 $g \geqslant 0$ 知 $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$. 于是

$$m \leqslant \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leqslant M \tag{5.1}$$

令 $\lambda=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\Big/\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，则 $\lambda\in[m,M]$，并且

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\lambda\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

特别地，若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$ 时，$\forall c\in[a,b]$ 都有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

在 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\neq 0$ 时，由连续函数的 Weierstrass 定理及上述不等式(5.1)知，存在 $c\in[a,b]$ 使得

$$f(c)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\Big/\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

因此

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

如果我们在上述定理中取 $g=1$，则

1. 存在 $\lambda\in[m,M]$，使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lambda(b-a)$.
2. 特别地若 f 连续，则存在 $c\in[a,b]$ 使得

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=f(c)(b-a)$$

6. 积分的推广

前面我们介绍的是一元实值函数的 Riemann 积分概念，下面我们要把它推广到一元复值函数上去.

设 $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 是任一复值函数. $\forall x\in[a,b]$，令

$$f(x)=f_1(x)+\mathrm{i}f_2(x),$$

于是我们得到与 f 对应的两个一元实值函数 $f_1,f_2:[a,b]\to\mathbb{R}$.

定义 5.7

我们称 f 在 $[a,b]$ 上可积，如果 f_1,f_2 在 $[a,b]$ 上可积. 并且这时 f 在 $[a,b]$ 上的积分，记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，定义为：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$$

♣

我们用 $\widetilde{\mathscr{R}}[a,b]$ 表示所有定义在 $[a,b]$ 上的可积复值函数的集合. $\widetilde{\mathscr{R}}[a,b]\neq\varnothing$，因为 $\mathscr{R}[a,b]\subset\widetilde{\mathscr{R}}[a,b]$. 下面我们简单列出可积复值函数的两个基本性质，读者自己补充其证明.

1. 若 $f,g\in\widetilde{\mathscr{R}}[a,b],\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，则 $\alpha f+\beta g\in\widetilde{\mathscr{R}}[a,b]$，并且

$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)(x)\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

2. 设 $c\in[a,b]$，则 $f\in\widetilde{\mathscr{R}}[a,b]\iff f\big|_{[a,c]}\in\widetilde{\mathscr{R}}[a,c],f\big|_{[c,b]}\in\widetilde{\mathscr{R}}[c,b]$，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

✍ 习 题 5.2

1. 设 $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 是任一函数. 证明下述两个结论等价:
   1) f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.
   2) $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\varphi,\psi\in\mathscr{R}[a,b]$, 使得
$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x),\forall x\in[a,b],\int_a^b[\psi(x)-\varphi(x)]dx<\varepsilon.$$
2. 设 $f,g\in\mathscr{R}[a,b]$, 对任意 $x\in[a,b]$ 令
$$m(x)=\min(f(x),g(x)),M(x)=\max(f(x),g(x)).$$
   证明: 函数 $m,M:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.
3. 设 $f\in\mathscr{R}[a,b]$, 并且存在 $m>0$ 使得 $|f(x)|\geqslant m$, $\forall x\in[a,b]$. 证明: $\dfrac{1}{f}\in\mathscr{R}[a,b]$.
4. 设 $f\in\mathscr{R}[a,b]$, 并且 $f>0$. 证明: $\sqrt{f}\in\mathscr{R}[a,b]$.
5. 设 $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 是任一有界函数. 考虑下列两对集合:
$$\Phi=\{\varphi\in\mathscr{E}[a,b]\mid\varphi\leqslant f\},\Psi=\{\psi\in\mathscr{E}[a,b]\mid f\leqslant\psi\},$$
$$H=\left\{\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x\mid\varphi\in\Phi\right\},K=\left\{\int_a^b\psi(x)\mathrm{d}x\mid\psi\in\Psi\right\}.$$
   1) 证明: $\Phi\neq\varnothing,\Psi\neq\varnothing$.
   2) 证明: H 是上有界集, K 是下有界集, 并且 $\sup H\leqslant\inf K$. 我们记 $i(f)=\sup H,s(f)=\inf K$, 并分别称 $i(f)$ 与 $s(f)$ 为 f 在 $[a,b]$ 上的下积分与上积分. 于是 $i(f)\leqslant s(f)$.
   3) 证明: f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充分必要条件是 $i(f)=s(f)$, 并且这时 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=i(f)=s(f)$.
6. 设 $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 是任一有界函数. 我们称 f 是正规的, 如果下述性质成立:
$$\forall x\in(a,b],\lim_{y\to x^-}f(y)=f(x^-)\text{ 存在 },\forall x\in[a,b),\lim_{y\to x^+}f(y)=f(x^+)\text{ 存在 }.$$
   1) 证明: 若 f 是单调函数, 则 f 是正规函数.
   2) 证明: Riemann 函数在 $[0,1]$ 上是正规函数.
   3) 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是任一正规函数,
      1) 证明: $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的一个分割 $\sigma=(a_0,a_1,\cdots,a_n)$, 使得
$$\forall x,y\in(a_i,a_{i+1}),\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon,i=0,1,\cdots,n-1.$$
      2) 证明: $\forall\varepsilon>0$, 存在 $h\in\mathscr{E}[a,b]$, 使得
$$|f(x)-h(x)|<\varepsilon,\forall x\in[a,b].$$
      3) 由此推出 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.
7. 设 $I\subset\mathbb{R}$ 是任一区间, $f:I\to\mathbb{R}$ 是任一函数. 我们称 f 在 I 上局部 Riemann 可积, 若对任意 $[\alpha,\beta]\subset I$, $f|_{[\alpha,\beta]}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上 Riemann 可积.
   1) 证明: 若函数 $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 有界且在 (a,b) 上局部 Riemann 可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.
   2) 证明: 函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1],\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上不是正规函数, 但 f 在 $[0,1]$ 上 Riemann

可积.

8. 设 $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 是任一有界函数，并且 f 的间断点集只有有限个聚点. 证明：f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

9. 设函数 $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 证明：$\forall\varepsilon>0$，存在连续函数 $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$，使得 $\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$.

10. 设 $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 是任一函数. 证明:

    1) 若 $f\geqslant 0$, 并且 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 且在连续点 x 处满足 $f(x)>0$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

    2) 若 $f\geqslant 0$, f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，并且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，则 f 在连续点 x 处满足 $f(x)=0$.

11. 设 $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 是任一 Riemann 可积函数. 证明：$\forall[\alpha,\beta]\subset[a,b]$.

$$\lim_{h\to 0}\int_\alpha^\beta|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0$$

12. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x=\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$.

13. 我们用 $C([a,b],\mathbb{R})$ 表示由所有定义在 $[a,b]$ 上的连续函数组成的集合.

    1) 若 $\forall g\in C([a,b],\mathbb{R})$，有 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$, 则 $f=0$.

    2) 若 $\forall g\in C([a,b],\mathbb{R})$ 且 $g(a)=g(b)=0$，有 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$, 则 $f=0$.

14. 设 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是任一连续函数，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A>0$，以及 $\forall n\in\mathbb{N}$，$f(0)+f(1)+\cdots+f(n)\neq 0$. 证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^n f(x)\mathrm{d}x}{f(0)+f(1)+\cdots+f(n)}=1.$$

15. 设 $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是任一严格单调上升的连续函数，并且 $f([0,+\infty))=[0,+\infty)$. 证明：

$$\forall a>0,b>0,\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(x)\mathrm{d}x\geqslant ab.$$

16. 设 $f,g\in\mathscr{R}[a,b]$. 证明下述两个不等式：

    1) Cauchy 不等式：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

    2) Minkowski 不等式：

$$\left(\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}+\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

17. 设 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是两个可积函数，令

$$M(f)=\sup_{x\in[a,b]}f(x),\quad m(f)=\inf_{x\in[a,b]}f(x),$$

$$M(g)=\sup_{x\in[a,b]}g(x),\quad m(g)=\inf_{x\in[a,b]}g(x).$$

试利用 Cauchy 积分不等式证明：

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{4}(M(f)-m(f))(M(g)-m(g)).$$

18. $\forall x \in [0,1]$，我们用 $0.\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\cdots$ 表示 x 的十进制记法，定义函数 $f:[0,1]\to[0,1]$ 如下：

$$f(x) = 0.\varepsilon_2\varepsilon_1\varepsilon_3\cdots, \forall x = 0.\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\cdots$$

1) 研究函数 f 在 $[0,1]$ 上的连续性，证明 f 的间断点都是第一类的，并画出 f 的图形.

2) 证明：f 在 $[0,1]$ 上可积，并且 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

19. 设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上可积. 证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(提示：先假设 f 为在 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ 上取常值 A 而在 $[a,b]-[\alpha,\beta]$ 上取 0 值的阶梯函数，然后利用 f 的可积性，有阶梯函数 $h\in\mathscr{E}[a,b]$，使得 $\displaystyle\int_a^b |f(x)-h(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$.

20. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 可积，$g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续并且以 T 为周期. 证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^T g(x)\mathrm{d}x.$$

5.3 Riemann 和

在 §2 里我们把 Riemann 可积函数的积分定义为一列阶梯函数积分的极限. 现在我们要把它表示成仅依赖于函数本身的另一种形式的极限. 为此引入下述定义.

定义 5.8

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是任一函数. $\sigma=(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 是 $[a,b]$ 的任一分割. $\xi=\langle\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}\rangle$ 是一组实数，使得 $\xi_i\in[a_i,a_{i+1}]\ (i=0,1,\cdots,n-1)$.

1. (σ,ξ) 称为 $[a,b]$ 的一个带点分割，并用 $\mathscr{B}$ 表示 $[a,b]$ 的所有带点分割的集合.
2. 实数
$$S(f,\sigma,\xi)=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(a_{i+1}-a_i)$$
称为函数 f 关于 (σ,ξ) 的 Riemann 和.
3. 我们称实数 A 是 f 的 Riemann 和关于 $\mathscr{B}$ 的极限，如果下述性质成立：
$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\eta>0)(\forall(\sigma,\xi)\in\mathscr{B},\delta(\sigma)<\eta)\Longrightarrow|S(f,\sigma,\xi)-A|<\varepsilon.$$
这时，我们记作
$$\lim_{\mathscr{B}} S(f,\sigma,\xi)=A$$

♣

注意，上述 Riemann 和关于 $\mathscr{B}$ 的极限与函数极限的定义有点不一样，这里 $|S(f,\sigma,\xi)-A|<\varepsilon$ 不仅要求 $\delta(\sigma)<\eta$，而且 ξ 在 σ 确定后也可以任意选择. 因此 Riemann 和极限过程是比函数极限过程更复杂的一种极限过程.

定理 5.12

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是任一有界函数. 则下述两个结论等价:

1. f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.
2. 存在常数 A 使得 $\lim\limits_{\mathscr{B}} S(f,\sigma,\xi)=A$.

因此若 $f\in\mathscr{R}[a,b]$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\mathscr{B}} S(f,\sigma,\xi)$$

证明 1)$\Longrightarrow$ 2) 设 $f\in\mathscr{R}[a,b]$. 于是 $\forall\varepsilon>0,\exists h$, $k\in\mathscr{E}[a,b]$ 使得

$$|f(x)-h(x)|\leqslant k(x),\forall x\in[a,b],\int_a^b k(x)\mathrm{d}x<\varepsilon/4.$$

令 $\sigma_0=(b_0,b_1,\cdots,b_m)$ 为同时适合于 h,k 的 $[a,b]$ 的一个分割. 设 $|f(x)|\leqslant M,\forall x\in[a,b]$.

取 $\eta=\min\left(\dfrac{1}{3}\delta\left(\sigma_0\right),\dfrac{\varepsilon}{16(M+1)(m+1)}\right)$, 则 $\eta>0$. 对 σ_0 的每一个分点 b_j , 用闭区间 $\left[b_j-\eta,b_j+\eta\right]$ 把 b_j 包围起来. 现在设 $(\sigma,\xi)\in\mathscr{B}$, 并且 $\delta(\sigma)<\eta$. 令

$$\sigma=\left(a_0,a_1,\cdots,a_n\right),\xi=\left\langle\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}\right\rangle.$$

我们定义下面两个集合:

$$I=\left\{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}\,\middle|\,\forall j\in\{0,1,\ldots,m\},\ [a_i,a_{i+1}]\cap[b_j-\eta,b_j+\eta]=\varnothing\right\},$$

$$J=\left\{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}\,\middle|\,\exists j\in\{0,1,\ldots,m\},\ [a_i,a_{i+1}]\cap[b_j-\eta,b_j+\eta]\neq\varnothing\right\}.$$

显然 $I\cap J=\varnothing,I\cup J=\{0,1,\cdots,n-1\}$. 并且 $\forall i\in J,[a_i,a_{i+1}]\subset(b_j-\eta,b_j+\eta)$ 或者 $[a_i,a_{i+1}]$ 与 $\left[b_j-\eta,b_j+\eta\right]$ 有交点 $b_j-\eta$ 或 $b_j+\eta$(如图5.7所示). 因此所有这种闭区间 $[a_i,a_{i+1}]$ 的长度之和 $\sum\limits_{i\in J}(a_{i+1}-a_i)$ 满足下述不等式:

$$\begin{aligned}&\sum_{i\in J}(a_{i+1}-a_i)\leqslant 2\eta(m+1)+2\delta(\sigma)(m+1)\\&<4\eta(m+1)<4(m+1)\cdot\frac{\varepsilon}{16(M+1)(m+1)}\\&=\frac{\varepsilon}{4(M+1)}\end{aligned}\tag{5.2.2}$$

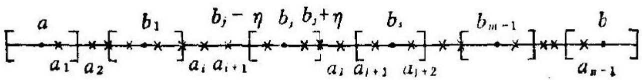

图 5.7

下面我们来证明 $\left|S(f,\sigma,\xi)-\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$.

由于

$$
\begin{aligned}
&\left|S(f,\sigma,\xi)-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\\
=&\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(a_{i+1}-a_i)-\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x\right|\\
=&\left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\xi_i)\,\mathrm{d}x-\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x\right|\\
=&\left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} [f(\xi_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x\right|\\
\leqslant&\left|\sum_{i\in I}\int_{a_i}^{a_{i+1}} [f(\xi_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x\right|+\left|\sum_{i\in J}\int_{a_i}^{a_{i+1}} [f(\xi_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x\right|,
\end{aligned}
$$

故我们分 $\left|\sum_{i\in I}\right|$ 与 $\left|\sum_{i\in J}\right|$ 两部分来估计.

i) $\left|\sum_{i\in I}\int_{a_i}^{a_{i+1}} [f(\xi_i)-f(\lambda)]\,\mathrm{d}x\right|$ 的估计:

我们注意到 $\forall i\in I,\exists j\in\{0,1,\cdots,m-1\}$ 使得 $[a_i,a_{i+1}]\subset(b_j,b_{j+1})$. 于是由 $x,\xi_i\in[a_i,a_{i+1}]$ 知, $x,\xi_i\in(b_j,b_{j+1})$. 因此

$$\forall x\in[a_i,a_{i+1}],h(x)=h(\xi_i),k(x)=k(\xi_i).$$

由于

$$|f(\xi_i)-h(\xi_i)|\leqslant k(\xi_i),|f(x)-h(x)|\leqslant k(x),\forall x\in[a_i,a_{i+1}],$$

故

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}}[f(\xi_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x\right|\\
\leqslant&\int_{a_i}^{a_{i+1}}|f(\xi_i)-h(\xi_i)|\,\mathrm{d}x+\int_{a_i}^{a_{i+1}}|h(\xi_i)-f(x)|\,\mathrm{d}x\\
\leqslant&\int_{a_i}^{a_{i+1}}k(\xi_i)\,\mathrm{d}x+\int_{a_i}^{a_{i+1}}k(x)\mathrm{d}x\\
=&2\int_{a_i}^{a_{i+1}}k(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

由此得到

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{i\in I}\int_{a_i}^{a_{i+1}}[f(\xi_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x\right|\\
\leqslant&\sum_{i\in I}\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}}[f(\xi_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x\right|\\
\leqslant&2\sum_{i\in I}\int_{a_i}^{a_{i+1}}k(x)\mathrm{d}x\\
\leqslant&2\int_a^b k(x)\mathrm{d}x<2\cdot\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

ii) $\left|\sum_{i\in J}\int_{a_i}^{a_i+1}[f(\xi_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x\right|$ 的估计：

$\forall i\in J$，我们有

$$\begin{aligned}&\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}}[f(\xi_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x\right|\\ \leqslant&\int_{a_i}^{a_{i+1}}|f(\xi_i)-f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant 2M(a_{i+1}-a_i)\end{aligned}$$

从而由不等式(5.2.2)得到

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i\in J}\int_{a_i}^{a_{i+1}}[f(\xi_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x\right|\\ \leqslant&\sum_{i\in J}\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}}[f(\xi_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x\right|_a\\ \leqslant&\sum_{i\in J}2M(a_{i+1}-a_i)\\ \leqslant&2M\cdot\frac{\varepsilon}{4(M+1)}<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

现在由 i) 和 ii) 的估计得到

$$\begin{aligned}&\left|S(f,\sigma,\xi)-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\\ \leqslant&\left|\sum_{i\in I}\int_{a_i}^{a_{i+1}}[f(\xi_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x\right|+\left|\sum_{i\in J}\int_{a_i}^{a_{i+1}}[f(\xi_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x\right|\\ <&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{\mathscr{B}}S(f,\sigma,\xi)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

2) $\Longrightarrow$ 1) 设存在常数 A 使得 $\lim\limits_{\mathscr{B}}S(f,\sigma,\xi)=A$，即

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\eta>0)(\forall(\sigma,\xi)\in\mathscr{B},\delta(\sigma)<\eta)\Longrightarrow|S(f,\sigma,\xi)-A|<\varepsilon.$$

设 $\sigma=(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 是 $[a,b]$ 的任一分割且 $\delta(\sigma)<\eta$. 令

$$m_i=\inf_{x\in[a_i,a_{i+1}]}f(x),M_i=\sup_{x\in[a_i,a_{i+1}]}f(x),i=0,1,\cdots,n-1.$$

构造函数 $\varphi,\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ 如下

$$\varphi(x)=\left\{\begin{array}{lll}m_i & 若\ x\in(a_i,a_{i+1}),\ i=0,1,\cdots,n-1 & M_i\\ f(a_i) & 若\ x=a_i,\ i=0,1,\cdots,n & f(a_i)\end{array}\right\}=\psi(x)$$

则 φ，$\psi\in\mathscr{E}[a,b]$，并且

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x),\forall x\in[a,b].$$

另一方面，利用确界特征性质，存在 $\xi_i',\xi_i''\in[a_i,a_{i+1}]$ 使得

$$m_i\leqslant f\left(\xi_i'\right)<m_i+\frac{\varepsilon}{4(b-a)},\quad M_i-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}<f\left(\xi_i''\right)\leqslant M_i(i=0,1,\cdots,n-1)$$

于是

$$\left|f\left(\xi_i'\right)-m_i\right|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)},\left|f\left(\xi_i''\right)-M_i\right|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}(i=0,1,\cdots,n-1)$$

令 $\xi'=\left\langle\xi_0',\xi_1',\cdots,\xi_{n-1}'\right\rangle,\xi''=\left\langle\xi_0'',\xi_1'',\cdots,\xi_{n-1}''\right\rangle$，则我们有 $\left(\sigma,\xi'\right)\in\mathscr{B},\left(\sigma,\xi''\right)\in\mathscr{B}$ 并且 $\delta(\sigma)<\eta$

. 因此

$$\left|S\left(f,\sigma,\xi'\right)-A\right|<\frac{\varepsilon}{4},\left|S\left(f,\sigma,\xi''\right)-A\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

现在

$$\begin{aligned}
&\left|S\left(f,\sigma,\xi'\right)-\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x\right|\\
=&\left|\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\xi_i'\right)\left(a_{i+1}-a_i\right)-\sum_{i=0}^{n-1}m_i\left(a_{i+1}-a_i\right)\right|\\
\leqslant&\sum_{i=0}^{n-1}\left|f\left(\xi_i'\right)-m_i\right|\left(a_{i+1}-a_i\right)\\
<&\frac{\varepsilon}{4(b-a)}(b-a)=\frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|S\left(f,\sigma,\xi''\right)-\int_a^b\psi(x)\mathrm{d}x\right|\\
=&\left|\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\xi_i''\right)\left(a_{i+1}-a_i\right)-\sum_{i=0}^{n-1}M_i\left(a_{i+1}-a_i\right)\right|\\
\leqslant&\sum_{i=0}^{n-1}\left|f\left(\xi_i''\right)-M_i\right|\left(a_{i+1}-a_i\right)\\
<&\frac{\varepsilon}{4(b-a)}(b-a)=\frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

因此最后我们得到

$$\begin{aligned}
0\leqslant&\int_a^b[\psi(x)-\varphi(x)]\mathrm{d}x\\
=&\left|\int_a^b\psi(x)\mathrm{d}x-\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x\right|\\
\leqslant&\left|\int_a^b\psi(x)\mathrm{d}x-S\left(f,\sigma,\xi''\right)\right|+\left|S\left(f,\sigma,\xi''\right)-A\right|+\left|A-S\left(f,\sigma,\xi'\right)\right|+\left|S\left(f,\sigma,\xi'\right)-\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x\right|\\
<&\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

此即表明 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 并且这时 $A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

推论 5.3

若 $f\in\mathscr{R}[a,b]$，则

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

从这个推论来看，函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 的 Riemann 积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义就十分明显.

将 $[a,b]n$ 等分，作出 $\dfrac{b-a}{n}$ 为底，以 $f\left(a+i-\dfrac{b-a}{n}\right)$ 为“高”的 15 方形 S_i，则 S_i 的“面积”为 $f\left(a+i\dfrac{b-a}{n}\right)\dfrac{b-a}{n}$(这里我们规定当 $f\left(a+i\dfrac{b-a}{n}\right)\geqslant 0$ 时 S_i 的“面积”$\geqslant 0$，当 $f\left(a+i\dfrac{b-a}{n}\right)<0$ 时，S_i 的“面积”<0)，因此

$$\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} = S_0, S_1, \cdots, S_{n-1} \text{ 的“面积”之和,}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} = S_1, S_2, \cdots, S_n \text{ 的“面积”之和.}$$

上述推论表明，当 $n\to+\infty$ 时，$S_0, S_1, \cdots, S_{n-1}$ 的“面积”之和或 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 的“面积”之和的极限存在，并且等于 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，因此 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 就是由函数 f 的图形 $\mathrm{Gr}(f)$, x 轴及直线 $x=a, x=b$ 所围平面区域的面积 (如图5.8所示).

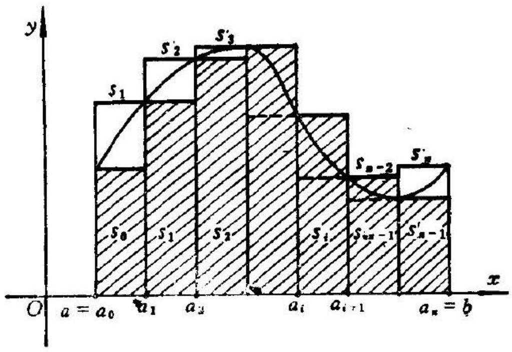

图 5.8

例题 5.11 计算 $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 的值.

定义函数 $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\forall x\in[0,1],\ f(x)=x, g(x)=x^2.$$

则函数 f,g 在 $[0,1]$. 上连续，因而在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积，根据上述推论有

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(0+i\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}\\ \int_0^1 x^2\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1} g\left(0+i\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i^2}{n^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

从图形上看，积分 $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 分别表示图5.9中两个阴影部分的面积.

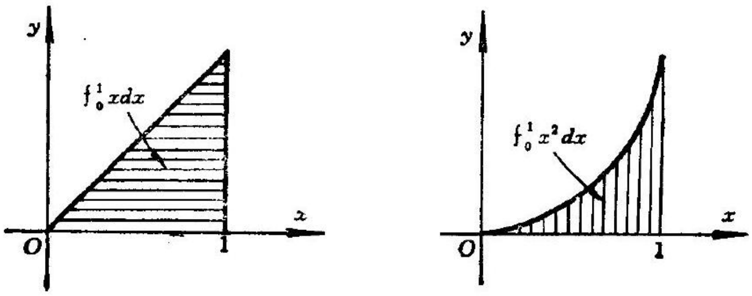

图 5.9

例题 5.12 证明：$\forall a>0, b>0$，

$$\int_1^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_a^{ab}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

首先设 $b>1$：由于函数 $.x \mapsto f(x)=\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$ 连续，故 f 在 $[1,b]$ 及 $[a,ab]$ 可积，根据上述推论我们有

$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+i\frac{b-1}{n}}\cdot\frac{b-1}{n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{a+i\frac{ab-a}{n}}\cdot\frac{ab-a}{n}\\ &= \int_a^{ab}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

再设 $b<1$：根据约定，$\int_1^b\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\int_b^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，因此由 $b>1$ 时所证结论我们有

$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x &= -\int_b^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\int_b^{b\cdot\frac{1}{b}}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\int_1^{\frac{1}{b}}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ &= -\int_{ab}^{ab\cdot\frac{1}{b}}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\int_{ab}^{a}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_a^{ab}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

最后设 $b=1$：这时，由约定 $\int_1^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_a^a\frac{1}{x}\mathrm{d}x=0$.

例题 5.13 证明实数序列 $\left\langle\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2\sin\frac{k\pi}{n}\right\rangle$ 收敛，并求其极限.

事实上，考虑函数 $x\longmapsto f(x)=x^2\sin\pi x, x\in[0,1]$. 它在 $[0,1]$ 上连续，因此 f 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积. 根据上述推论，我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(0+k\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}k^2\sin\frac{k\pi}{n}.\end{aligned}$$

此即表明实数序列 $\left\langle \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \sin\frac{k\pi}{n} \right\rangle$ 收敛，其极限为 $\int_0^1 x^2 \sin\pi x \mathrm{d}x$.

✍ 习 题 5.3

1. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在任意有限区间 $[\alpha,\beta]$ 上 Riemann 可积，直接由 Riemann 积分定义证明下列等式：
   1) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,\mathrm{d}x, \forall c\in\mathbb{R}$.
   2) $\int_{ac}^{bc} f(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(cx)\,\mathrm{d}x, \forall c\in\mathbb{R}$.
2. 证明定理 5.12 的推论.
3. 证明下列各极限存在，并求其极限：
   1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.
   2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$.
   3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$.
   4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1^\alpha}{n^{\alpha+1}}+\frac{2^\alpha}{n^{\alpha+1}}+\cdots+\frac{n^\alpha}{n^{\alpha+1}}\right), (\alpha>0)$.
   5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.
4. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是任一有界函数. $\sigma=(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 是 $[a,b]$ 的任一分割. 令

$$m_i=\inf_{x\in[a_i,a_{i+1}]} f(x), M_i=\sup_{x\in[a_i,a_{i+1}]} f(x),$$

$$D_i(f,\sigma)=\sum_{i=0}^{n-1} m_i(a_{i+1}-a_i), D_s(f,\sigma)=\sum_{i=0}^{n-1} M_i(a_{i+1}-a_i).$$

   我们分别称 $D_i(f,\sigma)$ 与 $D_s(f,\sigma)$ 为 f 关于 σ 的 Darboux 下和与 Darboux 上和. 证明下述结论等价：
   1) f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.
   2) $\forall\varepsilon>0,\exists\sigma$ 使得 $0\leqslant D_s(f,\sigma)-D_i(f,\sigma)<\varepsilon$.
5. 我们用 $\mathscr{A}$ 表示 $[a,b]$ 的所有分割的集合. $\forall\sigma_1,\sigma_2\in\mathscr{A}$，我们称 σ_2 比 σ_1 细，如果 σ_1 的分点也是 σ_2 的分点. 这时记为 $\sigma_1\prec\sigma_2$.

   这个题目的目的是证明：

$$\forall\sigma,\sigma'\in\mathscr{A}, D_i(f,\sigma)\leqslant D_s(f,\sigma').$$

   1) 证明：$\forall\sigma\in\mathscr{A}$，若 σ' 是比 σ 多一个分点的分割，则

$$D_i(f,\sigma)\leqslant D_i(f,\sigma'), D_s(f,\sigma')\leqslant D_s(f,\sigma).$$

   2) 证明：若 $\sigma,\sigma'\in\mathscr{A}$ 且 $\sigma\prec\sigma'$，则

$$D_i(f,\sigma)\leqslant D_i(f,\sigma'), D_s(f,\sigma')\leqslant D_s(f,\sigma).$$

   3) 证明：若 $\sigma,\sigma'\in\mathscr{A}$，则 $\sigma\prec\sigma\vee\sigma'$，$\sigma'\prec\sigma\vee\sigma'$.
   4) 由此推出：$D_i(f,\sigma)\leqslant D_s(f,\sigma')$.

6. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是任一有界函数，令

$$E=\{D_i(f,\sigma)\mid\sigma\in\mathscr{A}\},F=\{D_s(f,\sigma)\mid\sigma\in\mathscr{A}\}.$$

1) 证明：E 是上有界集，F 是下有界集.

2) 若令 $D_i(f)=\sup E$，$D_s(f)=\inf F$，则 $D_i(f)\leqslant D_s(f)$.

3) 证明：f 在 $[a,b]$ 上的上积分 $S(f)$ 与下积分 $i(f)$(定义见 §2 习题 5) 满足等式：

$$i(f)=D_i(f),S(f)=D_s(f).$$

7. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是任一有界函数. 证明下述各结论等价：

1) $f\in\mathscr{R}[a,b]$.

2) $\lim\limits_{\mathscr{B}}S(f,\sigma,\xi)=A,(A\in\mathbb{R})$.

3) $D_i(f)=D_s(f)$.

4) $i(f)=S(f)$.

8. 设 $f:[a,b]\to[c,d]$ 是任一严格单调上升的连续函数，$f^{-1}:[c,d]\to[a,b]$ 是 f 的反函数.

1) 设 $\sigma=(c_0,c_1,\cdots,c_n)$ 是 $[c,d]$ 的任一分割，$\sigma^{-1}=(f^{-1}(c_0),f^{-1}(c_1),\cdots,f^{-1}(c_n))$ 是对应于 σ 的 $[a,b]$ 的一个分割. 证明：

$$D_i(f^{-1},\sigma)+D_s(f,\sigma^{-1})=bd-ac.$$

2) 利用上述等式，证明：

$$\int_c^d f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=bd-ac.$$

3) 利用 2) 的公式计算积分 $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

9. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是任一有界函数. 这个题目的目的是要证明：若 $f\in\mathscr{R}[a,b]$，则 f 在 $[a,b]$ 上的连续点集是一个无限集.

1) 设 $\sigma=(a_0,a_1,\cdots,a_m)$ 是 $[a,b]$ 的一个分割，使得 $0\leqslant D_s(f,\sigma)-D_i(f,\sigma)<b-a$. 证明：存在 $i\in\{0,1,\cdots,m-1\}$，使得

$$0\leqslant M_i-m_i<1,$$

这里 $m_i=\inf\limits_{x\in[a_i,a_{i+1}]}f(x),M_i=\sup\limits_{x\in[a_i,a_{i+1}]}f(x)$.

2) 证明：存在实数 a_1,b_1，使得 $a<a_1<b_1<b$，并且

$$0\leqslant\sup_{x\in[a_1,b_1]}f(x)-\inf_{x\in[a_1,b_1]}f(x)<1.$$

3) 证明：存在实数 a_2,b_2，使得 $a<a_1<a_2<b_2<b_1<b$，并且

$$0\leqslant\sup_{x\in[a_2,b_2]}f(x)-\inf_{x\in[a_2,b_2]}f(x)<\frac{1}{2}.$$

4) 将此过程无限地继续下去，我们得到一闭区间族 $\{[a_n,b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得

$$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n],0\leqslant\sup_{x\in[a_n,b_n]}f(x)-\inf_{x\in[a_n,b_n]}f(x)<\frac{1}{n},\forall n\in\mathbb{N}.$$

由此推出存在一点 $x\in[a,b]$，使得 f 在 x 处连续.

5) 证明：f 在 $[a,b]$ 上有无限多个连续点.

6) 假设 $f\in\mathscr{R}[a,b]$，并且 $f>0$，证明 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

5.4 基本初等函数的定义

现在我们利用积分函数来定义对数函数, 指数函数, 幂函数等基本初等函数, 并研究它们的基本性质及其图形.

在定义基本初等函数之前, 我们先介绍如下概念.

1. 函数图形的无穷远分支及其渐近线

定义 5.9

设 $X\subset\mathbb{R}$ 是任一非空集合, $f:X\to\mathbb{R}$ 是任一函数.

1. 若 $+\infty$ 或 $-\infty$ 是 X 的聚点, 并且存在直线 $L:y=kx+b$ 使得
$$f(x)-(kx+b)\to 0(x\to+\infty \text{ 或 } -\infty),$$
则我们称函数 f 的图形 $\mathrm{Gr}(f)$ 有无穷远分支 $\Gamma_{+\infty}$ 或 $\Gamma_{-\infty}$, 而直线 L 称为此无穷远分支的渐近线, 特别地, 当 $k=0$ 时, 直线 $L:y=b$ 又称为水平渐近线.
2. 若 $a\in\mathbb{R}$ 是 X 的有限聚点, 使得
$$f(x)\to+\infty \text{ 或 } -\infty\left(x\to a^{+} \text{ 或 } x\to a^{-}\right),$$
则我们称函数 f 的图形 $\mathrm{Gr}(f)$ 有无穷远分支 Γ_{a^+} 或 Γ_{a^-}, 而直线 $x=a$ 称为此无穷远分支的垂直渐近线.

♣

由上述渐近线的定义可知, 直线 $L:y=kx+b$ 是无穷远分支 $\Gamma_{+\infty}$ 或 $\Gamma_{-\infty}$ 的渐近线, 当且仅当:
$$k=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(-\infty)}}\frac{f(x)}{x}, b=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(-\infty)}}[f(x)-kx].$$

2. 基本初等函数的定义及性质

1) 自然对数函数

由于函数 $x\longmapsto\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$ 连续, 故它的积分函数 $x\longmapsto\int_1^x\frac{1}{t}\mathrm{d}t, x\in(0,+\infty)$ 存在.

定义 5.10

函数 $x\longmapsto\int_1^x\frac{1}{t}\mathrm{d}t, x\in(0,+\infty)$ 称为自然对数函数, 记为 log(或 ln). $\forall x\in(0,+\infty), \log x$ 称为 x 的自然对数.

♣

于是
$$\log x=\int_1^x\frac{1}{t}\mathrm{d}t, \forall x\in(0,+\infty)$$
$$\log 1=0$$

自然对数函数的基本性质可综述如下.

定理 5.13

1. $\forall x, y \in (0, +\infty), \forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\log xy = \log x + \log y,$$
$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y,$$
$$\log x^n = n \log x.$$

2. log 是严格单调上升的连续函数，并且

$$\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$$

因此 log 是从乘法群 ($\mathbb{R}_*^+$, $\cdot$) 到加法群 $(\mathbb{R}, +)$ 上的同构映射.

3. log 的图形有无穷远分支 Γ_{0^+} 及垂直渐近线 $x = 0$.

证明

1. $\forall x, y \in (0, +\infty)$，由 §3 例5.12 知

$$\begin{aligned}\log xy &= \int_1^{xy} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \int_1^{x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t + \int_1^{y} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ &= \log x + \log y\end{aligned}$$

特别地取 $y = \frac{1}{x}$，我们得到

$$0 = \log 1 = \log x \cdot \frac{1}{x} = \log x + \log \frac{1}{x}.$$

从而 $\log \frac{1}{x} = -\log x$，因此

$$\log \frac{x}{y} = \log x + \log \frac{1}{y} = \log x - \log y.$$

现在设 $n \in \mathbb{Z}$.

若 $n \in \mathbb{N}$：则

$$\begin{aligned}\log x^n &= \log \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n\text{个}} \\ &= \log x + \log x + \cdots + \log x \\ &= n \log x.\end{aligned}$$

若 $-n \in \mathbb{N}$：则令 $m = -n$. 从而

$$\begin{aligned}\log x^n &= \log x^{-m} = \log \frac{1}{x^m} \\ &= -\log x^m = -m \log x = n \log x\end{aligned}$$

若 $n = 0$：则

$$\log x^0 = \log 1 = 0 = 0 \cdot \log x.$$

因此 $\forall n \in \mathbb{Z}, \log x^n = n \log x$.

2. 因为积分函数连续，所以自然对数函数 log 在 $(0, +\infty)$ 上连续.

现在设 $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$，并且 $x_1 < x_2$. 则

$$\log x_2 - \log x_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{t} \mathrm{d}t > 0$$

因此 $\log x_2 > \log x_1$，从而 log 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调上升.

另一方面，由于

$$\log 2^n = n \log 2, \log 2 > \log 1 = 0$$

故

$$\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log x = -\lim_{x\to 0^+} \log \frac{1}{x} = -\lim_{y\to+\infty} \log y = -\infty.$$

由此并结合性质 1) 知 log 是从乘法群 $(\mathbb{R}_*^+, \cdot)$ 到加法群 $(\mathbb{R}, +)$ 上的同构映射.

3. 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} \log x = -\infty$，故 log 的图形有无穷远分支 Γ_{0^+}，并且负 y 轴是它的垂直渐近线

根据上述分析，自然对数函数 log 的图形可描述如下：

注 由于 log 是从 $(0,+\infty)$ 到 $(-\infty,+\infty)$ 上的严格单调上升连续函数，故存在唯一的 $\bar{x} \in (0,+\infty)$ 使得 $\log \bar{x} = 1$，我们习惯地记 $\bar{x} = \mathrm{e}$，于是

$$\log \mathrm{e} = 1.$$

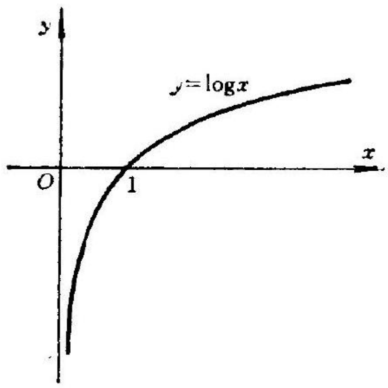

图 5.10

2) 以 $a(0 < a \neq 1)$ 为底的对数函数

由于 $0 < a \neq 1$，故 $\log a \neq 0$.

定义 5.11

函数 $x \longmapsto \dfrac{\log x}{\log a}, x \in (0,+\infty)$ 称为以 a 为底的对数函数，记为 $\log_a$. $\forall x \in (0,+\infty), \log_a x$ 称为 x 的以 a 为底的对数.

若 $a = 10$，则 $\log_a x$ 称为 x 的常用对数.

♣

由于 $\log \mathrm{e} = 1$，故

$$\log_{\mathrm{e}} x = \log x (x \in (0,+\infty)).$$

因此自然对数函数 log 就是以 e 为底的对数函数.

利用 $\log_a$ 的定义及定理5.13可证明关于 $\log_a$ 的下述性质.

定理 5.14

1. $\forall x, y \in (0, +\infty), \forall n \in \mathbb{Z}$.

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y,$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$
$$\log_a x^n = n \log_a x.$$

2. 若 $a > 1(0 < a < 1)$，则 $\log_a$ 是严格单调上升 (下降) 的连续函数，并且

$$\lim_{x\to 1^+} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$$
$$\left(\lim_{x\to 1^+} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty.\right)$$

因此 $\log_a$ 是从乘法群 ($\mathbb{R}_*^+, \cdot$) 到加法群 $(\mathbb{R}, +)$ 上的同构映射.

3. 当 $a > 1$ $(0 < a < 1)$ 时，$\log_a$ 的图形有无穷远分支 Γ_{0+}，并且负 (正)y 轴是 Γ_{0+} 的垂直渐近线.

定理的证明留给读者作为练习

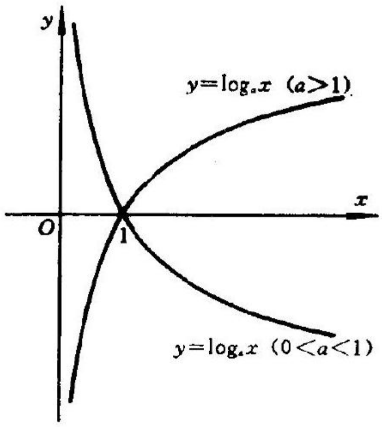

图 5.11

3) 以 e 为底的指数函数

由于自然对数函数 $x \longmapsto \log x, x \in (0, +\infty)$ 是从 $(0, +\infty)$ 到 $\mathbb{R}$ 上的严格单调上升的连续函数，根据定理4.12知，它有反函数存在，并且是从 $\mathbb{R}$ 到 $(0, +\infty)$ 上的严格单调上升的连续函数. 我们记这个反函数为：

$$x \longmapsto \exp x, x \in \mathbb{R}.$$

于是我们有

$$\log(\exp x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$
$$\exp(\log x) = x, \forall x \in \mathbb{R}_*^+.$$

现在我们特别地取 $x = n \in \mathbb{Z}$，由 log 的性质有

$$\log(\exp n) = n = n \log \mathrm{e} = \log \mathrm{e}^n.$$

从而

$$\exp n = \mathrm{e}^n.$$

这启发我们引入下述定义及记号.

定义 5.12

$\forall x \in \mathbb{R}$，我们令

$$\mathrm{e}^{x} \triangleq \exp x$$

函数 $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}, x \in \mathbb{R}$ 称为以 e 为底 x 为指数的指数函数.

关于此函数的性质，我们有下述定理.

定理 5.15

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
$$\mathrm{e}^{x+y}=\mathrm{e}^{x} \cdot \mathrm{e}^{y}, \mathrm{e}^{x-y}=\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{y}},$$
$$\mathrm{e}^{0}=1, y=\mathrm{e}^{x} \Longleftrightarrow x=\log y .$$
2. $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}, x \in \mathbb{R}$ 是严格单调上升的连续函数并且
$$\lim _{x \rightarrow-\infty} \mathrm{e}^{x}=0, \lim _{x \rightarrow+\infty} \mathrm{e}^{x}=+\infty .$$
因此它是从加法群 $(\mathbb{R},+)$ 到乘法群 $(\mathbb{R}_{*}^{+}, \cdot)$ 上的同构映射.
3. 此函数的图形有无穷远分支 $\Gamma_{-\infty}$，并且 $y=0$ 是 $\Gamma_{-\infty}$ 的水平渐近线.

证明

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$，由于 $\log \left(\mathrm{e}^{x}\right)=x$，故
$$\log \left(\mathrm{e}^{x+y}\right)=x+y, \log \left(\mathrm{e}^{x-y}\right)=x-y,$$
$$\log \left(\mathrm{e}^{x} \cdot \mathrm{e}^{y}\right)=\log \mathrm{e}^{x}+\log \mathrm{e}^{y}=x+y,$$
$$\log \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{y}}=\log \mathrm{e}^{x}-\log \mathrm{e}^{y}=x-y .$$
由 log 的单射性推知,
$$\mathrm{e}^{x+y}=\mathrm{e}^{x} \cdot \mathrm{e}^{y}, \mathrm{e}^{x-y}=\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{y}}, \mathrm{e}^{0}=1$$
同样由 $\log \mathrm{e}^{x}=x$ 推得
$$y=\mathrm{e}^{x} \Longleftrightarrow \log y=\log \mathrm{e}^{x}=x .$$
2. 由于 $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}, x \in \mathbb{R}$ 是自然对数函数 log 的反函数，故它是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}_{*}^{+}$ 上的严格单调上升的连续函数，从而
$$\lim _{x \rightarrow-\infty} \mathrm{e}^{x}=0, \lim _{x \rightarrow+\infty} \mathrm{e}^{x}=+\infty .$$
因此结合性质 1) 知以 e 为底的指数函数是从加法群 $(\mathbb{R},+)$ 到乘法群 $(\mathbb{R}_{*}^{+}, \cdot)$ 上的同构映射.
3. 由于 $\lim\limits_{x \rightarrow-\infty} \mathrm{e}^{x}=0$，故此函数的图形有无穷远分支 $\Gamma_{-\infty}$，它以 $y=0$ 为其水平渐近线.

由于以 e 为底的指数函数是自然对数函数的反函数，故这两个函数的图形关于直线 $y=x$ 对称，从而由 log 的图形得到函数 $x \mapsto \mathrm{e}^{x}, x \in \mathbb{R}$ 的图形，如图5.12所示.

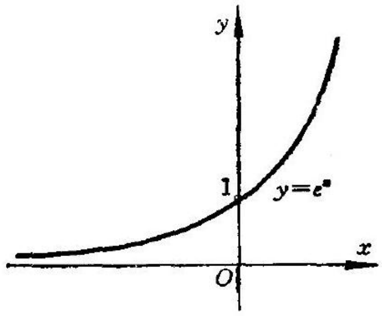

图 5.12

4) 以 $a(a>0)$ 为底的指数函数

定义 5.13

$\forall x\in\mathbb{R}$，令

$$a^x \triangleq \mathrm{e}^{x\log a}.$$

函数 $x\longmapsto a^x, x\in\mathbb{R}$ 称为以 a 为底 x 为指数的指数函数.

由以 e 为底的指数函数的性质可推得以 a 为底的指数函数的下述性质.

定理 5.16

1. $\forall x,y\in\mathbb{R}$，
$$\log a^x = x\log a,\quad a^0=1,$$
$$a^{x+y}=a^x\cdot a^y,\quad a^{-x}=\frac{1}{a^x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x,$$
$$a^{x-y}=\frac{a^x}{a^y},\qquad (a^x)^y=a^{xy},$$
$$(ab)^x=a^x\cdot b^x(b>0),\ y=a^x\iff x=\log_a y.$$
2. 若 $a>1$，则 $x\longmapsto a^x, x\in\mathbb{R}$ 是严格单调上升的连续函数，并且
$$\lim_{x\to-\infty}a^x=0,\quad \lim_{x\to+\infty}a^x=+\infty$$
若 $0<a<1$，则 $x\longmapsto a^x, x\in\mathbb{R}$ 是严格单调下降的连续函数，并且
$$\lim_{x\to-\infty}a^x=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}a^x=0.$$
若 $a=1$，则 $1^x=1, \forall x\in\mathbb{R}$.
因此 $\forall a>0$ 且 $a\neq 1, x\longmapsto a^x, x\in\mathbb{R}$ 是从加法群 $(\mathbb{R},+)$ 到乘法群 $(\mathbb{R}_*^+,\cdot)$ 上的同构映射.
3. 若 $a>1(0<a<1)$，函数 $x\longmapsto a^x, x\in\mathbb{R}$ 的图形有无穷远分支 $\Gamma_{-\infty}\,(\Gamma_{+\infty})$，它以 $y=0$ 为水平渐近线.

定理的证明留给读者.

由性质 1) 可知，函数 $x\longmapsto a^x, x\in\mathbb{R}$ 是对数函数 $x\longmapsto \log_a x, x\in\mathbb{R}_*^+$ 的反函数，故它的图形如图5.13所示.

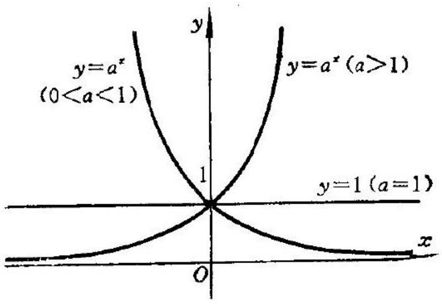

图 5.13

5) 幂函数

我们知道

i) 若 $n \in \mathbb{N}$，则 $\forall x \in \mathbb{R},\ x^n \triangleq x \cdot x \cdot \cdots \cdot x$.

ii) 若 $-n \in \mathbb{N}$，则 $\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}, x^n \triangleq \dfrac{1}{x^{-n}} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{-n}$.

iii) 若 $n=0$，则 $\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}, x^0 = 1$.

下面我们考虑 $a \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$.

定义 5.14

设 $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}, \forall x \in (0,+\infty)$，令

$$x^\alpha \triangleq \mathrm{e}^{\alpha \log x}.$$

函数 $x \longmapsto x^\alpha, x \in (0,+\infty)$ 称为以 α 为指数的幂函数. ♣

关于幂函数 $x \longmapsto x^\alpha, x \in (0,+\infty)$ 的性质，我们有下述定理.

定理 5.17

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}, \forall x, y \in (0,+\infty), (xy)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha, (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^\beta$.
2. 若 $\alpha > 0 (<0)$，则幂函数 $x \longmapsto x^\alpha, x \in (0,+\infty)$ 是严格单调上升 (下降) 的连续函数，并且
$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha = 0,\ \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$$
$$(\lim_{x\to 0+} x^\alpha = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0)$$
因此幂函数 $x \longmapsto x^\alpha, x \in (0,+\infty)$ 是从乘法群 $(\mathbb{R}_*^+, \cdot)$ 到乘法群 $(\mathbb{R}_*^*, \cdot)$ 上的同构映射.
3. 当 $\alpha < 0$ 时，幂函数 $.x \longmapsto x^\alpha, x \in (0,+\infty)$ 的图形有两个无穷远分支 Γ_0+ 与 $\Gamma_{+\infty}$，并且 Γ_{0+} 以正 y 轴为垂直渐近线，而 $\Gamma_{+\infty}$ 以正 x 轴为水平渐近线. ♡

此定理可由定理5.13及定理5.15推出，详细证明过程由读者补充.

幂函数 $x \longmapsto x^\alpha, x \in (0,+\infty)$ 的图形如图5.14所示.

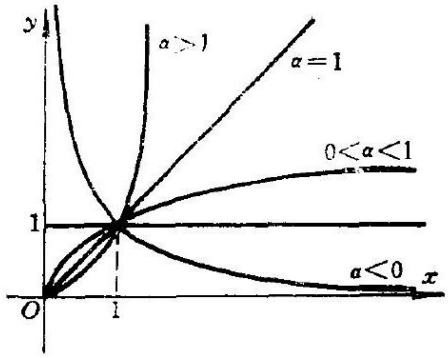

图 5.14

6) 双曲函数

定义 5.15

函数

$$x \mapsto \sinh x \triangleq \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \cosh x \triangleq \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \operatorname{th} x \triangleq \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, x \in \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \operatorname{cth} x \triangleq \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

分别称为双曲正弦函数, 双曲余弦函数, 双曲正切函数与双曲余切函数.

这些函数的基本性质可由下面两个定理来表述.

定理 5.18

1. 双曲正弦, 双曲余弦, 双曲正切, 双曲余切函数都是在各自定义域上的连续函数.
2. 下述等式成立:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, 1 - \operatorname{th}^2 x = -\frac{1}{\cosh^2 x}, \operatorname{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\sinh^2 x},$$
$$\sinh(-x) = -\sinh x, \cosh(-x) = \cosh x,$$
$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x, \operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x,$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$$

证明 性质 1) 直接由双曲函数的定义推出 2) 的各等式直接计算即可验证.

定理 5.19

关于双曲函数的单调性及其图形, 我们有下述各结论:

1. 双曲正弦函数在 $\mathbb{R}$ 上严格单调上升, 并且

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty, \lim_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty.$$

它的图形关于原点对称, 无渐近线.

2. 双曲余弦函数在 $[0,+\infty$ 上上严格单调上升，而在 $(-\infty,\ 0$ 上是严格单调下降的，并且

$$\lim_{x\to 0}\cosh x = 1,\ \lim_{x\to\pm\infty}\cosh x = +\infty$$

它的图形关于 y 轴对称，无渐近线.

3. 双曲正切函数在 $\mathbb{R}$ 上严格单调上升，并且

$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{th} x = -1,\ \lim_{x\to+\infty}\operatorname{th} x = 1$$

它的图形关于原点对称，并且有无穷远分支 $\Gamma_{+\infty}$ 与 $\Gamma_{-\infty}, \Gamma_{+\infty}$ 以 $y = 1$ 为水平渐近线，$\Gamma_{-\infty}$ 以 $y = -1$ 为水平渐近线.

4. 双曲余切函数在 $\mathbb{R}-\{0\}$ 上严格单调下降，并且

$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{cth} x = -1,\ \lim_{x\to 0^-}\operatorname{cth} x = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{cth} x = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\operatorname{cth} x = 1.$$

它的图形关于原点对称，并且有四个无穷远分支 $\Gamma_{-\infty}, \Gamma_{0^-}$，$\Gamma_{0^+}, \Gamma_{+\infty}$. $\Gamma_{-\infty}$ 以 $y = -1$ 为水平渐近线，Γ_{0^-} 以负 y 轴为垂直渐近线，Γ_{0^+} 以正 y 轴为垂直渐近线，而 $\Gamma_{+\infty}$ 以 $y = 1$ 为水平渐近线.

证明

1. 设 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}-\{0\}$，并且 $x_1 < x_2$.
由以 e 为底的指数函数的严格单调上升性，$\mathrm{e}^{2x_1} < \mathrm{e}^{2x_2}$，从而 $1-\mathrm{e}^{-2x_2} > 1-\mathrm{e}^{-2x_1}$，于是

$$\begin{aligned}\frac{\sinh x_2}{\sinh x_1} &= \frac{\mathrm{e}^{x_2}-\mathrm{e}^{-x_2}}{\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{-x_1}}\\ &= \mathrm{e}^{x_2-x_1}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-2x_2}}{1-\mathrm{e}^{-2x_1}}\right) > 1\end{aligned}$$

此即表明双曲正弦函数在 $\mathbb{R}-\{0\}$ 上严格单调上升.
现设 x_1，$x_2 \in \mathbb{R}$，并且 $x_1 < 0 < x_2$. 由定义知

$$\sinh x_1 < \sinh 0 = 0 < \sinh x_2.$$

因此双曲正弦函数在 $\mathbb{R}$ 上是严格单调上升的. 直接计算得到

$$\lim_{x\to-\infty}\sinh x = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\sinh x = +\infty$$

由此可知双曲正弦函数的图形无渐近线，并且由 $\sinh(-x) = -\sinh x, \forall x \in \mathbb{R}$ 知，此函数图形关于原点对称.

2. 因为 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1(\forall x \in \mathbb{R})$，并且 $\cosh x > 0$，所以 $\cosh x = \sqrt{1+\sinh^2 x}(\forall x \in \mathbb{R})$，由此，并根据双曲正弦函数的严格单调上升性和 $\sinh x < 0\left(\forall x \in \mathbb{R}_*^-\right)$ 及 $\sinh x > 0\left(\forall x \in \mathbb{R}_*^+\right)$ 推知，双曲余弦函数 ch 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调上升，而在 $(-\infty,0]$ 上严格单调下降.
现在直接由 $\cosh x$ 的表达式计算得到

$$\lim_{x\to 0}\cosh x = 1,\ \lim_{x\to\pm\infty}\cosh x = +\infty.$$

由此可知 ch 的图形无渐近线，并且由 $\approx(-x) = \cosh x(\forall x \in \mathbb{R})$ 推知，双曲余弦函数 ch 的图形关于 y 轴对称.

3. 由公式 $\operatorname{th}^2 x = 1 - \dfrac{1}{\cosh^2 x}$ 及双曲余弦的单调性推知，双曲正切 th 在 $\mathbb{R}$ 上是严格单调上升的.

直接由 th x 的表达式计算得到

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th} x=-1,\ \lim_{x\to+\infty} \operatorname{th} x=1.$$

由此可知双曲正切 th 图形有无穷远分支 $\Gamma_{-\infty}$ 与 $\Gamma_{+\infty}$，并且 $\Gamma_{-\infty}$ 以 $y=-1$ 为水平渐近线，$\Gamma_{+\infty}$ 以 $y=1$ 为水平渐近线.

由于 $\operatorname{th}(-x)=-\operatorname{th} x, \forall x\in\mathbb{R}$，故此函数图形关于原点对称.

4. 由公式 $\operatorname{cth}^2 x=1+\dfrac{1}{\sinh^2 x}$ 及双曲正弦的严格单调上升性推知，双曲余切函数在 $\mathbb{R}-\{0\}$ 上是严格单调下降的.

直接由 cth x 的表达式计算得到

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{cth} x=-1,\ \lim_{x\to0^-} \operatorname{cth} x=-\infty,$$

$$\lim_{x\to0^+} \operatorname{cth} x=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty} \operatorname{cth} x=1.$$

由此可知，双曲余切函数的图形有四个无穷远分支 $\Gamma_{-\infty}, \Gamma_0-$，$\Gamma_0+$ 及 $\Gamma_{+\infty}$，并且 $\Gamma_{-\infty}$ 以 $y=-1$ 为水平渐近线，Γ_{0^-} 以负 y 轴为垂直渐近线，$\Gamma_{0......+}$ 以正 y 轴为垂直渐近线，而 $\Gamma_{+\infty}$ 以 $y=1$ 为水平渐近线.

最后由于 $\operatorname{cth}(-x)=-\operatorname{cth} x$，故此函数图形关于原点对称.

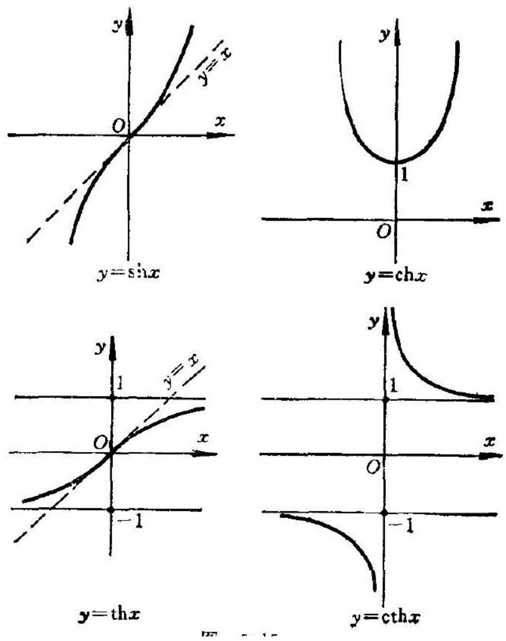

图 5.15

图5.15是各双曲函数的大致图形.

7) 反双曲函数

由定理5.19知，双曲正弦, 余弦, 正切, 余切分别是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$，从 $[0,+\infty)$ 到 $[1,+\infty)$，从 $\mathbb{R}$ 到 $(-1,\ 1)$，从 $\mathbb{R}-\{0\}$ 到 $\mathbb{R}-[-1,1]$ 上的严格单调的连续函数，根据定理4.12，它们都有反函数存在.

定义 5.16

1. 函数 $\sinh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的反函数称为反双曲正弦函数，记为

$$\operatorname{Arg\,sh}:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}.$$

2. 函数 $\cosh : [0,+\infty) \to [1,+\infty)$ 的反函数称为反双曲余弦函数，记为

$$\operatorname{Arg\,ch}:\ [1,+\infty) \to [0,+\infty).$$

3. 函数 $\operatorname{th} : \mathbb{R} \to (-1,1)$ 的反函数称为反双曲正切函数，记为

$$\operatorname{Arg\ th}:\ (-1,1) \to \mathbb{R}.$$

4. 函数 $\operatorname{cth} : \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}-[-1,1]$ 的反函数称为反双曲余切函数，记为

$$\operatorname{Arg\,cth}:\ \mathbb{R}-[-1,1] \to \mathbb{R}-\{0\}.$$

定理 5.20

1. 反双曲函数 Arg sinh, Arg cosh, Arg th, Arg cth 除 Arg cth 是严格单调下降外其余都是严格单调上升的连续函数.
2. 反双曲函数的显示表达式：

$$\operatorname{Arg\,sinh} x = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), x \in \mathbb{R};$$
$$\operatorname{Arg\,cosh} x = \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), x \in [1,+\infty);$$
$$\operatorname{Arg\,th} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}, x \in (-1,1);$$
$$\operatorname{Arg\,cth} x = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}, x \in \mathbb{R}-[-1,1].$$

证明 性质 1) 显然，下面我们来证明反双曲函数的显示表达式.

对 $\operatorname{Arg\,sinh} x$ ： 由 $y = \operatorname{Arg\,sinh} x$ 得到 $x = \sinh y$. 因为

$$\cosh y = \sqrt{\sinh^2 y + 1} = \sqrt{x^2+1},$$

所以

$$e^y = \sinh y + \cosh y = x + \sqrt{x^2+1},$$

从而

$$\operatorname{Arg\,sinh} x = y = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

对 $\operatorname{Arg\,cosh} x$ ： 由 $y = \operatorname{Arg\,cosh} x$ 得到 $x = \cosh y$. 于是

$$\sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{x^2-1},$$

从而

$$e^y = \cosh y + \sinh y = x + \sqrt{x^2-1},$$

因此

$$\operatorname{Arg\,cosh} x = y = \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

对 $\operatorname{Arg\,th} x$ ： 由 $y = \operatorname{Arg\,th} x$ 得到 $x = \operatorname{th} y$. 因为

$$\operatorname{th} y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1},$$

所以 $e^{2y}=\dfrac{1+x}{1-x}$，从而

$$\operatorname{Arg\,th}\ x=y=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}.$$

对 Arg cth x：由 $y=\operatorname{Arg\,cth}x$ 得到 $x=\operatorname{cth}y$. 因为 $\operatorname{cth}y=\dfrac{e^y+e^{-y}}{e^y-e^{-y}}=\dfrac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1}$, 所以 $e^{2y}=\dfrac{x+1}{x-1}$, 因此

$$\operatorname{Arg\,cth}x=y=\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}.$$

注 反双曲函数 Arg sh, Arg ch, Arg th, Arg cth 的图形可由相应双曲函数 sinh, cosh, th, cth 的图形关于直线 $y=x$ 的对称图形得到, 有一点要注意, 在作双曲余弦函数 ch 的图形关于 $y=x$ 的对称图形时, 只有位于 $y\geqslant 0$ 上半平面的那一分支才是反双曲余弦 Argch 的图形.

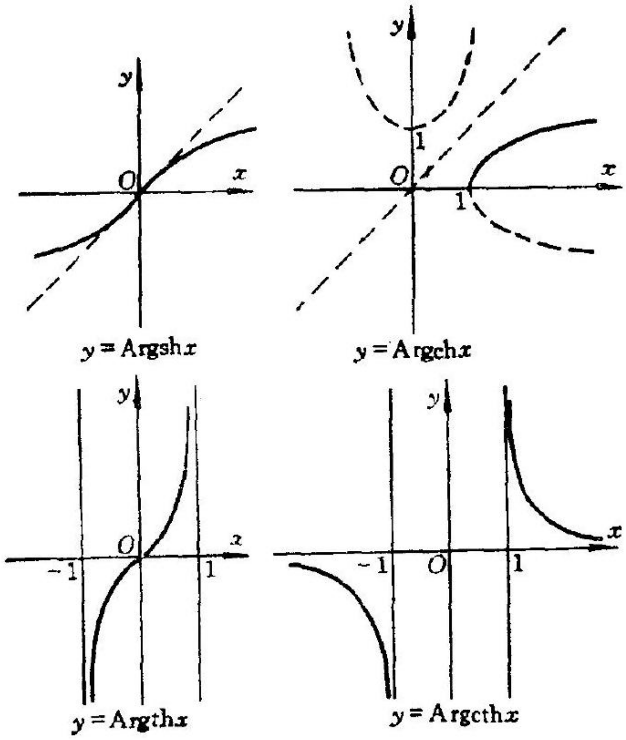

图 5.16

上面我们定义的七类函数连同有理整函数 (多项式函数), 有理分式函数, 三角函数, 反三角函数一起统称为基本初等函数.

由基本初等函数经过有限次加, 减, 乘, 除四则运算及函数的复合所得到的函数称为有限形式的初等函数.

作为初等函数的一个例子, 我们介绍所谓的幂指数函数.

幂指数函数 设 $u,v: X\to\mathbb{R}$ 是任意两个函数, 使得 $\forall x\in X, u(x)^{v(x)}$ 有定义, 则函数

$$x\longmapsto u(x)^{v(x)}, x\in X$$

为幂指数函数. 我们设 $a\in X$ 是一聚点.

1. 若 $\lim\limits_{x\to a} u(x)=A>0, \lim\limits_{x\to a} v(x)=B$，则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} &= \lim_{x\to a} \mathrm{e}^{v(x)\log u(x)}\\ &= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} v(x)\log u(x)}\\ &= \mathrm{e}^{B\log A}\\ &= A^B\end{aligned}$$

2. 若 $\lim\limits_{x\to a} u(x)=0$，但 $\lim\limits_{z\to a} v(x)\log u(x)=c$，则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} &= \lim_{x\to a} \mathrm{e}^{v(x)\log u(x)}\\ &= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} v(x)\log u(x)}\\ &= \begin{cases}\mathrm{e}^c, & \text{若 } c\in\mathbb{R},\\ +\infty, & \text{若 } c=+\infty,\\ 0, & \text{若 } c=-\infty.\end{cases}\end{aligned}$$

3. 若 $\lim\limits_{x\to a} u(x)=A, \lim\limits_{x\to a} v(x)=B$ 出现下列三种情形：

$$A=1, B=\pm\infty;\quad A=0, B=0;\quad A=\pm\infty, B=0.$$

则 $u(x)^{v(x)}$ 分别为 $1^{\pm\infty}, 0^0, \pm\infty^0$ 不定型，这种不定型极限的一般研究我们将在以后进行.

下面介绍一个典型的 1^∞ 不定型极限.

例题 5.14 证明

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.
2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，

$$\lim_{n\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}, (n\in\mathbb{Z}).$$

3. $\lim\limits_{h\to 0}(1+hx)^{\frac{1}{h}}=\mathrm{e}^x, \forall x\in\mathbb{R}$.

首先我们考虑 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$. 这是 1^∞ 不定型极限. 当 $|x|$ 充分小时，$1+x>0$，因此

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\log(1+x)}.$$

由于 $\log(1+x)=\displaystyle\int_1^{1+x}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$，故由第一积分中值公式知,

$$\log(1+x)=\frac{1}{\xi}\int_1^{1+x}\mathrm{d}t=\frac{x}{\xi}$$

这里 ξ 介于 1 与 $1+x$ 之间，从而 $\xi\to 1(x\to 0)$. 因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\log(1+x)}\\ &= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\log(1+x)}\\ &= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\xi}}\\ &= \mathrm{e}\end{aligned}$$

现在我们令 $y = \dfrac{1}{x}$，则 $y \to 0 (x \to \pm\infty)$. 从而

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = \mathrm{e}.$$

特别地取 $x = n \in \mathbb{Z}$，则

$$\lim_{n \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

最后令 $y = hx$，当 $x = 0$ 时 $y = 0$，并且 $y \to 0 (h \to 0)$. 因此

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} (1 + hx)^{\frac{1}{h}} &= \lim_{y \to 0} \left[(1 + y)^{\frac{1}{y}}\right]^x \\ &= \left[\lim_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}}\right]^x \\ &= \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

当 $x = 0$ 时，$\lim\limits_{h \to 0} (1 + hx)^{\frac{1}{h}} = 1 = \mathrm{e}^0$.

例题 5.15 证明：$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.

为此令 $(1 + x)^\alpha - 1 = y$，则 $y \to 0 (x \to 0)$，并且 $(1 + x)^\alpha = 1 + y$ 于是 $\alpha \log(1 + x) = \log(1 + y)$，从而

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{y}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{y}{\log(1 + y)} \cdot \frac{\alpha \log(1 + x)}{x} \\ &= \lim_{y \to :} \frac{1}{\log(1 + y)^{\frac{1}{y}}} \cdot \lim_{x \to 0} \alpha \log(1 + x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \alpha \cdot \frac{1}{\log \mathrm{e} \cdot \log \mathrm{e}} \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

例题 5.16 计算 $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1 + \tan x}{1 + \sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

这是 1^∞ 不定型极限，我们把它化为 $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ 型极限进行计算.

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} \\ &= \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x}\right)^{\frac{1}{\frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x}} \cdot \frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}} \\ &= \left[\lim_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}}\right]^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x (1 + \sin x)}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

最后作为这一节的结束，我们来考虑下面的一个重要极限，

在第 6 章 §2 中我们将要用到它.

例题 5.17 证明：$\forall a > 0$，$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty$.

我们只需证明 $x = n \in \mathbb{N}$ 时极限成立即可.

事实上，如果 $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^n}{n^\sigma} = +\infty$，那么由函数 $x \longmapsto \mathrm{e}^x, x \in (0, +\infty)$ 及 $x \longmapsto x^n, x \in (0, +\infty)$ 的

严格单调上升性我们有：$\forall x > 0$

$$\frac{e^x}{x^\alpha} \geqslant \frac{e^{[x]}}{([x]+1)^\alpha} = \frac{1}{e}\frac{e^{[x]+1}}{([x]+1)^\alpha}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}([x]+1) = +\infty$，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{[x]+1}}{([x]+1)^\alpha} = +\infty$，从而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty.$$

下面我们就来证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^n}{n^\alpha} = +\infty$.

固定 $k \in \mathbb{N}$ 使 $k > \alpha$. 令 $h = e-1, \forall n > k$，有

$$\begin{aligned}\frac{e^n}{n^\alpha} &= \frac{(1+h)^n}{n^\alpha} > \frac{C_n^{k+1}h^{k+1}}{n^k}\\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{(k+1)!n^k}h^{k+1}\\ &= n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{h^{k+1}}{(k+1)!}.\end{aligned}$$

由于 $\dfrac{h^{k+1}}{(k+1)!} > 0$ 为常数,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}\right) = 1,$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\dfrac{k}{n}\right)\dfrac{h^{k+1}}{(k+1)!} = +\infty$，从而

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n^\alpha} = +\infty$$

习题 5.4

1. 证明定理 5.14,5.16,5.17,5.18
2. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ 是任一连续函数. 证明：

   1)
   $$\left[\int_\alpha^b f^n(x)\,dx\right]^{\frac{1}{n}} \leqslant (b-a)^{\frac{1}{n}}\sup_{a<x<b} f(x), \forall n \in \mathbb{N}.$$

   2) 利用 f 的连续性及确界特性证明：
   $$\begin{aligned}(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0) \Rightarrow &\left[\int_a^b f^n(x)\,dx\right]^{\frac{1}{n}}\\ &\geqslant \delta^{\frac{1}{n}}\left(\sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) - \varepsilon\right).\end{aligned}$$

   3) 由此推出：
   $$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_a^b f^n(x)\,dx\right]^{\frac{1}{n}} = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

4) 若 $g:[a,b]\to\mathbb{R}^{+}$ 是任意 Riemann 可积函数，则

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_a^b f^n(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}f(x).$$

3. 设

$$x_n=\sqrt[n]{\left[1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right]\cdots\left[1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]},$$

$$y_n=\left(\sqrt[n+1]{n}\cdot\sqrt[n+2]{2n}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2n]{n^2}\right)^{\frac{1}{\log n}},$$

试研究序列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 的收敛性，并求其极限.

4. 计算下列各极限：

1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$, $(0<a\neq1)$,

2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$, $(a>0)$,

3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-\sqrt[m]{1+bx}}{x}$,

4) $\displaystyle\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$,

5) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{\tan 2x}$,

6) $\displaystyle\lim_{x\to1}(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}$,

7) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$, $(a_i>0)$,

8) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}$,

9) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$,

10) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sinh x}{x}$,

11) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cosh 2x-1}{x^2}$,

12) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\sin 2x}-\mathrm{e}^{\sin x}}{\tanh x}$,

13) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sinh^2 x}{\log(\cosh 2x)}$,

14) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cosh\frac{\pi}{x}}{\cos\frac{\pi}{x}}\right)^{x^2}$.

第六章 一元实值函数的导数

这一章我们介绍一元实值函数的导数概念. 研究了可导函数的基本性质及导数在函数的单调性、凸凹性研究及不定型极限计算中的应用.

6.1 导数的定义

1. 概念的引入

在物理学中, 我们经常要研究质点的运动. 假设一质点 M 在某一段时间 I 内的运动轨迹是一直线 l . 在 l 上取定一点 O 作为原点. 该质点在时刻 $t \in I$ 时相对于 O 的位置记为 $f(t)$. 于是我们得到一函数 $f: I \to \mathbb{R}$, 显然它描述了此质点 M 在此直线 l 上的运动规律.

假设 $t_0, t \in I$. 则 $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ 就是质点 M 在 t_0 与 t 时间间隔之内的平均速度. 当质点 M 不是作匀速运动时, $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ 就不是一个常值, 因此它不能反映质点在时刻 t_0 时的瞬时速度.

为了计算此质点在 t_0 时的瞬时速度, 自然我们应该让 $t \to t_0$, 即求下述形式的极限

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}.$$

在自然科学的许多实际和理论问题中都涉及到类似这种形式的极限. 这种形式的极限就是下而我们介绍的函数导数的概念.

从历史上看, 函数导数的概念本质上是由 Cauchy 在 1823 年首先是出来的. 下面我们就来介绍 Cauchy 导数的定义.

2. 有限导数

定义 6.1

设 $X \subset \mathbb{R}$ 是任一非空集合. $a \in X$ 是 X 的一聚点. $f: X \to \mathbb{R}$ 是任一函数.

1. 我们称函数 f 在 a 处可导, 如果极限
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
存在并且有限. 此极限称为 f 在 a 处的导数. 记为 $f'(a)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d} f(a)}{\mathrm{d} x}$, 因此
$$f'(a)=\frac{\mathrm{d} f(a)}{\mathrm{d} x}=\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$
2. 我们称函数 f 在 a 处右可导, 如果 a 是 X 的右侧聚点, 并且右极限
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
存在且有限. 此极限称为 f 在 a 处的右导数, 记为 $f'_+(a)$. 因此
$$f'_+(a)=\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$
3. 我们称函数 f 在 a 处左可导, 如果 a 是 X 的左侧聚点, 并且左极限
$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

存在且有限. 此极限称为 f 在 a 处的左导数, 记为 $f'_-(a)$. 因此

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

♣

函数 f 在一点 a 处的导数 $f'(a)$ 除了具有上述的物理意义外, 还有它的明显的几何意义.

导数的几何意义在平面直角坐标系 $\{O;\ x, y\}$ 内, 我们用 Γ 表示函数 f 的曲线. $M_0(a, f(a))$ 是 Γ 上的一定点, $M(x, f(x))$ 是 Γ 上的一动点. 联结 M_0 与 M 的割线 M_0M 的斜率就是 $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. 因此函数 f 在 a 处可导, 表示割线 M_0M 当点 M 沿 Γ 趋向于 M_0 时有极限直线 T 存在, 并且此极限直线 T 的斜率等于 $f'(a)$. 我们称 T 为 Γ 在 M_0 处的切线.

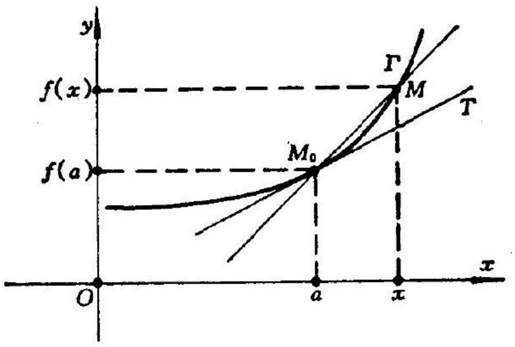

图 6.1

如果 f 在 a 处右 (左) 可导, 则我们称函数 f 的曲线 Γ 在 $M_0(a, f(a))$ 处有右 (左) 切线 T (T').

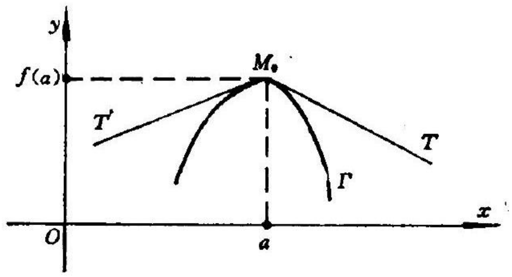

图 6.2

若 f 在 a 处可导, 并且 $f'(a) = 0$, 则曲线 Γ 在 M_0 处的切线 T 平行于 x 轴.

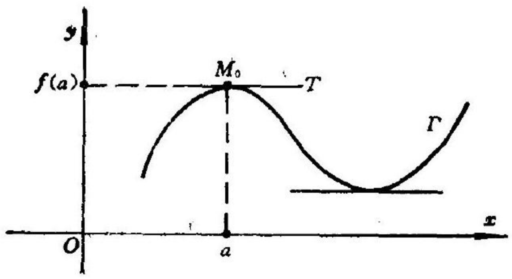

图 6.3

关于函数的导数与单侧导数之间的联系, 我们有下述定理.

定理 6.1

设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是任一函数，$a \in X$ 是 X 的一个双侧聚点. f 在 a 处可导的充分必要条件是：f 在 a 处左、右可导，并且 $f'_-(a) = f'\left(a^+\right)$. 这时

$$f'_-(a) = f'_+(a) = f'(a)$$

证明 直接由定理4.1推出.

3. 可导性的另一表示法

定理 6.2

设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是任一函数，$a \in X$ 是 X 的一聚点. f 在 a 处可导的充分必要条件是：存在一个函数 $\varphi: X \to \mathbb{R}$ 使得

1. $f(x) - f(a) = \varphi(x)(x-a), \forall x \in X$,
2. φ 在 a 处连续,

这时 $f'(a) = \varphi(a)$.

证明 (必要性) 设 f 在 a 处可导，于是由定义，我们有

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

令

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a), \forall x \in X - \{a\},$$

则 $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. 我们定义函数 $\varphi: X \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\varphi(x) = f'(a) + \varepsilon(x), \forall x \in X - \{a\}, \varphi(a) = f'(a).$$

则 φ 在 a 处连续，并且

$$f(x) - f(a) = \varphi(x)(x-a), \forall x \in X,$$
$$f'(a) = \varphi(a).$$

(充分性) 设存在满足定理条件 1) 与 2) 的函数 $\varphi: X \to \mathbb{R}$, 那么

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \varphi(x), \forall x \in X - \{a\}$$

由 φ 在 a 处的连续性推得

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a)$$

此即表明 f 在 a 处可导，并且 $f'(a) = \varphi(a)$.

推论 6.1

若函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 在 a 处可导，则 f 在 a 处连续.

证明 因为 f 在 a 处可导，故存在函数 $\varphi: X \to \mathbb{R}$ 使得

$$f(x) - f(a) = \varphi(x)(x-a), \forall x \in X, \varphi \text{ 在 } a \text{ 处连续 }.$$

令 $x \to a$ 立即得到

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

因此 f 在 a 处连续.

注 我们可以把定理6.2当作函数 f 在 a 处可导的定义，Carathéodory 在他的著作 (Theory of Functions of a Complex Variable,vol.1 Chelsera,New York,1954) 中就是这样定义函数可导及导数的. 我们可以称他的定义为 Carathéodory 导数定义以区别于 Cauchy 导数定义.

由于 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\varphi(x)$ 正是联结函数 f 的曲线 Γ 上两点 $(a, f(a))$ 与 $(x, f(x))$ 的割线的斜率，故 Carathéodory 导数定义强调了此割线以连续方式接近 Γ 在 $(a, f(a))$ 处的切线.

另一方面，Carathéodory 导数定义正像上述推论所指出的，深刻揭示了在一点可导的函数的重要内在性质——函数在可导点处连续.

以后我们将看到，利用定理 6.2或 Carathéodory 导数定义证明微分学的许多重要定理要比按 Cauchy 导数定义去证明更方便，论述更简洁.

下面我们有几个可导函数的例子.

例题 6.1 证明：$\forall n \in \mathbb{N}$, 幂函数 $x \longmapsto f(x)=x^n, x \in \mathbb{R}$ 在任一点 $a \in \mathbb{R}$ 处可导，并且

$$f'(a)=na^{n-1}.$$

事实上，由于 $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x^n-a^n=(x-a)\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1}\right).$$

所以对 $x \neq a$,

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1}.$$

从而

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1}\right)=na^{n-1}.$$

因此 f 在 a 处可导，并且

$$f'(a)=na^{n-1}$$

例题 6.2 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x)=\begin{cases} x^p\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \quad (p>1)$$

证明：f 在 $x=0$ 处可导，并且 $f'(0)=0$.

事实上，$\forall x \neq 0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x^{p-1}\sin\frac{1}{x}=0$$

因此 f 在 $x=0$ 处可导，并且

$$f'(0)=0$$

例题 6.3 证明：函数 $x \longmapsto f(x)=|x|, x\in\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 处左、右可导，但在 $x=0$ 处不可导.

事实上，这时我们有

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1,$$
$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1.$$

故 f 在 $x=0$ 处左、右可导，并且 $f'_-(0)=-1, f'_+(0)=1$.

由于 $f'_+(0) \neq f'_-(0)$，故 f 在 $x=0$ 处不可导.

4. 无穷大导数

定义 6.2

设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是任一函数，$a \in X$ 是 X 的一聚点，我们称 f 在 a 处有正 (负) 无穷大导数，记为 $f'(a) = +\infty(-\infty)$，如果

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty(-\infty)$$

♣

类似地，我们可以定义下述四种类型的正负无穷大导数：

$$f'_+(a) = +\infty, f'_+(a) = -\infty,$$
$$f'_-(a) = +\infty, f'_-(a) = -\infty.$$

例题 6.4 证明：对符号函数 $x \longmapsto \operatorname{sgn}(x), x \in \mathbb{R}$ 有

$$\operatorname{sgn}'_+(0) = +\infty, \operatorname{sgn}'_-(0) = +\infty.$$

事实上,

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sgn}(x)-\operatorname{sgn}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{1-0}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0-} \frac{\operatorname{sgn}(x)-\operatorname{sgn}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-1-0}{x} = +\infty$$

例题 6.5 证明：对函数 $x \longmapsto f(x) = x^{\frac{2}{3}}, x \in \mathbb{R}$ 有

$$f'_+(0) = +\infty, f'_-(0) = -\infty.$$

事实上

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^{-\frac{1}{3}}} = -\infty.$$

因此 $f'_+(0) = +\infty, f'_-(0) = -\infty$.

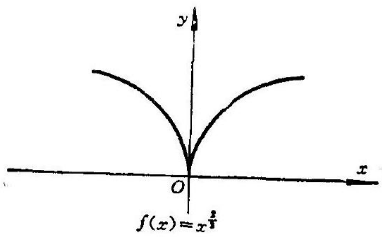

图 6.4

5. 导函数与高阶导数

定义 6.3

设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是任一函数，$Y \subset X$ 且 $Y \neq \varnothing$.

1. 若 f 在 Y 的每一点 x 处可导，则我们称 f 在 Y 上可导. 函数 $f': Y \to \mathbb{R}$，它定义为

$$\left(f'\right)(x) = f'(x), \forall x \in Y,$$

称为 f 在 Y 上的导函数.

2. 若 f 在 Y 上可导, 并且导函数 f' 在 Y 上连续, 则我们称 f 在 Y 上连续可导, 或称 f 在 Y 上是 C^1 类的.

♣

例题 6.6 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是任一区间. $f : I \to \mathbb{R}$ 是任一连续函数. $a \in I$ 是一固定点. 证明: f 的积分函数 $x \longmapsto F'(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x \in I$ 在 I 上是 C^1 类的, 并且

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I.$$

事实上, 任取 $x_0 \in I$. 由第一积分中值公式

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t = f(\xi_x)(x - x_0), \forall x \in I,$$

这里 ξ_x 介于 x_0 与 x 之间. 于是 $\xi_x \to x_0\ (x \to x_0)$.

令 $\varphi(x) = f(\xi_x), x \in I$, 则函数 $\varphi : I \to \mathbb{R}$ 在 x_0 处连续, $\varphi(x_0) = f(\xi_{x_0}) = f(x_0)$. 并且

$$F(x) - F(x_0) = \varphi(x)(x - x_0), \forall x \in I.$$

因此 F 在 x_0 处可导, 并且 $F'(x_0) = f(x_0)$.

由 r_0 的任意性加 F 在 I 上可导, 并且 F 的导函数 $F' = f$. 由于 f 在 I 上连续, 故 F 在 I 上是 C^1 类的.

例题 6.7 考虑自然对数函数

$$x \mapsto \log x = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t, x \in \mathbb{R}_*^+.$$

由于函数 $x \longmapsto \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}_*^+$ 在 $\mathbb{R}_*^+$ 上连续, 故由例 6.6 知, 自然对数函数 log 在 $\mathbb{R}_*^+$ 上是 C^1 类的, 并且

$$\log'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}_*^+.$$

定义 6.4

设 $f : X \to \mathbb{R}$ 是任一函数, $a \in X$.

1. 若存在 $\delta > 0$, 使得 f 在 $Y = X \cap B(a, \delta)$ 上可导, 并且 f 在 Y 上的导函数 $f' : Y \to \mathbb{R}$ 在 a 处可导, 则我们称函数 f 在 a 处二次可导, f' 在 a 处的导数称为 f 在 a 处的二阶导数, 记为

$$f''(a) \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^2 f(a)}{\mathrm{d}x^2}.$$

现在假设 f 在 Y 上的每一点 x 处的 $n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x)$ 或 $\frac{\mathrm{d}^{n-1} f(x)}{\mathrm{d}x^{n-1}}$ 已经定义, 如果函数 $x \longmapsto f^{(n-1)}(x), x \in Y$(称为 f 在 Y 上的 $n-1$ 阶导函数, 记为 $f^{(n-1)}$) 在 a 处可导, 则我们称 f 在 a 处 n 次可导, $f^{(n-1)}$ 在 a 处的导数称为 f 在 a 处的 n 阶导数, 记为

$$f^{(n)}(a) \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^n f(a)}{\mathrm{d}x^n}.$$

是

$$f^{(n)}(a) = \left(f^{(n-1)}\right)'(a).$$

2. 若 f 在 X 的每一点 x 处 n 次可导, 则我们称 f 在 X 上 n 次可导.
3. 若 f 在 X 上 n 次可导, 并且 f 的 n 阶导函数 $f^{(n)}$ 在 X 上连续, 则我们称 f 在 X 上是 n

次连续可导的, 或称 f 在 X 上是 C^n 类的.

4. 若 $\forall n \in \mathbb{N}$, 函数 f 在 X 上是 C^n 类的, 则我们称 f 在 X 上是 C^∞ 类的.

例题 6.8 证明：对例6.1的幂函数 $x \longmapsto f(x) = x^n, x \in \mathbb{R}(n \in \mathbb{N})$ 有：

1. $\forall k \leqslant n, f^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}(\forall x \in \mathbb{R})$.
2. $\forall k > n, f^{(k)}(x) = 0(\forall x \in \mathbb{R})$.

因此 f 在 $\mathbb{R}$ 上是 C^∞ 类的.

事实上, 当 $k=1$ 时 $f'(x) = nx^{n-1}$, 结论 1) 成立.

假设当 $k<n$ 时结论 1) 正确, 那么当 $k+1 \leqslant n$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(k)}(y) - f^{(k)}(x)}{y-x} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\left(y^{n-k} - x^{n-k}\right)}{y-x} \\
&= n(n-1)\cdots(n-k+1)(y^{n-k-1} + y^{n-k-2}x + \cdots + x^{n-k-1}), \\
\lim_{y\to x} \frac{f^{(k)}(y) - f^{(k)}(x)}{y-x} &= n(n-1)\cdots(n-k+1)\lim_{y\to x}(y^{n-k-1} + y^{n-k-2}x + \cdots + x^{n-k-1}) \\
&= n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)x^{n-k-1}.
\end{aligned}$$

此即表明 $f^{(k+1)}(x)$ 存在, 并且 $f^{(k+1)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k)x^{n-k-1}$ 因此结论 1) 成立. 结论 2) 显然. 因为 $f^{(n)}(x) = n!$, 从而 $\forall k > n, f^{(k)}(x) \equiv 0$. 于是 f 在 $\mathbb{R}$ 上是 C^∞ 类的.

作为这一节的结束, 我们介绍一下一元复值函数的导数.

6. 一元复值函数的导数

设 $X \subset \mathbb{R}, f: X \to \mathbb{C}$ 是任一复值函数. 令

$$f(x) = f_1(x) + \mathrm{i} f_2(x), \forall x \in X.$$

于是 $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ 是两个一元实值函数.

定义 6.5

f, f_1, f_2 如上所述

1. 我们称 f 在 $x \in X$ 处可导, 如果 f_1, f_2 在 x 处可导, 并且这时 f 在 x 处的导数 $f'(x)$, 定义为
$$f'(x) = f_1'(x) + \mathrm{i} f_2'(x).$$
2. 我们称 f 在 X 上可导, 如果 f 在 X 上的每一点处可导.
3. 我们称 f 在 X 上是 C^n 类的 $(n \geqslant 1)$, 如果 f_1, f_2 在 X 上是 C^n 类的.
4. 我们称 f 在 X 上是 C^∞ 类的, 如果 $\forall n \in \mathbb{N}, f$ 在 X 上是 C^∞ 类的.

由上述定义可知, 若 f 在 X 上是 C^n 类的, 则
$$f^{(n)}(x) = f_1^{(n)}(x) + \mathrm{i} f_2^{(n)}(x), \forall x \in X.$$

习题 6.1

1. 考虑 Dirichlet 函数 $x \longmapsto D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^c. \end{cases}$

1) 证明：D 在 $\mathbb{R}$ 的任一点 x 处都不可导.

2) 证明：函数 $x \mapsto g(x) = x^2 D(x)$，$x \in \mathbb{R}$ 只在 $x = 0$ 处可导，并且 $g'(0) = 0$.

2. 设 $a \in \mathbb{R}$, 并且 $a > 0$. 证明：函数 $x \mapsto |x|^a$，$x \in \mathbb{R}$ 在 $x = 0$ 处可导的充分必要条件是 $a > 1$.

3. 设函数 $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ 在点 $a \in X$ 处满足下述条件：

1) $f(a) = g(a) = h(a)$，$f'(a) = g'(a)$；

2) $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$，$\forall x \in X$.

证明：h 在 a 处可导，并且 $h'(a) = f'(a) = g'(a)$.

4. 设 $a, b \in \mathbb{R}$，考虑函数：

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x^2, x \geqslant x_0; \\ ax + b, x < x_0, \end{cases}$$

试选择常数 a 与 b，使得 f 在 x_0 处可导.

5. 证明：函数

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\sin \dfrac{\pi}{x}\right|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 的任何邻域内都有不可导的点. 但在 $x = 0$ 处可导，且 $f'(0) = 0$.

6. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是一开区间，$0 \in I$，函数 $f : I \to \mathbb{R}$ 在 $x = 0$ 处连续，且 $f(0) = 0$. 证明：若 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(2x) - f(x)}{x} = A \in \mathbb{R}$, 则 f 在 $x = 0$ 处可导，且 $f'(0) = A$.

7. 设 $f : I \to \mathbb{R}$ 是任一函数，$a \in I$ 是一内点，使得 $B(a, \delta) \subset I$. 令 $H = \{h \in \mathbb{R} \mid |h| < \delta\}$. 如果存在函数 $\varphi : H \to \mathbb{R}$ 使得：

1) $f(a + h) - f(a - h) = \varphi(h) \cdot 2h$，$\forall h \in H$；

2) φ 在 $h = 0$ 处连续.

则称 $\varphi(0)$ 为函数 f 在 a 处的对称导数，记作 $f_s'(a) = \varphi(0)$.

1) 证明：若 f 在 a 处的左、右导数存在，则 f 在 a 处的对称导数存在.

2) 证明：函数

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处有对称导数存在，但在 $x = 0$ 处的左、右导数都不存在.

8. 设函数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 在 $[a, b)$ 的每一点 x 处有右导数 $f'_+(x)$ 存在. 证明：存在一个开区间 $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$，使得 f 在 (α, β) 上连续.

9. 证明：函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处 $f'(0), f''(0), \cdots, f^{(n)}(0)$ 存在，但 $f^{(n+1)}(0)$ 不存在.

10. 设函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x) = \begin{cases} x^n, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

证明：f 在 $\mathbb{R}$ 上 $n-1$ 次可导，但 f 在 $x=0$ 处不是 n 次可导的.

11. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是任一 C^1 类函数，且 $f(a)=0$. 试利用定积分的 Cauchy 积分不等式证明：
$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

12. 设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 可导，导函数 $f':[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上可积. 令
$$S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+(k-1)\frac{b-a}{n}\right)f'\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$
试计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

13. 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，令
$$E(\alpha,\beta)=\left\{f\in C^1([a,b],\mathbb{R})\mid f(a)=\alpha,\ f(b)=\beta\right\}.$$
f_0 是 $E(\alpha,\beta)$ 中的仿射映射，即 $f_0(x)=Ax+B$. 试对 f_0 与 $f\in E(\alpha,\beta)$ 应用 Cauchy 积分不等式证明：
$$\forall f\in E(\alpha,\beta),\ \int_a^b [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b [f_0'(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

6.2 导数的计算

首先我们介绍导数计算的一般法则.

1. 导数计算的一般法则

定理 6.3

设函数 $f,g:X\to\mathbb{R}$ 在 $a\in X$ 处可导. 则

1. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 函数 $\alpha f+\beta g$; $X\to\mathbb{R}$ 在 a 处可导，并且
$$(\alpha f+\beta g)'(a)=\alpha f'(a)+\beta g'(a).$$
2. 函数 $fg:X\to\mathbb{R}$ 在 a 处可导，并且
$$(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a).$$
3. 当 $g(a)\neq 0$ 时，存在 $\delta>0$ 使得函数 $\dfrac{f}{g}:X\cap B(a,\delta)\to\mathbb{R}$ 在 a 处可导，并且
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

证明 因为 f,g 在 a 处可导，故根据定理6.2知，存在函数 $\varphi,\psi:X\to\mathbb{R}$ 使得

i) $f(x)-f(a)=\varphi(x)(x-a), g(x)-g(a)=\psi(x)(x-a), \forall x\in X$;

ii) φ,ψ 在 a 处连续，$\varphi(a)=f'(a),\psi(a)=g'(a)$.

于是 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}$ 我们有
$$(\alpha f+\beta g)(x)-(\alpha f+\beta g)(a)=a[f(x)-f(a)]+\beta[g(x)-g(a)]=[\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x)](x-a),$$
$$(fg)(x)-(fg)(a)=[f(x)-f(a)]g(x)+f(a)[g(x)-g(a)]=[\varphi(x)g(x)+f(a)\psi(x)](x-a).$$
若我们令：$\forall x\in X$
$$h(x)=\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x),k(x)=\varphi(x)g(x)+f(a)\psi(x),$$

则函数 $h, h: X \to \mathbb{R}$ 在 a 处连续，并且

$$(\alpha f+\beta g)(x)-(\alpha f+\beta g)(a)=h(x)(x-a), \forall x \in X,$$

$$(fg)(x)-(fg)(a)=k(x)(x-a), \forall x \in X.$$

因此根据定理6.2知，函数 $\alpha f+\beta g, fg$ 在 a 处可导，并且

$$(\alpha f+\beta g)'(a)=h(a)=\alpha\varphi(a)+\beta\psi(a)=\alpha f'(a)+\beta g'(a)$$

$$(fg)'(a)=k(a)=\varphi(a)g(a)+f(a)\psi(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

最后由于 $g(a)\neq 0$，故由 g 在 a 处的连续性知，存在 $\delta>0$，使得 $g(x)\neq 0, \forall x \in X\cap B(a,\delta)$．于是

$$\begin{aligned}\frac{f}{g}(x)-\frac{f}{g}(a)=&\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(a)g(x)}\\=&\frac{[f(x)-f(a)]g(a)-f(a)[g(x)-g(a)]}{g(a)g(x)}\\=&\frac{[\varphi(x)g(a)-f(a)\psi(x)]}{g(a)g(x)}(x-a), \forall x \in X\cap B(a,\delta).\end{aligned}$$

令 $s(x)=\dfrac{\varphi(x)g(a)-f(a)\psi(x)}{g(a)g(x)}, \forall x \in X\cap B(a,\delta)$，则函数 $s: X\cap B(a,\delta)\to\mathbb{R}$ 在 a 处连续，并且

$$\frac{f}{g}(x)-\frac{f}{g}(a)=s(x)(x-a), \forall x \in X\cap B(a,\delta).$$

因此函数 $\dfrac{f}{g}: X\cap B(a,\delta)\to\mathbb{R}$ 在 a 处可导，并且

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=s(a)=\frac{\varphi(a)g(a)-f(a)\psi(a)}{g(a)^2}=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

例题 6.9 证明：对函数 $x\longmapsto x^n, x\in\mathbb{R}-\{0\}, (n\in\mathbb{Z}-\{0\})$,

$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

事实上，若 $n\in\mathbb{N}$，则在 § 1 例6.1中已证

$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

若 $n\in-\mathbb{N}$，则 $-n\in\mathbb{N}$，由上述定理知

$$(x^n)'=\left(\frac{1}{x^{-n}}\right)'=\frac{1'\cdot x^{-n}-1\cdot(x^{-n})'}{x^{-2n}}=\frac{-(-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}}=nx^{n-1}$$

定理 6.4 (复合函数的导数)

设函数 $f: X\to\mathbb{R}$ 与函数 $g: Y\to\mathbb{R}$ 满足下述条件：

1. a 是 $Z=X\cap f^{-1}(Y)$ 的聚点.
2. f 在 $a\in X$ 处可导，g 在 $b\in Y$ 处可导，且 $b=f(a)$ 则复合函数 $g\circ f: Z\to\mathbb{R}$ 在 a 处可导，并且

$$(g\circ f)'(a)=g'(b)\cdot f'(a)$$

证明 由于 f 在 a 处可导，g 在 b 处可导，故存在函数 $\varphi: X\to\mathbb{R}$ 及函数 $\psi: Y\to\mathbb{R}$ 使得

i) $f(x)-f(a)=\varphi(x)(x-a)\forall x\in X$； φ 在 a 处连续，$\varphi(a)=f'(a)$．

ii) $g(y)-g(b)=\psi(y)(y-b), \forall y\in Y$； ψ 在 b 处连续，$\psi(b)=g'(b)$．

于是 $\forall x \in Z = X \cap f^{-1}(Y)$,

$$\begin{aligned} g \circ f(x) - g \circ f(a) &= g(f(x)) - g(f(a)) \\ &= \psi(f(x))[f(x) - f(a)] \\ &= \psi(f(x))\varphi(x)(x-a) \\ &= (\psi \circ f) \cdot \varphi(x)(x-a), \end{aligned}$$

由于函数 $(\psi \circ f)\varphi : Z \to \mathbb{R}$ 在 a 处连续, 故由定理 6.2 知 $g \circ f$ 在 a 处可导, 并且

$$(g \circ f)'(a) = (\psi \circ f) \cdot \varphi(a) = \psi(f(a)) \cdot \varphi(a) = g'(b) \cdot f'(a).$$

定理 6.5 (反函数的导数)

设 $X, Y \subset \mathbb{R}$ 是两个非空集合, $f : X \to Y$ 与 $f^{-1} : Y \to X$ 互为反函数, $a \in X, b = f(a) \in Y$, 此外还假设

1. f 在 a 处可导, 并且 $f'(a) \neq 0$;
2. f^{-1} 在 b 处连续, 则 f^{-1} 在 b 处可导, 并且

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

证明 首先由于 f 是可逆的, 并且 a 是 X 的聚点, 故 $b = f(a)$ 是 Y 的聚点. 由假设 f 在 a 处可导知, 存在函数 $\varphi : X \to \mathbb{R}$ 使得

1. $f(x) - f(a) = \varphi(x)(x-a), \forall x \in X$;
2. φ 在 a 处连续, 并且 $\varphi(a) = f'(a)$.

由于 $\varphi(a) \neq 0$, 不失一般性, 我们可以假设 $\forall x \in X, \varphi(x) \neq 0$.

现在令 $x = f^{-1}(y)(\forall y \in Y)$, 则 $\varphi\left(f^{-1}(y)\right) \neq 0, \forall y \in Y$. 并且

$$f\left(f^{-1}(y)\right) - f\left(f^{-1}(b)\right) = \varphi\left(f^{-1}(y)\right)\left[f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\right]$$

或

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(b) = \frac{1}{\varphi\left(f^{-1}(y)\right)}(y-b), \forall y \in Y.$$

由于 f^{-1} 在 b 处连续, 故函数 $\varphi \circ f^{-1} : Y \to \mathbb{R}$ 在 b 处连续, 根据定理6.2知, f^{-1} 在 b 处可导, 并且

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{\varphi\left(f^{-1}(b)\right)} = \frac{1}{\varphi(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

注 如果我们预先知道 f 的反函数 f^{-1} 在 $b = f(a)$ 处可导, 那么由恒等式

$$f^{-1} \circ f(x) = \mathrm{id}_X(x), \forall x \in X,$$

分别对等式两边的函数求在 a 处的导数, 根据定理6.4, 我们得到

$$\left(f^{-1}\right)'(b) \cdot f'(a) = 1.$$

若 $f'(a) \neq 0$, 则 $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

定理 6.6 (Leibniz 公式)

设函数 $f,g:X\to\mathbb{R}$ 在 $a\in X$ 处 n 次可导，则函数 $fg:X\to\mathbb{R}$ 在 a 处 n 次可导，并且

$$\begin{aligned}(fg)^{(n)}(a)=&f^{(n)}(a)g(a)+C_n^1f^{(n-1)}(a)g'(a)\\&+C_n^2f^{(n-2)}(a)g''(a)+\cdots+C_n^kf^{(n-k)}(a)g^{(k)}(a)\\&+\cdots+C_n^{n-1}f'(a)g^{(n-1)}(a)+f(a)g^{(n)}(a)\end{aligned}$$

证明 我们对 n 用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时，上述公式化为 $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$ 这就是定理6.3的 2).

现在假设当 $n=m$ 时 Leibniz 公式成立，那么当 $n=m+1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}(fg)^{(m+1)}(a)=&\left[(fg)^{(m)}\right]'(a)\\=&\left(f^{(m)}g\right)'(a)+C_m^1\left(f^{(m-1)}g'\right)'(a)+C_m^2\left(f^{(m-2)}g''\right)'(a)\\&+\cdots+C_m^{k-1}\left(f^{(m-k+1)}g^{(k-1)}\right)'(a)+C_m^k\left(f^{(m-k)}g^{(k)}\right)'(a)\\&+\cdots+\left(fg^{(m)}\right)'(a)\\=&f^{(m+1)}(a)g(a)+f^{(m)}(a)g'(a)\\&+C_m^1f^{(m)}(a)g'(a)+C_m^1f^{(m-1)}(a)g''(a)\\&+C_m^2f^{(m-1)}(a)g''(a)+C_m^2f^{(m-2)}(a)g'''(a)+\cdots\\&+C_m^{k-1}f^{(m-k+2)}(a)g^{(k-1)}(a)+C_m^{k-1}f^{(m-k+1)}(a)g^{(k)}(a)\\&+C_m^kf^{(m-k+1)}(a)g^{(k)}(a)+C_m^kf^{(m-k)}(a)g^{(k+1)}(a)\\&+\cdots+f'(a)g^{(m)}(a)+f(a)g^{(m+1)}(a)\\=&f^{(m+1)}(a)g(a)+\left(C_m^0+C_m^1\right)f^{(m)}(a)g'(a)\\&+\left(C_m^1+C_m^2\right)f^{(m-1)}(a)g''(a)\\&+\cdots+\left(C_m^{k-1}+C_m^k\right)f^{(m-k+1)}(a)g^{(k)}(a)\\&+\cdots+f(a)g^{(m+1)}(a)\\=&f^{(m+1)}(a)g^{(a)}+C_{m+1}^1f^{(m)}(a)g'(a)\\&+C_{m+1}^2f^{(m-1)}(a)g''(a)+\cdots+C_{m+1}^kf^{(m-k+1)}(a)g^{(k)}(a)\\&+\cdots+f(a)g^{(m+1)}(a)\end{aligned}$$

(这里我们觥用了组合公式 $C_m^{k-1}+C_m^k=C_{m+1}^k,\forall k=1,\cdots,m$). 此即表明 $n=m+1$ 时，Leibniz 公式成立. 由归纳法知，$\forall n\in\mathbb{N}$, Leibniz 公式成立.

作为导数计算法则的应用，我们下面来计算基本初等函数的导数.

2. 基本初等函数的导数

1) 三角函数的导数

$x\longmapsto\sin x, x\in\mathbb{R}$ 的导数 $\forall a\in\mathbb{R}$, 由于

$$\sin x-\sin a=2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2},\forall x\in\mathbb{R},$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}&=\lim_{x\to a}2\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}\cos\frac{x+a}{2}\\&=\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\\&=\cos a.\end{aligned}$$

因此正弦函数 $x\longmapsto\sin x,x\in\mathbb{R}$ 在 a 处可导，并且 $\sin'(a)=\cos a$. 由 a 的任意性我们得到

$$\sin' x=\cos x,\forall x\in\mathbb{R}.$$

$x\longmapsto\cos x,x\in\mathbb{R}$ 的导数由于

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\forall x\in\mathbb{R}.$$

故由定理 6.4 知，余弦函数 $x\longmapsto\cos x,x\in\mathbb{R}$ 在任一点 x 处可导，并且

$$\begin{aligned}\cos'(x)&=\sin'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1)=-\sin x.\end{aligned}$$

因此

$$\cos' x=-\sin x,\forall x\in\mathbb{R}.$$

$x\longmapsto\tan x,x\in\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ 的导数由于

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\forall x\in\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\},$$

故由定理6.3知正切函数 $x\longmapsto\tan x,x\in\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ 在任一点 $x\in\mathbb{R}-\{k\pi+\frac{\pi}{2}\Big|\ k\in Z\Big\}$ 处可导，并且

$$\tan' x=\frac{\sin' x\cos x-\cos' x\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

因此

$$\tan' x=\frac{1}{\cos^2 x},\forall x\in\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

$x\longmapsto\cot x,x\in\mathbb{R}-\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ 的导数由于

$$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x},\forall x\in\mathbb{R}-\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$$

故由定理6.3知余切函数 $x\longmapsto\cot x,x\in\mathbb{R}-\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ 在任一点 $x\in\mathbb{R}-\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ 处可导，并且

$$\cot' x=\frac{\cos' x\sin x-\sin' x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

因此

$$\cot' x=-\frac{1}{\sin^2 x},\forall x\in\mathbb{R}-\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$$

2) 反三角函数的导数

$x\longmapsto\arcsin x,x\in[-1,1]$ 的导数由于 $\sin:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\longrightarrow[-1,1]$ 与 $\arcsin:[-1,1]\longrightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 互为反函数，并且 $\forall y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\sin' y=\cos y>0$, 故由反函数求导法则知，反正弦函数 $x\longmapsto\arcsin x,x\in[-1,1]$ 在任一点 $x\in(-1,1)$ 处可导，并且

$$\arcsin' x=\frac{1}{\sin'(\arcsin x)}=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

另一方面，由于

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}.$$

因此

$$\arcsin' x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in (-1,1)$$

$x \longmapsto \arccos x, x \in [-1,1]$ 的导数由于

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in [-1,1],$$

因此反余弦函数 $x \longmapsto \arccos x, x \in [-1,1]$ 在任一点 $x \in (-1,1)$ 处可导，并且

$$\arccos' x + \arcsin' x = 0$$

因此

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \forall x \in (-1,1)$$

$x \longmapsto \arctan x, x \in \mathbb{R}$ 的导数由于

$$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R} \text{ 与 } \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

互为反函数，并且 $\forall y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \tan' y = \frac{1}{\cos^2 y} > 0$，故由反函数求导法则知，反正切函数 $x \longmapsto \arctan x, x \in \mathbb{R}$ 在任一点 $x \in \mathbb{R}$ 处可导，并且

$$\begin{aligned} \arctan x &= \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1/\cos^2(\arctan x)} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} \end{aligned}$$

因此

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$x \longmapsto \operatorname{arccot} x, x \in \mathbb{R}$ 的导数由于

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R},$$

故反余切函数 $x \longmapsto \operatorname{arccot} x, x \in \mathbb{R}$ 在任一点 $x \in \mathbb{R}$ 处可导，并且

$$\arctan' x + \operatorname{arccot}' x = 0$$

因此

$$\operatorname{arccot}' x = -\frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

3) 对数函数的导数

在 §1 例6.7中我们已经计算了自然对数函数 $x \longrightarrow \log x, x \in \mathbb{R}_*^+$ 在任一点 $x \in \mathbb{R}_*^+$ 处的导数为

$$\log' x = \frac{1}{x}$$

因此以 $a(0 < a \neq 1)$ 为底的对数函数 $x \mapsto \log_a x, x \in \mathbb{R}_*^*$ 在任一点 $x \in \mathbb{R}$ 处可导，并且其导数为

$$\log_a' x = \frac{1}{\log a} \log' x = \frac{1}{x \log a}$$

因此

$$\log' x = \frac{1}{x}, \log_a' x = \frac{1}{x \log a}, \forall x \in \mathbb{R}_*^+.$$

4) 指数函数的导数

由于自然对数函数 $y \longmapsto \log y, y \in \mathbb{R}_*^+$ 与以 e 为底的指数函数 $x \longmapsto e^x, x \in \mathbb{R}$ 互为反函数，并且 $\forall y \in \mathbb{R}_*^+, \log' y = \dfrac{1}{y} > 0$, 故由反函数的求导法则知，指数函数 $x \longmapsto e^x, x \in \mathbb{R}$ 在任一点 $x \in \mathbb{R}$ 处可导，并且

$$(e^x)' = \frac{1}{\log'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$$

从而以 a 为底的指数函数 $x \longmapsto a^x, x \in \mathbb{R}$ 在任一点 $x \in \mathbb{R}$ 处也可导，并且

$$\left(a^x\right)' = \left(e^{x\log a}\right)' = e^{x\log a}, (x\log a)' = a^x \log a.$$

因此

$$\left(e^x\right)' = e^x, \left(a^x\right)' = a^x \log a, \forall x \in \mathbb{R}.$$

5) 幂函数的导数

当 $n \in \mathbb{Z}$ 时，我们在前面已经证明了

i) $n \in \mathbb{N}$ 时，$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}, \forall x \in \mathbb{R}$.

ii) $n \in -\mathbb{N}$ 时，$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

iii) $n = 0$ 时，$\left(x^n\right)' = 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

当 $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ 时，由幂函数 $x \longmapsto x^n, x \in \mathbb{R}_*^+$ 的定义可知，它在任一点 $x \in \mathbb{R}_*^+$ 处可导，并且

$$\left(x^a\right)' = \left(e^a \log x\right)' = e^a \log x \cdot (\alpha \log x)' = \alpha x^{a-1}$$

因此

$$\left(x^a\right)' = a x^{a-1}, \forall x \in \mathbb{R}_*^+$$

6) 双曲函数的导数

根据双曲函数的定义及指数函数的求导公式，直接计算得到

$$\begin{aligned}
\sinh' x &= \cosh x, && \forall x \in \mathbb{R}. \\
\cosh' x &= \sinh x, && \forall x \in \mathbb{R}. \\
\tanh' x &= \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x, && \forall x \in \mathbb{R}. \\
\coth' x &= -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}
\end{aligned}$$

7) 反双曲函数的导数

由于

$$\begin{aligned}
\operatorname{arsinh} x &= \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \forall x \in \mathbb{R}, \\
\operatorname{arcosh} x &= \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \forall x \in [1, +\infty), \\
\operatorname{artanh} x &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \forall x \in (-1, 1), \\
\operatorname{arcoth} x &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).
\end{aligned}$$

故直接计算得到

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arsinh}' x &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}, \\
\operatorname{arcosh}' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \forall x \in (1, +\infty), \\
\operatorname{artanh}' x &= \frac{1}{1-x^2}, \forall x \in (-1, 1), \\
\operatorname{arcoth}' x &= \frac{1}{1-x^2}, \forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).
\end{aligned}
$$

注 附注从上面各函数的导数公式可以看出，这七类基本初等函数在各自定义域上都是 C^∞ 类的.

下面我们应用基本初等函数的导数公式及导数计算的一般法则来计算一些更复杂的初等函数的导数.

例题 6.10 计算函数 $x \longmapsto f(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(x^2 - x + 2\right), x \in \mathbb{R}$ 在任一点 $x \in \mathbb{R}$ 处的导数.

事实上，我们有

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\mathrm{e}^{2x}\left(x^2 - x + 2\right)\right]' \\
&= \left(\mathrm{e}^{2x}\right)'\left(x^2 - x + 2\right) + \mathrm{e}^{2x}\left(x^2 - x + 2\right)' \\
&= \mathrm{e}^{2x}(2x)'\left(x^2 - x + 2\right) + \mathrm{e}^{2x}(2x - 1) \\
&= \mathrm{e}^{2x}\left(2x^2 - 2x + 4\right) + \mathrm{e}^{2x}(2x - 1) \\
&= \mathrm{e}^{2x}\left(2x^2 + 3\right)
\end{aligned}
$$

例题 6.11 假设函数

$$
x \longmapsto f(x) = \arcsin\left(\sin x^2\right) + \arccos\left(\cos x^2\right), x \in \mathbb{R}.
$$

1. 指出此函数在哪些 x 处可导.
2. 计算此函数在这些可导点处的导数.

首先由于公式

$$
\arcsin y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}
$$

只对 $y \in (-1, 1)$ 成立，故下述两个等式

$$
\begin{aligned}
\arcsin'\left(\sin x^2\right) &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sin x^2\right)^2}} \\
\arccos'\left(\cos x^2\right) &= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\cos x^2\right)^2}}
\end{aligned}
$$

同时成立，当且仅当 $x^2 \neq \dfrac{k\pi}{2}, k = 0, 1, 2, \cdots$

因此上述函数只在 $x^2=\frac{k\pi}{2}(k=0,1,2,\cdots\cdots)$ 的 x 处可导，并且在这些 x 处

$$\begin{aligned}
f'(x) =&\left[\arcsin\left(\sin x^2\right)+\arccos\left(\cos x^2\right)\right]' \\
=&\left[\arcsin\left(\sin x^2\right)\right]'+\left[\arccos\left(\cos x^2\right)\right]' \\
=&\arcsin'\left(\sin x^2\right)\cdot\left(\sin x^2\right)'+\arccos'\left(\cos x^2\right)\cdot\left(\cos x^2\right)' \\
=&\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sin x^2\right)^2}}\cdot\cos x^2\cdot\left(x^2\right)' \\
&-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\cos x^2\right)^2}}\cdot\left(-\sin x^2\right)\cdot\left(x^2\right)' \\
=&\frac{2x\cos x^2}{\left|\cos x^2\right|}+\frac{2x\sin x^2}{\left|\sin x^2\right|} \\
=&2x\left[\operatorname{sgn}\left(\cos x^2\right)+\operatorname{sgn}\left(\sin x^2\right)\right]
\end{aligned}$$

例题 6.12 计算函数 $x\longmapsto f(x)=\arctan(\tanh x), x\in\mathbb{R}$ 在任一点 $x\in\mathbb{R}$ 处的导数.

事实上，此函数在 $\mathbb{R}$ 的任一点 x 处可导，并且

$$\begin{aligned}
f'(x)&=[\arctan(\tanh x)]' \\
&=\arctan'(\tanh x)\cdot(\tanh x)' \\
&=\frac{1}{1+\tanh^2 x}\cdot\left(1-\tanh^2 x\right) \\
&=\frac{1-\tanh^2 x}{1+\tanh^2 x}
\end{aligned}$$

例题 6.13 假设函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 在 X 上可导，并且 $\forall x\in X, f(x)\neq 0$, 证明：

$$(\log|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)}, \forall x\in X.$$

实数 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 称为函数 f 在 x 处的对数导数.

事实上，我们首先证明函数 $y\mapsto\log|y|, y\in\mathbb{R}-\{0\}$ 在 $\mathbb{R}$-$\{0\}$ 上可导, 这是因为

在 $\mathbb{R}_*^+$ 上，$\log|y|=\log y$, 因此

$$(\log|y|)'=\log' y=\frac{1}{y}.$$

在 $\mathbb{R}_*^+$ 上，$\log|y|=\log(-y)$, 因此

$$(\log|y|)'=(\log(-y))'=\frac{1}{-y}(-y)'=\frac{1}{y}.$$

另一方面，f 在 X 上可导，并且 $f\neq 0$, 故由定理 6.4 知函数 $x\mapsto\log|f(x)|, x\in X$ 在 X 上可导, 并且

$$\begin{aligned}
\left(\log|f(x)|f'\right.&=(\log|y|)'\cdot f'(x)(y=f(x)) \\
&=\frac{f'(x)}{f(x)}.
\end{aligned}$$

例题 6.14 设 $u:X\to\mathbb{R}, v:X\to\mathbb{R}$ 是两个在 X 上可导的函数，并且 $u>0$.

1. 证明：幂指函数 $x\longmapsto f(x)=u(x)^{v(x)}, x\in X$ 在 X 上可导.
2. 计算幂指函数 f 在任一点 $x\in X$ 处的导数.

事实上，由于

$$f(x)=\mathrm{e}^{v(x)\log u(x)}, \forall x\in X,$$

故由对数函数、指数函数的可导性及定理6.4知，幂指数函数 f 在 X 上可导，并且

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\mathrm{e}^{v(x)\log u(x)}\right)' \\ &= \mathrm{e}^{v(x)\log u(x)}\cdot[v(x)\log u(x)]' \\ &= u(x)^{v(x)}\cdot\left[v'(x)\log u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right]. \end{aligned}$$

例如，设 $f(x)=x^{\cos x}, x\in\mathbb{R}_*^+$. 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\mathrm{e}^{\cos x\log x}\right)' \\ &= \mathrm{e}^{\cos x\log x}\cdot(\cos x\log x)' \\ &= x^{\cos x}\left(-\sin x\log x+\frac{\cos x}{x}\right)'. \end{aligned}$$

例题 6.15 证明下列各等式：

1. $\left(\mathrm{e}^x\right)^{(n)}=\mathrm{e}^x$ ；
2. $\sin^{(n)} x=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ ； $(\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R})$
3. $\cos^{(n)} x=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

事实上，由于 $\left(\mathrm{e}^x\right)'=\mathrm{e}^x$, 所以

$$\left(\mathrm{e}^x\right)^{(n)}=\mathrm{e}^x, \forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}.$$

其次，由于

$$\sin' x=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin'' x=\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)$$

现在假设

$$\sin^{(k)} x=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$$

则

$$\begin{aligned} \sin^{(k+1)} x &= \left[\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

因此由数学归纳法知，$\forall n\in\mathbb{N}, \sin^{(n)} x=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

同理可证，$\forall n\in\mathbb{N}, \cos'^{n}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

例题 6.16 证明：函数

$$x\longmapsto f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $\mathbb{R}$ 上是 C^∞ 类的，并且

$$f^{(n)}(0)=0, \forall n\in\mathbb{N}.$$

为此，我们首先注意到幂函数 $x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}, x \in \mathbb{R}-\{0\}$ 在 $\mathbb{R}-\{0\}$ 上是 C^∞ 类的，指数函数 $y \longrightarrow \mathrm{e}^y, y \in \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是 C^∞ 类的，因此它们的复合函数在 $\mathbb{R}-\{0\}$ 上也是 C^∞ 类的，从而上述函数 f 在 $\mathbb{R}-\{0\}$ 上是 C^∞ 类的. 并且 $\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$,

$$\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x_3}$$

$$\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\right)'' = \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}\right)' = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right)$$

由此不难由数学归纳法验证

$$\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\right)^{(n)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

这里 $P_{3n}(y)$ 是关于 y 的一个最高次数为 $3n$ 的多项式. 因此根据第 5 章 §4 例**??**的结论有

$$\lim_{x \to 0}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\right)^{(n)} = \lim_{x \to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

现在我们来计算 $f'(0)$. 因为

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0,$$

所以 f 在 0 处可导，并且 $f'(0)=0$. 因此 f' 在 $x=0$ 处连续，从而 f 在 $\mathbb{R}$ 上是 C^1 类的.

假设 $f^{(2)}(0)=f^{(3)}(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$. 于是 f 在 $\mathbb{R}$ 上是 C^{n-1} 类的. 从而

$$\lim_{x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} P_{3(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = 0.$$

此即表明 f 在 0 处 n 次可导，并且 $f^{(n)}(0)=0$. 因此 $f^{(n)}$ 在 $x=0$ 处连续，从而 f 在 $\mathbb{R}$ 上是 C^n 类的，这就证明了 f 在 $\mathbb{R}$ 上是 C^∞ 类的，并且 $f^{(n)}(0)=0, \forall n \in \mathbb{N}$.

✍ 习 题 6.2

1. 设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是任一可导函数. 证明：
   1) 若 f 是偶函数，则 f' 是奇函数；
   2) 若 f 是奇函数，则 f' 是偶函数；
   3) 若 f 是以 T 为周期的周期函数，则 f' 是以 T 为周期的周期函数.
2. 设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一可导函数，试计算复合函数 $x \mapsto F(x) = f \circ f \circ f(x),\ x \in \mathbb{R}$ 的导数 $F'(x)$.
3. 设 $f, g: X \to \mathbb{R}$ 在 $a \in X$ 处可导.
   1) 证明：若 $f(a) \neq 0$，则 $|f|$ 在 a 处可导；
   2) 证明：若 $f(a) \neq g(a)$，则函数 $m(x)=\min(f(x),g(x)), M(x)=\max(f(x),g(x)),\ x \in X$ 在 a 处可导.
4. 计算下列各函数 f 的导数 $f'(x)$：
   1) $f(x) = \log \dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{\sqrt{1+x^3}+1}$；
   2) $f(x) = \arcsin(\cos x^2) + \arccos(\sin x^2)$；
   3) $f(x) = \log(\cosh x) + \dfrac{1}{2\sinh^2 x}$；
   4) $f(x) = \coth x - \log\left(\coth \dfrac{x}{2}\right)$；
   5) $f(x) = \operatorname{arsinh}\left(\cosh \dfrac{x}{2}\right)$；

6) $f(x)=\sqrt[x]{x}$；

7) $f(x)=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$；

8) $f(x)=(\log x)^{x^n}+x^{a\cos x}$.

5. 设函数 $x\longmapsto f(x), x\in\mathbb{R}$ 定义为

$$f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{ax^2+bx+c}}(\forall x\in\mathbb{R}),$$

试选择常数 α,β,a,b,c 使得 $f'(x)\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

6. 设函数 $f:X(\subset\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 可导且满足方程：

$$f(x)^x=x^{f(x)},\forall x\in X.$$

试计算 $f'(x)$, $\forall x\in X$.

7. 设 $f:X\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是任一可导函数，试计算极限：

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[f^2(x+3h)-f^2(x-h)\right].$$

8. 设 $I,J\subset\mathbb{R}$ 是两个非空区间，$f:I\to J$，$g:J\to\mathbb{R}$，$x_0\in I$，$y_0=f(x_0)\in J$. 研究复合函数 $g\circ f:I\to\mathbb{R}$ 在 x_0 处的可导性：

1) f 在 x_0 处不可导，g 在 y_0 处可导；

2) f 在 x_0 处可导，g 在 y_0 处不可导；

3) f 在 x_0 处不可导，g 在 y_0 处不可导.

9. 证明：反正切函数 $x\mapsto\arctan x$，$x\in\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数为：

$$\arctan^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ (-1)^k(2k)!, & n=2k+1,\end{cases}\quad(k=0,1,2,\dots)$$

这里我们规定 $\arctan^{(0)}(0)=\arctan(0)$.

10. 证明：反正弦函数 $x\mapsto\arcsin x$，$x\in[-1,1]$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数为：

$$\arcsin^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ [(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1]^2, & n=2k+1.\end{cases}$$

11. 对 $(x-a)^n(x-b)^n$ 应用 Leibniz 求导公式，证明：

$$\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\cdots+\left(C_n^n\right)^2=\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{n!}.$$

12. 证明：函数

$$x\longmapsto f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x^2-1}} & 若\ |x|<1,\\ 0, & 若\ |x|\geqslant 1\end{cases}$$

与函数

$$x\longmapsto g(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{1-x^2}} & 若\ |x|>1,\\ 0, & 若\ |x|\leqslant 1\end{cases}$$

在 $\mathbb{R}$ 上都是 C^∞ 类的.

13. 设 $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$. 证明：$\forall a\in\mathbb{R}$，$P_n(x)$ 可表示为：

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

14. 证明：Chebyshev 多项式

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$$

满足微分方程

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0, \forall x \in (-1,1).$$

15. 证明：Legendre 多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}$$

满足微分方程

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

16. 证明：Laguerre 多项式

$$L_n(x) = \mathrm{e}^x \left[x^n \mathrm{e}^{-x}\right]^{(n)}$$

满足微分方程

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

17. 证明：Hermite 多项式

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)^{(n)}$$

满足微分方程

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

6.3 可导函数的性质

关于可导函数的基本性质，我们主要介绍下面四个重要定理.

1. Rolle 定理

定理 6.7 (Rolle 定理)

设 $[a,b]$ 是任一有限闭区间，函数 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ 满足下述条件：

1. f 在 $[a,b]$ 上连续，
2. f 在 (a,b) 上可导，
3. $f(a) = f(b)$，

则存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

证明 若 $\forall x \in [a,b], f(x) = f(a) = f(b)$，则 $f'(x) = 0, \forall x \in [a,b]$，从而任取 $\xi \in (a,b)$，都有 $f'(\xi) = 0$.

因此我们假设 f 在 $[a,b]$ 上不是常值函数. 由于 f 在 $[a,b]$ 上连续，故根据定理4.9知 f 在 $[a,b]$ 上必取到它的上确界 M 与下确界 m . 于是 $M > m$. 因为 $f(a) = f(b)$，所以 f 不可能在 a 与 b 处同时取值 M 与 m . 因此至少在开区间 (a,b) 上某一点 ξ 处取上确界 M 或下确界 m .

比如设 $f(\xi) = M$. 于是 $\forall x \in [a,b], f(x) \leqslant M$. 从而

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \begin{cases} \geqslant 0, & \forall x \in (a,b) \text{ 且 } x < \xi; \\ \leqslant 0, & \forall x \in (a,b) \text{ 且 } x > \xi. \end{cases}$$

由于 f 在 ξ 处可导，故

$$f'(\xi)=f'_{+}(\xi)=\lim_{x\to\xi^{+}}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\leqslant 0$$
$$f'(\xi)=f'_{-}(\xi)=\lim_{x\to\xi^{-}}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\geqslant 0$$

因此 $f'(\xi)=0$.

注 Rolle 定理中的三个条件：f 在 $[a,b]$ 上的连续性、f 在 (a,b) 上的可导性及 $f(a)=f(b)$ 对保证结论成立都是十分重要的. 否则，定理的结论可能不成立.

例题 6.17 考虑函数 $x\longmapsto f(x)=x-[x], x\in[0,1]$. f 在 $(0,1)$ 上可导，$f(0)=f(1)=0$, 但是 $\forall x\in(0,1), f'(x)=1$. 问题就在于 f 在 $x=1$ 处不连续.

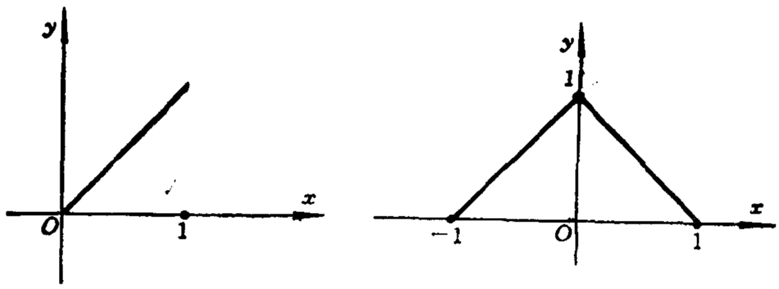

图 6.5

例题 6.18 考虑函数

$$x\longmapsto f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ 1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

f 在 $[-1,1]$ 上连续，$f(-1)=f(1)=0$, 但也不存在 $\xi\in(-1,1)$ 使得 $f'(\xi)=0$. 原因是 f 在 $x=0$ 处不可导.

例题 6.19 考虑函数 $x\longmapsto f(x)=x, x\in[0,1]$. f 在 $[0,1]$ 上连续，f 在 $(0,1)$ 上可导，但同样不存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=0$, 这是因为 $f(0)\neq f(1)$.

当然也有这样的函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, 它不满足 Rolle 定理中的任一个条件，但 Rolle 定理的结论仍然成立. 因此 Rolle 定理的条件是充分的而不是必要的.

例题 6.20 考虑函数

$$x\longmapsto f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

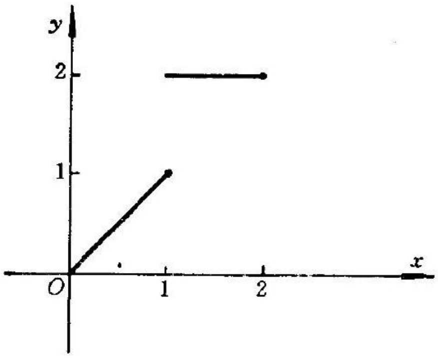

图 6.6

f 在 $x=1$ 处不连续，当然 f 在 $x=1$ 处不可导，并且 $f(0)\neq f(2)$. 然而 $\forall\xi\in(1,2), f'(\xi)=0$.

Rolle 定理的几何意义十分明显. 如果连续函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 (a,b) 上可导，并且 $f(a)=f(b)$，则在函数 f 所表示的曲线 Γ 上至少存在一点 $M_0(\xi, f(\xi))(\xi\in(a,b))$，使得 Γ 在点 M_0 处的切线 T 平行于 x 轴.

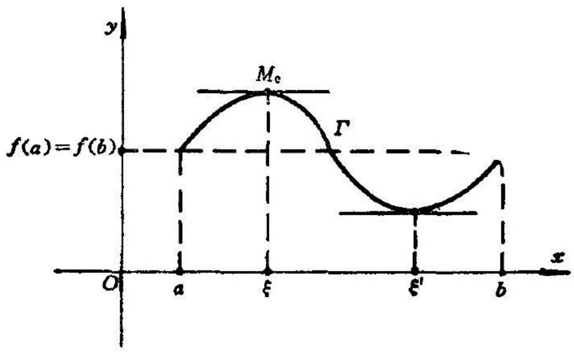

图 6.7

2. Lagrange 中值定理

定理 6.8 (Lagrange 中值定理)

设 $[a,b]$ 是任一有限闭区间，$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是任一函数，满足下述条件：

1. f 在 $[a,b]$ 上连续，
2. f 在 (a,b) 上可导，

则存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

证明 考虑辅助函数 $F:[a,b]\to\mathbb{R}$

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right], x\in[a,b].$$

显然 F 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，并且 $F(a)=F(b)$. 根据 Rolle 定理，存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$. 此即为

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad 或 \quad f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

Lagrange 中值定理的几何解释是：如果 Γ 是函数 f 所表示的曲线，则在 Γ 上存在一点 $M_0(\xi, f(\xi))$，它异于 Γ 的两个端点 $A(a, f(a))$ $B(b, f(b))$，使得 C 在点 M_0 处的切线平行于联结点 A 与 B 的直线.

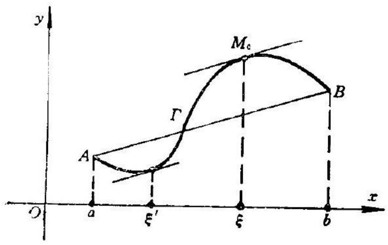

图 6.8

作为 Lagrange 中值定理的一个应用：我们来证明下述重要命题.

命题 6.1

假设 $I \subset \mathbb{R}$ 是一区间，函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 在 I 上可导. 则 f 在 I 上为常值函数的充分必要条件是：

$$f'(x) = 0, \forall x \in I.$$

证明 (必要性) 设 $f = c (c \in \mathbb{R})$, 则显然有 $f'(x) = 0, \forall x \in I$.

(充分性) 设 $f'(x) = 0, \forall x \in I$. 我们证明 f 在 I 上为常值函数. 为此只需证明

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ 且 } x_1 \neq x_2, f(x_1) = f(x_2).$$

事实上，不妨假设 $x_1 < x_2$, 由于 f 在 $[x_1, x_2]$ 上可导，故由 Lagrange 中值定理知，存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

但 $f'(\xi) = 0$, 因此 $f(x_2) - f(x_1) = 0$, 即 $f(x_1) = f(x_2)$.

推论 6.2

I 如上所述. $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ 与 $g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ 是任意两个在 I 上可导的函数，并且满足

$$f'(x) = g'(x), \forall x \in I.$$

则存在常数 c 使得

$$f(x) - g(x) = c, \forall x \in I.$$

证明 因为 $f'(x) = g'(x), \forall x \in I$, 所以 $[f(x) - g(x)]' = 0, \forall x \in I$, 从而由上述命题知，存在常数 c 使得

$$f(x) - g(x) = c, \forall x \in I.$$

3. Cauchy 中值定理

定理 6.9 (Cauchy 中值定理)

设 $[a, b]$ 是任一有限闭区间. $f, g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 是任意两个函数，满足下述条件：

1. f, g 在 $[a, b]$ 上连续，
2. f, g 在 (a, b) 上可导，
3. $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$.

则存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证明 首先我们注意到 $g(b)-g(a)\neq 0$. 因为若 $g(b)-g(a)=0$, 则由 Rolle 定理知, 存在 $\bar{x}\in(a,b)$, 使得 $g'(\bar{x})=0$, 这与条件 3) 相矛盾.

现在作辅助函数 $F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$:

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))\right],\forall x\in[a,b].$$

则 F 在 $[a,b]$ 上连续, F 在 (a,b) 上可导, 并且 $F(a)=F(b)$. 因此由 Rolle 定理知, 存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$, 此即为

$$0=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)\ \text{或}\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

关于 Cauchy 中值定理, 我们作以下几点说明.

注

1. 若 $g(x)=x,\forall x\in[a,b]$, 则 Cauchy 中值定理的结果化为
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\xi\in(a,b).$$
这正是 Lagrange 中值定理的结论. 因此 Cauchy 中值定理是 Lagrange 中值定理的推广.
2. 若我们分别对函数 f,g 应用 Lagrange 中值定理, 则我们只能得到下述形式的等式:
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi_1)(b-a)}{g'(\xi_2)(b-a)}=\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)},\xi_1,\xi_2\in(a,b).$$
这里 ξ_1,ξ_2 不一定相等. 因此我们不能得到 Cauchy 中值定理中所要求的等式.
3. 若我们在 Cauchy 中值定理中删去条件 3), 则有下述对称形式的等式成立:
$$[f(b)-f(a)]g'(\xi)=[g(b)-g(a)]f'(\xi),\xi\in(a,b).$$
这是因为, 若 $g(b)-g(a)=0$, 则由 Rolle 定理知存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $g'(\xi)=0$, 从而
$$[f(b)-f(a)]g'(\xi)=0=[g(b)-g(a)]f'(\xi).$$
若 $g(b)-g(a)\neq 0$, 则只需重复 Cauchy 中值定理的证明, 由
$$0=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)$$
两边同乘以 $g(b)-g(a)$ 即可得证.

4. Darboux 定理

定理 6.10 (Darboux 定理)

设 $I\subset\mathbb{R}$ 是任一区间, $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ 是任一在 I 上可导的函数, 则 $f'(I)\subset\mathbb{R}$ 也是一区间.

证明 为了证明 $f'(I)\subset\mathbb{R}$ 是区间, 我们只需证明:

$$\forall y,z\in f'(I),\ y<z\implies(y,z)\subset f'(I).$$

为此设 $a,b\in I$ 使得 $f'(a)=y$, $f'(b)=z$, 不妨假设 $a<b$. 任取 $\omega\in(y,z)$, 我们来证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\omega$.

为了书写简单起见, 我们记 f 为 f 在区间 $[a,b]$ 上的限制 $f|_{[a,b]}$. 考虑辅助函数

$$F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R},\forall x\in[a,b],\ F(x)=f(x)-\omega x.$$

函数 F 在 $[a,b]$ 上连续, 并且可导. 根据连续函数性质知, F 在 $[a,b]$ 上达到它的最小值.

显然 F 不可能在 a 与 b 处取到其最小值. 否则:

$$F'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}\geqslant 0,\ F'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{F(x)-F(b)}{x-b}\leqslant 0,$$

这与 $F'(a)=f'(a)-\omega<0,\ F'(b)=f'(b)-\omega>0$ 相矛盾.

因此存在一内点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F(\xi)$ 为 F 在 $[a,b]$ 上的最小值. 于是

$$F'(\xi)=\lim_{x\to\xi^+}\frac{F(x)-F(\xi)}{x-\xi}\geqslant 0,\ F'(\xi)=\lim_{x\to\xi^-}\frac{F(x)-F(\xi)}{x-\xi}\leqslant 0.$$

从而 $F'(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)=\omega$, 所以 $\omega\in f'(I)$.

由 $\omega\in(y,z)$ 的任意性知, $(y,z)\subset f'(I)$. 因此 $f'(I)\subset\mathbb{R}$ 是一个区间.

推论 6.3

设 $I\subset\mathbb{R}$ 是任一区间. 若函数 $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ 在 I 上可导, 并且 $\forall x\in I, f'(x)\neq 0$, 则

$$\forall x\in I,\ f'(x)>0 \text{ 或 } \forall x\in I,\ f'(x)<0.$$

✍ 习 题 6.3

1. 设函数 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 满足:

   1) f,g 在 $[a,b]$ 上连续;

   2) f,g 在 (a,b) 上可导, 且 $(f')^2+(g')^2\neq 0$;

   3) $g(a)\neq g(b)$.

   证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

2. 设函数 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 满足:

   1) f,g 在 $[a,b]$ 上连续;

   2) f,g 在 (a,b) 上可导, 且 $g'\neq 0$.

   证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

3. 设函数 $f,g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$ 满足:

   1) f,g,h 在 $[a,b]$ 上连续;

   2) f,g,h 在 (a,b) 上可导.

   证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(\xi)\\ g(a) & g(b) & g'(\xi)\\ h(a) & h(b) & h'(\xi)\end{vmatrix}=0.$$

4. 证明: 方程 $\mathrm{e}^x\sin x=1$ 的两个实根之间至少存在方程 $\mathrm{e}^x\cos x=-1$ 的一个实根.

5. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是任一函数, $\alpha>0$. 我们称 f 是 α 次 Lipschitz 函数, 如果存在 $k>0$, 使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|^\alpha, \forall x,y\in[a,b].$$

   1) 证明: 若 f 在 $[a,b]$ 上连续可导, 则 f 是 1 次 Lipschitz 函数;

2) 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上是可导的 1 次 Lipschitz 函数，则 f' 在 $[a,b]$ 上有界；

3) 证明：若 f 是 $\alpha > 1$ 次 Lipschitz 函数，则 f 在 $[a,b]$ 上为常值函数.

6. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是任一在 $\mathbb{R}$ 上可导的函数，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$(有限或正负无穷). 证明：存在 $\xi\in\mathbb{R}$，使得 $f'(\xi)=0$.

7. 设 $a\in\mathbb{R}$，函数 $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足：

1) f 在 $[a,+\infty)$ 上连续；

2) f 在 $(a,+\infty)$ 上可导；

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$.

证明：存在 $\xi\in(a,+\infty)$，使得 $f'(\xi)=0$.

8. 设 $[a,b]\subset\mathbb{R}$，函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 满足：

1) f 在 $[a,b]$ 上连续；

2) f 在 (a,b) 上可导；

3) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$.

证明：$\forall A\in\mathbb{R}$，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=A$.

9. 设 $a\in\mathbb{R}$，$h>0$，函数 $f:[a,a+2h]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,a+2h]$ 上二阶可导. 证明：存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$f(a)-2f(a+h)+f(a+2h)=h^2f''(a+2\theta h).$$

10. 设 $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $a<b$，函数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 在 (a,b) 上可导，且 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$. 证明：若 f' 在 (a,b) 上单调上升，则 $\lim\limits_{x\to b^-} f'(x)=+\infty$；若 f' 不是单调上升的，则 $\lim\limits_{x\to b^-} f'(x)=+\infty$ 可以不成立.

11. 设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上可导. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)-\xi f'(\xi)=\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}.$$

12. 设函数 $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ 在 $(-a,a)$ 上 n 次可导，且 $f^{(k)}(0)=0$，$k=0,1,\dots,n-1$. 证明：$\forall x\in(-a,a)$，且 $x\neq 0$，存在 $0<\theta<1$，使得

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}.$$

13. 设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 (a,b) 上 $n+1$ 次可导，且 $f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0$，$(k=0,1,\dots,n)$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f^{(n+1)}(\xi)=f(\xi)$.

14. 设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 在 (a,b) 上可导，且其零点集至少有一个聚点 $a_0\in(a,b)$.

1) 证明：$f'(a_0)=0$，且 f' 的零点集也有聚点 a_0；

2) 若 f 在 (a,b) 上 p 次可导 ($p\geqslant 1$)，证明：f 的各阶导函数 $f^{(k)}(k=1,2,\dots,p)$ 都以 a_0 为其零点；

3) 证明：不存在任何多项式函数，使得它与函数 $x\mapsto \mathrm{e}^x$ 在 $\mathbb{R}$ 的任何无限点集 A 上取相同的值.

15. 设 $-\infty<a_1<a_2<\cdots<a_n<+\infty$，函数 $f:[a_1,a_n]\to\mathbb{R}$ 属于 C^{n-1} 类 ($n\geqslant 2$)，在 (a_1,a_n) 上有 n 阶导数，且 $f(a_i)=0$，$i=1,2,\dots,n$. 证明：

$$(\forall x\in[a_1,a_n])\,(\exists\xi\in(a_1,a_n))\ \text{使得}\ f(x)=\frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}{n!}f^{(n)}(\xi).$$

16. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f':[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上可积，令

$$\delta_n=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right).$$

试计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\delta_n$.

6.4 导数的应用

函数导数的应用是多方面的，下面我们介绍它的三个方面的应用.

1. 函数单调性的研究

定理 6.11

设 $I\subset\mathbb{R}$ 是任一区间. $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ 是任一在 I 上可导的函数，则下述结论成立：

1. f 在 I 上单调上升 (下降)$\Longleftrightarrow \forall x\in I, f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$.
2. f 在 I 上严格单调上升 (下降)，若 $\forall x\in I, f'(x)>0(<0)$.

证明 我们只对上升情形进行证明. 下降情形的证明完全类似.

设 $x_1,x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$. 由 Lagrange 中值定理，我们有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\xi\in(x_1,x_2). \tag{6.1}$$

1. 若 f 在 I 上单调上升，则 $f(x_2)\geqslant f(x_1)$. 于是

$$f'(x_1)=\lim_{x_2\to x_1^+}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geqslant 0.$$

由 $x_1\in I$ 的任意性知，$\forall x\in I, f'(x)\geqslant 0$.

反之若 $\forall x\in I, f'(x)\geqslant 0$, 则由(6.1)知，$f(x_2)\geqslant f(x_1)$, 从而 f 在 I 上单调上升.

2. 若 $\forall x\in I, f'(x)>0$, 则由式(6.1)推出 $f(x_2)>f(x_1)$. 因此 f 在 I 上严格单调上升.

注 注意即使 $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ 在 I 上是严格单调上升的可导函数，也不一定有：$\forall x\in I, f'(x)>0$.

为此，考虑函数 $x\longmapsto f(x)=x^3, x\in\mathbb{R}$.

因为 $f'(x)=3x^2>0,\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$. 所以 f 在 $(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 上是严格单调上升的. 并且

$$y^3<0<x^3,\forall x\in(0,+\infty),\forall y\in(-\infty,0).$$

故此函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上是严格单调上升的. 然而，$f'(0)=0$.

下面我们举几个应用定理6.11的例子.

例题 6.21 证明下述两个不等式成立：

1. $x<\tan x,\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$;
2. $\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x,\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

为此我们定义

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \tan x - x, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right); \\
g(x) &= x - \sin x, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\
h(x) &= \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} - \dfrac{2}{\pi}, & \forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]; \\ 1 - \dfrac{2}{\pi}, & x = 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

显然我们只需证明：$f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

对于 f ：由于

$$
f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} > 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).
$$

故 f 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是严格单调上升的. 而 $f(0) = 0$, 因此 $f(x) > 0.\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 此即表示 $x < \tan x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

对于 g : 由于 $g'(x) = 1 - \cos x > 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 故 g 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是严格单调上外的, 而 $g(0) = 0$, 因此 $g(x) > 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 即 $\sin x < x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

对于 h ：由于

$$
h'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x(x - \tan x)}{x^2} < 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),
$$

故 h 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是严格单调下降的, 而 $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, 因此 $h(x) > 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 即

$$
\frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi} > 0 \text{ 或 } \frac{2}{\pi}x < \sin x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).
$$

结合对 g 与 h 的讨论, 即证得

$$
\frac{2}{\pi}x < \sin x < x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).
$$

例题 6.22 设函数 $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R} (a \in \mathbb{R})$ 满足条件：

1. f 在 $[a, +\infty)$ 上可导且 $f(a) < 0$,
2. 存在常数 $k > 0$ 使得 $f'(x) > k, \forall x \in (a, +\infty)$. 则方程 $f(x) = 0$ 在开区间 $\left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right)$ 上存在唯一的一个实根.

事实上, 由 $f'(x) > 0, \forall x \in (a, +\infty)$, 故 f 在 $(a, +\infty)$ 上是严格单调上升的. 由于 $f(a) < 0$, 若我们能证明 $f\left(a - \frac{f(a)}{k}\right) > 0$, 则由连续函数性质知, 存在唯一的 $\xi \in \left(a, a - \frac{f(a)}{h}\right)$ 使得 $f(\xi) = 0$.

为此我们注意到 f 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 故由 Lagrange 中值定理得到

$$
\begin{aligned}
f\left(a - \frac{f(a)}{k}\right) - f(a) &= f'(\xi)\left[a - \frac{f(a)}{k} - a\right] \\
&= f'(\xi) \cdot \left(-\frac{f(a)}{k}\right) \\
&> k \cdot \left(\frac{-f(a)}{k}\right) = -f(a),
\end{aligned}
$$

因此 $f\left(a - \frac{f(a)}{k}\right) > 0$.

例题 6.23 设函数 $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 并且 $|f(x)| < 1$, $\forall x \in [0, 1]$. 证明：方程 $2x -$

$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 1$ 在 $[0,1]$ 上存在唯一的解.

令 $F(x) = 2x - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - 1, \forall x \in [0,1]$. 则函数 $F:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 $[0,1]$ 上连续可导, 并且

$$F'(x) = 2 - f(x) > 0, \forall x \in [0,1].$$

因此函数 F 在 $[0,1]$ 上严格单调上升. 由于

$$F(0) = -1 < 0, F(1) = 2 - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - 1 > 0$$

故存在唯一的 $\xi \in (0,1)$ 使得 $F(\xi) = 0$. 此即表明方程 $2x - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 1$ 在 $[0,1]$ 上存在唯一的解.

2. 函数的凸凹性研究

定义 6.6

设 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是任一非空集合, 我们称 E 是凸的, 若 $A, B \in E$, 则连接 A, B 两点的线段 $\overline{AB} \subset E$. ♣

现在我们设 $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$. 并规定:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha A + \beta B \triangleq \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$$

则连结 A, B 两点的线段

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \{\alpha A + \beta B \mid \alpha, \beta \in [0,1], \alpha + \beta = 1\} \\ &= \{(1-t)A + tB \mid t \in [0,1]\}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}E \text{ 是凸的 } &\Longleftrightarrow \forall A, B \in E, \quad \forall \alpha\ \beta \in [0,1], \alpha + \beta = 1, \\ &\quad \alpha A + \beta B \in E \\ &\Longleftrightarrow \forall A, B \in E, \quad \forall t \in [0,1], (1-t)A + tB \in E.\end{aligned}$$

例题 6.24 平面上的三角形、长方形、圆盘、椭圆盘都是平面凸集, 而平面上的五角星不是平面凸集 (图6.9).

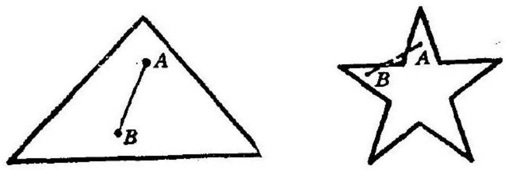

图 6.9

设 $I \subset \mathbb{R}$ 是任一区间, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ 是任一函数. 我们定义下述集合

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y \geqslant f(x)\right\}.$$

首先我们证明下述引理.

引理 6.1

设 $I \subset \mathbb{R}$ 是任一区间, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ 是任一函数, 集 E 如上所定义. 则下述三个结论互相等价:

1. E 是凸集.

2. $\forall x_1, x_2 \in I, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ 且 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$,
$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$
3. $\forall x_1, x_2, x \in I$ 且 $x_1 < x < x_2$,
$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

证明 1)$\Longrightarrow$ 2) 设 E 是凸集. $x_1, x_2 \in I, x_1 \leqslant x_2, \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ 且 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. 那么 $x_1 \leqslant \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \leqslant x_2$.

令 $M_1 = (x_1, f(x_1)), M_2 = (x_2, f(x_2))$, 则 M_1, M_2 是函数 f 所表示的曲线 Γ 上的两点. 因此 $M_1, M_2 \in E$.

连结 M_1 与 M_2 的直线段 L 的方程为
$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), x \in [x_1, x_2].$$
直接计算可知, L 上对应于 $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ 的点 $\overline{M}$ 为
$$\begin{aligned}\overline{M} &= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)) \\ &= \alpha_1 (x_1, f(x_1)) + \alpha_2 (x_2, f(x_2)) \\ &= \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2,\end{aligned}$$
由于 E 是凸的, 故 $\overline{M} \in E$, 此即表明
$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

2)$\Longrightarrow$ 3) 假设 2) 成立, 并且 $x_1, x_2, x \in I, x_1 < x < x_2$. 于是存在 $t \in (0,1)$ 使得 $x = (1-t)x_1 + t x_2$. 由此得到 $t = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. 根据假设, 我们有
$$\begin{aligned}f(x) &= f((1-t)x_1 + t x_2) < (1-t) f(x_1) + t f(x_2) \\ &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2),\end{aligned}$$
因此
$$\begin{aligned}f(x) - f(x_1) &\leqslant \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} - 1\right) f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \\ &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}[f(x_2) - f(x_1)] \\ f(x_2) - f(x) &\geqslant f(x_2) - \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \\ &= -\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \left(1 - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) f(x_2) \\ &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}[f(x_2) - f(x_1)].\end{aligned}$$
由这两个不等式立即推得
$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

3)$\Longrightarrow$ 1) 设 $N_1 = (x_1, y_1), N_2 = (x_2, y_2) \in E$. 我们证明: 连结 N_1 N_2 两点的直线段 l 位于 E 内.

由 E 的定义知, $y_1 \geqslant f(x_1), y_2 \geqslant f(x_2)$. 因此连结点 $M_1 = (x_1, f(x_1))$ 与点 $M_2 = (x_2, f(x_2))$ 的直线段 L 位于直线段 l 的下方 (如图6.10所示). 为了证明 l 位于 E 内, 我们只需证明 L 位于 E 内即

可.

事实上，由假设对 $x_1, x_2, x \in I$ 且 $x_1 < x < x_2$ 成立不等式

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

故由左边不等式得到

$$f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) \geqslant f(x),$$

此即表明点 $\left(x, f(x_1)+\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)\right) \in E$，而这一点正好是直线段 L 上的点，由 $x \in (x_1, x_2)$ 的任意性知，L 整个地位于 E 内. 因此 E 是凸集.

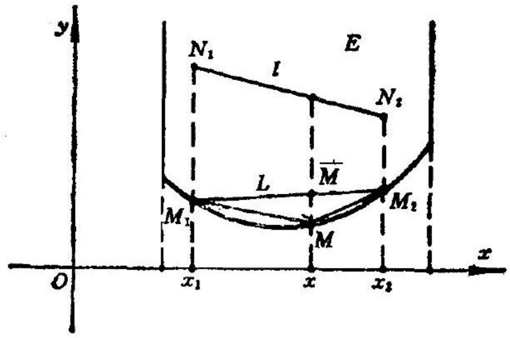

图 6.10

根据上述引理，理在我们可以给出关于凸函数的下述定义.

定义 6.7

设 $I \subset \mathbb{R}$ 是任一区间，$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ 是任一函数.

1. 我们称 f 是凸的，如果
$$\forall x_1, x_2 \in I, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1] \text{ 且 } \alpha_1+\alpha_2=1 \Longrightarrow f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2).$$
2. 我们称 f 是凹的，如果函数 $-f$ 是凸的.

♣

例题 6.25 函数 $x \longmapsto x^2, x \in \mathbb{R}$ 是凸的.

事实上，设 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ 且 $\alpha_1+\alpha_2=1$，则

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)^2 &= \alpha_1^2 x_1^2+\alpha_2^2 x_2^2+2\alpha_1\alpha_2 x_1 x_2 \\
&\leqslant \alpha_1^2 x_1^2+\alpha_2^2 x_2^2+\alpha_1\alpha_2\left(x_1^2+x_2^2\right) \\
&= \left(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2\right) x_1^2+\left(\alpha_2^2+\alpha_1\alpha_2\right) x_2^2 \\
&= \alpha_1(\alpha_1+\alpha_2) x_1^2+\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2) x_2^2 \\
&= \alpha_1 x_1^2+\alpha_2 x_2^2
\end{aligned}$$

因此函数 $x \longmapsto x^2, x \in \mathbb{R}$ 是凸的.

下面我们给出凸函数的另一个等价定义即 Jensen 不等式，它本身也有其重要的应用价值.

定理 6.12 (Jensen 不等式)

函数 $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ 是凸的，当且仅当：$\forall x_i \in I, \forall a_i \in [0,1](i=1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ 有

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n) \tag{6.2}$$

证明 若不等式6.2成立，则取 $n=2$ 时表明 f 是凸的.

反之，设 f 是凸的. 我们对 n 用数学归纳法证明.

当 $n=2$ 时，不等式6.2即为凸函数的定义.

现在假设 $n=k$ 时不等式6.2成立. 我们来证明不等式6.2对 $n=k+1$ 也成立.

设 $x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1} \in I, a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1} \in [0,1]$ 并且 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + a_{k+1} = 1$. 不失一般性，可以假设

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \neq 0$$

于是由归纳法假设我们有

$$f\left(\frac{\alpha_1}{a_1 + \cdots + a_k} x_1 + \cdots + \frac{\alpha_k}{a_1 + \cdots + a_k} x_k\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{a_1 + \cdots + a_k} f\left(x_i\right)$$

因此

$$\begin{aligned}
& f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1}) \\
=& f\left[(a_1 + \cdots + a_k)\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k} x_1 + \cdots + \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k} x_k\right) + \alpha_{k+1} x_{k+1}\right] \\
\leqslant& (\alpha_1 + \cdots + \alpha_k) f\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k} x_1 + \cdots + \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k} x_k\right) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}) \\
\leqslant& (\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k} f(x_1) + \cdots + \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k} f(x_k)\right] + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}) \\
=& \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_k f(x_k) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1})
\end{aligned}$$

此即表明不等式6.2对 $n=k+1$ 成立. 因此由数学归纳法知不等式6.2对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都成立.

作为 Jensen 不等式的应用，我们来证明下面几个重要不等式.

重要不等式 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是任意 $2n$ 个非零实数，$p>0, q>0$.

1. 若 $a_i > 0 (i=1,2,\cdots,n)$, 则
$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n};$$
2. 若 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则下述 Hölder 不等式成立：
$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}};$$
3. 若 $p>1$, 则下述 Minkowski 不等式成立：
$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明

1. 因为自然对数函数 $x \longmapsto \log x, x \in \mathbb{R}_*^+$ 是凹的，故 $\forall a_i > 0, \alpha_i \geqslant 0(i = 1, 2, \cdots, n)$ 且 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$，由 Jensen 不等式我们有

$$\alpha_1 \log a_1 + \alpha_2 \log a_2 + \cdots + \alpha_n \log a_n \leqslant \log(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n)$$

此即为

$$a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n.$$

若特别取 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \dfrac{1}{n}$，则上述不等式就是

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

利用此不等式我们得到

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

因此

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

2. 因为 $p > 0, q > 0$ 且 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，所以 $p > 1$．由于幂函数 $x \longmapsto x^p, x \in \mathbb{R}_*^+$ 是凸函数，故 $\forall x_i > 0, \alpha_i \geqslant 0(i = 1, 2, \cdots, n)$ 且 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$，由 Jensen 不等式有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^p.$$

现在根据假设 $\forall i = 1, 2, \cdots, n, a_i \neq 0, b_i \neq 0$．我们可取

$$x_i = \frac{|a_i|(|b_1|^q + |b_2|^q + \cdots + |b_n|^q)}{|b_i|^{\frac{1}{p-1}}}$$

$$\alpha_i = \frac{|b_i|^q}{|b_1|^q + |b_2|^q + \cdots + |b_n|^q} (i = 1, 2, \cdots n)$$

由于 $q = \dfrac{p}{p-1}$，故我们得到

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|\right)^p &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |b_i|^{q - \frac{p}{p-1}} \cdot |a_i|^p \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{p-1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{p-1}\end{aligned}$$

或

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

3. 首先我们有恒等式

$$\sum_{i=1}^{n} (|a_i| + |b_i|)^p = \sum_{i=1}^{n} |a_i|(|a_i| + |b_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |b_i|(|a_i| + |b_i|)^{p-i}$$

对右边两项分别应用 Hölder 不等式得到

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|(|a_i|+|b_i|)^{p-1}\leqslant(\sum_{i=1}^{n}a_i|^p)^{\frac{1}{p}}\times(\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)^{q(p-1)})^{\frac{1}{q}}$$
$$\sum_{i=1}^{n}|b_i|(|a_i|+|b_i|)^{p-1}\leqslant(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p)^{\frac{1}{p}}\times(\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)^{q(p-1)})^{\frac{1}{q}}.$$

将它们代入上述恒等式的右边得

$$\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)^p\leqslant[(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p)^{\frac{1}{p}}](\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)^p)^{\frac{1}{q}}$$

两边再除去 $(\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)^p)^{\frac{1}{q}}$ 即得到

$$(\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)^p)^{\frac{1}{p}}\leqslant(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

最后由于 $|a_i+b_i|\leqslant|a_i|+|b_i|$, 故我们有

$$(\sum_{i=1}^{n}|a_1+b_i|^p)^{\frac{1}{p}}\leqslant(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

对于一个给定的函数 f, 要从定义去判别它的凸凹性是比较团难的，下面我们给出几个用起来比较方便的判别法则.

函数凸凹性判别法则

首先我们介绍用导数判断函数凸凹性的定理.

定理 6.13

设函数 $f: I\to\mathbb{R}$ 在 I 可导，则 f 是凸 (凹) 的，当且仅当 f 的导函数 $f': I\to\mathbb{R}$ 在 I 上是单调上升 (下降) 的.

证明 根据凹函数定义，我们只需对凸函数进行证明.

设 f 是凸的，$x_1,x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$. 根探上述引理，$\forall x\in(x_1,x_2)$, 有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

由于 $f'(x_1)$ 与 $f'(x_2)$ 存在，故在上述不等式左端与右端先后令 $x\to x_1^+$ 与 $x\to x_2^-$ 得列

$$\begin{aligned}f'(x_1)=\lim_{x\to x_1^+}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}&\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\\&\leqslant\lim_{x\to x_2^-}\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=f'(x_2),\end{aligned}$$

即

$$f'(x_1)\leqslant f'(x_2),$$

因此 f' 在 I 上单调上升.

反之设 f' 在 I 上单调上升. $x_1,x_2\in I,\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$ 且 $\alpha_1+\alpha_2=1$. 我们来证明

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2).$$

不妨设 $x_1 \leqslant x_2$. 由于 $x_1 \leqslant \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \leqslant x_2$, 故由 Lagrange 中值定理有

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - f(x_1) &= f'(\xi)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - x_1) \\ &= \alpha_2 f'(\xi)(x_2 - x_1) \\ f(x_2) - f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= f'(\eta)(x_2 - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2) \\ &= \alpha_1 f'(\eta)(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

这里 $x_1 \leqslant \xi \leqslant \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \leqslant \eta \leqslant x_2$. 由 f' 的单调上升性, 有 $f'(\xi) \leqslant f'(\eta)$, 从而

$$\alpha_1[f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - f(x_1)] - \alpha_2[f(x_2) - f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)] \leqslant 0$$

或

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

此即表明 f 是凸的.

推论 6.4

若函数 $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 I 上 2 次可导, 则 f 是凸 (凹) 的, 当且仅当 $f'' \geqslant 0 (\leqslant 0)$.

例题 6.26 证明：自然对数函数 $x \longmapsto \log x, x \in \mathbb{R}_*^+$ 是凹的, 而 $\forall \alpha > 1$, 幂函数 $x \longmapsto x^\alpha, x \in \mathbb{R}_*^+$ 是凸的.

事实上,

$$(\log x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0, (x^\alpha)'' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}_*^+.$$

下面介绍用曲线的切线判断函数凸凹性的定理.

定理 6.14

设函数 $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 I 上可导, 则 f 是凸 (凹) 的, 当且仅当函数 f 的曲线 Γ 不位于 Γ 上任意一点 M 的切线的下 (上) 方.

证明 我们只对凸性进行证明.

(必要性) 设 f 是凸的. $M_0 = (x_0, f(x_0))$ 是 Γ 上任意固定一点. Γ 在 M_0 处的切线 T 的方程为

$$y = y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

为了证明 Γ 上的任一点 $M = (x, f(x))$ 不位于 T 的下方, 我们只需证明

$$f(x) - y(x) \geqslant 0, \forall x \in I.$$

事实上, 由 Lagrange 中值定理, 我们有

$$\begin{aligned} f(x) - y(x) &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \\ &= [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0), \end{aligned}$$

这里 ξ 介于 x_0 与 x 之间. 由于 f 是凸的, 根据定理6.13知 f' 在 I 上单调上升, 因此

$$f'(\xi) - f'(x_0) \begin{cases} \geqslant 0, & \text{若 } x > x_0; \\ \leqslant 0, & \text{若 } x < x_0. \end{cases}$$

从而 $f(x) - y(x) \geqslant 0, \forall x \in I$.

(充分性) 假设定理的条件成立. 设 $x_1, x_2 \in I, \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ 且 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. 不妨令 $x_1 \leqslant x_2$. 于是

$x_1 \leqslant \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \leqslant x_2$. 并且曲线 Γ 不位于 Γ 过点 $M = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2))$ 的切线 T 的下方, 因此我们有

$$f(x_1) - y(x_1) = f(x_1) - [f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + f'(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(x - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2)] \geqslant 0,$$
$$f(x_2) - y(x_2) = f(x_2) - [f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + f'(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(x_2 - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2)] \geqslant 0.$$

由此得到

$$f(x_1) - f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geqslant \alpha_2 f'(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(x_1 - x_2),$$
$$f(x_2) - f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geqslant \alpha_1 f'(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(x_2 - x_1).$$

将第一个不等式乘以 α_1, 第二个不等式乘以 α_2 然后相加即得到

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

因此 f 是凸的.

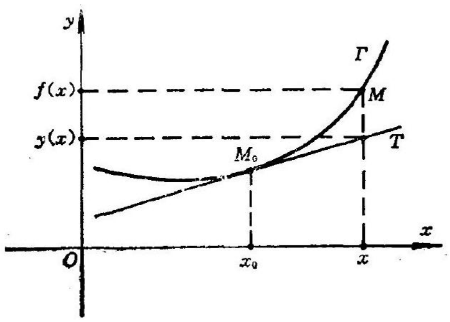

图 6.11

例题 6.27 考虑函数 $x \longmapsto f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}^3$.

从图形上可以看出 $\forall x > 0$, 函数 f 的曲线 Γ_1 位于过点 $M(x, f(x))$ 的切线 T_1 的上方, 而 $\forall x < 0$, 函数 f 的曲线 Γ_2 位于过点 $M(x, f(x))$ 的切线 T_2 的下方. 因此 f 在 $(0, +\infty)$ 上是凸的, 而 f 在 $(-\infty, 0)$ 上是凹的.

在原点 $(0, 0)$ 处函数 f 的切线为 x 轴. 因此 f 的曲线 Γ 穿过原点时, f 由凹变为凸. 函数 f 的这种点值得我们注意, 这就是下面介绍的拐点.

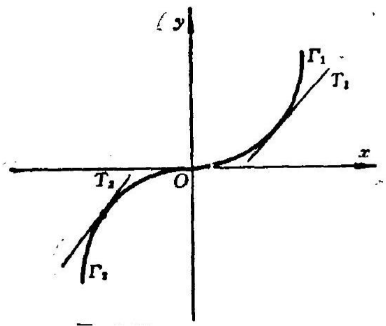

图 6.12

曲线的拐点

定义 6.8

设 $I \subset \mathbb{R}$ 是任一非空区间, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ 是任一函数, $a \in I$ 是一内点. 我们称 a 是 f 的拐点, 如果存在 $\delta > 0$, 使得

1. f 在 $(a-\delta, a)$ 上的限制是凸 (凹) 的,
2. f 在 $(a, a+\delta)$ 上的限制是凹 (凸) 的.

通常我们称 $(a, f(a))$ 是函数 f 的曲线 Γ 的拐点.

根据此定义知, 函数 $x \longmapsto f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$ 有唯一的拐点 0.

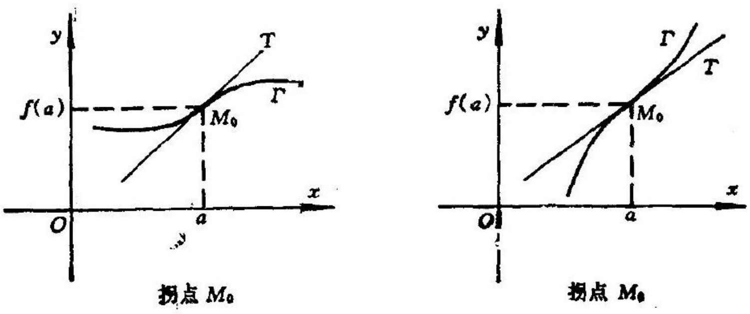

图 6.13

注

从图6.13所示的在拐点 M_0 的邻域内函数 f 的图形直出, f 的曲线 Γ 从拐点 M_0 的切线的一侧穿到另一侧. 但必须注意, 曲线从某点的切线一侧穿到另一侧并不是拐点的充分条件. 我们可以构造出这样的函数 f, 虽然 f 的图形分别位于某点 M_0 的切线的两侧, 但在两侧 f 并不保持确定的凸凹性.

例题 6.28 考虑函数 $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 它定义为

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\sin \dfrac{\pi}{x}\right|, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x^2 \left|\sin \dfrac{\pi}{x}\right|, & x < 0 \end{cases}$$

它的图形如下图所示:

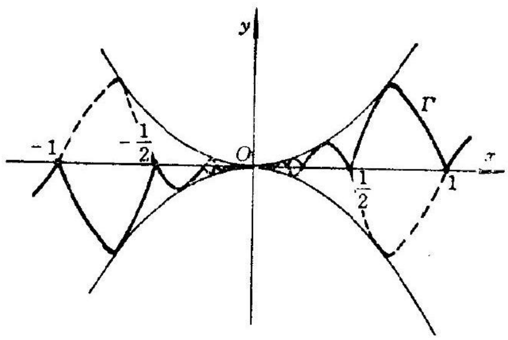

图 6.14

此函数的曲线 Γ 位于过原点的切线 (即 x 轴) 的两侧, 但原点并不是 Γ 的拐点. 因为 f 在 $x = 0$ 的任意右侧邻域与左侧邻域内都不保持凸凹性不变.

关于函数拐点的判别, 我们有下面的定理.

定理 6.15

设 $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ 是任一函数, $a \in I$ 是一内点.

1. 若 a 是 f 的拐点, 并且 $f''(a)$ 存在, 则 $f''(a)=0$.
2. 若存在 $\delta>0$, 使得 f 在 $\mathring{B}(a,\delta)$ 上 2 次可导, 且

$$f''(x)\begin{cases} >0, & \forall x \in \mathring{B}_+(a,\delta), \\ <0, & \forall x \in \mathring{B}_-(a,\delta); \end{cases} \quad \text{或} \quad f''(x)\begin{cases} <0, & \forall x \in \mathring{B}_+(a,\delta), \\ >0, & \forall x \in \mathring{B}_-(a,\delta). \end{cases}$$

则 a 是 f 的拐点.

证明

1. 因为 $f''(a)$ 存在, 所以存在 $\delta>0$, 使得 f' 在 $(a-\delta,a+\delta)$ 上存在.
另一方面. 由于 a 是 f 的拐点, 故由定义知, 只要 $\delta>0$ 充分小. f 在 $(a-\delta,a)$ 上是凸 (凹) 的, 而在 $(a,a+\delta)$ 上 f 是凹 (凸) 的, 不妨设 f 在 $(a-\delta,a)$ 上是凸的, 而 f 在 $(a,a+\delta)$ 上是凹的, 于是根据定理6.13, f' 在 $(a-\delta,a)$ 上单调上升, 在 $(a,a+\delta)$ 上 f' 单调下降, 从而
$$\forall x \in (a-\delta,a),\ f'(x) \leqslant f'(a),$$
$$\forall x \in (a,a+\delta),\ f'(x) \leqslant f'(a).$$
由此推得
$$f''(a)=f''_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} \geqslant 0,$$
$$f''(a)=f''_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} \leqslant 0.$$
因此 $f''(a)=0$.
2. 设 f 在 $\mathring{B}(a,\delta)$ 上 2 次可导, 并且假设 $\forall x \in \mathring{B}_-(a,\delta)$, $f''(x)<0$; $\forall x \in \mathring{B}_+(a,\delta)$, $f''(x)>0$.
根据定理6.13的推论知, f 在 $(a-\delta,a)$ 上是凹的, 而在 $(a,a+\delta)$ 上 f 是凸的, 因此 a 是 f 的拐点.
对 $f''(x)>0, \forall x \in \mathring{B}_-(a,\delta)$; $f''(x)<0, \forall x \in \mathring{B}_+(a,\delta)$ 的情形证明完全类似. 定理证毕.

这个定理表明, 若 $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 I 上 2 次可导, 则 f 的拐点只可能存在于 f'' 的零点之中.

例题 6.29 证明: 正弦函数 $x \to \sin x, x \in \mathbb{R}$ 的拐点为 $x=n\pi (n \in \mathbb{Z})$.

因为正弦函数 $x \longmapsto \sin x, x \in \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是 2 次可导的, 并且 $\sin'' x=-\sin x (\forall x \in \mathbb{R})$, 所以
$$\sin'' x=0 \Longleftrightarrow \sin x=0 \Longleftrightarrow x=n\pi (n \in \mathbb{N}).$$
另一方面, 由于
$$f''(x)=-\sin x\begin{cases} <0, & \forall x \in \left(2k\pi, 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right), \\ >0, & \forall x \in \left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2}, 2k\pi\right), \\ >0, & \forall x \in \left((2k+1)\pi, (2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}\right), \\ <0, & \forall x \in \left((2k+1)\pi-\dfrac{\pi}{2}, (2k+1)\pi\right). \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$
故由定理??知, $x=n\pi (n \in Z)$ 就是正弦函数 $x \longmapsto \sin x, x \in \mathbb{R}$ 的全部拐点.

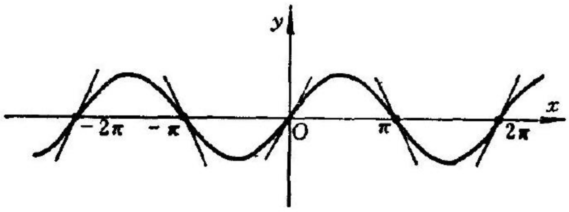

图 6.15

3. 函数不定型极限的计算

导数的一个重要应用就是可用计算导数的方法求很大一类函数不定型极限，即下面的 L'Hospital 法则.

定理 6.16 (L'Hospital 法则)

设 (a,b) 是任一开区间 $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$, $f,g:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ 是任意两个函数，满足下述条件：

1. f,g 在 (a,b) 上可导，$g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$；
2. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$ 或 $\pm\infty$；
3. $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

则我们也有

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

当 $x \to b^-$ 时也有类似的结论.

证明 首先我们证明：存在 $c \in (a,b)$ 使得

$$g(x) \neq 0, \forall x \in (a,c).$$

事实上，由假设 $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$, 故由 Darboux 定理 (定理6.10) 的推论知 $g'(x) > 0, \forall x \in (a,b)$, 或 $g'(x) < 0, \forall\ x \in (a,b)$. 从而 g 在 (a,b) 上是严格单调的，故不论 $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$ 或 $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$, 我们总可以找到一个 $c \in (a,b)$, 使得 $g(x) \neq 0, \forall x \in (a,c)$.

下面我们对 A 分三种情况来讨论：

1)$A < +\infty$： 任取 $p,q \in \mathbb{R}$, 使得 $A < p < q$.

由于 $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, 故存在 $c_1 \in (a,c)$ 使得

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < p < q, \forall x \in (a,c_1)$$

于是 $\forall x,y \in (a,c_1)$ 且 $x \neq y$, 由 Cauchy 中值定理有

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \text{ (} \xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } y \text{ 之间).}$$

由此得到

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} < p < q, \forall x,y \in (a,c_1). \tag{6.3}$$

若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0$, 则在6.3中固定 $x\in(a,c_1)$, 并令 $y\to a^+$ 得到

$$\frac{f(x)}{g(x)}<q,\forall x\in(a,c_1).$$

若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\pm\infty$, 则由于 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{1-f(y)/f(x)}{1-g(y)/g(x)}=1$. (这里固定 $y\in(a,c_1)$) . 故有 $\frac{1-f(y)/f(x)}{1-g(y)/g(x)}=1+o(1)$ ($x\to a^+$). 从而由6.3式得到

$$\frac{f(x)[1-f(y)/f(x)]}{g(x)[1-g(y)/g(x)]}=\frac{f(x)}{g(x)}[1+o(1)]<p$$

或

$$\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{p}{1+o(1)}(x\to a^+).$$

于是存在 $c_2\in(a,c_1)$ 使得 $\frac{p}{1+o(1)}<q$, 或

$$\frac{f(x)}{g(x)}<q,\forall x\in(a,c_2).$$

总之不论 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0$ 或 $\pm\infty$, 我们证明了下述结论:

$$(\forall q>A)(\exists c_q>a)(\forall x\in(a,c_q))\Longrightarrow\frac{f(x)}{g(x)}<q \tag{6.4}$$

因此当 $A=-\infty$ 时, $\forall M>0$, 若取 $q=-M$, 则6.4式表明

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=A=-\infty$$

2)$A>-\infty$: 任取 $\bar{p},\bar{q}\in\mathbb{R}$ 使得 $\bar{q}<\bar{p}<A$. 这时我们可类似证明下述结论成立:

$$(\forall\bar{q}<A)(\exists c_{\bar{q}}>a)(\forall x\in(a,c_{\bar{q}}))\Longrightarrow\frac{f(x)}{g(x)}>\bar{q}. \tag{6.5}$$

因此当 $A=+\infty$ 时, $\forall M>0$, 若取 $\bar{q}=M$, 则上述 6.5式表明

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=A=+\infty.$$

3)$-\infty<A<+\infty$: 这时 $\forall\varepsilon>0$, 若取 $q=A+\varepsilon,\bar{q}=A-\varepsilon$ 则存在 $d=\min(c_q,c_{\bar{q}})$ 使得

$$\forall x\in(a,d)\Longrightarrow A-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<A+\varepsilon.$$

此即表明

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

对 $x\to b^-$ 的情形可类似证明.

注 上述 L'Hospital 法则解决了函数的 $\frac{0}{0}$ 与 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型的极限计算问题. $0\cdot 0$ 与 $\infty-\infty$ 不定型我们在第 4 章 §3 中已经证明了通过适当处理都可以化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型, 至于函数的 $1^\infty,0^\circ,\infty^\circ$ 不定型, 通过先取自然对数的方法也可以把它们化为 $0\cdot\infty$ 不定型. 例如设 $u(x)^{v(x)}$ 是 0^0 不定型,

$$\log u(x)^{v(x)}=v(x)\log u(x)$$

就是 $0\cdot\infty$ 不定型.

因此我们可以说, L'Hospital 法则原则上完全解决了函数的所有不定型极限的计算问题.

下面举几个例子说明 L'Hospital 法则的应用.

例题 6.30 计算 $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x}$.

这是 $\frac{0}{0}$ 不定型. 它满足 L'Hospital 法则的全部条件, 并且

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\cos x}=2$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x}=2$$

例题 6.31 计算 $\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\log x-x+1}$.

这是 $\frac{0}{0}$ 不定型. 计算这个极限时, 我们必须重复应用 L'Hospital 法则.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\log x-x+1}&=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(1+\log x)-1}{\frac{1}{x}-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(1+\log x)-x}{1-x}\\&=\lim_{x\to 1}x\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x^x(1+\log x)-1}{1-x}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x^x[(1+\log x)^2+\frac{1}{x}]}{-1}\\&=-2\end{aligned}$$

例题 6.32 计算 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}(\alpha>0,a>1)$.

它们都是 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型. 由 L'Hospital 法则得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$$

对于 $\frac{x^\alpha}{a^x}$, 由于 $\alpha>0$ 是一定数, 故存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $\alpha-n\leqslant 0$. 因此对 $\frac{x^\alpha}{a^x}$ 应用 n 次 L'Hospital 法则得到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x\log a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{a^x(\log a)^2}=\cdots\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{a-n}}{a^x(\log a)^n}\\&=0.\end{aligned}$$

例题 6.33 设 $\alpha>0$, 计算 $\lim_{x\to 0+}x^\alpha\log x$.

这是 $0\cdot\infty$ 不定型. 我们把它化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型

$$\lim_{x\to 0+}x^\alpha\log x=\lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{x^{-\alpha}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{(-\alpha)x^{-\alpha-1}}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^\alpha}{-\alpha}=0$$

例题 6.34 计算 $\lim_{x\to 0+}x^{\frac{1}{1+\log x}}$.

这是 0^0 不定型. 由 $\log x^{\frac{1}{1+\log x}} = \dfrac{\log x}{1+\log x}$ 得到

$$\lim_{x\to0^+} \log x^{\frac{1}{1+\log x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{1+\log x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1.$$

从而

$$\lim_{x\to0^+} x^{\frac{1}{1+\log x}} = \lim_{x\to0^+} \mathrm{e}^{\log x^{\frac{1}{1+\log x}}} = \mathrm{e}.$$

✍ 习 题 6.4

1. 证明下述各不等式:
   1) $x < \arcsin x < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, 0 < x < 1$;
   2) $\log(1+x) > \dfrac{\arctan x}{1+x}, x > 0$;
   3) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\log x}\,\mathrm{d}x < \frac{2b}{\log b}, \mathrm{e}^2 < a < b$;
   4) $\mathrm{e}^x < \dfrac{1}{1-x}, x < 1$;
   5) $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}, x > 0,\ y > 0,\ \beta > \alpha > 0$.
2. 证明下述恒等式:
$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$
3. 设函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 在点 $c \in (a,b)$ 的邻域 $B(c,\delta)$ 上可导, 且 f' 在 c 处连续, $f'(c) \neq 0$. 证明: 存在 $0 < \eta \leqslant \delta$, 使得 f 在 $B(c,\eta)$ 上是单调的.
   若 f' 在 c 处不连续, 则上述结论可以不成立. 试研究函数:
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x < 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
   1) 证明: 函数
$$x \longmapsto g(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
   在 $x = 0$ 的任意邻域内既有 $g'(x) = 1$ 的点, 也有 $g'(x) = -1$ 的点;
   2) 证明: 在 $x = 0$ 的任意邻域内既有 $f'(x) > 0$ 的点, 也有 $f'(x) < 0$ 的点;
   3) 由此推出 f 在 $x = 0$ 的任意邻域内都不是单调的.
4. 设 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 满足:
   1) f 在 $[a,b]$ 上连续;
   2) $\forall x \in (a,b)$, $f'(x^+)$ 与 $f'(x^-)$ 至多有一个存在, 并且非负 (可以为 $+\infty$).
   证明: f 在 $[a,b]$ 上是单调上升的. 为此:
   1) 假设存在 $\alpha, \beta \in [a,b]$, $\alpha < \beta$, 使得 $f(\alpha) > f(\beta)$. 考虑直线 $y_k(x) = -k(x-\alpha) + f(\alpha)$, 证明存在 $k_0 > 0$, 使得 $y_{k_0}(\beta) > f(\beta)$;
   2) 令 $E = \{x \in [\alpha,\beta] \mid f(x) \geqslant y_{k_0}(x)\}$, $\xi = \sup E$. 证明: $f'_+(\xi) < 0$, $f'_-(\xi) < 0$;

3) 由此推出 f 在 $[a,b]$ 上单调上升.

5. 设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $\forall x\in(a,b)$, $f'_+(x)$ 与 $f'_-(x)$ 中至少有一个存在. 记它为 $f'_\varepsilon(x), (\varepsilon=\pm)$. 试利用第 3 题的结论证明:
$$\inf_{x\in(a,b)} f'_\varepsilon(x)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant\sup_{x\in(a,b)} f'_\varepsilon(x).$$
6. 证明: 函数 $x\mapsto\log\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 是凸的.
7. 证明: 函数
$$x\longmapsto\begin{cases}(x-2)^2, & x\in[0,+\infty)\\(x+2)^2, & x\in(-\infty,0]\end{cases}$$
在 $(-\infty,0]$ 与 $[0,+\infty)$ 上是凸的, 但 f 在 $\mathbb{R}$ 上不是凸的.
8. 设函数 $f:I\to J$ 与 $g:J\to\mathbb{R}$ 是凸函数, 且 g 是单调上升的. 证明: $g\circ f:I\to\mathbb{R}$ 也是凸函数.
9. 设函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 满足 (I 是一个区间):
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(x)+f(y)], \forall x,y\in I.$$
   1) 证明: $\forall k=\dfrac{m}{2^n}\in[0,1]$, $f(kx+(1-k)y)\leqslant kf(x)+(1-k)f(y)$;
   2) 证明: 若 f 在 I 上连续, 则 f 是凸的.
10. 设 $f:I\to\mathbb{R}$ 是任一凸函数 (I 是一有限闭区间).
   1) 证明: $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$, 且 $[\alpha,\beta]\subset\mathring{I}$, f 在 $[\alpha,\beta]$ 上是 Lipschitz 函数;
   2) 证明: f 在 $\mathring{I}$ 上连续;
   3) 举例说明凸函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 在 I 上不一定连续.
11. 设 $f:I\to\mathbb{R}$ 是任一凸函数.
   1) 证明: $\forall x\in I$, $f'_+(x)$ 与 $f'_-(x)$ 存在, 并且 $f'_-(x)\leqslant f'_+(x)$;
   2) 证明: 函数 $x\mapsto f'_-(x)$ 与 $x\mapsto f'_+(x)$, $x\in\mathring{I}$ 是单调上升的, 并且
$$\forall a,b\in\mathring{I}, f'_+(a)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant f'_-(b).$$
12. 设 I 是任一非空开区间, $f:I\to\mathbb{R}$ 是任一函数. 证明: f 是凸的充要条件是 f 在 I 上连续, 且在 I 上有单调上升的左、右导函数存在.
13. 设 I 是任一开区间, $f:I\to\mathbb{R}$ 是任一函数.
   1) 设 $a\in I$, f 是凸的. 证明: f 的图形 C 位于直线 $y=f(a)+m(x-a)$ 上方当且仅当 $f'_-(a)\leqslant m\leqslant f'_+(a)$;
   2) 设 f 在 I 上连续, 右 (或左) 可导, 且满足:
$$\forall a,x\in I, f(x)\geqslant f(a)+f'_+(a)(x-a)$$
   (或 $f(x)\geqslant f(a)+f'_-(a)(x-a)$). 证明: f 是凸的.
14. 设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 是 C^1 类的, 并且是严格凸的 (即 $\forall x_1,x_2\in(a,b)$, $\forall\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$, $\alpha_1+\alpha_2=1$, 满足
$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)<\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2).$$
   1) 证明: f 的图像 Γ 上每一点的切线的斜率组成的实数集合是一开区间 J;
   2) 证明: $f':(a,b)\to J$ 是可逆的, 记 $k:J\to(a,b)$ 为 f' 的反函数;

3) $\forall\lambda\in J$，定义函数 $h_\lambda:(a,b)\to\mathbb{R}$ 为：

$$h_\lambda(x)=\lambda x-f(x),\forall x\in(a,b).$$

证明：h_λ 在 (a,b) 上有唯一的极大值点，记为 x_λ；

4) 定义函数 $g:J\to\mathbb{R}$ 为：

$$g(\lambda)=h_\lambda(x_\lambda)=\sup_{x\in(a,b)}(\lambda x-f(x)),\forall\lambda\in J.$$

试写出函数 f,k,g 所满足的关系式；

5) 证明：g 在 J 上连续；

6) 证明：g 在 J 上是凸函数.

15. 设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，证明：

$$f''(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2},\forall x\in(a,b).$$

16. 计算下列各极限值：

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}$；

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x-\log(1+x)}{x^2}$；

3) $\lim\limits_{x\to0}\sin x\log x$；

4) $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{1}{\log x}-\dfrac{1}{x-1})$；

5) $\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{1}{\log(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\log(1+x)}]$；

6) $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x^2)^{\frac{1}{\log(1-x)}}$；

7) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\tan x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$；

8) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\cos x}{\cosh x})^{\frac{1}{x^2}}$；

9) $\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\sin x}$；

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$.

第七章 原函数

这一章我们介绍一元实值函数的原函数概念，讨论了 Riemann 积分与原函数的关系，给出了一系列计算原函数的实际方法.

7.1 Newton-Leibniz 公式

1. 原函数定义

在第 5 章，我们系统地介绍了一元实值函数 $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 的 Riemann 积分理论. 但有一个很重要的问题没有解决：如何具体计算一个函数 f 的 Riemann 积分值 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

当然，直接按积分定义或用 Riemann 和极限计算积分是一个办法，然而能够用这种方法去计算的函数毕竟是少数，而且计算起来也不方便. 因此寻找计算积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的行之有效的方法就是这一章主要的研究内容.

下面介绍的原函数概念就是计算积分的一个重要工具.

定义 7.1

设 $I\subset\mathbb{R}$ 是任一非空区间，$f:I\to\mathbb{R}$ 是任一函数，若存在函数 $F:I\to\mathbb{R}$ 使得：

1. F 在 I 上可导，
2. $F'(x)=f(x),\forall x\in I$，

则我们称 F 是函数 f 的一个原函数.

这里有两个问题需要研究：其一，是否任一个函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 都有原函数存在？其二，若 f 有原函数存在，原函数是否唯一？

我们先研究唯一性问题.

2. 原函数的非唯一性

定理 7.1

若函数 $F:I\to\mathbb{R}$ 是 $f:I\to\mathbb{R}$ 的一个原函数，则 $\forall C\in\mathbb{R}, F+C$ 也是 f 的原函数.

证明 因为 F 是 f 的原函数，故由定义有

$$F'(x)=f(x),\forall x\in I.$$

显然 $\forall C\in\mathbb{R}, F+C$ 在 I 上可导，并且

$$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x),\forall x\in I.$$

因此 $F+C$ 也是 f 的一个原函数.

此定理表明，若原函数存在，它就不是唯一的，下一定理指出了两个原函数之间的关系.

定理 7.2

若 F,G 是 $f:I\to\mathbb{R}$ 的两个原函数，则存在常数 C 使得

$$F=G+C.$$

证明 因为 F 与 G 是函数 f 的原函数, 故 F 与 G 在 I 上可导, 并且

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x), G'(x) = f(x).$$

从而

$$\forall x \in I, F'(x) = G'(x).$$

根据第 6 章 §3 的命题**??**推论, 存在常数 $C \in \mathbb{R}$ 使得

$$F - G = C \quad \text{或} \quad F = G + C.$$

原函数的记法 根据上面两个定理, f 的所有原函数只能表示成 $F + C$ 的形式, 其中 F 是 f 的一个原函数. 因此今后我们用符号 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 表示函数 f 的任意一个原函数. 通常 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 也称为函数 f 的不定积分, 而将 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 称为函数 f 的定积分.

现在我们来研究原函数的存在性.

3. 原函数的存在性

定理 7.3

设 $I \subset \mathbb{R}$ 是任一非空区间, $f : I \to \mathbb{R}$ 是任一连续函数. 那么下述结论成立.

1. f 的原函数存在, 并且 $\forall x_0 \in I$, 函数
$$x \longmapsto F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$
是 f 的一个原函数.
2. $\forall a, b \in I, \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

证明

1. 函数 F 是 f 的积分函数, 在第 6 章 §1 的例6.6中我们已经证明了 F 在 I 上可导, 并且 $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$, 因此 F 是 f 的一个原函数.
2. 利用积分的性质, 我们有
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^{x_0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0}^b f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_0}^b f(x)\mathrm{d}x - \int_{x_0}^a f(x)\mathrm{d}x \\ &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

这个定理建立了连续函数 f 的原函数与 f 在 $[a, b]$ 上的 Riemann 积分之间的联系. 下面一个定理把上述结论推广到了一般可积函数.

定理 7.4 (Newton-Leibniz 公式)

设 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是任一 Riemann 可积函数, 若 F 是 f 的原函数, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

证明 首先由于 $f \in \mathscr{R}[a, b]$, 故根据定理5.4知, $\forall \varepsilon > 0$, 存在两个阶梯函数 $h, k : [a, b] \to \mathbb{R}$ 使得

$$|f(x) - h(x)| \leqslant k(x), \forall x \in [a, b], \int_a^b k(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

现在设 $\sigma=(a_0,a_1,\cdots,a_m)$ 是同时适合于 h 与 k 的 $[a,b]$ 的一个分割. 因此 h 与 k 在开区间 (a_i,a_{i+1}) 上 $(i=0,1,\cdots,m-1)$ 取常数值.

另一方面, 对此分割 σ, 我们有

$$F(b)-F(a)=F(a_1)-F(a_0)+F(a_2)-F(a_1)+\cdots+F(a_m)-F(a_{m-1}),$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

由于 F 是 f 的原函数, 故 F 在 $[a,b]$ 上可导, 并且 $F'(x)=f(x),\forall x\in[a,b]$. 因此由 Lagrange 中值定理, 我们有: $\forall i=0,1,\cdots,m-1$,

$$\begin{aligned}F(a_{i+1})-F(a_i)&=F'(\xi_i)(a_{i+1}-a_i)\\&=f(\xi_i)(a_{i+1}-a_i),\end{aligned}$$

这里 $a_i<\xi_i<a_{i+1}$. 从而

$$\begin{aligned}&\left|F(b)-F(a)-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\\=&\left|\sum_{i=0}^{m-1}\left[F(a_{i+1})-F(a_i)-\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x\right]\right|\\=&\left|\sum_{i=0}^{m-1} f(\xi_i)(a_{i+1}-a_i)-\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x\right|\\=&\left|\sum_{i=0}^{m-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}}[f(\xi_i)-f(x)]\mathrm{d}x\right|\\\leqslant&\sum_{i=0}^{m-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}}|f(\xi_i)-f(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于 h 与 k 在 (a_i,a_{i+1}) 上取常值, 故

$$\begin{aligned}|f(\xi_i)-f(x)|&\leqslant|f(\xi_i)-h(\xi_i)|+|h(x)-f(x)|\\&\leqslant k(\xi_i)+k(x)\\&=2k(x),\forall x\in(a_i,a_{i+1}).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\left|F(b)-F(a)-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|&\leqslant 2\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_i+1} k(x)\mathrm{d}x\\&=2\int_a^b k(x)\mathrm{d}x<\varepsilon\end{aligned}$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性, 我们得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

注

1. 由上述 Newton-Neibniz 公式可以看出, 计算函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分值 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 就转化为
   1) 找 f 的一个原函数 F.

2) 计算 F 在 a, b 两点的值的差 $F(b) - F(a)$. 因此下面几节的任务就是研究如何去求一个函数的原函数.

2. 关于原函数与 Riemann 可积性的关系我们指出下面两点注意的地方.

其一：并不是每一个 Riemann 可积函数 f 都有原函数存在. 例如定义在 $[0, 1]$ 上的 Riemann 函数 R , 在第 5 章 §2 例5.9中我们证明了它在 $[0, 1]$ 上是 Riemann 可积的, 并且 $\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x = 0$. 从而 $\forall x \in [0, 1]$, Riemann 函数 R 在 $[0, x]$ 上可积并且

$$\int_0^x R(t)\mathrm{d}t = 0$$

如果 Riemann 函数 $R : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 $[0, 1]$ 上有原函数 $F : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ 存在, 那么由定义知

$$F'(x) = R(x), \forall x \in [0, 1].$$

另一方面, 由上述定理7.4知：$\forall x \in [0, 1]$,

$$F(x) - F(0) = \int_0^x R(t)\mathrm{d}t = 0,$$

从而

$$F(x) = F(0) \text{ 或 } F'(x) = 0, \forall x \in [0, 1].$$

此矛盾说明 Riemann 函数 $R : [0, 1] \to \mathbb{R}$ 在 $[0, 1]$ 上不存在任何的原函数.

其二:并不是每一个具有原函数的有界函数都是 Riemann 可积的. 这从原函数的定义 $\big(F'(x) = f(x)\big)$ 应该可以明白这一点, 但要具体构造出这样一个函数并非易事.

习 题 7.1

1. 考虑函数 $F, G : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$, 它们定义为:

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \quad G(x) = \int_b^{bx} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \quad (b > 0).$$

1) 计算 $F'(x)$, $G'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$;

2) 利用定理7.3 证明下述我们在定理5.13中已证明过的公式:

$$\log a + \log b = \log ab, \quad a > 0,\ b > 0.$$

2. 设函数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上连续. 试利用定理7.3及第 6 章 §3 的 Darboux 定理 (定理 6.13) 证明：f 取介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一切中间值 (即满足介值性质).

3. 设函数 $f : I \to \mathbb{R}$ 在区间 I 上连续, 函数 $h, k : J \to I$ 在区间 J 上可导. 定义函数 $F : J \to \mathbb{R}$ 如下:

$$\forall x \in J, \quad F(x) = \int_{h(x)}^{k(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

试利用定理7.3证明：函数 F 在 J 上可导, 并且

$$F'(x) = f(k(x))k'(x) - f(h(x))h'(x), \quad \forall x \in J.$$

4. 此题是 Newton-Leibniz 公式的推广.

设函数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 函数 $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上连续, 并且 $\forall x \in [a, b]$, $F'_+(x)$ 与 $F'_-(x)$ 中至少有一个存在, 并且 $F'_\varepsilon(x) = f(x)$(这里 $\varepsilon = \pm$). 试利用第 6 章

§4 习题 5 的结论证明：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

5. 设函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，函数 $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上连续，并且 $\forall x \in (a,b)$，F 在 x 处的对称导数 (见第 6 章 §1 习题 7) 满足 $F_s'(x) = f(x)$. 证明：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

利用此公式计算 $\int_{-1}^2 \operatorname{sgn}(x)\,\mathrm{d}x$.(取 $F(x) = |x|$，并证明 $F_s'(x) = \operatorname{sgn}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

7.2 求原函数的一般法则

首先我们介绍基本初等函数的原函数.

1. 基本初等函数的原函数

直接从原函数的定义容易证明下列各公式成立.

1. $\int a\mathrm{d}x = ax + C(a \in \mathbb{R})$.
2. $\int x^a \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C(a \neq -1)$.
3. $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \log|x| + C$.
4. $\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.
5. $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\log a} + C(0 < a > 1)$.
6. $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$.
7. $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$.
8. $\int \sinh x\mathrm{d}x = \cosh x + C$.
9. $\int \cosh x\mathrm{d}x = \sinh x + C$.
10. $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$.
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$.
12. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C = \operatorname{arcsinh} x + C$.
13. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C(= \operatorname{arccosh} x + C,$ 若 $x > 1)$.
14. $\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C(= \operatorname{arctanh} x + C,$ 若 $|x| < 1)$.

熟悉掌握上面所列举的这些基本初等函数的原函数将有益于我们计算更复杂的函数的原函数.

2. 计算原函数的三个方法

定理 7.5 (代数运算法)

设函数 $f, g: I \to \mathbb{R}$ 在区间 I 上有原函数存在. 则

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f$ 也有原函数存在, 并且
$$\int (\lambda f)(x)\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\mathrm{d}x + C$$
2. $f+g$ 也有原函数存在, 并且
$$\int (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x + C$$

证明

1. 设 $\lambda \in \mathbb{R}$. 由于 f 有原函数存在, 故由原函数定义我们有
$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x), \forall x \in I.$$
从而
$$\left(\lambda \int f(x)\mathrm{d}x\right)' = \lambda \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = \lambda f(x) = (\lambda f)(x), \forall x \in I.$$
此即表明函数 λf 有原函数 $\lambda \int f(x)\mathrm{d}x$, 因此
$$\int (\lambda f)(x)\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\mathrm{d}x + C$$
2. 由于 g 有原函数, 故
$$\left(\int g(x)\mathrm{d}x\right)' = g(x), \forall x \in I.$$
从而
$$\begin{aligned}\left(\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x\right)' &= \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' + \left(\int g(x)\mathrm{d}x\right)' \\ &= f(x) + g(x) \\ &= (f+g)(x), \forall x \in I.\end{aligned}$$
此即表明 $f+g$ 有原函数 $\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$. 因此
$$\int (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x + C.$$

例题 7.1 证明: $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\int \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right)\mathrm{d}x = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x + C$$

事实上，$\forall k \in \mathbb{N}, \int x^k \mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}x^{k+1}$，因此由上述定理我们推得

$$\begin{aligned}&\int \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) \mathrm{d}x \\ =& \int a_n x^n \mathrm{d}x + \int a_{n-1}x^{n-1}\mathrm{d}x + \cdots + \int a_1 x \mathrm{d}x + \int a_0 \mathrm{d}x \\ =& a_n \int x^n \mathrm{d}x + a_{n-1}\int x^{n-1}\mathrm{d}x + \cdots + a_1 \int x\mathrm{d}x + a_0 \int 1\mathrm{d}x \\ =& \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x + C\end{aligned}$$

例题 7.2 计算 $\int \sin nx \cos mx \mathrm{d}x\, (m, n \in \mathbb{Z})$.

直接从原函数定义容易证明：

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int \sin ax \mathrm{d}x = \begin{cases} -\frac{1}{a}\cos ax + C, & a \neq 0 \\ C, & a = 0 \end{cases}$$

由于

$$\sin nx \cos mx = \frac{1}{2}[\sin(n+m)x + \sin(n-m)x],$$

故

$$\int \sin nx \cos mx \mathrm{d}x = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n+m)x}{n+m} + \frac{\cos(n-m)x}{n-m}\right] + C, n^2 \neq m^2 \\ -\frac{\cos 2mx}{4m} + C, n = m \\ \frac{\cos 2mx}{4m} + C, n = -m \end{cases}$$

定理 7.6 (分部积分法)

设 $I \subset \mathbb{R}$ 是一非空区间，函数 u， $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 I 上是 C^1 类的，则

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

证明 由于函数 uv 在 I 上是 C^1 类的，并且

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x), \forall x \in \boldsymbol{I}.$$

故 uv 是函数 $u'v + uv'$ 的一个原函数，因此

$$u(x)v(x) = \int \left[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right] \mathrm{d}x + C$$

从而

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x + C$$

推论 7.1

$\forall a, b \in I$,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

这里 $[u(x)v(x)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

证明 由于函数 $u'v$ 的任意两个原函数只相差一个常数，并且 $\int_a^x u'(t)v(t)\mathrm{d}t$ 是 $u'v$ 的一个原函数，故

$$\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_a^x u'(t)v(t)\mathrm{d}t + C'$$

从而

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int_a^x u'(t)v(t)\mathrm{d}t + C - C'$$

因此由定理7.4得到

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x &= \left[u(b)v(b) - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + C - C'\right] - \left[u(a)v(a) - \int_a^a u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + C - C'\right] \\ &= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

从上述定理可知，对于给定的函数 $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$，要利用分部积分法计算它的原函数 $\int f(x)\mathrm{d}x$，需要注意下面两点：

1. 首先将 $f(x)$ 表示成 $u(x)v'(x)$ 的形式.
2. 原函数 $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ 易于计算.

例题 7.3 计算 $\int \log\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x$.

由 $\log\left(1+x^2\right) = \log\left(1+x^2\right)\cdot x'$，及分部积分法有

$$\begin{aligned}\int \log\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x &= \int \log\left(1+x^2\right)\cdot x'\mathrm{d}x \\ &= x\log\left(1+x^2\right) - \int \left[\log\left(1+x^2\right)\right]' x\mathrm{d}x \\ &= x\log\left(1+x^2\right) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= x\log\left(1+x^2\right) - 2\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= x\log\left(1+x^2\right) - 2\int \mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= x\log\left(1+x^2\right) - 2x + 2\arctan x + C.\end{aligned}$$

例题 7.4 计算 $\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x, \int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x (b \neq 0)$.

由 $\mathrm{e}^{ax}\sin bx = \mathrm{e}^{ax}\left(-\frac{\cos bx}{b}\right)'$ 及分部积分法得到

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x &= \int \mathrm{e}^{ax}\left(-\frac{\cos bx}{b}\right)'\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{ax}\cos bx}{b} - \int \left(\mathrm{e}^{ax}\right)'\left(-\frac{\cos bx}{b}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x. \qquad (7.1)\end{aligned}$$

又 $e^{ax}\cos bx = e^{ax}\left(\frac{\sin bx}{b}\right)'$

$$
\begin{aligned}
\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{\sin bx}{b}\right)' e^{ax}\mathrm{d}x \\
&= \left(-\frac{\sin bx}{b}\right)e^{ax} - \int \frac{\sin bx}{b}\left(e^{ax}\right)'\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x. \qquad (7.2)
\end{aligned}
$$

将式(7.2)代入式(7.1)得到

$$
\begin{aligned}
\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x = &-\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{ae^{ax}\sin bx}{b^2} \\
&-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

或

$$
\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + C
$$

同理式(7.2)代入式(7.1)得到

$$
\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx) + C.
$$

例题 7.5 计算 $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n x\mathrm{d}x\,(n=0,1,2,\cdots)$.

首先设 $n \geqslant 2$. 由于

$$
\cos^n x = \cos x\cos^{n-1}x = (\sin x)'\cos^{n-1}x,
$$

故由分部积分法得到

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)'\cos^{n-1}x\mathrm{d}x \\
&= \left[\sin x\cos^{n-1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\left(\cos^{n-1}x\right)'\mathrm{d}x \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\sin^2 x\mathrm{d}x \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\left(1-\cos^2 x\right)\mathrm{d}x \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.
\end{aligned}
$$

由此得到 I_n 的下述递推公式

$$
I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}.
$$

从而

$$
\begin{aligned}
I_{2k} &= \frac{2k-1}{2k}I_{2(k-1)} = \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2(k-1)}\cdots\frac{1}{2}I_0 \\
I_{2k+1} &= \frac{2k}{2k+1}I_{2k-1} = \frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdots\frac{2}{3}I_1
\end{aligned}
$$

由于
$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \mathrm{d}x = 1$$
故最后我们得到
$$I_n = \begin{cases} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2k}\dfrac{\pi}{2}, & n = 2k; \\ \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2k}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k+1)}, & n = 2k+1. \end{cases} (k \in \mathbb{N})$$

下面我们利用 I_n 的表达式推导出计算无理数 π 的著名 Wallis 公式.

首先由 I_{2n} 与 I_{2n+1} 的表达式得到
$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}\right]^2 (2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}.$$
另一方面, 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 内, 下述不等式成立:
$$0 \leqslant \cos^{2n+1} x \leqslant \cos^{2n} x \leqslant \cos^{2n-1} x (\forall n \in \mathbb{N}).$$
由此得到
$$0 < I_{2n+1} \leqslant I_{2n} \leqslant I_{2n-1} (\forall n \in \mathbb{N}).$$
从而
$$1 \leqslant \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leqslant \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} (\forall n \in \mathbb{N}).$$
但是
$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} \to 1 (n \to +\infty),$$
故我们得到 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$, 或
$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}\right]^2 \cdot (2n+1)\cdot\frac{\pi}{2} = 1$$
由此推得
$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\right]^2 \cdot \frac{1}{n} = \pi.$$
这就是著名的 Wallis 公式.

定理 7.7 (变元替换法)

设 $I, J \subset \mathbb{R}$ 是两个非空区间, 函数 $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 J 上是 C^1 类的, 函数 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 I 上连续, 并且 $\varphi(J) \subset I$.

1. 若 $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 f 的原函数, 则
$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) + C, \forall t \in J.$$
2. 若 $\Phi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ 是函数 $t \longmapsto f(\varphi(t))\varphi'(t), t \in J$ 的原函数, 并且 $\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in J$(于是 φ 可逆), 则
$$\int f(x)\mathrm{d}x = \Phi\left(\varphi^{-1}(x)\right) + C, \forall x \in \varphi(J)$$

证明 1) 因为 F 是 f 的原函数，所以

$$F'(x)=f(x),\forall x\in I.$$

另一方面，由于 φ 在 J 上是 C^1 类的，故函数 $F\circ\varphi$ 在 J 上是 C^1 类的，并且

$$[F(\varphi(t))]'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t),\forall t\in J.$$

此即表明 $F\circ\varphi$ 是函数 $t\longmapsto f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t),t\in J$ 的原函数，因此

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(\varphi(t))+C,\forall t\in J$$

2) 若 Φ 是函数 $t\longmapsto f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t),t\in J$ 的原函数，则

$$\Phi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t),\forall t\in J$$

由于 $\varphi'(t)\neq 0,\forall t\in J$，故 φ 可逆，并且

$$\left(\varphi^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{\varphi'(t)},\forall x\in\varphi(J).$$

因此函数 $\Phi\circ\varphi^{-1}$ 在 $\varphi(J)$ 上可导，并且

$$\begin{aligned}
\left[\Phi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right]' &=\Phi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\cdot\left(\varphi^{-1}\right)'(x)\\
&=\Phi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} && \left(t=\varphi^{-1}(x)\right)\\
&=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}\\
&=f(x). && (\forall x\in\varphi(J))
\end{aligned}$$

此即表明 $\Phi=\varphi^{-1}$ 是函数 f 在 $\varphi(J)$ 上的原函数. 故

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\Phi\left(\varphi^{-1}(x)\right)+C,\forall x\in\varphi(J)$$

推论 7.2

设 $a,b\in I,\alpha,\beta\in J$ 使得 $a=\varphi(\alpha),b=\varphi(\beta)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

证明 根据上述定理的结论 1)，$F\circ\varphi$ 是函数 $t\longmapsto f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t),t\in J$ 的原函数，故由定理7.4有

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t &=F\circ\varphi(\beta)-F\circ\varphi(\alpha)\\
&=F(b)-F(a).
\end{aligned}$$

另一方面，由于 F 是 f 的原函数，故

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

注意此推论中，我们并不要求 φ 可逆或 $\varphi'(t)\neq 0,\forall t\in J$. 只需 φ 在 J 上是 C^1 类即可.

例题 7.6 计算 $\int\sin^2 t\cos t\mathrm{d}t$.

因为 $\sin^2 t\cos t=(\sin t)^2(\sin t)'$，所以若令 $f(x)=x^2$，$x\in\mathbb{R},x=\sin t,t\in\mathbb{R}$，则由变元替换公

式 1) 有

$$\begin{aligned}\int \sin^2 t\cos t\mathrm{d}t &= \int (\sin t)^2(\sin t)'\mathrm{d}t\\ &= \int x^2\mathrm{d}x\,(x=\sin t)\\ &= \frac{1}{3}x^3 + C(x=\sin t)\\ &= \frac{1}{3}\sin^3 t + C\end{aligned}$$

例题 7.7 计算 $\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

因为 $\frac{x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2(1+x^2)^2}(1+x^2)'$，所以若令 $f(y)=\frac{1}{2y^2}\ y\in\mathbb{R}_*^+, y=1+x^2, x\in\mathbb{R}$，则利用变元替换公式 1) 得到

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2(1+x^2)^2}(1+x^2)'\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{1}{2y^2}\mathrm{d}y\,\left(y=1+x^2\right)\\ &= -\frac{1}{2y}+C\,\left(y=1+x^2\right)\\ &= -\frac{1}{2(1+x^2)}+C\end{aligned}$$

例题 7.8 计算 $\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\,(a>0)$.

令 $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}, x(-a,a), x=\varphi(t)=a\sin t, t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则 f 在 $(-a,a)$ 上连续，φ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上是 C^1 类的，并且 $\varphi'(t)=a\cos t\neq 0, \forall t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，故 $\varphi^{-1}:(-a,a)\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$) 存在. 因此根据变元替换公式 2) 我们得到

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x &= \int\sqrt{a^2-(a\sin t)^2}(a\sin t)'\mathrm{d}t\,\left(t=\arcsin\frac{x}{a}\right)\\ &= \int a^2\cos^2 t\mathrm{d}t\\ &= \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t\\ &= \frac{a^2}{2}\left[\int\mathrm{d}t+\int\cos 2t\mathrm{d}t\right]\\ &= \frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]+C\\ &= \frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\sin 2\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\right]+C\end{aligned}$$

由于 $\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，故

$$\begin{aligned}\sin 2\left(\arcsin\frac{x}{a}\right) &= 2\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cdot\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)}\\ &= 2\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\\ &= \frac{2x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\end{aligned}$$

因此最后我们得到

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x &= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\right)+C\\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.\end{aligned}$$

例题 7.9 计算 $\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^a\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x.(a>0)$

令 $f(x)=\sqrt{a^2+x^2}, x\in\mathbb{R}, x=\varphi(t)=a\sinh t, t\in\mathbb{R}$，则函数 f,φ 在 $\mathbb{R}$ 上是 C^1 类的，并且 $\varphi'(t)=a\cosh t\neq 0, \forall t\in\mathbb{R}$，故 $\varphi^{-1}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 存在. 根据变元替换公式 2) 得到

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x &= \int\sqrt{a^2+(a\sinh t)^2}(a\sinh t)'\mathrm{d}t\ \left(t=\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}\right)\\ &= \int a^2\cosh^2 t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{a^2}{2}\int(1+\cosh 2t)\mathrm{d}t\\ &= \frac{a^2}{2}\left[\int\mathrm{d}t+\int\cosh 2t\,\mathrm{d}t\right]\\ &= \frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sinh 2t\right]+C\\ &= \frac{a^2}{2}\left[\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\sinh 2\left(\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}\right)\right]+C\end{aligned}$$

由于 $\sinh 2t = 2\sinh t\cosh t = 2\sinh t\sqrt{1+\sinh^2 t}(t\in\mathbb{R})$，故

$$\begin{aligned}\sinh 2\left(\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}\right) &= 2\sinh\left(\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}\right)\sqrt{1+\sinh^2\left(\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}\right)}\\ &= \frac{2x}{a}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{2}{a^2}x\sqrt{a^2+x^2}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x &= \frac{a^2}{2}\left[\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}+\frac{1}{a^2}x\sqrt{a^2+x^2}\right]+C\\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}+C\end{aligned}$$

为了计算 $\int_0^a\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x$，我们现在只需利用定理7.3. 于是

$$\begin{aligned}\int_0^a\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}\right]_0^a\\ &= \frac{1}{2}a\sqrt{a^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsinh}1-\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsinh}0\end{aligned}$$

由于 $\operatorname{arcsinh} x=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),\forall x\in\mathbb{R}$，所以

$$\operatorname{arcsinh} 1=\log(1+\sqrt{2}),\operatorname{arcsinh} 0=0.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^a\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x&=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2+\frac{a^2}{2}\log(1+\sqrt{2})\\&=\frac{a^2}{2}[\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})]\end{aligned}$$

注 定积分 $\int_0^a\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x$ 也可以直接利用定积分的变元替换公式 (即定理7.7的推论7.2) 计算.

首先和上面一样，令 $x=\varphi(t)=a\sinh t,t\in\mathbb{R}$，则 $t=\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}=\log\left(\frac{x}{a}+\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\right)$. 由此得到

$$\begin{aligned}&x=0\text{ 时，}\alpha=\operatorname{arcsinh}\frac{0}{a}=\log 1=0,\\&x=a\text{ 时，}\beta=\operatorname{arcsinh}\frac{a}{a}=\log(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^a\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x&=\int_0^{\log(1+\sqrt{2})}\sqrt{a^2+a^2\sinh^2 t}(a\sinh t)'\mathrm{d}t\\&=a^2\int_0^{\log(1+\sqrt{2})}\cosh^2 t\,\mathrm{d}t\\&=\frac{a^2}{2}\int_0^{\log(1+\sqrt{2})}(1+\cosh 2t)\mathrm{d}t\\&=\frac{a^2}{2}\left[\int_0^{\log(1+\sqrt{2})}\mathrm{d}t+\int_0^{\operatorname{los}(1+\sqrt{2})}\cosh 2t\,\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{a^2}{2}\left[\log(1+\sqrt{2})+\frac{1}{2}\sinh 2(\log(1+\sqrt{2})\right]\\&=\frac{a^2}{2}\left[\log(1+\sqrt{2})+\sinh(\log(1+\sqrt{2}))\cdot\cosh(\log(1+\sqrt{2}))\right]\\&=\frac{a^2}{2}\left[\log(1+\sqrt{2})+\sinh(\operatorname{arcsinh}1)\cdot\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arcsinh}1)}\right]\\&=\frac{a^2}{2}\left[\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\right].\end{aligned}$$

✍ 习 题 7.2

1. 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，$a,b,c\in\mathbb{R}$. 证明下述等式成立：

1) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{a+c}^{b+c}f(x-c)\,\mathrm{d}x$；

2) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$；

3) $\int_0^x\left[\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u=\int_0^x f(u)(x-u)\,\mathrm{d}u$，$\forall x\in\mathbb{R}$.

2. 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，定义函数 $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ 如下：($a,b\in\mathbb{R}$)

$$F(x)=\int_a^b f(x+t)\cos t\,\mathrm{d}t,\quad \forall x\in[a,b].$$

1) 证明：函数 F 在 $[a,b]$ 上可导；

2) 计算导数 $F'(x)$，$\forall x\in[a,b]$.

3. 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，且以 $T>0$ 为周期. 定义函数 $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 如下：

$$G(x)=\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

证明：G 是常值函数.

4. 设函数 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，且均为周期为 $T>0$ 的周期函数. 定义函数 $f*g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 如下：

$$(f*g)(x)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

该函数称为 f 与 g 的 **周期卷积**. 证明：

1) $f*g$ 是以 T 为周期的连续函数；

2) $(f*g)(x)=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$，$\forall x\in\mathbb{R}$，$\forall a\in\mathbb{R}$；

3) $f*g=g*f$.

5. 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 C^{n+1} 类函数，试计算：

$$F_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t,\, x,x_0\in\mathbb{R}.$$

6. 设 $a,b\in\mathbb{R}$，$a<b$，函数 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 均为 C^{n+1} 类函数. 证明下述等式成立：

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)g^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t=&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)-f^{(k)}(a)g^{(n-k)}(a)\right]\\&+(-1)^{n+1}\int_a^x f^{(n+1)}(t)g(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

7. 证明：$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$，$\quad\forall n\in\mathbb{N}$.

8. 设函数 $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ 在 $[0,\pi]$ 上连续.

1) 利用变量替换法证明：

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x;$$

2) 利用上述公式证明：

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}.$$

9. 利用 Cauchy 收敛准则证明：实数序列 $\{u_n\}$，

$$u_n=\int_0^n\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

收敛.

10. 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 在 $[0,1]$ 上连续可导，且 $f(0)=f(1)=0$. 证明：

$$\int_0^1 x^6[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{25}{4}\int_0^1 x^4[f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

11. 设函数 $f,g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足：

$$f(x)\leqslant A+\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,\quad \forall x\in[0,+\infty), A>0.$$

证明 Bellman 不等式：

$$f(x)\leqslant A\mathrm{e}^{\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)}, \forall x\in[0,+\infty).$$

12. 令

$$R(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}, (0<k<1), S(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, x\in(-1,1).$$

(这两个积分都称为第一类椭圆积分)

1) 证明：函数 $R:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 与 $S:(-1,1)\to\mathbb{R}$ 都是严格单调上升的连续函数；

2) 证明：R 与 S 的反函数满足：

$$S^{-1}(x)=\sin(R^{-1}(x)).$$

13. 利用分部积分法计算下列不定积分：

1) $\displaystyle\int\arctan x\,\mathrm{d}x$　　2) $\displaystyle\int\frac{x^2}{1+\tan^2 x}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int x^n\log x\,\mathrm{d}x$　　4) $\displaystyle\int\sin(\log x)\,\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int x^2\arccos x\,\mathrm{d}x$　　6) $\displaystyle\int x(\arctan x)^2\,\mathrm{d}x$

7) $\displaystyle\int\sec^3 x\,\mathrm{d}x$　　8) $\displaystyle\int\operatorname{arsinh} x\,\mathrm{d}x$

9) $\displaystyle\int\frac{x\log(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$　　10) $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,\mathrm{d}x$

14. 设 $m,n\in\mathbb{Z}$，$x\geqslant 1$，令

$$I_{m,n}(x)=\int_1^x t^m(\log t)^n\,\mathrm{d}t,\quad x\geqslant 1.$$

1) 计算 $I_{-1,0}(x)$；

2) 找出 $I_{m,n}(x)$ 与 $I_{m,n-1}(x)$ 之间的递推关系；

3) 由此推出 $I_{m,n}(x)$ 的表达式 ($m\neq -1$).

15. 计算下列不定积分或定积分：

1) $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$　　2) $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$　　4) $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)^8}}\,\mathrm{d}x$　　6) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x$，$(a<b)$

7) $\displaystyle\int_1^a\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x$，$(a>0)$　　8) $\displaystyle\int_a^b\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$，$(0<a<b<1)$

9) $\displaystyle\int_a^b\frac{\arcsin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$，$(0<a<b<1)$　　10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x+2\cos x+3}\,\mathrm{d}x$

7.3 有理分式的原函数

设 $P_n(x)$ 与 $Q_m(x)$ 分别为 n 次与 m 次的实系数多项式, 这里我们要研究有理分式 $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 的原函数

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\mathrm{d}x$$

的计算问题.

根据多项式理论, 若 $n \geqslant m$, 则存在唯一的多项式 $R_{n-m}(x)$ 与 $s_k(x)$ 使得

$$P_n(x) = R_{n-m}(x)Q_m(x) + s_k(x),$$

这里多项式 $R_{n-m}(x)$ 的次数为 $n-m$, 多项式 $s_k(x)$ 的次数为 $k < m$. 于是我们得到

$$\frac{P_k(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{s_k(x)}{Q_m(x)}.$$

因此

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\mathrm{d}x = \int R_{n-m}(x)\mathrm{d}x + \int \frac{s_k(x)}{Q_m(x)}\mathrm{d}x$$

由于多项式 $R_{n-m}(x)$ 的原函数 $\int R_{n-m}(x)\mathrm{d}x$ 我们已经会计算了, 故我们只需研究原函数 $\int \dfrac{s_k(x)}{Q_m(x)}\mathrm{d}x$ 的计算.

根据上述分析, 以下我们假设 $n < m$.

首先我们介绍有理分式的分解.

1. 有理分式 $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 的分解

首先我们注意到以下事实:

若 $\alpha + \mathrm{i}\beta$ 是 $Q_m(x) = 0$ 的一个复根, 则 $\alpha - \mathrm{i}\beta$ 也是 $Q_m(x) = 0$ 的根. 因此 $Q_m(x) = 0$ 的复数根是以共轭对形式出现的, 于是每一对共轭复根 $\alpha + \mathrm{i}\beta, \alpha - \mathrm{i}\beta$ 对应于一个二次三项式

$$[x - (\alpha + \mathrm{i}\beta)][x - (\alpha - \mathrm{i}\beta)] = x^2 + px + q(p, q \in \mathbb{R}).$$

现在我们假设

1. $Q_m(x) = 0$ 总共有 t 个不同实根 $a_1, a_2, \cdots, a_k$, 它们的重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_k$.
2. $Q_m(x) = 0$ 总共有 s 对不同共轭复根, 与它们相对应的 s 个二次三项式为

$$x^2 + p_i x + q_i, i = 1, 2, \cdots, s, p_i, q_i \in \mathbb{R}.$$

它们的重数分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_s$.

因此 $Q_m(x)$ 有下述形式的分解式:

$$Q_m(x) = (x - a_1)^{n_1}(x - a_2)^{n_2}\cdots(x - a_k)^{n_k}\left(x^2 + p_1x + q_1\right)^{m_1}\left(x^2 + p_2x + q_2\right)^{m_2}\cdots\left(x^2 + p_sx + q_s\right)^{m_s},$$

代数学里已经证明，有理分式 $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 可唯一地分解成下述形式的简单分式的和：

$$
\begin{aligned}
\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} =& \left[\frac{A_{11}}{x-a_1}+\frac{A_{12}}{(x-a_1)^2}+\cdots+\frac{A_{1n_1}}{(x-a_1)^{n_1}}\right] \\
&+\left[\frac{A_{21}}{x-a_2}+\frac{A_{22}}{(x-a_2)^2}+\cdots+\frac{A_{2n_2}}{(x-a_2)^{n_2}}\right]+\cdots \\
&+\left[\frac{A_{k1}}{x-a_k}+\frac{A_{k2}}{(x-a_k)^2}+\cdots+\frac{A_{kn_k}}{(x-a_k)^{n_k}}\right] \\
&+\left[\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots+\frac{B_{1m_1}x+C_{1m_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}}\right] \\
&+\left[\frac{B_{21}x+C_{21}}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{B_{22}x+C_{22}}{(x^2+p_2x+q_2)^2}+\cdots+\frac{B_{2m_2}x+C_{2m_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}}\right]+\cdots \\
&+\left[\frac{B_{s1}x+C_{s1}}{x^2+p_sx+q_s}+\frac{B_{s2}x+C_{s2}}{(x^2+p_sx+q_s)^2}+\cdots+\frac{B_{sm_s}x+C_{sm_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}}\right]
\end{aligned}
$$

这里

$$A_{ij}\in\mathbb{R}.\,(i=1,2,\cdots,k,\ j=1,2,\cdots,n_i)$$

$$B_{ih},C_{ih}\in\mathbb{R}.\,(l=1,2,\cdots,s,\ h=1,2,\cdots,m_l)$$

2. 原函数 $\displaystyle\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\mathrm{d}x$ 的计算 由有理分式 $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 的上述分解式知，计算原函数 $\displaystyle\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\mathrm{d}x$ 就化为计算分解式的每一个和项的原函数，由于这些和项只有下面两种最基本的类型：

$$\frac{A}{(x-a)^k}(k\in\mathbb{N}) \text{ 与 } \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}(k\in\mathbb{N}).$$

因此我们只需研究原函数

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x \text{ 与 } \int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x(k\in\mathbb{N})$$

的计算问题.

1) $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x$ 的计算

这可由 §2 的基本初等函数的原函数表推得

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x=\begin{cases}A\log|x-a|+C, & k=1\\ \dfrac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C, & k>1\end{cases}$$

2) $\displaystyle\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x$ 的计算

首先，我们将二次三项式 x^2+px+q 写成下述形式：

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2.$$

$$\left(a^2=q-\frac{p^2}{4}>0\right)$$

因此

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^k}\mathrm{d}x &= \int \frac{B\left(x+\frac{p}{2}\right)+C-\frac{Bp}{2}}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2\right]^k}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{B\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2\right]^k}\mathrm{d}x + \int \frac{C-\frac{Bp}{2}}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2\right]^k}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

作变元替换 $x+\dfrac{p}{2}=at$，则我们得到

$$\int \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^k}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+1\right)^k}\mathrm{d}t + \int \frac{E}{\left(t^2+1\right)^k}\mathrm{d}t, \tag{7.3}$$

这里 $D, E \in \mathbb{R}$ 是两个新的常数.

对于式(7.3)右边第一个不定积分，我们有

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+1\right)^k}\mathrm{d}t &= \frac{D}{2}\int \frac{1}{\left(t^2+1\right)^k}\left(t^2+1\right)'\mathrm{d}t \\ &= \frac{D}{2}\int \frac{1}{y^k}\mathrm{d}y\left(y=t^2+1\right) \\ &= \begin{cases} \dfrac{D}{2}\log\left(t^2+1\right)+C & (k=1) \\ \dfrac{D}{2(1-k)\left(t^2+1\right)^{k-1}}+C & (k>1)\end{cases}\end{aligned}$$

为了计算式(7.3)右边第二个原函数，我们只需计算

$$I_k = \int \frac{1}{\left(t^2+1\right)^k}\mathrm{d}t\,(k \in \mathbb{N})$$

若 $k=1$，则 $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t = \arctan t + C$.

若 $k>1$，则由分部积分法我们有

$$\begin{aligned}I_k &= \int \frac{1}{\left(t^2+1\right)^k}\mathrm{d}t \\ &= \int (t)'\cdot\frac{1}{\left(t^2+1\right)^k}\mathrm{d}t \\ &= \frac{t}{\left(t^2+1\right)^k} - \int t\left[\frac{1}{\left(t^2+1\right)^k}\right]'\mathrm{d}t \\ &= \frac{t}{\left(t^2+1\right)^k} + 2k\int \frac{t^2}{\left(t^2+1\right)^{k+1}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{t}{\left(t^2+1\right)^k} + 2k\int\left[\frac{t^2+1}{\left(t^2+1\right)^{k+1}} - \frac{1}{\left(t^2+1\right)^{k+1}}\right]\mathrm{d}t \\ &= \frac{t}{\left(t^2+1\right)^k} + 2k\left[\int \frac{1}{\left(t^2+1\right)^k}\mathrm{d}t - \int \frac{1}{\left(t^2+1\right)^{k+1}}\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{t}{\left(t^2+1\right)^k} + 2k\left(I_k - I_{k+1}\right)\end{aligned}$$

由此得到 I_k 的递推公式

$$I_{k+1}=\frac{t}{2k\left(t^2+1\right)^k}+\frac{2k-1}{2k}I_k\quad(k\in\mathbb{N}).$$

根据此递推公式及 $I_1=\arctan t+C$，我们就可以逐次计算出任意的 I_n .

至此，有理分式 $\dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ 的原函数 $\displaystyle\int\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\mathrm{d}x$ 的计算就完全解决了.

例题 7.10 计算 $\displaystyle\int\frac{x^7-2x^6+2x^5-4x^4+x^3+2x+13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x$.

这是一个有理分式的不定积分. 由于分子的次数高于分母的次数. 利用多项式的带余除法得到

$$\frac{x^7-2x^6+2x^5-4x^4+x^3+2x+13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}=x^2+\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}$$

因此

$$\begin{aligned}&\int\frac{x^7-2x^6+2x^5-4x^4+x^3+2x+13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x\\=&\int x^2\mathrm{d}x+\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

下面我们来计算 $\displaystyle\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x$. 根据上面的有理分式的分解公式，我们有

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}$$

两边同乘以 $(x-2)\left(x^2+1\right)^2$ 得到

$$2x^2+2x+13=A\left(x^2+1\right)^2+(Bx+C)\left(x^2+1\right)(x-2)+(Dx+E)(x-2)$$

比较两边 x 的同次幂的系数，我们得到确定常数 A,B,C,D,E 的方程组

$$\begin{cases}A+B=0\\-2B+C=0\\2A+B-2C+D=2\\-2B+C-2D+E=2\\A-2C-2E=13\end{cases}$$

解之得到

$$A=1,B=-1,C=-2,D=-3,E=-4$$

因此

$$-\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{\left(x^2+1\right)^2}$$

从而

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x - \int \frac{x+2}{x^2+1}\mathrm{d}x - \int \frac{3x+4}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x \\ &= \log|x-2| - \int \frac{2}{x^2+1}\mathrm{d}x - \int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x - 3\int \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x - 4\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x \\ &= \log|x-2| - 2\arctan x - \int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x - 3\int \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x - 4\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x &\overset{x^2+1=y}{=\!=\!=} \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right)+C \\ \int \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x &\overset{x^2+1=y}{=\!=\!=} \int \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y = -\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+C \\ \int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x &= \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\arctan x + C\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x &= \log|x-2| - 2\arctan x - \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) \\ &\quad + \frac{3}{2\left(x^2+1\right)} - \frac{2x}{x^2+1} - 2\arctan x + C \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4\arctan x + \frac{3-4x}{2\left(x^2+1\right)} + C\end{aligned}$$

最后我们得到

$$\begin{aligned}&\int \frac{x^7-2x^6+2x^5-4x^4+x^3+2x+13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x \\ =&\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\log\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4\arctan x + \frac{3-4x}{2\left(x^2+1\right)} + C \\ =&\frac{x^3}{3} + \frac{3-4x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\log\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4\arctan x + C\end{aligned}$$

例题 7.11 计算 $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)\left(x^2+x+1\right)^2}\mathrm{d}x$.

对于有理分式 $\dfrac{1}{x(x+1)\left(x^2+x+1\right)^2}$ ，我们可以按有理分式一般分解公式，首先将它表示为下述形式

$$\frac{1}{x(x+1)\left(x^2+x+1\right)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{(x+1)}{x^2+x+1} + \frac{Ex+F}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

然后用例7.10的待定系数法确定常数 A, B, C, D, E, F . 但更好的是采用下面的方法：由于

$$\begin{aligned}x(x+1)\left(x^2+x+1\right)^2 &= \left(x^2+x\right)\left(x^2+x+1\right)^2 \\ &= \left(x^2+x+1-1\right)\left(x^2+x+1\right)^2\end{aligned}$$

故若令 $h=x^2+x+1$ ，则

$$x(x+1)\left(x^2+x+1\right)^2 = (h-1)h^2,$$

从而

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x(x+1)\left(x^2+x+1\right)^2} = \frac{1}{(h-1)h^2} = \frac{1-h+h}{(h-1)h^2} \\
= -\frac{1}{h^2} + \frac{1}{(h-1)h} = -\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h-1} - \frac{1}{h} \\
= \frac{1}{x^2+x} - \frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2} \\
= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x(x+1)\left(x^2+x+1\right)^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\mathrm{d}x \\
&= \log|x| - \log|x+1| - \int \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t \left(x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan t + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \\
\int \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{8\sqrt{3}}{9} \int \frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}\mathrm{d}t \left(x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\
&= \frac{8\sqrt{3}}{9} \left[\frac{t}{2\left(t^2+1\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{8}{9} \left[\frac{t}{2\left(t^2+1\right)} + \frac{1}{2}\arctan t\right] + C \\
&= \frac{2x+1}{3\left(x^2+x+1\right)} + \frac{4\sqrt{3}}{9} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C,
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x(x+1)\left(x^2+x+1\right)^2}\mathrm{d}x \\
=& \log\left|\frac{x}{x+1}\right| - -\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{4\sqrt{3}}{9} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{2x+1}{3\left(x^2+x+1\right)} + C \\
=& -\frac{2x+1}{3\left(x^2+x+1\right)} + \log\left|\frac{x}{x+1}\right| - \frac{10\sqrt{3}}{9} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C
\end{aligned}
$$

有时候，在求某些函数的原函数时，经过适当的变元替换后就化为求有理分式的原函数下面我们来研究这种情形.

3. 可化为有理分式求原函数的情形 I

设 f 是两个变元 X, Y 的实系数有理分式，即

$$f(X,Y)=\frac{P(X,Y)}{Q(X,Y)}$$

其中 $P(X,Y)$ 与 $Q(X,Y)$ 是关于 X,Y 的多项式.

这里我们研究的是下述形式的原函数

$$I=\int f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$$

的计算问题.

我们对 f 分以下四种情形讨论.

1) $f(\sin x,\cos x)=g(\cos x)\sin x$(g 为有理分式)；

这时，可作变换 $t=\cos x$ ，于是

$$\begin{aligned}I&=\int f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x\\&=\int g(\cos x)\sin x\mathrm{d}x\\&=-\int g(\cos x)(\cos x)'\mathrm{d}x=-\int g(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

因此 I 的计算就化为有理分式 g 的原函数计算.

注 我们可以证明 $f(\sin x,\cos x)=g(\cos x)\sin x$ 的充分必要条件是：函数

$$x\longmapsto f(\sin x,\cos x),x\in E \text{ 是奇函数.}$$

在证明这个结论之前，我们首先注意到，对任意两个变元的有理分式 $R(X,Y)=\dfrac{P(X,Y)}{Q(X,Y)}$ ，若将 P,Q 分别表示为含 X 的偶次幂与奇次幂的多项式之和则我们可以把 R 表示成下述形式

$$R(X,Y)=\frac{P_1\left(X^2,Y\right)+XP_2\left(X^2,Y\right)}{Q_1\left(X^2,Y\right)+XQ_2\left(X^2,Y\right)}$$

这里 P_1,P_2,Q_1,Q_2 都是关于 X^2,Y 的多项式.

对 $R(X,Y)$ 的右端的分子分母同乘以 $Q_1\left(X^2,Y\right)-XQ_2\left(X^2,Y\right)$ 得到

$$\begin{aligned}R(X,Y)&=\frac{\left[P_1\left(X^2,Y\right)+XP_2\left(X^2,Y\right)\right]\left[Q_1\left(X^2,Y\right)-XQ_2\left(X^2,Y\right)\right]}{Q_1^2\left(X^2,Y\right)-X^2Q_2^2\left(X^2,Y\right)}\\&=\frac{\left[P_1\left(X^2,Y\right)Q_1\left(X^2,Y\right)-X^2P_2\left(X^2,Y\right)Q_2\left(X^2,Y\right)\right]}{Q_1^2\left(X^2,Y\right)-X^2Q_2^2\left(X^2,Y\right)}\\&+\frac{X\left[P_2\left(X^2,Y\right)Q_1\left(X^2,Y\right)-P_1\left(X^2,Y\right)Q_2\left(X^2,Y\right)\right]}{Q_1^2\left(X^2,Y\right)-X^2Q_2^2\left(X^2,Y\right)}\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}R_1\left(X^2,Y\right)&=\frac{P_1\left(X^2,Y\right)Q_1\left(X^2,Y\right)-X^2P_2\left(X^2,Y\right)Q_2\left(X^2,Y\right)}{Q_1^2\left(X^2,Y\right)-X^2Q_2^2\left(X^2,Y\right)},\\R_2\left(X^2,Y\right)&=\frac{P_2\left(X^2,Y\right)Q_1\left(X^2,Y\right)-P_1\left(X^2,Y\right)Q_2\left(X^2,Y\right)}{Q_1^2\left(X^2,Y\right)-X^2Q_2^2\left(X^2,Y\right)},\end{aligned}$$

则 R_1, R_2 都是 X^2，Y 的有理分式，于是

$$R(X,Y) = R_1\left(X^2, Y\right) + XR_2\left(X^2, Y\right)$$

对 $f(\sin x, \cos x)$，我们有

$$\begin{aligned} f(\sin x, \cos x) &= f_1\left(\sin^2 x, \cos x\right) + \sin x f_2\left(\sin^2 x, \cos x\right) \\ &= f_1\left(1-\cos^2 x, \cos x\right) + \sin x f_2\left(1-\cos^2 x, \cos x\right) \\ &= g_*(\cos x) + \sin x g(\cos x) \end{aligned} \tag{7.4}$$

这里 g_*, g 都是一个变元的有理分式.

现在我们来证明上述附注.

i)(必要性) 设 $f(\sin x, \cos x) = \sin x g(\cos x)$. 显然，函数 $x \longmapsto f(\sin x, \cos x), x \in E$ 是奇函数.

ii)(充分性) 设函数 $x \longmapsto f(\sin x, \cos x), x \in E$ 是奇函数. 那么由上述式(7.4)我们有

$$\begin{aligned} & f(\sin(-x), \cos(-x)) \\ =& g_*(\cos(-x)) + \sin(-x) g(\cos(-x)) \end{aligned}$$

另一方面，由假设，我们有

$$f(\sin x, \cos x) = -f(\sin(-x), \cos(-x)).$$

由此推得

$$\begin{aligned} 2f(\sin x, \cos x) &= g_*(\cos x) + \sin x g(\cos x) - [g_*(\cos(-x)) + \sin(-x) g(\cos(-x))] \\ &= 2\sin x g(\cos x). \end{aligned}$$

从而

$$f(\sin x, \cos x) = g(\cos x)\sin x.$$

例题 7.12 计算 $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^3 x \mathrm{d}x$.

由于 $\sin^3 x \cos^3 x = \left(1-\cos^2 x\right)\cos^3 x \sin x$，故

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^3 x \mathrm{d}x &= \int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^3 x \sin x \mathrm{d}x \\ &= -\int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^3 x (\cos x)' \mathrm{d}x \\ &= \int \left(t^2-1\right) t^3 \mathrm{d}t \,(t = \cos x) \\ &= \int \left(t^5 - t^3\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{4} + C \\ &= \frac{1}{6}\cos^6 x - \frac{1}{4}\cos^4 x + C \end{aligned}$$

例题 7.13 计算 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x \cos 2x}\mathrm{d}x$.

因为函数 $x \longmapsto \dfrac{1}{\sin x \cos 2x}, x \in E$ 是奇函数，所以 $\dfrac{1}{\sin x \cos 2x}$ 一定可以表示成 $g(\cos x)\sin x$ 的

形式. 事实上，我们有

$$\frac{1}{\sin x\cos 2x}=\frac{\sin x}{\sin^2 x\left(2\cos^2 x-1\right)}=\frac{\sin x}{\left(1-\cos^2 x\right)\left(2\cos^2 x-1\right)}$$

因此

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sin x\cos 2x}\mathrm{d}x&=\int\frac{\sin x}{\left(1-\cos^2 x\right)\left(2\cos^2 x-1\right)}\mathrm{d}x\\&=-\int\frac{1}{\left(1-\cos^2 x\right)\left(2\cos^2 x-1\right)}(\cos x)'\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1}{\left(t^2-1\right)\left(2t^2-1\right)}\mathrm{d}t\,(t=\cos x)\\&=\int\left[\frac{1}{t^2-1}-\frac{2}{2t^2-1}\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{\sqrt{2}}{2}\log\left|\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1}\right|+C\\&=\frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|-\frac{\sqrt{2}}{2}\log\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C.\end{aligned}$$

2) $f(\sin x,\cos x)=h(\sin x)\cos x$(h 为有理分式)

这时，可作变换 $t=\sin x$，于是

$$\begin{aligned}I&=\int f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x\\&=\int h(\sin x)\cos x\mathrm{d}x\\&=\int h(\sin x)(\sin x)'\mathrm{d}x=\int h(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

因此 I 的计算化为有理分式 h 的原函数计算.

注 与上面的附注类似地可证：

$f(\sin x,\cos x)=h(\sin x)\cos x$ 的充分必要条件是：$F(x)=f(\sin x,\cos x)$ 满足条件：

$$F(\pi-x)=-F(x).$$

例题 7.14 计算 $\int\sin^2 x\cos^3 x\mathrm{d}x$.

因为 $\sin^2 x\cos^3 x=\sin^2 x\cos^2 x\cos x=\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)\cos x$，所以

$$\begin{aligned}\int\sin^2 x\cos^3 x\mathrm{d}x&=\int\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)\cos x\mathrm{d}x\\&=\int\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)(\sin x)'\mathrm{d}x\\&=\int t^2\left(1-t^2\right)\mathrm{d}t\,(t=\sin x)\\&=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C\\&=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C\end{aligned}$$

例题 7.15 计算 $\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$.

因为 $\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}=\dfrac{\sin x}{1+\sin^4 x}\cos x$，所以

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x&=\int\frac{\sin x}{1+\sin^4 x}(\sin x)'\mathrm{d}x\\&=\int\frac{t}{1+t^4}\mathrm{d}t\,(t=\sin x)\\&=\frac{1}{2}\int\frac{(t^2)'}{1+(t^2)^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u\,\left(u=t^2\right)\\&=\frac{1}{2}\arctan u+C\\&=\frac{1}{2}\arctan(\sin x)^2+C\end{aligned}$$

3) $f(\sin x,\cos x)=k(\tan x)$(k 为有理分式)

这时，可作变换 $t=\tan x$. 于是

$$\begin{aligned}I&=\int f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x\\&=\int k(\tan x)\mathrm{d}x\\&=\int\frac{k(\tan x)}{1+\tan^2 x}\left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x\\&=\int\frac{k(\tan x)}{1+\tan^2 x}(\tan x)'\mathrm{d}x=\int\frac{k(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

因此 I 的计算化为有理分式 $\dfrac{k(t)}{1+t^2}$ 的原函数计算.

注 仿照第一个附注的证明方法，我们可以证明：

$f(\sin x,\cos x)=k(\tan x)$ 的充分必要条件是：$F(x)=f(\sin x$， $\cos x$) 满足条件

$$F(\pi+x)=F(x).$$

例题 7.16 计算 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^4 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

因为 $F(x)=\dfrac{1}{\sin^4 x\cos^2 x}$ 满足 $F(\pi+x)=F(x)$，所以我们可以作变换 $t=\tan x$．于是

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin^4 x\cos^2 x}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\cos^4 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\\
&= \int \frac{1}{\tan^4 x}\cdot\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)^2(\tan x)'\mathrm{d}x\\
&= \int \frac{\left(1+\tan^2 x\right)^2}{\tan^4 x}(\tan x)'\mathrm{d}x\\
&= \int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^4}\mathrm{d}t\,(t=\tan x)\\
&= \int \left(1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)\mathrm{d}t\\
&= t-\frac{2}{t}-\frac{1}{3t^3}+C\\
&= \tan x-2\cot x-\frac{1}{3}\cot^3 x+C.
\end{aligned}$$

例题 7.17 计算 $\displaystyle\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x$．

因为 $\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}=\dfrac{\tan x-1}{\tan x+2}$，所以

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x &= \int \frac{\tan x-1}{(\tan x+2)\left(1+\tan^2 x\right)}\left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x\\
&= \int \frac{\tan x-1}{(\tan x+2)\left(1+\tan^2 x\right)}(\tan x)'\mathrm{d}x\\
&= \int \frac{t-1}{(t+2)\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t\,(t=\tan x)\\
&= \int \left[\frac{-3/5}{t+2}+\frac{3/5t-1/5}{1+t^2}\right]\mathrm{d}t\\
&= -\frac{3}{5}\int\frac{1}{t+2}\mathrm{d}t+\frac{3}{5}\int\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t-\frac{1}{5}\int\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t\\
&= -\frac{3}{5}\log|t+2|+\frac{3}{10}\log\left(1+t^2\right)-\frac{1}{5}\arctan t+C\\
&= \frac{3}{10}\log\frac{1+\tan 2}{(2+\tan x)^2}-\frac{1}{5}x+C.
\end{aligned}$$

4) $f(\sin x,\cos x)$ 为一般形式

这时我们可作变换 $t=\tan\dfrac{x}{2}, x\in(-\pi,\pi)$．于是 $x=2\arctan t$．由此得到

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},(2\arctan t)'=\frac{2}{1+t^2}.$$

根据不定积分的变元替换法我们有

$$\begin{aligned}
I &= \int f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x\\
&= \int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot(2\arctan x)'\mathrm{d}t\left(t=\tan\frac{x}{2}\right)\\
&= \int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

因此 I 的计算化为有理分式 $f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}$ 的原函数计算.

例题 7.18 计算 Poisson 积分

$$\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\mathrm{d}x (0<r<1).$$

令 $t=\tan\frac{x}{2}, x\in(-\pi,\pi)$. 则我们有

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\mathrm{d}x\\
=&\int \frac{1-r^2}{1-2r\frac{1-t^2}{1+t^2}+r^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\\
=&2\left(1-r^2\right)\int \frac{1}{(1-r)^2+(1+r)^2t^2}\mathrm{d}t\\
=&2\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)+C\\
=&2\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{x}{2}\right)+C.
\end{aligned}$$

注意，这里计算出来的函数

$$x\longmapsto F(x)=2\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{x}{2}\right), x\in(-\pi,\pi)$$

只是函数

$$x\longmapsto f(x)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}, x\in\mathbb{R}$$

在 $(-\pi,\pi)$ 上的一个原函数. 由于函数 f 在整个 $\mathbb{R}$ 上连续，故 f 应该有在 $\mathbb{R}$ 上定义的原函数存在.

下面我们来求 f 的定义在 $\mathbb{R}$ 上的原函数 G ，使得 G 在 $(-\pi,\pi)$ 上的限制等于 F .

首先我们注意到 G 在 $\mathbb{R}$ 上是 C^1 类的，并且

$$\lim_{x\to\pi^-}F(x)=\pi,\quad \lim_{x\to-\pi^+}F(x)=-\pi.$$

故

$$\begin{aligned}
G(\pi)&=\lim_{x\to\pi^-}G(x)=\lim_{x\to\pi^-}F(x)=\pi,\\
G(-\pi)&=\lim_{x\to-\pi^+}G(x)=\lim_{x\to-\pi^+}F(x)=-\pi.
\end{aligned}$$

现在我们分别令

$$\begin{aligned}
G(x)&=F(x-2\pi)+C_1,\quad x\in(\pi,3\pi)\\
G(x)&=F(x+2\pi)+C_2,\quad x\in(-3\pi,-\pi).
\end{aligned}$$

选择适当的常数 C_1, C_2 使得 G 在 $x=\pm\pi$ 处连续. 为此我们应该有

$$\begin{aligned}
\pi&=G(\pi)=\lim_{x\to\pi^+}G(x)=\lim_{x\to\pi^+}[F(x-2\pi)+C_1]=-\pi+C_1,\\
-\pi&=G(-\pi)=\lim_{x\to-\pi^-}G(x)=\lim_{x\to-\pi^-}[F(x+2\pi)+C_2]=\pi+C_2.
\end{aligned}$$

由此得到 $C_1=2\pi, C_2=-2\pi$，因此

$$G(x)=F(x-2\pi)+2\pi, x\in(\pi,3\pi),$$

$$G(x)=F(x+2\pi)-2\pi, x\in(-3\pi,-\pi).$$

$$G(3\pi)=\lim_{x\to 3\pi^-}[F(x-2\pi)+2\pi]=\lim_{x\to\pi^-}F(x)+2\pi=3\pi,$$

$$G(-3\pi)=\lim_{x\to -3\pi^+}[F(x+2\pi)-2\pi]=\lim_{x\to-\pi^+}F(x)-2\pi=-3\pi.$$

逐步地用上述方法可以确定出 G 在所有开区间 $(-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi)(k\in\mathbb{Z})$ 上的表达式及 G 在 $x=\pi+2k\pi$，及 $x=-\pi-2k\pi(k=0,1,2,\cdots)$ 上的值：

$$G(x)=F(x-2k\pi)+2k\pi, x\in(-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi), k\in\mathbb{Z},$$

$$G(\pi+2k\pi)=(2k+1)\pi, k=0,1,2,\cdots$$

$$G(-\pi-2k\pi)=-(2k+1)\pi, k=0,1,2,\cdots$$

最后证明 G 在 $\mathbb{R}$ 上是 C^1 类的. 直接计算得

$$G'(x)=(F(x-2k\pi)+2k\pi)'=f(x-2k\pi)=f(x), \forall x\in(-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi).$$

$$\begin{aligned}G'(\pi^-)&=\lim_{x\to\pi^-}\frac{G(x)-G(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{F(x)-\pi}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}f(x)\\&=\frac{1-r}{1+r}=f(\pi).\\G'\left(-\pi^+\right)&=\lim_{x\to-\pi^+}\frac{G(x)-G(-\pi)}{x+\pi}=\lim_{x\to-\pi^+}\frac{F(x)+\pi}{x+\pi}\\&=\lim_{x\to-\pi^+}f(x)=\frac{1-r}{1+r}=f(-\pi).\end{aligned}$$

由此可知，$\forall k=0,1,2,\cdots$

$$G'(\pi+2k\pi)=G'(-\pi-2k\pi)=\frac{1-r}{1+r}=f(\pm\pi\pm 2k\pi).$$

因此 G 就是我们所求的定义在 $\mathbb{R}$ 上的 f 的原函数，它在 $(-\pi,\pi)$ 上的限制等于 F .

从几何上来看，原函数 G 的图形就是逐步将函数 F 的图形先向右 (左) 平移 $2k\pi$，然后向上 (下) 平移 $2k\pi$ 而得到的图形.

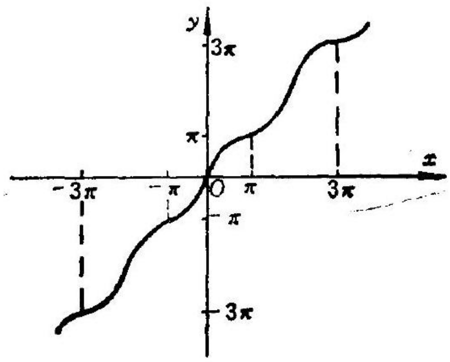

图 7.1

4. 可化为有理分式求原函数的情形 II

设 $f(X,Y)$ 是 X,Y 的有理分式. 这里我们研究下述形式的原函数

$$I=\int f\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$$

的计算问题. ($a,b,c,d\in\mathbb{R},m\in\mathbb{N}$)

作变换 $t=\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ ，于是

$$t^m=\frac{ax+b}{cx+d},x=\frac{\mathrm{d}t^m-b}{-ct^m+a},x'(t)=\frac{m(ad-bc)t^{m-1}}{(a-ct^m)^2}$$

根据不定积分的变元替换法得到

$$\begin{aligned}I&=\int f\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x\\&=\int f\left(\frac{\mathrm{d}t^m-b}{-ct^m+a},t\right)\frac{m(ad-bc)t^{m-1}}{(a-ct^m)^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

因此 I 的计算化为关于 t 的有理分式的原函数的计算.

例题 7.19 计算 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}}\mathrm{d}x$.

首先作变换 $y=\sqrt[4]{x}$，则 $x=y^4,\sqrt{x}=y^2$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}}\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{y^2\sqrt[3]{1+y}}\left(y^4\right)'\mathrm{d}y(y=\sqrt[4]{x})\\&=4\int\frac{y}{\sqrt[8]{1+y}}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

再作变换 $t=\sqrt[3]{1+y}$，则 $y=t^3-1$，从而

$$\begin{aligned}\int\frac{y}{\sqrt[3]{1+y}}\mathrm{d}y&=\int\frac{t^3-1}{t}\left(t^3-1\right)'\mathrm{d}t\quad(t=\sqrt[3]{1+y})\\&=3\int t^2(t^3-1)\mathrm{d}t\\&=\frac{3}{5}t^5-\frac{3}{2}t^2+C.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}}\mathrm{d}x=&\frac{12}{5}t^5-6t^2+C\quad(t=\sqrt[3]{1+y})\\=&\frac{12}{5}\sqrt[3]{(1+y)^5}-6\sqrt[3]{(1+y)^2}+C(y=\sqrt[4]{x})\\=&\frac{12}{5}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^5}-6\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^2}+C.\end{aligned}$$

5. 可化为有理分式求原函数的情形 III

设 $f(X,Y)$ 是 X,Y 的有理分式, 我们来研究下述形式的原函数

$$I=\int f\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$$

的计算问题. ($a,b,c\in\mathbb{R},a\neq0$)

显然我们只能在集合 $E=\left\{x\in\mathbb{R}\mid ax^2+bx+c\geqslant 0\right\}$ 上来讨论上述原函数的计算. 由于

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\end{aligned}$$

若令 $y=x+\dfrac{b}{2a}$ ，则

$$ax^2+bx+c=ay^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

所以不失一般性, 我们可以只讨论下述不定积分

$$I=\int f\left(x,\sqrt{ax^2+c}\right)\mathrm{d}x(a\neq 0,c\in\mathbb{R}).$$

我们不妨假设 $c\neq 0$，否则上述不定积分就是 x 的有理分式的不定积分. 这我们已经讨论过了.

下面对 a,c 的符号分三种情况来讨论：

$$a>0,c>0;\quad a>0,c<0;\quad a<0,c>0.$$

1. $a>0,c>0$：

   因为 $f\left(x,\sqrt{ax^2+c}\right)=f\left(x,\sqrt{a\left(x^2+\frac{c}{a}\right)}\right)$. 所以我们可作变换 $x=\sqrt{\dfrac{c}{a}}\sinh\theta$. 于是

$$\begin{aligned}I&=\int f\left(x,\sqrt{ax^2+c}\right)\mathrm{d}x\\&=\int f\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\sinh\theta,\sqrt{c}\cosh\theta\right)\sqrt{\frac{c}{a}}\cosh\theta\mathrm{d}\theta\quad\left(\theta=\operatorname{arcsinh}\sqrt{\frac{a}{c}x}\right)\\&=\int f\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\frac{\mathrm{e}^{\theta}-\mathrm{e}^{-\theta}}{2},\sqrt{c}\frac{\mathrm{e}^{n}+\mathrm{e}^{-\theta}}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{c}{a}}\frac{\mathrm{e}^{\theta}+\mathrm{e}^{-\theta}}{2}\mathrm{d}\theta\\&=\int f\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\frac{\mathrm{e}^{2\theta}-1}{2\mathrm{e}^{\theta}},\sqrt{c}\frac{\mathrm{e}^{2\theta}+1}{2\mathrm{e}^{\theta}}\right)\cdot\sqrt{\frac{c}{a}}\frac{\mathrm{e}^{2\theta}+1}{2\mathrm{e}^{2\theta}}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}\int f\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\frac{t^2-1}{2t},\sqrt{c}\frac{t^2+1}{2t}\right)\cdot\frac{t^2+1}{t^2}\mathrm{d}t\quad\left(t=\mathrm{e}^{\theta}\right)\end{aligned}$$

   因此 I 的计算化为关于 t 的有理分式的原函数的计算.

2. $a>0,c<0$：

   这时 $f\left(x,\sqrt{ax^2+c}\right)=f\left(x,\sqrt{a\left(x^2-\frac{|c|}{a}\right)}\right)$. 作变换 $x=\sqrt{\dfrac{|c|}{a}}\cosh\theta$ 则

$$\begin{aligned}I&=\int f\left(x,\sqrt{ax^2+c}\right)\mathrm{d}x\\&=\int f\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\sinh\theta,\sqrt{c}\cosh\theta\right)\cdot\sqrt{\frac{c}{a}}\cosh\theta\,\mathrm{d}\theta\quad\left(\theta=\operatorname{arccosh}\left(\sqrt{\frac{a}{c}}x\right)\right)\\&=\sqrt{\frac{c}{a}}\int f\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\cdot\frac{t-t^{-1}}{2},\ \sqrt{c}\cdot\frac{t+t^{-1}}{2}\right)\cdot\frac{t+t^{-1}}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t}\quad(t=\mathrm{e}^{\theta}).\end{aligned}$$

   因此 I 的计算也化为关于 t 的有理分式的原函数的计算.

3. $a<0,c>0$:

这时 $f\left(x,\sqrt{ax^2+c}\right)=f\left(x,\sqrt{|a|\left(\frac{c}{|a|}-x^2\right)}\right)$. 作变换 $x=\sqrt{\frac{c}{|a|}}\sin\theta$，则

$$
\begin{aligned}
I &= \int f\left(x,\sqrt{ax^2+c}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int f\left(\sqrt{\frac{c}{|a|}}\sin\theta,\sqrt{c}\cos\theta\right)\sqrt{\frac{c}{|a|}}\cos\theta\mathrm{d}\theta \quad \left(\theta=\operatorname{arccosh}\sqrt{\frac{\sigma}{|\sigma|}x}\right) \\
&= \sqrt{\frac{c}{|a|}}\int f\left(\sqrt{\frac{c}{|a|}}\sin\theta,\sqrt{c}\cos\theta\right)\cos\theta\mathrm{d}\theta \quad \left(t=\mathrm{e}^{\theta}\right).
\end{aligned}
$$

因此 I 的计算也最终化为有理分式的原函数的计算.

例题 7.20 计算 $\int\sqrt{x^2+x+1}\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int\sqrt{x^2+x+1}\mathrm{d}x \\
&= \int\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x \\
&= \int\sqrt{y^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}y \left(y=x+\frac{1}{2}\right) \\
&= \int -\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\sinh^2\theta+1}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh\theta\mathrm{d}\theta \quad \left(y=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh\theta\right) \\
&= \frac{3}{4}\int\cosh^2\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{3}{4}\int\left(\frac{\mathrm{e}^{\theta}+\mathrm{e}^{-\theta}}{2}\right)^2\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{3}{4}\int\frac{\left(\mathrm{e}^2+1\right)^2}{4\mathrm{e}^{3\theta}}\mathrm{e}^{\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{3}{16}\int\frac{t^4+2t^2+1}{t^3}\mathrm{d}t \left(t=\mathrm{e}^{\theta}\right) \\
&= \frac{3}{16}\left[\int t\mathrm{d}t+2\int\frac{1}{t}\mathrm{d}t+\int\frac{1}{t^3}\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{3}{32}t^2+\frac{3}{8}\log t-\frac{3}{32t^2}+C \\
&= \frac{3}{32}\exp\left(2\operatorname{arcsinh}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{3}{8}\operatorname{arcsinh}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{3}{32}\exp\left(-2\operatorname{arcsinh}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C
\end{aligned}
$$

例题 7.21 计算 $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\,(a>0)$.

作变换 $x=a\sin\theta,\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，则

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}(a\sin\theta)'\mathrm{d}\theta\quad\left(\theta=\arcsin\frac{x}{a}\right)\\&=\int\frac{a\cos\theta}{a\cos\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\int\mathrm{d}\theta\\&=\theta+C\\&=\arcsin\frac{x}{a}+C.\end{aligned}$$

✍ 习 题 7.3

1. 计算下列各有理分式的原函数：

 1) $\displaystyle\int\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}\,\mathrm{d}x$，其中 a,b,c 互不相等；

 2) $\displaystyle\int\frac{x^3+2x^2+2x+1}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$；

 3) $\displaystyle\int\frac{1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$；

 4) $\displaystyle\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$；

 5) $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}\,\mathrm{d}x$；

 6) $\displaystyle\int\frac{1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x$；

 7) $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$；

 8) $\displaystyle\int\frac{x^3+x^2-1}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}x$；

 9) $\displaystyle\int\frac{x^5+1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$；

 10) $\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)^7-x^7-1}\,\mathrm{d}x$.

2. 设函数

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{(x^2+k^2)^2},\quad(a,b,c,k\in\mathbb{R},\ a\neq 0,\ k\neq 0).$$

 试问：常数 a,b,c 取何值时，f 的原函数 $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 是一个有理函数？

3. 计算下列三角函数的原函数：

 1) $\displaystyle\int\sin^2x\cos^3x\,\mathrm{d}x$；

 2) $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^2x\cos^4x}\,\mathrm{d}x$；

3) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{(1-\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$；

4) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$，$n\in\mathbb{N}$；

5) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$；

6) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$；

7) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x+\sin x+1}\,\mathrm{d}x$；

8) $\displaystyle\int \frac{(1+\tan^2 x)\sin^3 x}{\cos^2 x+2\cos x+2}\,\mathrm{d}x$；

9) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{(\sin x-2)(\sin x+2)}\,\mathrm{d}x$；

10) $\displaystyle\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\,\mathrm{d}x$.

4. 计算下列含根式的原函数：

1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$；

2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$；

3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\,\mathrm{d}x$；

4) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x$；

5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}\,\mathrm{d}x$；

6) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{(x-1)^2-(x-1)}}\,\mathrm{d}x$；

7) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$；

8) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x$；

9) $\displaystyle\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$；

10) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}\,\mathrm{d}x$.

5. 计算下列含二次根式的原函数：

1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,\mathrm{d}x$；

2) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}\,\mathrm{d}x$；

3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{2x+1}\,\mathrm{d}x$；

4) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{x\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$；

5) $\displaystyle\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,\mathrm{d}x$；

6) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,\mathrm{d}x$；

7) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}\,\mathrm{d}x$；

8) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$；

9) $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x$；

10) $\displaystyle\int \sqrt{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{x}+2}\,\mathrm{d}x$.

6. 计算下列特殊函数的原函数：

1) $\displaystyle\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x$；

2) $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$；

3) $\displaystyle\int \frac{x}{\cosh^2 x}\,\mathrm{d}x$；

4) $\displaystyle\int \frac{\cosh\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$；

5) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cosh^2 x}\,\mathrm{d}x$；

6) $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh x+2\cosh x}\,\mathrm{d}x$；

7) $\displaystyle\int \frac{\cosh^3 x}{1+\sinh x}\,\mathrm{d}x$；

8) $\displaystyle\int \sinh^4 x\,\mathrm{d}x$；

9) $\displaystyle\int \sqrt{\tanh x}\,\mathrm{d}x$；

10) $\displaystyle\int \coth^2 x\,\mathrm{d}x$.

第八章　函数的限定展开

这一章我们首先介绍函数的局部比较，然后介绍函数的限定展开．最后介绍函数限定展开在不定型极限的计算、函数局部极值与函数图形研究中的重要应用．

8.1　函数的局部比较

在许多数学问题中，我们经常要对两个函数进行局部比较、研究函数的局部性态，为此我们介绍函数的三个局部比较关系概念，即：大 O 关系、小 o 关系与等价关系．

以下我们设 $X \subset \mathbb{R}$ 是任一非空集合，$a \in \overline{\mathbb{R}}$ 是 X 的一个聚点．

1. 大 O 关系

定义 8.1

设 $f, g : X \to \mathbb{R}$ 是任意两个函数，我们称函数 f 当 $x \to a$ 时关于函数 g 是大 O 关系，记为 $f = O(g)(x \to a)$，如果存在一个函数 $h : X \to \mathbb{R}$ 及 a 的一个邻域 U，使得

1. $f(x) = g(x)h(x), \forall x \in X \cap U$；
2. $|h(x)| \leqslant M, \forall x \in X \cap U$．（这里 $M > 0$）

♣

容易验证下述简单结论：

若 $g(x) \neq 0, \forall x \in X \cap U$，则

$$f = O(g)(x \to a) \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall x \in X \cap U, \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant M.$$

换句话说，当 g 在 a 的邻域内不等于 0 时，则 $f = O(g)(x \to a)$ 当且仅当函数 $\dfrac{f}{g}$ 在 a 处是局部有界的．

特别地，$f = O(1)(x \to a)$ 表明 f 在 a 处是局部有界．

例题 8.1

1. $x \sin \dfrac{1}{x} = O(x)(x \to 0)$．
2. $\arctan \cdot \dfrac{1}{x} = O(1)(x \to 0)$．
3. $x + x^2 \cos x = O\left(x^2\right)(x \to \pm\infty)$．
4. $\dfrac{\arctan x}{1 + x^2} = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)(x \to \pm\infty)$．

定理 8.1

设 $f, g, \varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$ 是任意四个函数，并且 $f = O(\varphi)(x \to a), g = O(\psi)(x \to a)$，则

1. $fg = O(\varphi\psi)(x \to a)$，
2. 若 $\psi = O(\varphi)(x \to a)$，则 $f + g = O(\varphi)(x \to a)$．

♡

证明　因为 $f = O(\varphi), g = O(\psi)(x \to a)$，所以存在两个函数 $h, k : X \to \mathbb{R}$ 及 a 的一个邻域 U 与正数

M, 使得 $\forall x \in X \cap U$,

$$f(x)=\varphi(x)h(x), g(x)=\psi(x)k(x), |h(x)|\leqslant M, |k(x)|\leqslant M.$$

于是

$$\begin{gathered}\text{1)}\ f(x)g(x)=\varphi(x)\psi(x)\cdot h(x)k(x), \forall x\in X\cap U,\\ |h(x)k(x)|\leqslant M^2, \forall x\in X\cap U.\end{gathered}$$

因此 $fg=O(\varphi\psi)$.

2) 若 $\psi=O(\varphi)(x\to a)$, 则存在函数 $s: X\to\mathbb{R}$ 及正数 K 使得

$$\psi(x)=\varphi(x)s(x), |s(x)|\leqslant K, \forall x\in X\cap U.$$

于是

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= \varphi(x)h(x)+\psi(x)k(x)\\ &= \varphi(x)[h(x)+s(x)k(x)], \qquad \forall x\in X\cap U,\\ |h(x)+s(x)k(x)| &\leqslant |h(x)|+|s(x)||k(x)|\\ &\leqslant M(1+K), \forall x\in X\cap U.\end{aligned}$$

因此 $f+g=O(\varphi)(x\to a)$

推论 8.1

1. $O\left(x^n\right)+O\left(x^m\right)=O\left(x^n\right)(x\to 0)(n\leqslant m)$
2. $O\left(x^n\right)+O\left(x^m\right)=O\left(x^m\right)(x\to \pm\infty)(n\leqslant m)$

证明 事实上, 若 $n\leqslant m$, 则

$$x^m=O\left(x^n\right)(x\to 0), x^n=O\left(x^m\right)(x\to\pm\infty).$$

于是, 若令 $f=O\left(x^n\right), g=O\left(x^m\right)$, 则由上述定理

$$\begin{aligned} f+g=O\left(x^n\right)+O\left(x^m\right)=O\left(x^n\right)(x\to 0)\\ f+g=O\left(x^n\right)+O\left(x^m\right)=O\left(x^m\right)(x\to \pm\infty)\end{aligned}$$

2. 小 o 关系

定义 8.2

设 $f,g: X\to\mathbb{R}$ 是任意两个函数, 我们称函数 f 当 $x\to a$ 时关于函数 g 是小 o 关系, 记为 $f=o(g)(x\to a)$, 如果存在一个函数 $h: X\to\mathbb{R}$ 及 a 的一个邻域 U, 使得

1. $f(x)=g(x)h(x), \forall x\in X\cap U$;
2. $\lim\limits_{x\to a} h(x)=0$.

显然, 若 $g(x)\neq 0, \forall x\in X\cap U$, 则

$$f=o(g)(x\to a) \Longleftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

特别地, 我们有

$$\begin{aligned} f=o(1)(x\to a) &\Longleftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=0\\ &\Longleftrightarrow f \text{ 是 } \langle a,0\rangle \text{ 型无穷小}\end{aligned}$$

例题 8.2

1. $x^n \sin\frac{1}{x} = o(x)(x \to 0, n > 1)$.
2. $\tan x - \sin x = o(\sin x)(x \to 0)$.
3. $x^a = o\left(a^x\right)(x \to +\infty, a > 1)$
4. $a^{-x} = o\left(x^a\right)(x \to +\infty, a > 1)$.
5. $\log x = o\left(x^a\right)(x \to +\infty, a > 0)$
6. $\log x = o\left(x^a\right)\left(x \to 0^+, a < 0\right)$.

定理 8.2

设 $f, g, \varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$ 是任意四个函数.

1. 若 $f = O(\varphi), g = o(\psi)$, 则 $fg = o(\varphi\psi)(x \to a)$.
2. 若 $f = o(\varphi), g = o(\varphi)$, 则 $f + g = o(\varphi)(x \to a)$.
3. 若 $f = o(g), g = O(\varphi)$, 则 $f = o(\varphi)(x \to a)$.
4. 若 $f = O(g), g = o(\varphi)$, 则 $f = o(\varphi)(x \to a)$.

证明 1) 设 $f = O(\varphi), g = o(\psi), (x \to a)$ 则存在函数 $h, k : X \to \mathbb{R}$ 及 a 的一个邻域 U 使得

$$f(x) = \varphi(x)h(x), g(x) = \psi(x)k(x), \forall x \in X \cap U,$$

$$|h(x)| \leqslant M, \forall x \subseteq X \cap U, \lim_{x\to a} k(x) = 0.$$

于是

$$f(x)g(x) = (\varphi(x)\psi(x))(h(x)k(x)), \forall x \in X \cap U; \quad \lim_{x\to a} h(x)k(x) = 0.$$

因此 $fg = o(\varphi\psi)(x \to a)$.

类似地可证其他结论.

例题 8.3 设 $n, m \in \mathbb{N}$. 并且 $f = o\left(x^n\right), g = o\left(x^m\right)(x \to 0)$, 则

1. $fg = o\left(x^{n+m}\right)(x \to 0)$.
2. $f = o\left(x^m\right)(x \to 0, m < n)$.
3. $f + g = o\left(x^m\right)(x \to 0, m < n)$.

事实上, 1) 是上述定理8.2 1) 的直接结论,

现设 $m < n$. 于是 $x^n = o\left(x^m\right)(x \to 0)$, 从而由 $f = o\left(x^n\right)(x \to 0)$ 及 $x^n = o\left(x^m\right)(x \to 0)$ 推得

$$f = o\left(x^m\right)(x \to 0), f + g = o\left(x^m\right)(x \to 0).$$

3. 等价关系

定义 8.3

设 $f, g : X \to \mathbb{R}$ 是任意两个函数, 我们称函数 f 与函数 g 当 $x \to a$ 时是等价的, 记为 $f \sim g(x \to a)$, 如果存在一个函数 $h : X \to \mathbb{R}$ 及 a 的一个邻域 U, 使得

1. $f(x) = g(x)h(x), \forall x \in X \cap U$;
2. $\lim_{x\to a} h(x) = 1$.

由此定义直接推出, 若 $g(x) \neq 0, \forall x \in X \cap U$, 则

$$f \sim g(x \to a) \Longleftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

例题 8.4

1. $\sin x \sim x, \sinh x \sim x (x \to 0)$.
2. $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \cosh x - 1 \sim \frac{1}{2}x^2 (x \to 0)$.
3. $\tan x \sim x, \tanh x \sim x (x \to 0)$.
4. $\log(1+x) \sim e^x - 1 (x \to 0)$.

定理 8.3

若 $\mathscr{F}(X)$ 表示所有定义在 X 上的实值函数的集合，我们在 $\mathscr{F}(X)$ 上定义关系 $\mathscr{R}$ 如下：

$$\forall f, g \in \mathscr{F}(X), f \mathscr{R} g \iff f \sim g (x \to a).$$

则 $\mathscr{R}$ 是 $\mathscr{F}(X)$ 上的一个等价关系.

证明

1. 自反性. 显然 $\forall f \in \mathscr{F}(X), f \sim f (x \to a)$. 因此 $f \mathscr{R} f$.
2. 对称性. 若 $f \mathscr{R} g$, 则 $f \sim g (x \to a)$, 于是由定义知，存在函数 $h : X \to \mathbb{R}$ 及 a 的一个邻域 U 使得
$$f(x) = g(x)h(x), \forall x \in X \cap U, \lim_{x \to a} h(x) = 1.$$
于是我们可以假设 $h(x) \neq 0, \forall x \in X \cap U$, 从而
$$g(x) = f(x)\frac{1}{h(x)}, \forall x \in X \cap U \ \lim_{x \to a} \frac{1}{h(x)} = 1.$$
因此 $g \sim f (x \to a)$, 即 $g \mathscr{R} f$.
3. 传递性. 若 $f \mathscr{R} g, g \mathscr{R} h$, 则 $f \sim g, g \sim h (x \to a)$, 于是存在函数 $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$ 及 a 的一个邻域 U 使得
$$f(x) = g(x)\varphi(x), g(x) = h(x)\psi(x), \forall x \in X \cap U,$$
$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = 1, \lim_{x \to a} \psi(x) = 1.$$
因此
$$f(x) = h(x)\varphi(x)\psi(x), \forall x \in X \cap U,$$
$$\lim_{x \to a} \varphi(x)\psi(x) = 1.$$
从而 $f \sim h (x \to a)$, 即 $f \mathscr{R} h$.

因此 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{A}(X)$ 上的一个等价关系.

定理 8.4

设 $f_1, f_2, g_1, g_2 : X \to \mathbb{R}$ 是任意四个函数.

1. 若 $f_1 \sim g_1, f_2 \sim g_2 (x \to a)$, 则 $f_1 f_2 \sim g_1 g_2 (x \to a)$.
2. 若 $f_1 \sim g_1, f_2 \sim g_2 (x \to a)$, 并且存在 a 的一个邻域 V 使得 $g_1(x)g_2(x) > 0, \forall x \in X \cap V$, 则 $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2 (x \to a)$.

证明 因为 $f_1 \sim g_1, f_2 \sim g_2(x \to a)$, 所以存在两个函数 $h, k: X \to \mathbb{R}$ 及 a 的一个邻域 U 使得

$$\begin{aligned}
&f_1(x) = g_1(x)h(x),\\
&f_2(x) = g_2(x)k(x), \forall x \in X \cap U,\\
&\lim_{x\to a} h(x) = 1, \lim_{x\to a} k(x) = 1.
\end{aligned}$$

于是

$$f_1(x)f_2(x) = (g_1(x)g_2(x))\,(h(x)k(x)),, \forall x \in X \cap U, \lim_{x\to a} h(x)k(x) = 1.$$

因此 $f_1 f_2 \sim g_1 g_2(x \to a)$.

此外, 若令 $h(x) = 1 + \varepsilon_1(x), k(x) = 1 + \varepsilon_2(x), \forall x \in X$, 则 $\lim_{x\to a} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0$, 并且

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= g_1(x) + g_1(x)\varepsilon_1(x),\\
f_2(x) &= g_2(x) + g_2(x)\varepsilon_2(x), \forall x \in X \cap U\\
f_1(x) + f_2(x) &= [g_1(x) + g_2(x)] + [g_1(x)\varepsilon_1(x) + g_2(x)\varepsilon_2(x)]\,, \forall x \in X \cap U.
\end{aligned}$$

由假设 $g_1(x)g_2(x) > 0, \forall x \in X \cap V$, 所以

$$f_1(x) + f_2(x) = [g_1(x) + g_2(x)]\left[1 + \frac{g_1(x)}{g_1(x)+g_2(x)}\varepsilon_1(x) + \frac{g_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)}\varepsilon_2(x)\right], \forall x \in X \cap U \cap V.$$

并且由于 $\forall x \in X \cap U \cap V, g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 同号, 故

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{g_1(x)}{g_1(x)+g_2(x)}\varepsilon_1(x) + \frac{g_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)}\varepsilon_2(x)\right|\\
\leqslant&\left|\frac{g_1(x)}{g_1(x)+g_2(x)}\right||\varepsilon_1(x)| + \left|\frac{g_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)}\right||\varepsilon_2(x)|\\
\leqslant&|\varepsilon_1(x)| + |\varepsilon_2(x)|\,.
\end{aligned}$$

于是 $\lim_{x\to a}\left[\frac{g_1(x)}{g_1(x)+g_2(x)}\varepsilon_1(x) + \frac{g_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)}\varepsilon_2(x)\right] = 0$, 从而

$$\lim_{x\to a}[1 + \frac{g_1(x)}{g_1(x)+g_2(x)}\varepsilon_1(x) + \frac{g_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)}\varepsilon_2(x)] = 1.$$

因此 $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2(x \to a)$.

注 若将上述定理中结论 2) 的条件: "$g_1(x)g_2(x) > 0$" 换成 $g_1(x)g_2(x) < 0, \forall x \in X \cap V$, 则一般说来结论

$$\text{``}f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2(x \to a)\text{''}$$

不再成立.

例题 8.5 由于 $1 - x^3 = (1-x)\left(1 + x + x^2\right)$, 故

$$1 - x^3 \sim 1 - x(x \to 0) \text{ 且 } x - 1 \sim x - 1(x \to 0)$$

但是

$$\left(1 - x^3\right) + (x - 1) = x - x^3, (1 - x) + (x - 1) = 0$$

显然 $x - x^3$ 与 0 当 $x \to 0$ 时不等价, 其原因是 $1 - x$ 与 $x - 1$ 不同号.

定理 8.5

设 $f, g : X \to \mathbb{R}$ 是任意两个函数，若 $f \sim g(x \to a)$，并且 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$. 则

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

证明 因为 $f \sim g(x \to a)$, 所以存在函数 $h : X \to \mathbb{R}$ 及 a 的一个邻域 U 使得

$$f(x) = g(x)h(x), \forall x \in X \cap U, \lim_{x\to a} h(x) = 1$$

由于 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$, 故当 $A \in \mathbb{R}$ 时

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) \cdot \lim_{x\to a} h(x) = A \cdot 1 = A;$$

当 $A = \pm\infty$ 时，直接从定义可证 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

结合定理 8.4 与定理 8.5 可知，在计算函数极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 时，可以对 $f(x)$ 中的因子用等价的因子代换而不影响极限值.

例题 8.6 计算 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^n x}{x^2}(n \in \mathbb{N})$.

因为

$$\frac{1-\cos^n x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)\left(1+\cos x+\cdots+\cos^{n-1} x\right)}{x^2}$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2(x \to 0)$$

所以

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2\left(1+\cos x+\cdots+\cos^{n-1} x\right)}{x^2} = \frac{n}{2}$$

✍ 习 题 8.1

1. 设函数

$$f(x) = \frac{a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0},$$

试选择常数 $a_i, b_i(i = 0,1,2,3)$，使得：

1) $f(x) = o(x^2)$，当 $x \to 0$；

2) $f(x) = O(x^2)$，当 $x \to 0$.

2. 在函数集 $\mathscr{F}(X)$(表示定义在集合 X 上、以 a 为聚点的某去心邻域内的实值函数全体) 上定义两个关系 $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2$ 如下：

$$\forall f, g \in \mathscr{F}(X), f\mathscr{R}_1 g \iff f = O(g)(x \to a),$$

$$\forall f, g \in \mathscr{F}(X), f\mathscr{R}_2 g \iff f = o(g)(x \to a).$$

试问 $\mathscr{R}_1$ 与 $\mathscr{R}_2$ 是 $\mathscr{F}(X)$ 上的等价关系？

3. 设 $f, g \in \mathscr{F}(X)$，并且 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

1) 证明：若 $A \in \mathbb{R} - \{0\}$，则 $f \sim g(x \to a)$；

2) 若 $A = 0$ 或 $A = \pm\infty$，则 $f \sim g(x \to a)$ 可以不成立. 试举例说明.

4. 设 $f, g \in \mathscr{F}(X)$ 并且 $\mathrm{Ran}(f), \mathrm{Ran}(g) \subset \mathbb{R}_*^+$. 证明：若 $f \sim g(x \to a)$ 并且 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A \in \mathbb{R}_*^+ - \{1\}$, 则 $\log f \sim \log g(x \to a)$.

5. 证明：$\forall f, g \in \mathscr{F}(X)$,

$$\mathrm{e}^{f} \sim \mathrm{e}^{g} \Longleftrightarrow \lim_{x \to a}[f(x)-g(x)]=0.$$

6. 设 $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathscr{F}(X)$，并且 $f_1 \sim g_1, f_2 \sim g_2(x \to a)$. 证明：
   1) 若 $g_2=o(g_1)(x \to a)$，则 $f_1+f_2 \sim g_1(x \to a)$；
   2) 若存在 $\alpha \neq -1$，使得 $g_2 \sim \alpha g_1(x \to a)$，则 $f_1+f_2 \sim (1+\alpha) g_1(x \to a)$；
   3) 若 $g_2 \sim -g_1(x \to a)$，则 $f_1+f_2=o(g_1)(x \to a)$；
   4) 利用上述结论证明下列渐近关系：

$$\begin{aligned}
&\cosh x \sim \frac{\mathrm{e}^{x}}{2}, \sinh x \sim \frac{\mathrm{e}^{x}}{2} && (x \to +\infty), \\
&\cosh x \sim \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}, \sinh x \sim -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2} && (x \to -\infty), \\
&\operatorname{arcosh} x \sim \log x && (x \to +\infty), \\
&\operatorname{arsinh} x \sim \log x && (x \to +\infty).
\end{aligned}$$

8.2 函数的限定展开

1. 问题的提出

我们假设函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 在 $x_0 \in X$ 处可导. 根据定理6.2,

1. $f(x)=f(x_0)+\varphi(x)(x-x_0), \forall x \in X$,
2. φ 在 x_0 处连续且 $\varphi(x_0)=f'(x_0)$.

若令 $\varphi(x)=f'(x_0)+\varepsilon(x), \forall x \in X$, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x)=0$, 因此

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0)+\left[f'(x_0)+\varepsilon(x)\right](x-x_0) \\
&= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\varepsilon(x)(x-x_0), \forall x \in X
\end{aligned}$$

或

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)(x \to x_0).$$

这里 $P_1(x-x_0)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 是关于 $(x-x_0)$ 的一次多项式. 上述表达式表明一次多项式 P_1 是函数 f 在 $X \cap U$(U 是 x_0 的一个邻域) 内的近似函数，其误差函数 $f-P_1$ 当 $x \to x_0$ 时关于 $x-x_0$ 是小 o 关系.

由此我们很自然想到，当 f 在 x_0 处有更高阶的导数时，f 在 $X \cap U$ 内可能会有关于 $x-x_0$ 更高次的多项式 $P_n(x-x_0)$ 作为它的近似函数，并且其误差函数 $f-P_n$ 当 $x \to x_0$ 时关于 $(x-x_0)^n$ 是小 o 关系.

上述分析启发我们引入函数局部限定展开的一般概念.

2. 函数限定展开的定义

定义 8.4

设 $X \subset \mathbb{R}$ 是任一非空集合，$x_0 \in X$ 是 X 的一个聚点，$f: X \to \mathbb{R}$ 是任一函数. 若存在常数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n (n=0,1,2,\cdots)$ 使得

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)(x \to x_0),$$

则我们称函数 f 在 x_0 的邻域内有一个 n 阶的限于多项式的展开式 (以后简称为 n 阶限定展开式).

显然, 有两个问题我们必须研究:

1. 是否任意一个函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 在 $x_0 \in X$ 的邻域内有一个 n 阶的限定展开式?
2. 如果有, 这种限定展开式是否唯一?

下面我们首先研究第二个问题, 即

3. 限定展开式的唯一性

定理 8.6

若函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 在 $x_0 \in X$ 的邻域内有一个 n 阶限定展开式, 则这个展开式是唯一的.

证明 假设存在两组常数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 使得

$$\begin{aligned} f(x) =& a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots + a_n (x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right) (x \to x_0), \\ f(x) =& b_0 + b_1 (x - x_0) + b_2 (x - x_0)^2 + \cdots + b_n (x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right) (x \to x_0). \end{aligned}$$

那么我们有

$$0 = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)(x - x_0) + (a_2 - b_2)(x - x_0)^2 + \cdots + (a_n - b_n)(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right) (x \to x_0).$$

两边令 $x \to x_0$ 取极限得到 $0 = a_0 - b_0$, 即 $a_0 = b_0$.

将 $a_0 = b_0$ 代入上式后两边再除以 $x - x_0$ $(x \neq x_0)$ 得到

$$0 = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)(x - x_0) + \cdots + (a_n - b_n)(x - x_0)^{n-1} + o\left((x - x_0)^{n-1}\right) (x \to x_0).$$

再令 $x \to x_0$ 取极限, 又得到 $a_1 - b_1 = 0$, 即 $a_1 = b_1$.

重复上述方法, 我们可逐次得到 $a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n$. 因此唯一性得证.

4. 限定展开式的两个简单性质

定理 8.7

若函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 在 $x_0 \in X$ 的邻域内有 $n > 1$ 阶的限定展开式, 则 $\forall m \in \mathbb{N}$ 且 $m < n$, f 在 x_0 的邻域内有 m 阶限定展开式.

证明 因为 f 在 x_0 的邻域内有 n 阶限定展开式, 所以

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots + a_n (x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right) (x \to x_0)$$

于是 $\forall m \in \mathbb{N}$ 且 $m < n$,

$$\begin{aligned} & a_{m+1} (x - x_0)^{m+1} + \cdots + a_n (x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right) \\ =& o\left((x - x_0)^m\right) + o\left((x - x_0)^n\right) \\ =& o\left((x - x_0)^m\right) (x \to x_0) \end{aligned}$$

从而

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots + a_m (x - x_0)^m + o\left((x - x_0)^m\right) (x \to x_0)$$

因此 f 在 x_0 的邻域内有 m 阶限定展开式.

下面一个定理反映了具有限定展开式的函数的两个内在性质.

定理 8.8

若函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 在 x_0 的邻域内有一个 n 阶限定展开式：

$$f(x)=a_0+a_1\left(x-x_0\right)+a_2\left(x-x_0\right)^2+\cdots+a_n\left(x-x_0\right)^n+o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)\left(x \to x_0\right),$$

则

1. f 在 x_0 处连续，并且 $a_0=f\left(x_0\right)$.
2. 当 $n \geqslant 1$ 时，f 在 x_0 处可导，并且 $a_1=f'\left(x_0\right)$

证明

1. 首先在上述限定展开式中令 $x \to x_0$ 取极限得到 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=a_0$，然后将 $x=x_0$ 代入展开式中即得到 $a_0=f\left(x_0\right)$，因此 f 在 x_0 处连续.
2. 若 $n \geqslant 1$，则由 1) 所证，$a_0=f\left(x_0\right)$，从而对 $x \neq x_0$，我们有
$$\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=a_1+a_2\left(x-x_0\right)+\cdots+a_n\left(x-x_0\right)^{n-1}+o\left(\left(x-x_0\right)^{n-1}\right)\left(x \to x_0\right)$$
令 $x \to x_0$ 取极限得到
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=a_1$$
因此 f 在 x_0 处可导，并且 $f'\left(x_0\right)=a_1$.

下面我们来研究前面提出的限定展开式的存在性.

5. 限定展开式的存在性

1)Taylor-Young 公式

定理 8.9

设 $I \subset \mathbb{R}$ 是任一非空区间. $x_0 \in I$ 若函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 在 x_0 处 n 次可导，则 f 在 x_0 的邻域内有下述形式的 n 阶限定展开式：

$$\begin{aligned} f(x)= & f\left(x_0\right)+\frac{f'\left(x_0\right)}{1!}\left(x-x_0\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2 \\ & +\cdots+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n+o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)\left(x \to x_0\right) \end{aligned}$$

此展开式称为 f 在 x_0 的邻域内的 Taylor-Young 公式.

证明 我们对 n 用数学归纳法进行证明.

当 $n=1$ 时，我们在本节开头证明了

$$f(x)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+o\left(x-x_0\right)\left(x \to x_0\right)$$

现假设定理当 $n=k$ 时成立. 我们来证明当 $n=k+1$ 时定理也成立.

首先由 $f^{(k+1)}\left(x_0\right)$ 存在表明 f 在 x_0 的邻域内导函数 f' 在 x_0 处 k 次可导，故由归纳假设

$$f'(x)=f'\left(x_0\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{1!}\left(x-x_0\right)+\cdots+\frac{f^{(k+1)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^k+o\left(\left(x-x_0\right)^k\right)\left(x \to x_0\right),$$

从而

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\left(x-x_0\right)^k}\left\{f'(x)-\left[f'\left(x_0\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{1!}\left(x-x_0\right)+\cdots+\frac{f^{(k+1)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^k\right]\right\}=0$$

于是由 L'Hospital 法则我们得到

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{(x-x_0)^{k+1}}\left\{f(x)-\left[f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}\right]\right\}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{(k+1)(x-x_0)^{k}}\left\{f'(x)-\left[f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k}\right]\right\}$$
$$=0$$

现在我们定义函数 $R: I\to\mathbb{R}$ 如下：

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-x_0)^{k+1}}\left\{f(x)-\left[f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\dfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}\right]\right\}, & x\neq x_0,\\ 0, & x=x_0.\end{cases}$$

则

$$f(x)-\left[f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}\right]=(x-x_0)^{k+1}R(x),\forall x\in I. \quad (8.1)$$

$\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$ 从而

$$f(x)-\left[f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}\right]=o\left((x-x_0)^{k+1}\right)(x\to x_0)$$

或

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}+o\left((x-x_0)^{k+1}\right)(x\to x_0)$$

这就表明定理当 $n=k+1$ 时成立. 因此由数学归纳法知定理对任意的 $n\in\mathbb{N}$ 都成立.

注 1) 若令 $x=x_0+h$, 则 $x\to x_0$ 当且仅当 $h\to 0$, 因此上面的 Taylor-Young 公式又可表示成下述形式：

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+o\left(h^n\right)(h\to 0).$$

2) 若在上述式8.1中令 $k+1=n$, 则我们得到

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+(x-x_0)^n R(x),\forall x\in I,$$

这里 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$.

多项式 $P_n(x-x_0)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ 称为函数 f 在 x_0 处的 n 阶 Taylor-Young 多项式, 而 $(x-x_0)^n R(x)$ 称为函数 f 在 x_0 处的 n 阶 Taylor-Young 公式的余项.

显然这种余项 $(x-x_0)^n R(x)$ 对我们研究误差 $f(x)-P_n(x_0)$ 毫无用处. 因为由 $R(x)$ 的定义可以看出它并没有为我们提供任何具体的信息. 因此下面我们来寻求 Taylor-Young 公式的更实用的余项.

2)Cauchy 积分型与 Lagrange 型余项

定理 8.10

若函数 $f: I\to\mathbb{R}$ 在区间 I 上是 C^n 类的 $(n\geqslant 1)$, $x_0\in I$, 则下述展开式成立：

1)

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t,\quad \forall x\in I.$$

或

2)

$$f(x)=f\left(x_0\right)+\frac{f'\left(x_0\right)}{1!}\left(x-x_0\right)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}\left(x_0\right)}{(n-1)!}\left(x-x_0\right)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\left(x-x_0\right)^n, \forall x \in I.$$

这里 c 介于 x_0 与 x 之间.

(第一个展开式称为带 Cauchy 积分型余项

$$\int_{x_0}^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} \cdot(x-t)^{n-1} \mathrm{d} t$$

的 Taylor 公式, 第二个展开式称为带 Lagrange 型余项 $\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\left(x-x_0\right)^n$ 的 Taylor 公式).

证明 首先证明第一个展开式. 仍然对 n 用数学归纳法证明. 当 $n=1$ 时, 展开式 1) 为

$$f(x)=f\left(x_0\right)+\int_{x_0}^x f'(t) \mathrm{d} t, \forall x \in I,$$

这正是我们已经证明了的 Newton-Leibniz 公式.

现假设当 $n=k$ 时, 展开式 1) 成立. 我们来证明当 $n=k+1$ 时, 展开式 1) 仍然成立.

由于 f 在 I 上是 C^{k+1} 类的, 故利用分部积分法得到

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0}^x \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} \mathrm{d} t \\
= & {\left[-\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right]_{x_0}^x+\int_{x_0}^x \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \mathrm{d} t } \\
= & \frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^k+\int_{x_0}^x \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \mathrm{d} t, \forall x \in I .
\end{aligned}$$

根据归纳法假设我们有

$$\begin{aligned}
f(x)= & f\left(x_0\right)+\frac{f'\left(x_0\right)}{1!}\left(x-x_0\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\cdots \\
& +\frac{f^{(k-1)}\left(x_0\right)}{(k-1)!}\left(x-x_0\right)^{k-1}+\int_{x_0}^x \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} \mathrm{d} t \\
= & f\left(x_0\right)+\frac{f'\left(x_0\right)}{1!}\left(x-x_0\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\cdots \\
& +\frac{f^{(k-1)}\left(x_0\right)}{(k-1)!}\left(x-x_0\right)^{k-1}+\frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^k+\int_{x_0}^x \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \mathrm{d} t, \forall x \in I .
\end{aligned}$$

即表明当 $n=k+1$ 时, 展开式 1) 成立. 从而由数学归纳法知, $\forall n \in \mathbb{N}$, 展开式 1) 成立.

为了证明展开式 2), 我们来计算余项

$$\int_{x_0}^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \mathrm{d} t$$

若 $x \geqslant x_0$, 则 $(x-t)^{n-1} \geqslant 0$, 根据第一积分中值公式, 存在介于 x_0 与 x 之间的一点 c 使得

$$\int_{x_0}^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \mathrm{d} t=f^{(n)}(c) \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{d} t=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\left(x-x_0\right)^n$$

将它代入展开式 1) 中得到

$$f(x)=f\left(x_0\right)+\frac{f'\left(x_0\right)}{1!}\left(x-x_0\right)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}\left(x_0\right)}{(n-1)!}\left(x-x_0\right)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\left(x-x_0\right)^n, \forall x \in I \text { 且 } x \geqslant x_0 .$$

若 $x \leqslant x_0$, 则证明完全类似, 因此 $\forall x \in I$, 展开 2) 成立.

注 若 $0 \in I$, 则在上述两个展开式 1) 与 2) 中用 $x_0 = 0$ 代入，我们得到下列两个展开式：

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\mathrm{d}t$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n. (\forall x \in I)$$

这里 c 介于 0 与 x 之间.

这两个展开式又称为 f 的 Maclaurin 公式.

下面我们来研究余项的估计.

3) 余项的估计

定理 8.11

若函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 在区间 I 上是 C^n 类的, $x_0 \in I$, 并且存在常数 $M > 0$ 使得

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M, \forall x \in I,$$

则我们有

$$\left|f(x) - \left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}\right]\right| \leqslant M\frac{|x-x_0|^n}{n!}, \forall x \in I.$$

证明 由于 f 在 I 上是 C^n 类的，故由定理8.10有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n, \forall x \in I.$$

以而

$$\begin{aligned}
&\left|f(x) - \left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}\right]\right| \\
=&\left|\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n\right| \\
\leqslant&\frac{M}{n!}|x-x_0|^n, \forall x \in I.
\end{aligned}$$

习 题 8.2

1. 设函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x + \dfrac{x^2}{3} + x^3 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

证明：函数 f 在 $x = 0$ 的邻域内有一个 2 阶限定展开式，但 f 在 $x = 0$ 处不是 2 次可导的.

2. 设函数 $f: \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ 定义如下：

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, f(x) = x^p\left[\frac{1}{x}\right], \text{ 这里 } p \in \mathbb{N} \text{ 且 } p > 3.$$

1) 证明：函数 f 可以连续延拓到 $x = 0$，并且延拓函数 $\widetilde{f}$ 在 $x = 0$ 处可导；
2) 证明：在 $x = 0$ 的任意邻域内都包含有函数 f 的间断点. 由此推得 f 在 $x = 0$ 的任意邻域内都有不可导点.
3) 证明：函数 $\widetilde{f}$ 在 $x = 0$ 的邻域内有 $p - 2$ 阶限定展开式.

3. 设函数 $f: I \to \mathbb{R}(0 \in I)$ 在 R 上是 C^{∞} 类的，并且 $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = o\left(x^n\right)(x \to 0)$. 试问 f 在 $x = 0$ 的邻域内是否恒等于 0？举例说明.
4. 设 $I \in \mathscr{N}(0), f: I \to \mathbb{R}$ 满足下述条件：
$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = o\left(x^2\right)(x \to 0)$$
试问 f 在 I 上是 C^{∞} 类的吗？考虑下述函数
$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x^2} \sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\right), & \text{若 } x \in (0, +\infty); \\ 0, & \text{若 } x \in (-\infty, 0]. \end{cases}$$
5. 设 $f, g: I \to \mathbb{R}$ 是任意两个函数，我们称函数 f, g 在 $x \in I$ 处是 n 阶相等的，如果
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^2} = 0 \text{ 或 } f - g = o\left((x-a)^n\right)(x \to a).$$
   1) 证明：若 P, Q 是次数 $\leqslant n$ 的关于 $(x-a)$ 的多项式，并且 P, Q 在 a 处是 n 阶相等的，则 $P = Q$.
   2) 若 f 在 a 处 n 次可导，并且 P 是次数 $\leqslant n$ 的关于 $(x-a)$ 的多项式，它在 a 处与 f 是 n 阶相等，则
$$P(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$
6. 设函数 $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上是 C^2 类的，并且 $f'(a) = f'(b) = 0$. 证明：存在 $\xi \in (a, b)$ 使得
$$\left|f''(\xi)\right| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|.$$
7. 设函数 $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$ 在 $[0, 2]$ 上是 C^2 类的，并且 $|f(x)| \leqslant 1, \left|f''(x)\right| \leqslant 1, \forall x \in [0, 2]$. 证明：
$$\left|f'(x)\right| \leqslant 2, \forall x \in [0, 2].$$
8. 设函数 $f: [0, a] \to \mathbb{R}$ 在 $[0, a]$ 上 $n+1$ 次可导，并且 $f^{(n+1)}(x)$ 在 $x = 0$ 处右连续，$f^{(n+1)}(0) \neq 0. \forall x \in [0, a]$ ，令
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n,$$
证明：$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\xi}{x} = \dfrac{1}{n+1}$.
9. 1) 利用 Taylor 公式证明：对函数 $f: I \to \mathbb{R}, x_0 \in I$ ，若 $f''(x_0)$ 存在，则
$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$
   2) 设
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0; \\ -x^2, & x \leqslant 0. \end{cases}$$
证明：$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) + f(0-h) - 2f(0)}{h^2}$ 存在，但 $f'(0)$ 不存在.
10. 这个题目是要证明带 Schlömlich 型余项的 Taylor 公式. 它是带 Lagrange 型余项 Taylor 公式的推广.
设函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 在区间 I 上 n 次连续可导，并且 f 在 I 的内部 $n+1$ 次可导，$p \in \mathbb{R}$ 且

$P > -1, x_0 \in I$，证明：$\forall x \in I$，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(p+1)n!}(x-c)^{n-p}(x-x_0)^{p+1},$$

这里 c 介于 x_0 与 x 之间. 为此我们建议

1) $\forall x \in I$ 且 $x \neq x_0$，令

$$F(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{(x-t)^{p+1}}{(x-x_0)^{p+1}}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)$$

$(t \in I)$. 证明：存在 c，它介于 x_0 与 x 之间使得 $F'(c) = 0$.

2) 计算 $F'(t)$.

3) 由此推得我们的结论.

11. 设 $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 且有上界，$f''(x) \geqslant 0 (\forall x \in \mathbb{R})$，证明 f 是常值函数.

12. 设 $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 且 f, f'' 在 $\mathbb{R}$ 上有界. 证明：f' 在 $\mathbb{R}$ 上有界，并且满足不等式

$$M_1^2 \leqslant M_0 M_2.$$

这里 $M_i = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left| f^{(i)}(x) \right|, i = 0, 1, 2$.

8.3 函数限定展开的一般法则

现在我们利用前面两节的理论来研究函数限定展开的实际方法.

1. 直接按定义展开

这种方法一般只适用于比较简单的函数. 例如，对某些基本初等函数，我们可以直接计算它们在 $x = 0$ 处的各阶导数以求出它们在 $x = 0$ 的邻域内的任意阶的限定展开式 (因为基本初等函数在各自定义域上都是 C^∞ 类的).

例题 8.7 正弦、余弦函数在 $x = 0$ 的邻域内的限定展开式.

因为

$$\sin^{(2n)}(0) = 0, \sin^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$
$$\cos^{(2n)}(0) = (-1)^n, \cos^{(2n+1)}(0) = 0. (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

所以它们在 $x = 0$ 的邻域内的限定展开式为

$$\left.\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \end{aligned}\right. (x \to 0)$$

例题 8.8 指数函数在 $x = 0$ 的邻域内的限定展开式.

因为 $\left(a^x\right)^{(n)} = a^x (\log a)^n, \left(\mathrm{e}^x\right)^{(n)} = \mathrm{e}^x, \forall n \in \mathbb{N}$, 所以 $\left(a^x\right)^{(n)}(0) = \log^n a, \left(\mathrm{e}^x\right)^{(n)}(0) = 1 (0 < a \neq 1, \forall n \in \mathbb{N})$, 从而指数函数在 $x = 0$ 的邻域内的限定展开式为

$$\left.\begin{aligned} a^x &= 1 + \frac{\log a}{1!}x + \frac{\log a}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\log^n a}{n!}x^n + o\left(x^n\right) \\ \mathrm{e}^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) \end{aligned}\right. (x \to 0)$$

例题 8.9 函数 $x \longmapsto \log(1+x), x > -1$ 在 $x = 0$ 的邻域内的限定展开式.

直接计算我们得到

$$[\log(1+x)]' = \frac{1}{1+x},$$
$$[\log(1+x)]'' = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2},$$
$$[\log(1+x)]''' = \left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right)' = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}$$
$$[\log(1+x)]^{(4)} = \left(\frac{2}{(1+x)^3}\right)' = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}$$

于是不难用数学归纳法证明

$$[\log(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

从而

$$[\log(1+x)]^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

因此函数 $x \longmapsto \log(1+x), x > -1$ 在 $x=0$ 的邻域内的限定展开式为

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) \quad (x \to 0)$$

例题 8.10 幂函数 $x \longmapsto (1+x)^\alpha, x > -1$ 在 $x=0$ 的邻域内的限定展开式.

若 $\alpha = n \in \mathbb{N}$, 则

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n.$$

若 $\alpha \in \mathbb{N}$, 且 $\alpha \neq 0$. 则由于

$$\left[(1+x)^\alpha\right]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n+1},$$
$$\left[(1+x)^\alpha\right]^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1),$$

故函数 $x \longmapsto (1+x)^\alpha, x > -1$ 在 $x=0$ 的邻域内的限定展开式为:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right)(x \to 0)$$

特别地，当 $\alpha = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 时，我们得到下列三个常用的限定展开式：

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)(x \to 0).$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdots 2n}x^n\left(x^n\right)(x \to 0).$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \cdots + (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}x^n + o\left(x^n\right)(x \to 0)$$

2. 和函数的限定展开

定理 8.12

设函数 $f, g : X \to \mathbb{R}$ 在 $x = 0 \in X$ 的邻域内有 n 阶限定展开式:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right)(x \to 0),$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + o\left(x^n\right)(x \to 0),$$

则函数 $f+g : X \to \mathbb{R}$ 在 $x=0$ 的邻域内也有 n 阶限定展开式，并且

$$(f+g)(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \cdots + (a_n+b_n)x^n + o\left(x^n\right)(x \to 0).$$

证明 因为

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= (a_0+b_0)+(a+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots+(a_n+b_n)x^n+o(x^n)+o(x^n) \\
&= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots+(a_n+b_n)x^n+o(x^n)\ (x\to 0)
\end{aligned}
$$

例题 8.11 考虑双曲正弦、余弦函数 $x\longmapsto \sinh x, x\longmapsto \cosh x, x\in\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 的邻域内的限定展开式.

由于 $\sinh x=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right), \cosh x=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)$, 及

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\ (x\to 0), \\
\mathrm{e}^{-x} &= 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\ (x\to 0),
\end{aligned}
$$

故由上述定理推得

$$
\begin{aligned}
2\sinh x =&(1-1)+\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!}\right)x+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{2!}\right)x^2+\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}\right)x^3+\cdots+\left(\frac{1}{n!}-(-1)^n\frac{1}{n!}\right)x^n+o(x^n)\ (x\to 0) \\
2\cosh x =&(1+1)+\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{1!}\right)x+\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}\right)x^2+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{3!}\right)x^3+\cdots+\left(\frac{1}{n!}+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)x^n+o(x^n)\ (x\to 0)
\end{aligned}
$$

因此

$$
\left.
\begin{aligned}
\sinh x &= x+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o\left(x^{2n+1}\right) \\
\cosh x &= 1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+o\left(x^{2n}\right)
\end{aligned}
\right\}(x\to 0)
$$

3. 乘积函数的限定展开

定理 8.13

设函数 $f,g:X\to\mathbb{R}$ 在 $x=0\in X$ 的邻域内有 n 阶限定展开式:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+o(x^n)\ (x\to 0), \\
g(x) &= b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+o(x^n)\ (x\to 0),
\end{aligned}
$$

则函数 $fg:X\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 的邻域内也有 n 阶限定展开式, 并且

$$
\begin{aligned}
fg(x) =&a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots \\
&+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n+o(x^n)\ (x\to 0)
\end{aligned}
$$

证明 直接将 f 与 g 的限定展开式相乘得到

$$
\begin{aligned}
fg(x) =& \left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\right)\left(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\right. \\
&\left.+b_nx^n\right)+\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+o(x^n)\right)o\left(x^n\right. \\
&+\left(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+o(x^n)\right)o(x^n) \\
=&a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots \\
&+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n \\
&+\left[(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)x^{n+1}+\cdots+a_nb_nx^{2n}\right. \\
&+\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+o(x^n)\right)o(x^n) \\
&\left.+\left(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+o(x^n)\right)o(x^n)\right]\ (x\to 0).
\end{aligned}
$$

而根据定理8.2知，上式右边方括号 $[\cdots\cdots]=o\left(x^n\right)(x\to 0)$，因此

$$\begin{aligned} fg(x)=&a_0b_0+\left(a_0b_1+a_1b_0\right)x+\left(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0\right)x^2+\cdots \\ &+\left(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0\right)x^n+o\left(x^n\right)(x\to 0) \end{aligned}$$

例题 8.12 求函数 $x\longmapsto \sin x\log(1+x)(x>-1)$ 在 $x=0$ 的邻域内的 5 阶限定展开式.

由 $\sin x$ 及 $\log(1+x)$ 在 $x=0$ 的邻域内的限定展开式可知，我们只需取

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^4\right),\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o\left(x^4\right),$$

于是

$$\begin{aligned} \sin x\log(1+x)=&\left(x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^4\right)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o\left(x^4\right)\right) \\ =&x^2-\frac{1}{2}x^3+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}\right)x^4+\left(\frac{1}{2\cdot 3!}-\frac{1}{4}\right)x^5 \\ &+o\left(x^5\right) \\ =&x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{6}x^5+o\left(x^5\right)(x\to 0). \end{aligned}$$

4. 商函数的限定展开

定理 8.14

设函数 $f,g:X\to\mathbb{R}$ 在 $x=0\in X$ 的邻域内有 n 阶限定展开式，并且 $g(0)\neq 0$，则函数 $\dfrac{f}{g}:x\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 的邻域内也有 n 阶限定展开式.

证明 设

$$\left.\begin{aligned} f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+o\left(x^n\right) \\ g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+o\left(x^n\right) \end{aligned}\right\}(x\to 0).$$

由于 $g(0)\neq 0$，故 $b_0\neq 0$. 于是在 $x=0$ 的充分小邻域内 $g\neq 0$. 令

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

$$Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n$$

由多项式的升幂除法知，存在两个多项式 $S(x),R(x)$ 使得

$$P(x)=S(x)Q(x)+x^{n+1}R(x),$$

这里 $S(x)$ 的次数 $\leqslant n$. 于是

$$f(x)-o\left(x^n\right)=S(x)\left[g(x)-o\left(x^n\right)\right]+x^{n+1}R(x)(x\to 0)$$

或

$$f(x)=S(x)g(x)+o\left(x^n\right)-S(x)o\left(x^n\right)+x^{n+1}R(x),$$

因此

$$\frac{f(x)}{g(x)}=S(x)+\frac{o\left(x^n\right)-S(x)o\left(x^n\right)+x^{n+1}R(x)}{g(x)}$$

由于

$$\frac{o\left(x^n\right)-S(x)o\left(x^n\right)+x^{n+1}R(x)}{g(x)}=o\left(x^n\right)(x\to 0),$$

故

$$\frac{f(x)}{g(x)}=S(x)+o\left(x^n\right)(x\to 0).$$

此即表明函数 $\dfrac{f}{g}$ 在 $x=0$ 的邻域内有 n 阶限定展开式.

例题 8.13 求正切函数 $x\longmapsto \tan x, x\in\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ 在 $x=0$ 的邻域内的 5 阶限定展开式.

由于 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 并且 $\cos 0=1\neq 0$, 故若我们取

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o\left(x^5\right),$$
$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o\left(x^5\right)(x\to 0),$$

则直接由多项式的升幂除法得到

$$\begin{array}{r|l|l}
1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4 & x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5 & x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5 \\ \hline
 & x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{24}x^5 & \\ \cline{2-2}
 & \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5 & \\
 & \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^5+\frac{1}{72}x^7 & \\ \cline{2-2}
 & \frac{2}{15}x^5-\frac{1}{72}x^7 & \\
 & \frac{2}{15}x^5-\frac{1}{15}x^7+\frac{1}{180}x^9 & \\ \hline
 & \frac{19}{360}x^7-\frac{1}{180}x^9 &
\end{array}$$

因此

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o\left(x^5\right)(x\to 0)$$

5. 复合函数的限定展开

定理 8.15

设函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 与函数 $g:Y\to\mathbb{R}$ 在 $x=0\in X\cap Y$ 的邻域内都有 n 阶限定展开式, 并且满足条件:

1. $f(0)=0$,
2. 0 是 $Z=X\cap f^{-1}(Y)$ 的聚点.

则复合函数 $g\circ f:Z\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 的邻域内也有 n 阶限定展开式.

证明 由于 $f(0)=0$, 故存在 $x=0$ 的一个邻域 U 使得 f 在 $X\cap U$ 内的 n 阶限定展开式为

$$f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+o\left(x^n\right)(x\to 0).$$

现在设函数 g 在 $y=0$ 的邻域内的 n 阶限定展开式为

$$g(y)=b_0+b_1y+b_2y^2+\cdots+b_ny^n+o\left(y^n\right)(y\to 0).$$

由于 $f(x)\to 0(x\to 0)$ 并且 $\forall x\in\mathbb{Z}=X\cap f^{-1}(Y)$, $f(x)\in Y$, 故我们有

$$g\circ f(x)=b_0+b_1(f(x))+b_2(f(x))^2+\cdots+b_n(f(x))^n+o\left((f(x))^n\right)(x\to 0)$$

根据定理8.13及定理8.12，在 $x=0$ 的邻域内 $b_0+b_1(f(x))+b_2(f(x))^2+\cdots+b_n(f(x))^n$ 有一个 n 阶限定展开式

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+o\left(x^n\right)(x\to 0).$$

另一方面，由于

$$\begin{aligned}(f(x))^n&=\left(a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+o\left(x^n\right)\right)^n\\&=x^n\left(a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}+o\left(x^{n-1}\right)\right)^n,\end{aligned}$$

故 $o\left((f(x))^n\right)=o\left(x^n\right)$，从而

$$\begin{aligned}g\circ f(x)&=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+o\left(x^n\right)+o\left(x^n\right)\\&=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+o\left(x^n\right)(x\to 0).\end{aligned}$$

因此复合函数 $g\circ f$ 在 $x=0$ 的邻域内有 n 阶限定展开式.

例题 8.14 求函数 $x\longmapsto(1+x)^x, x>-1$ 在 $x=0$ 的邻域内的 4 阶限定展开式.

令 $f(x)=x\log(1+x), x>-1, g(y)=\mathrm{e}^y, y\in\mathbb{R}$ 则

$$(1+x)^x=\mathrm{e}^{x\log(1+x)}=g\circ f(x)(x>-1),$$

并且函数 f,g 满足定理8.15的全部条件，因此函数 $x\longmapsto(1+x)^x, x>-1$ 在 $x=0$ 的邻域内有 4 阶限定展开式.

我们取

$$\begin{aligned}f(x)&=x\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)\\&=x^2\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)(x\to 0)\\g(y)&=1+y+\frac{y^2}{2}+o\left(y^2\right)(y\to 0)\end{aligned}$$

则

$$f^2(x)=x^4+o\left(x^4\right)(x\to 0)$$

从而

$$\begin{aligned}(1+x)^x&=1+\left(x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^4+o\left(x^4\right)\right)+\frac{1}{2}\left(x^4+o\left(x^4\right)\right)+o\left(f^2(x)\right)(x\to 0)\\&=1+x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{6}x^4+o\left(x^4\right)(x\to 0)\end{aligned}$$

6. 导函数的限定展开

定理 8.16

设 $I\subset\mathbb{R}$ 是任一包含 0 的开区间，函数 $f: I\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 处 $n\geqslant 2$ 次可导，并且 f 在 $x=0$ 的邻域内的 n 阶限定展开式为

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+o\left(x^n\right)(x\to 0),$$

则 f' 在 $x=0$ 的邻域内存在，并且有 $n-1$ 阶限定展开式

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_2x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+o\left(x^{n-1}\right)(x\to 0).$$

证明 因为 f 在 $x=0$ 处 n 次可导，故由定理8.15知，f 在 $x=0$ 的邻域内的 n 阶限定展开式的系数 a_k

为

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, k = 0, 1, \cdots, n.$$

由于 f 在 $x=0$ 处 $n \geqslant 2$ 次可导，故 f' 在 $x=0$ 的充分小邻域内 $n-1 \geqslant 1$ 次可导，从而由定理8.15知 f' 在 $x=0$ 的邻域内有 $n-1$ 阶限定展开式，并且

$$\begin{aligned} f'(x) =& f'(0) + \frac{f''(0)}{1!}x + \frac{f'''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + o\left(x^{n-1}\right)(x \to 0) \\ =& \frac{f'(0)}{1!} + 2 \cdot \frac{f''(0)}{2!}x + 3 \cdot \frac{f'''(0)}{3!}x^2 + \cdots + n \cdot \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n-1} + o\left(x^{n-1}\right) \\ =& a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + o\left(x^{n-1}\right)(x \to 0) \end{aligned}$$

例题 8.15 求函数 $x \longmapsto \dfrac{\cos x}{1+\sin x}, x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 在 $x=0$ 的邻域内的 3 阶限定展开式.

由于 $[\log(1+\sin x)]' = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$，故我们首先求函数 $x \longmapsto \log(1+\sin x), x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 在 $x=0$ 的邻域内的 4 阶限定展开式. 我们取

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right)(x \to 0)$$

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o\left(y^4\right)(y \to 0)$$

于是

$$\begin{aligned} \log(1+\sin x) =& \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right)^3 \\ & - \frac{1}{4}\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right)^4\right) \\ =& x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right) \\ =& x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o\left(x^4\right)(x \to 0) \end{aligned}$$

因此由定理8.16我们得到函数 $x \longmapsto \dfrac{\cos x}{1+\sin x}, x \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$ 在 $x=0$ 的邻域内的 3 阶限定展开式：

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1+\sin x} &= [\log(1+\sin x)]' \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)(x \to 0) \end{aligned}$$

注意如果只假设函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 在 I 上可导，那么即使 f 在 $x=0$ 的邻域内有 $n \geqslant 1$ 阶的限定展开式存在，我们也不能保证导函数 f' 在 $x=0$ 的邻域也有 $n-1$ 阶的限定展开式存在.

例如，考虑函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 如下：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

显然 f 在 $\mathbb{R}$ 上可导，并且在 $x=0$ 的邻域内有 1 阶限定展开式

$$f(x) = o(x)(x \to 0).$$

但导函数 f' 在 $x=0$ 的邻域内并没有 0 阶限定展开式存在，因为 $f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, x \neq 0, f'(0) = 0$. 在 $x=0$ 处不连续.

同样，对于如下定义的函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，

$$g(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\sin\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

易知 g 在 $\mathbb{R}$ 上可导，并且在 $x=0$ 的邻域内有任意 $n\geqslant 0$ 阶的限定展开式

$$g(x)=o\left(x^n\right)(x\to 0)$$

但它的导函数 g' 在 $x=0$ 处不连续，故 g' 在 $x=0$ 的邻域内不存在任何阶的限定展开式.

7. 原函数的限定展开

定理 8.17

设 $I\subset\mathbb{R}$ 是任一包含 0 的开区间，$f:I\to\mathbb{R}$ 在 I 上是 $C^n(n\geqslant 1)$ 类的，并且 f 在 $x=0$ 的邻域内的 n 阶限定展开式为

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+o\left(x^n\right)(x\to 0),$$

则 f 的原函数 $x\longmapsto F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, x\in I$ 在 $x=0$ 的邻域内有 $n+1$ 阶限定展开式，并且

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+o\left(x^{n+1}\right)\quad(x\to 0)$$

证明 因为 f 在 I 上是 C^n 类的，故原函数 F 在 I 上是 C^{n+1} 类的，并且 $F'(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x),\forall x\in I$. 于是函数 F 在 $x=0$ 的邻域内有 $n+1$ 阶限定展开式，设它为

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{n+1}x^{n+1}+o\left(x^{n+1}\right)(x\to 0)$$

由定理8.16知

$$f(x)=F'(x)=b_1+2b_2x+3b_3x^2+\cdots+(n+1)b_{n+1}x^n+o\left(x^n\right)(x\to 0)$$

由 f 的 n 阶限定展开式的唯一性得列

$$b_1=a_0,b_2=\frac{a_1}{2},b_3=\frac{a_2}{3},\cdots,b_{n+1}=\frac{a_n}{n+1}.$$

由于 $F(0)=0$，故 $b_0=0$，因此最后我们得到

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+o\left(x^{n+1}\right)\quad(x\to 0)$$

例题 8.16 求反正弦、反余弦函数 $x\longmapsto\arcsin x, x\longmapsto\arccos x,\in(-1,1)$ 在 $x=0$ 的邻域内的 $2n+1$ 阶限定展开式.

由于 $\arcsin x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t,\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$，而 $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ 在 $t=0$ 的邻域内的 $2n$ 阶限定展开式为：

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=1+\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{8}t^4+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}t^{2n}+o\left(t^{2n+1}\right)\quad(t\to 0),$$

故由定理8.17，我们得到

$$\left.\begin{aligned}\arcsin x&=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{3}{8}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+1}\right),\\ \arccos x&=\frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{3}{8}\cdot\frac{x^5}{5}-\cdots-\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+1}\right).\end{aligned}\right.\quad(x\to 0)$$

例题 8.17 求反正切、反余切函数 $x\longmapsto\arctan x, x\longmapsto\operatorname{arccot}x, x\in\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 的邻域内的 $2n+1$ 阶

限定展开式.

由于

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t, \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

而 $\frac{1}{1+t^2}$ 在 $t=0$ 的邻域内的 $2n$ 阶限定展开式为

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^n t^{2n} + o\left(t^{2n}\right) (t \to 0),$$

故由定理8.17, 我们得到

$$\begin{aligned}\arctan x =& x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right),\\ \operatorname{arccot} x =& \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right), (x \to 0).\end{aligned}$$

习题 8.3

1. 直接按定义求下列各函数 $x \mapsto f(x)$, $x \in X$ 在 $x=1$ 的邻域内的 3 阶限定展开式:

   1) $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^8$　　2) $f(x) = \sqrt{x}$

   3) $f(x) = x^x - 1$　　4) $f(x) = \log x$

2. 利用 Taylor 公式作下列各近似计算:

   1) e 精确到 10^{-8}　　2) $\sin 1°$ 精确到 10^{-8}

   3) $\cos 9°$ 精确到 10^{-5}　　4) $\sqrt{9}$ 精确到 10^{-4}

3. 求下列各函数 f 在 $x=0$ 的邻域内的限定展开式:

   1) $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$, (4 阶)　　2) $f(x) = \operatorname{arsinh} x$, (5 阶)

   3) $f(x) = \operatorname{artanh} x$, (5 阶)　　4) $f(x) = \sin(\log(1+x))$, (4 阶)

   5) $f(x) = \sqrt{1+\tan x}$, (3 阶)　　6) $f(x) = \mathrm{e}\left(\sqrt{\cos x}\right)$, (4 阶)

   7) $f(x) = (\tan x)(\cos x)^x - \frac{x^2}{\cos^2 x}$, (7 阶)　　8) $f(x) = \exp\left(\cos(\log\cos x)\right)$, (5 阶)

4. 设函数 $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在 $x=0$ 的邻域内有 4 阶限定展开式:

$$\begin{aligned} f(x) &= x + ax^2 + bx^3 + cx^4 + o(x^4),\\ g(x) &= x + \alpha x^2 + \beta x^3 + \gamma x^4 + o(x^4).\end{aligned} \quad (x \to 0)$$

   1) 设 $F(x) = f \circ g(x) - g \circ f(x)$, 求 $F(x)$ 在 $x=0$ 邻域内的 4 阶限定展开式;

   2) 由此导出函数

$$x \mapsto \frac{\sin x}{1-\sin x} - \sin\left(\frac{x}{1-x}\right), x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

   在 $x=0$ 邻域内的 4 阶限定展开式.

5. 试求函数

$$x \mapsto \frac{1}{(1+\tan x)\cos^2 x}, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

   在 $x=0$ 的邻域内的 4 阶限定展开式.

6. 试求函数 $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{1+t^2+t^4}\mathrm{d}t$ 在 $x=0$ 的邻域内的 5 阶限定展开式.

7. 设 $f(x)=\cos x-\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}, a,b\in\mathbb{R}$, $a>0$. 确定常数 a,b, 使得 $f(x)$ 当 $x\to 0$ 时是尽可能高阶的无穷小.
8. 设 $f(x)=\tan x$, 利用微分关系
$$f'(x)=1+f^2(x), x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$
求 $\tan x$ 在 $x=0$ 邻域内的 8 阶限定展开式.
9. 设
$$f(x)=\operatorname{artanh}(\operatorname{arsinh}x)-\operatorname{arsinh}(\operatorname{artanh}x), x\in\mathbb{R}.$$
试求 $f(x)$ 在 $x=0$ 邻域内的 7 阶限定展开式:
   1) 令 $g(u)=\operatorname{artanh}u$, 利用 $g'(u)=\dfrac{1}{1-u^2}$, 求 $g(u)$ 在 $u=0$ 邻域内的 7 阶展开式;
   2) 令 $h(v)=\operatorname{arsinh}v$, 利用 $h'(v)=\dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}}$, 求 $h(v)$ 在 $v=0$ 邻域内的 7 阶展开式;
   3) 由此导出 f 在 $x=0$ 的邻域内的 7 阶限定展开式.

8.4 函数限定展开的推广

前面我们研究的函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 在聚点 x_0 的邻域内的限定展开有两个方面的限制:
1. $x_0\in X$,
2. 限于展开为多项式函数.

在实际问题中, 有时我们还要考虑函数 f 在聚点 $x_0\notin X$ 的邻城内按其他函数的展开. 因此下面我们对函数限定展开作三个方面的推广.

1. 限定展开的第一个推广

设 $X\subset\mathbb{R}$ 是一非空集合. $x_0\in\mathbb{R}$ 是 X 的聚点, 但 $x_0\notin X$. 函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 满足条件:
1. f 是 $\langle x_0,\infty\rangle$ 型无穷大,
2. 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)^n f(x)=A\in\mathbb{R}$,
3. 函数
$$x\longmapsto F(x)=\begin{cases}(x-x_0)^n f(x), & x\in X\\ A, & x=x_0\end{cases}$$
在 x_0 的邻域内有 $m>n$ 阶的限定展开式:
$$F(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_m(x-x_0)^m+o\left((x-x_0)^m\right)(x\to x_0).$$

这时, $\forall x\in X$ 我们有
$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{a_0}{(x-x_0)^n}+\frac{a_1}{(x-x_0)^{n-1}}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x-x_0}+a_n\\&+a_{n+1}(x-x_0)+\cdots+a_m(x-x_0)^{m-n}\\&+o\left((x-x_0)^{m-n}\right)(x\to x_0).\end{aligned}$$
此式通常称为函数 f 在 x_0 的邻域内的 $m-n$ 阶的广义限定展开式.

例题 8.18 考虑函数 $x\longmapsto\cot x, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 在 $x=0$ 的邻域内 3 阶广义限定展开式.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\cot x=+\infty$, 并且

$$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^6\right)}(x\to 0)$$

所以

$$\begin{aligned}x\cot x&=\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o\left(x^5\right)}\\&=1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{45}+o\left(x^4\right)(x\to 0)\end{aligned}$$

因此函数 $x\longmapsto\cot x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 在 $x=0$ 的邻域内的 3 阶广义限定展开式为

$$\cot x=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}+o\left(x^3\right)(x\to 0).$$

例题 8.19 求函数 $x\longmapsto\dfrac{1}{\sin x}, x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})-\{0\}$ 在 $x=0$ 的邻域内的 3 阶广义限定展开式.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sin x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{\sin x}=-\infty$, 并且

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)(x\to 0),$$

所以

$$\begin{aligned}x\frac{1}{\sin x}&=\frac{x}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^6\right)}=\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o\left(x^4\right)}\\&=1+\frac{x^2}{6}+\frac{7x^4}{360}+o\left(x^4\right)(x\to 0)\end{aligned}$$

因此

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}+\frac{x}{6}+\frac{7x^3}{360}+o\left(x^3\right)(x\to 0).$$

此即为函数 $x\longmapsto\dfrac{1}{\sin x}, x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})-\{0\}$ 在 $x=0$ 的邻域内的 3 阶广义限定展开式.

2. 限定展开的第二个推广

设 $X\subset\mathbb{R}$ 是任一非空集合, $+\infty$ 或 $-\infty$ 为 X 的无穷远聚点, $f:X\to\mathbb{R}$ 是任一函数.

为了研究函数 f 在无穷远处的性态, 我们可以先作变元替换 $x=\dfrac{1}{y}$, 则 $y\to 0^+$ 或 0^-. 然后与出 $F(y)=f\left(\dfrac{1}{y}\right)$ 在 $y=0$ 的邻域内的广义限定展开式:

$$F(y)=\frac{a_0}{y^n}+\frac{a_1}{y^{n-1}}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{y}+a_n+a_{n+1}y+\cdots+a_{n+m}y^m+o\left(y^m\right)(y\to 0),$$

返回到原变元 x 得到

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n+\frac{a_{n+1}}{x}+\cdots+\frac{a_{n+m}}{x^m}+o\left(\frac{1}{x^m}\right)(x\to\pm\infty)$$

此展开式称为函数 f 在无穷远 $+\infty$ 或 $-\infty$ 的邻域内的 m 阶广义限定展开式.

例题 8.20 研究函数 $x\longmapsto\dfrac{1}{x-1}, x\neq 1$ 在无穷远 $+\infty$ 或 $-\infty$ 的邻域内的广义限定展开式.

由于

$$\frac{1}{x-1}=\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}(x\neq -1),$$

故若令 $\frac{1}{x}=y$, 则我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1}=\frac{y}{1-y}&=y\left(1+y+y^2+\cdots+y^n+o\left(y^n\right)\right)(y\to 0)\\&=y+y^2+y^3+\cdots+y^{n+1}+o\left(y^{n+1}\right)(y\to 0)\\&=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots+\frac{1}{x^{n+1}}+o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)(x\to\pm\infty).\end{aligned}$$

此即为函数 $x\longmapsto\frac{1}{x-1}, x\neq 1$ 在 $+\infty$ 或 $-\infty$ 邻域内的 $n+1$ 阶广义限定展开式.

例题 8.21 研究函数 $x\mapsto f(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t, x\in\mathbb{R}$ 在 $+\infty$ 邻域内 10 阶广义限定展开式.

令 $\frac{1}{x}=y$, 则

$$\begin{aligned}F(y)=f\left(\frac{1}{y}\right)&=\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{y^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t=-\int_y^{y^2}\frac{1}{\sqrt{1+z^4}}\mathrm{d}z\\&=-f(y)\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}f'(y)&=\frac{2y}{\sqrt{1+y^8}}-\frac{1}{\sqrt{1+y^4}}\\&=2y\left(1-\frac{1}{2}y^8+o\left(y^8\right)\right)-\left(1-\frac{1}{2}y^4+\frac{3}{8}y^8+o\left(y^8\right)\right)\\&=-1+2y+\frac{1}{2}y^4-\frac{3}{8}y^8-y^9+o\left(y^9\right)\left(y\to 0^+\right)\end{aligned}$$

故由定理8.17我们得到

$$f(y)=-y+y^2+\frac{1}{10}y^5-\frac{1}{24}y^9-\frac{1}{10}y^{10}+o\left(y^{10}\right)\left(y\to 0^+\right)$$

因此函数 $x\longmapsto f(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t, x\in\mathbb{R}$ 在 $+\infty$ 邻域内的 10 阶广义限定展开式为

$$\begin{aligned}f(x)&=-f\left(\frac{1}{x}\right)\\&=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{10x^5}+\frac{1}{24x^9}+\frac{1}{10x^{10}}+o\left(\frac{1}{x^{10}}\right)(x\to+\infty)\end{aligned}$$

3. 限定展开的第三个推广

前面我们研究的函数限定展开是按 ($x\to x_0$) 的整数次幂函数进行有限展开. 现在我们研究函数按 $x^p(\log x)^q$ 型函数的有限展开.

首先我们对无穷小 $\{x^p(\log x)^q\}\left(x\to 0^+\right)$ 的顺序证明下述引理.

引理 8.1

$\forall p, p'\in\mathbb{N}, q, q'\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, 若 $p>p'$ 或 $p=p', q<q'$, 则我们有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^p(\log x)^q}{x^{p'}(\log x)^{q'}}=0$$

证明 令

$$y=\frac{x^p(\log x)^q}{x^{p'}(\log x)^{q'}}=x^{p-p'}(\log x)^{q-q'}$$

1. 若 $p > p'$：则 $p - p' > 0$, 显然当 $q - q' \leqslant 0$ 时，$y \to 0(x \to 0^+)$, 当 $q - q' > 0$ 时，由于
$$y^{\frac{1}{q-q'}} = x^{\frac{p-p'}{q-q'}} \log x \to 0\left(x \to 0^+\right),$$
故必有 $y \to 0\left(x \to 0^+\right)$.
2. 若 $p = p', q < q'$：这时 $y = (\log x)^{q-q'} \to 0\left(x \to 0^+\right)$.

根据此引理，当 $p > p'$ 或 $p = p', q < q'$ 时，
$$x^p (\log x)^q = o\left(x^{p'} (\log x)^{q'}\right)\left(x \to 0^+\right)$$
因此无穷小 $\{x^p (\log x)^q\}_{p\in\mathbb{N};\quad q\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ 可按下列顺序排列：
$$\cdots x(\log x)^3, x(\log x)^2, x(\log x), x$$
$$\cdots x^2(\log x)^3, x^2(\log x)^2, x^2(\log x), x^2$$
$$\cdots x^3(\log x)^3, x^3(\log x)^2, x^3(\log x), x^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因此，对给定函数 f 在 $x = 0$ 的邻域内按无穷小 $\{x^p (\log x)^q\}$ 进行有限展开时，我们将按上述顺序进行排列.

例题 8.22 研究函数 $x \longmapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x \log x}, x > 0$ 在 $x = 0$ 的邻域内按 $\{x^p (\log x)^q\}$ 的广义限定展开，精确到 x^3.

令 $y = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x \log x}$, 则
$$\begin{aligned}
y &= x \log x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\
&= x \log x[\log(1 + x) - \log x] \\
&= -x \log^2 x + x \log x\left(x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) \\
&= -x \log^2 x + x^2 \log x - \frac{x^3}{2} \log x + x \log x o\left(x^2\right)\left(x \to 0^+\right)
\end{aligned}$$
因此
$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x \log x} x =& e^y \\
=& 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o\left(y^3\right)(y \to 0) \\
=& 1 + \left[-x \log^2 x + x^2 \log x - \frac{x^3}{2} \log x + o\left(x^3 \log^6 x\right)\right] \\
&+ \frac{1}{2}\left[-x \log^2 x + x^2 \log x - \frac{x^3}{2} \log x + o\left(x^3 \log^6 x\right)\right]^2 \\
&+ \frac{1}{6}\left[-x \log^2 x + x^2 \log x - \frac{x^3}{2} \log x + o\left(x^3 \log^6 x\right)\right]^3 \\
&+ o\left(\left[-x \log 2x + x^2 \log x - \frac{x^3}{2} \log x + o\left(x^3 \log 6x\right)\right]^3\right)\left(x \to 0^+\right)
\end{aligned}$$

根据引理，我们有

$$\frac{x^3}{2}\log x = o\left(x^3\log^6 x\right), x^3\log^3 x = o\left(x^3\log^6 x\right)\ (x\to 0^+)$$

$$\frac{1}{2}\left[-x\log^2 x + x^2\log x - \frac{x^3}{2}\log x + o\left(x^3\log x\right)\right]^2$$
$$= \frac{1}{2}x^2\log^4 x + o\left(x^3\log^6 x\right)\ (x\to 0^+)$$

$$\frac{1}{6}\left[-x(\log x)^2 + x^2\log x - \frac{x^8}{2}\log x + o\left(x^8\log x\right)\right]^3$$
$$= -\frac{1}{6}x^3(\log x)^6 + o\left(x^3\log^6 x\right)\ (x\to 0^+)$$

因此

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\log x} = 1 - x\log^2 x + \frac{1}{2}x^2\log^4 x + x^2\log x - \frac{1}{6}x^3\log^6 x + o\left(x^3\log^6 x\right)\ (x\to 0^+)$$

✍ 习 题 8.4

1. 求函数 $x\mapsto (x-1)\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}, x>0$ 在 $x\to+\infty$ 邻域内的 3 阶广义限定展开式.
2. 求函数 $x\mapsto \dfrac{1}{1-\cos x}, x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})-\{0\}$ 在 $x=0$ 邻域内的 4 阶广义限定展开式.
3. 求函数 $x\mapsto x-x^2\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right), x>0$ 在 $x\to+\infty$ 邻域内的 2 阶广义限定展开式，并证明：
$$\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$
4. 求函数 $x\mapsto \dfrac{x^3+2}{x-1}, x\neq 1$ 在 $x\to+\infty$ 邻域内的 3 阶广义限定展开式.
5. 求函数 $x\mapsto x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-\sqrt{2}x\right)$ 在 $x\to+\infty$ 邻域内的 2 阶广义限定展开式.
6. 设 $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt[n]{x^3+\lambda x^2}(\lambda\in\mathbb{R})$. 试确定常数 λ，使得 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, 并写出 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 邻域内的 2 阶广义限定展开式.
7. 求函数 $x\mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}, x>0$ 在 $x\to+\infty$ 邻域内的 3 阶广义限定展开式.
8. 求函数 $x\mapsto\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 在 $x=0$ 的邻域内按 $\{x^{-p}(\log x)^q \mid p,q\in\mathbb{N}\}$ 展开的广义限定展开式，精确到 x^3 .

8.5 函数限定展开的应用

这里我们主要介绍函数限定展开的三个方面的应用.

1. 函数不定型极限的计算

函数的限定展开是计算函数不定型极限的一个非常有效的方法.

设函数 $f,g: X\to\mathbb{R}$ 在 $x=0\in X$ 处满足下列条件：

1. f 在 $x=0$ 处 n 次可导，并且 $f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0, f^{(n)}(0)\neq 0$；
2. g 在 $x=0$ 处 m 次可导，并且 $g(0)=g'(0)=g''(0)=\cdots=g^{(m-1)}(0)=0, g^{(m)}(0)\neq 0.$

那么 f, g 在 $x=0$ 的邻域内的限定展开式为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o\left(x^n\right) \\ g(x) &= \frac{g^{(m)}(0)}{m!}x^m + o\left(x^m\right) \end{aligned} \quad (x \to 0)$$

因此 $f(x) \sim \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, g(x) \sim \dfrac{g^{(m)}(0)}{m!}x^m (x \to 0)$. 从而

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}{\frac{g^{(m)}(0)}{m!}x^m} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{若 } n > m, \\ \dfrac{f^{(n)}(0)}{g^{(n)}(0)}, & \text{若 } n = m, \\ \langle 0, \infty\rangle \text{ 型无穷大}, & \text{若 } n < m. \end{cases} \end{aligned}$$

例题 8.23 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

因为

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^2\sin^2 x},$$

而

$$\begin{aligned} x + \sin x &= x + \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) (x \to 0), \\ x - \sin x &= x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) (x \to 0), \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^2\sin^2 x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\left[2x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right]\left[\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right]}{x^2\sin^2 x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4 + o\left(x^4\right)}{x^2\sin^2 x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4}{x^2\cdot x^2} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

例题 8.24 计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(1+x)^{\frac{\log x}{x}} - x}{x\left(x^x - 1\right)}$.

因为

$$\begin{aligned}
x\left(x^x-1\right) &= x\left(\mathrm{e}^{x\log x}-1\right)\\
&= x\left[x\log x+\frac{1}{2}x^2(\log x)^2+o\left(x^2\log^2 x\right)\right]\\
&= x^2\log x+o\left(x^2\log^2 x\right)\ \left(x\to 0^+\right)\\
(1+x)^{\frac{\log x}{x}}-x &= \mathrm{e}^{\frac{\log x}{x}\log(1+x)}-x\\
&= \mathrm{e}^{(\log x)\left[1-\frac{x}{2}+o(x)\right]}-x\\
&= x\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x\log x+(\log x)o(x)}\right]-x\\
&= -\frac{1}{2}x^2\log x+o\left(x^2\log^2 x\right)\ \left(x\to 0^+\right)
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+}\frac{(1+x)^{\frac{\log x}{x}}-x}{x\left(x^x-1\right)} &= \lim_{x\to 0+}\frac{-\frac{1}{2}x^2\log x+o\left(x^2\log^2 x\right)}{x^2\log x+o\left(x^2\log^2 x\right)}\\
&= \lim_{x\to 0+}\frac{-\frac{1}{2}x^2\log x}{x^2\log x}\\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

对于 $x\to\pm\infty$ 时的不定型极限，也可以用函数限定展开的方法进行计算.

例题 8.25 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}-x^{\frac{1}{x}}\right](x\log x)^2}{x^{x^{\frac{1}{x}}}-x}$.

因为

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{1}{x}}-x^{\frac{1}{x}} &= x^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}-x^{\frac{1}{x}}\\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\log x}\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1\right]\\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\log x}\left[\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+o\left(\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\right]\\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\log x}\left[\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right](x\to+\infty)\\
&\sim \frac{1}{x^2}(x\to+\infty),
\end{aligned}$$

所以

$$\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}-x^{\frac{1}{x}}\right](x\log x)^2\sim\frac{1}{x^2}\cdot x^2\log^2 x=\log^2 x$$

$$(x\to+\infty).$$

又因为

$$
\begin{aligned}
x^{x^{\frac{1}{x}}}-x &= x\left[x^{x^{\frac{1}{x}}-1}-1\right] \\
&= x\left[\mathrm{e}^{\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)\log x}-1\right] \\
&= x\left[\mathrm{e}^{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\log x}-1\right)\log x}-1\right] \\
&= x\left[\mathrm{e}^{\log x\left(\frac{\log x}{x}+o\left(\frac{\log x}{x}\right)\right)}-1\right] \\
&= x\left[\mathrm{e}^{\frac{\log^2 x}{x}+o\left(\frac{\log^2 x}{x}\right)}-1\right] \\
&= x\left[\frac{\log^2 x}{x}+o\left(\frac{\log^2 x}{x}\right)\right] \\
&\sim \log^2 x(x\to+\infty),
\end{aligned}
$$

因此我们得到

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}-x^{\frac{1}{x}}\right](x\log x)^2}{x^{x^{\frac{1}{x}}}-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log^2 x}{\log^2 x}=1
$$

2. 函数局部极值的研究

定义 8.5

设 $X\subset\mathbb{R}$ 是任一非空集合，$f:X\to\mathbb{R}$ 是任一函数. $a\in X$ 是任一固定点.

1. 我们称函数 f 在 a 处取局部极大 (小) 值，如果

$$\exists\delta>0,\forall x\in X\cap B(a,\delta)\Longrightarrow f(x)\leqslant f(a)(f(x)\geqslant f(a)).$$

这时 a 称为 f 的局部极大 (小) 值点.

2. 我们称函数 f 在 a 处取严格局部极大 (小) 值，如果

$$\exists\delta>0,\forall x\in X\cap \mathring{B}(a,\delta)\Longrightarrow f(x)<f(a)(f(x)>f(a)).$$

这时 a 称为 f 的严格局部极大 (小) 值点.

3. 函数 f 的局部极大与极小值点统称为 f 的局部极值点. f 在局部极值点所取的函数值称为 f 的局部极值.

♣

从上述定义可知，若 a 是 X 的孤立点，则 a 既是 f 的局部极大值点，又是 f 的局部极小值点. 显然，这种孤立局部极值点毫无意义. 因此今后我们要研究的是 X 中为聚点的局部极值点.

定理 8.18 (极值点的必要条件)

若函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 有局部极值点 $a\in X$，并且 a 是 X 的聚点，则

1. a 是非双侧聚点.
2. 或 a 是双侧聚点，这时下述情形有并且只有一种成立：
   i) f 在 a 处不可导
   ii) f 在 a 处可导，并且 $f'(a)=0$

♡

证明 若 a 是非双侧聚点，则结论 1) 成立. 于是我们设 a 是 X 的双侧聚点.

若 f 在 a 处不可导. 则定理证毕.

若 f 在 a 处可导. 我们来证明必有 $f'(a)=0$.

不妨设 a 是 f 的局部极大值点. 于是

$$f'(a)=f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant 0$$
$$f'(a)=f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant 0$$

因此 $f'(a)=0$.

同理可证 a 是局部极小值点的情形.

注 由上述定理可知, f 的局部极值点只可能存在于下述三种类型的点之中:

1. X 的非双侧的聚点. 特别地当 X 是若干区间的并时, 属于 X 的子区间的左或右端点;
2. f 的不可导点;
3. $f'(x)=0$ 的零点.

这三种 (不一定都是互不包含的) 类型的点统称为函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 的局部极值可疑点.

下面的三个例子表明这些类型的局部极值可疑点可以不是局部极值点.

例题 8.26 考虑函数

$$x\longmapsto f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$x=0$ 是 f 的定义域 $\mathbb{R}^+$ 的右侧聚点. f 在 $x=0$ 处可导, $f'(0)=0$, 但 $x=0$ 不是 f 的局部极值点.

例题 8.27 考虑符号函数 $x\longmapsto \operatorname{sgn}(x), x\in\mathbb{R}$.

$x=0$ 是此符号函数的不可导点, 但 $x=0$ 不是它的局部极值点.

例题 8.28 考虑函数 $x\longmapsto f(x)=x^3, x\in\mathbb{R}$.

$x=0$ 是 f 的定义域 $\mathbb{R}$ 的双侧聚点, 并且 f 在 $x=0$ 处可导, $f'(0)=0$, 但 $x=0$ 也不是 f 的局部极值点.

因此定理8.18的条件不是极值的充分条件.

定理 8.19 (极值点的充分条件)

设 $I\subset\mathbb{R}$ 是一非空区间, $a\in I$. 假设函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 在 a 处连续, 并且在 $I\cap\mathring{B}(a,\delta)$ 上可导.

1. a 是 I 的右端点,
   若 $f'(x)>0(<0)\forall x\in\mathring{B}_-(a,\delta)\cap I$, 则 a 是 f 的严格局部极大 (小) 值点.
2. a 是 I 的左端点,
   若 $f'(x)<0(>0)\forall x\in\mathring{B}_+(a,\delta)\cap I$, 则 a 是 f 的严格局部极大 (小) 值点.
3. a 是 I 的内点,

$$若\ f'(x)\begin{cases}>0, & \forall x\in\mathring{B}_+(a,\delta)\cap I\\ <0, & \forall x\in\mathring{B}_-(a,\delta)\cap I\end{cases}$$

$$\left(f'(x)\begin{cases}<0, & \forall x\in\mathring{B}_+(a,\delta)\cap I\\ >0, & \forall x\in\mathring{B}_-(a,\delta)\cap I\end{cases}\right)$$

则 a 是 f 的严格局部极小 (大) 值点.

若 $f'(x)>0, \forall x\in\mathring{B}(a,\delta)\cap I$; 或 $f'(x)<0, \forall x\in\mathring{B}(a,\delta)\cap I$, 则 a 不是 f 的局部极值点.

证明 1) 因为 a 是 I 的右端点，所以存在 $\delta>0$ 使得

$$I\cap\mathring{B}_{+}(a,\delta)=\varnothing, I\cap\mathring{B}_{-}(a,\delta)\subset I.$$

若 $f'(x)>0(<0),\forall x\in\mathring{B}_{-}(a,\delta)\cap I$, 则由 Lagrange 中值定理知，$\forall x\in I\cap B_{-}(a,\delta)$,

$$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a),\xi\in(x,a).$$

由假设 $f'(\xi)>0(<0)$ 推得 $f(x)-f(a)<0(>0)$ 或

$$f(x)<f(a)(f(x)>f(a)),\forall x\in I\cap\mathring{B}_{-}(a,\delta),$$

因此 a 是 f 的严格局部极大 (小) 值点.

同理可证结论 2). 结合结论 1) 与 2) 的讨论可知结论 3) 成立.

例题 8.29 考虑如下定义的函数 f ：

$$x\longmapsto f(x)=\begin{cases}\left|x^2\sin\dfrac{1}{x}\right|, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

它的图形 (图8.1) 是由函数 $x\longmapsto F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的位于 x 轴上方的图形部分与位于 x 轴下方的图形关于 x 轴的对称图形所组成.

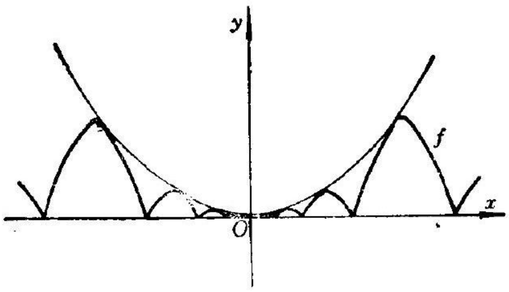

图 8.1

下面我们研究此函数 f 的局部极值点.

1) f 的定义域 $\mathbb{R}$ 无非双侧聚点.

2) f 的不可导点 (只可能是 $f(x)=0$ 的点):

设 $x\neq 0$, 由 $f(x)=0$ 或 $x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$ 得到 $x=\dfrac{1}{k\pi}(k\neq 0)$.

对 $x=\dfrac{1}{2k\pi}$ ：由于

$$\begin{aligned}f'_{+}\left(\frac{1}{2k\pi}\right)&=\lim_{x\to\frac{1}{2k\pi}^{+}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2k\pi}\right)}{x-\frac{1}{2k\pi}}\\&=\lim_{x\to\frac{1}{2k\pi}^{+}}\frac{-x^2\sin\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{2k\pi}}\\&=\lim_{x\to\frac{1}{2k\pi}^{+}}\left(-2x\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)\\&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_-\left(\frac{1}{2k\pi}\right) &= \lim_{x\to\frac{1}{2k\pi}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2k\pi}\right)}{x - \frac{1}{2k\pi}} \\ &= \lim_{x\to\frac{1}{2k\pi}^-} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x - \frac{1}{2k\pi}} \\ &= \lim_{x\to\frac{1}{2k\pi}^-} \left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

故 $x = \dfrac{1}{2k\pi}$ 是 f 的不可导点.

对 $x = \dfrac{1}{(2k+1)\pi}$：同理可证 $x = \dfrac{1}{(2k+1)\pi}$ 也是 f 的不可导点.

由于 $f'(0) = 0$, 故 f 的全部不可导点为 $\dfrac{1}{k\pi}(k \in \mathbb{Z} - \{0\})$. 因为 $f(x) \geqslant 0$, 故这些不可导点都是 f 的严格局部极小值点.

3) $f'(x) = 0$ 的点：

因为 $f'(0) = 0$. 并且 $f(0) = 0$, 故 $x = 0$ 是 f 的局部极小值点.

对 $x \neq 0$, 由

$$0 = F'(x) = \left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)' = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

得到 $\tan\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x}$. 此方程在 $\left(-\dfrac{2}{\pi}, \dfrac{2}{\pi}\right)$ 上无解，在每一个区间 $\left(\dfrac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}, \dfrac{1}{k\pi-\frac{\pi}{2}}\right)(k\in\mathbb{Z}, k\neq 0)$ 上存在唯一的解 x_k .

函数 F 在 x_k 处或取正的严格局部极大值，或在 x_k 处取负的严格局部极小值.

因此 $x_k(k \neq 0)$ 是 f 的严格局部极大值点.

上面的定理8.19是利用函数的一阶导数来研究函数的局部极值点的存在性. 如果函数有更高阶的导数存在，则我们有下述局部极值点的判断准则，即定理8.20 .

定理 8.20

设 $X \subset \mathbb{R}$ 是任一非空集合，$x_0 \in X$ 是一聚点. 函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 在 x_0 处 n 次可导，并且满足条件：

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

1. n 为偶数：若 $f^{(n)}(x_0) > 0$, 则 x_0 是 f 的严格局部极小值点；若 $f^{(n)}(x_0) < 0$, 则 x_0 是 f 的严格局部极大值点.
2. n 为奇数：x_0 不是局部极值点 (参见图8.2).

证明 因为 f 在 x_0 处 n 次可导，故 f 在 x_0 的邻域内有 n 阶限定展开式

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \\ & + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)(x\to x_0) \end{aligned}$$

由假设 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$ 得到

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)(x\to x_0),$$

或

$$f(x)-f\left(x_0\right)=\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n[1+o(1)]\left(x \rightarrow x_0\right).$$

由此可知，存在 $\delta>0$，在 $X \cap \mathring{B}\left(x_0, \delta\right)$ 内，$f(x)-f\left(x_0\right)$ 与 $\dfrac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n$ 同号.

1. n 为偶数：若 $f^{(n)}\left(x_0\right)>0$，则 $\dfrac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n>0, \forall x \in X \cap \mathring{B}\left(x_0, \delta\right)$，从而 $f(x)>f\left(x_0\right), \forall x \in X \cap \mathring{B}\left(x_0, \delta\right)$. 因此 x_0 是 f 的严格局部极小值点；若 $f^{(n)}\left(x_0\right)<0$，则
$$\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n<0, \forall x \in X \cap B\left(x_0, \delta\right),$$
从而 $f(x)<f\left(x_0\right), \forall x \in X \cap \mathring{B}\left(x_0, \delta\right)$，因此 x_0 是 f 的严格局部极大值点.
2. n 为奇数：这时当 $f^{(n)}\left(x_0\right)>0$ 时
$$\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n\begin{cases}>0, & \forall x \in X \cap \mathring{B}_{+}\left(x_0, \delta\right); \\ <0, & \forall x \in X \cap \mathring{B}_{-}\left(x_0, \delta\right).\end{cases}$$
因此 x_0 不是局部极值点. 当 $f^n\left(x_0\right)<0$ 时，类似可证，x_0 也不是 f 的局部极值点.

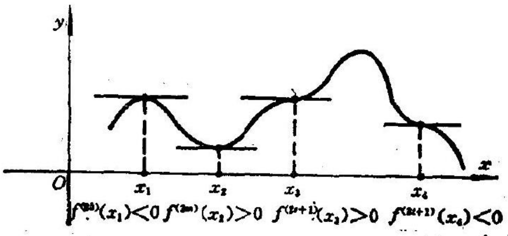

图 8.2

例题 8.30 指出正弦函数 $x \longmapsto \sin x, x \in \mathbb{R}$ 的全部局部极值点及相应的局部极值.

由于 $(\sin x)^{\prime}=\cos x, \forall x \in \mathbb{R}$，故由 $\cos x=0$ 解得
$$x_n=n \pi+\frac{\pi}{2}(n \in \mathbb{Z}).$$
另一方面，由于 $(\sin x)^{\prime \prime}=-\sin x$，并且
$$\begin{aligned}(\sin x)^{\prime \prime}\left(x_n\right) & =-\sin x_n=-\sin \left(n \pi+\frac{\pi}{2}\right) \\ & =(-1)^{n+1}\begin{cases}>0, & n=2k+1; \\ <0, & n=2k,\end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$
因此根据定理8.20知，正弦函数 $x \longmapsto \sin x, x \in \mathbb{R}$ 的全部局部极值点为 $x_n=n \pi+\dfrac{\pi}{2}(n \in \mathbb{Z})$，并且 $x_{2k+1}=(2k+1) \pi+\dfrac{\pi}{2}(k \in \mathbb{Z})$ 是严格局部极小值点，其极小值为 -1，而 $x_{2k}=2k \pi+\dfrac{\pi}{2}(k \in \mathbb{Z})$ 是严格局部极大值点，其极大值为 1.

例题 8.31 研究函数
$$x \longmapsto f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x=0\end{cases}$$
的局部极值点.

由于 $f^{\prime}(x)=\dfrac{2}{x^3} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, \forall x \neq 0$，故 f 在 $\mathbb{R}-\{0\}$ 上没有局部极值点.

对 $x=0$, 因我们在第 6 章 § 2 的例 6.16 中已证

$$f^{(n)}(0)=0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

故对 $x=0$, 定理 8.20不适用. 然而由于

$$f(x)>f(0)=0, \forall x \neq 0,$$

故直接由定义知, $x=0$ 是此函数的严格局部极小值点, 其极小值为 0 .

3. 函数图形的研究

1) 函数图形的局部形态

定理 8.21

设 $x \subset \mathbb{R}$ 是任一非空集合, $x_0 \in I$. 函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 在 x_0 处 n 次可导, 并且满足条件:

$$f''\left(x_0\right)=f'''\left(x_0\right)=\cdots=f^{(n-1)}\left(x_0\right)=0, f^{(n)}\left(x_0\right) \neq 0.$$

1. n 为偶数: 若 $f^{(n)}\left(x_0\right)>0(<0)$, 则 f 的曲线在点 $\left(x_0, f(x_0)\right)$ 的附近位于曲线过此点的切线的上 (下) 方.
2. n 为奇数: 则 f 的曲线在点 $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ 的附近位于该点切线的两侧, 此时称 f 的曲线在点 $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ 处与该点的切线横截相交.

证明 因为 f 在 x_0 处 n 次可导, 并且

$$f''\left(x_0\right)=f''\left(x_0\right)=\cdots=f^{(n-1)}\left(x_0\right)=0, f^{(n)}\left(x_0\right) \neq 0,$$

所以 f 在 x_0 的邻域内的 n 阶限定展开式为

$$f(x)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n+o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)\left(x \rightarrow x_0\right)$$

因此

$$f(x)-\left[f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)\right]=\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n[1+o(1)]\left(x \rightarrow x_0\right)$$

由此可知, 存在 $\delta>0$ 使得 $\forall x \in X \cap \mathring{B}\left(x_0, \delta\right)$, $f(x)-\left[f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)\right]$ 与 $\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n$ 同号.

1. n 为偶数: 若 $f^{(n)}\left(x_0\right)>0$, 则 $f(x)-\left[f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\ \left(x-x_0\right)\right]>0, \forall x \in X \cap \mathring{B}\left(x_0, \delta\right)$. 由于
$$y=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$$
正好是函数 f 的曲线在点 $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ 处的切线 T 的方程, 故上述不等式表明在点 $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ 的附近, f 的曲线位于切线 T 的上方.
若 $f^{(n)}\left(x_0\right)<0$, 则 $f(x)-\left[f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)\right]<0, \forall x \in X \cap \mathring{B}\left(x_0, \delta\right)$.
因此在点 $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ 的附近, f 的曲线位于切线 T 的下方.
2. n 为奇数: 这时若 $f^{(n)}\left(x_0\right)>0(<0)$, 则
$$f(x)-\left[f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)\right]\left\{\begin{array}{l}>0(<0), \forall x \in X \cap \mathring{B}_{+}\left(x_0, \delta\right) ; \\ <0(>0), \forall x \in X \cap \mathring{B}_{-}\left(x_0, \delta\right)\end{array}\right.$$
因此在 x_0 的右侧, f 的曲线位于切线 T 的上 (下) 方, 而在 x_0 的左侧, f 的曲线位于切线 T 的下 (上) 方. 故 f 的曲线在点 ($x_0, f\left(x_0\right)$) 处与切线 T 横截相交.

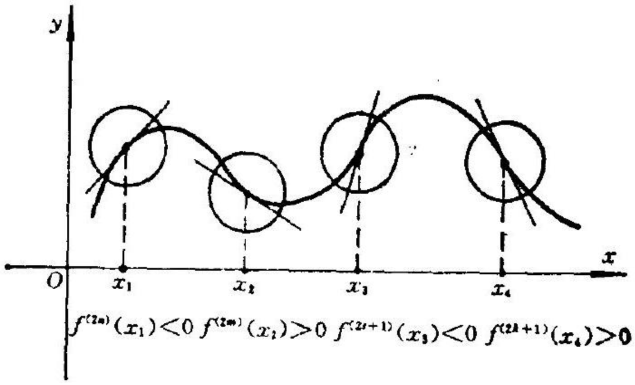

图 8.3

2) 函数图形的无穷远分支的形态

在第 5 章 §4 我们定义了函数图形的渐近线. 现在我们利用

函数的广义限定展开可以确定函数图形的无穷远分支的渐近线及无穷远分支与渐近线之间的相互位置关系.

例如, 设函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 在 $x = \pm\infty$ 邻域内有下述形式的广义限定展开式:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) (x \to \pm\infty).$$

1. 若 $a_1 = 0$, 则由 $f(x) - a_0 \to 0 (x \to \pm\infty)$, 知无穷远分支 $\Gamma_{+\infty}$ 或 $\Gamma_{-\infty}$ 有水平渐近线 $y = a_0$.
2. 若 $a_1 \neq 0$, 则由 $f(x) - [a_0 + a_1 x] \to 0 (x \to \pm\infty)$ 知无穷远分支 $\Gamma_{+\infty}$ 或 $\Gamma_{-\infty}$ 有斜渐近线 $y = a_0 + a_1 x$.

在 $\pm\infty$ 邻域内, 若 $\frac{a_2}{x} > 0 (< 0)$, 则无穷远分支在渐近线 $y = a_0 + a_1 x$ 的上 (下) 方.

例题 8.32 研究函数 $x \longmapsto f(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 + x^2}, x \in \mathbb{R}$ 的无穷远分支的渐近线.

首先我们考虑 $x \to +\infty$ 时的无穷远分支 $\Gamma_{+\infty}$

令 $y = \frac{1}{x}$. 则

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt[4]{\frac{1}{y^4} + \frac{1}{y^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{y^3} + \frac{1}{y^2}} \\
&= \frac{1}{y}\left(\sqrt[4]{1 + y^2} - \sqrt[3]{1 + y}\right) \\
&= \frac{1}{y}\left[1 + \frac{1}{4}y^2 + o\left(y^2\right) - 1 - \frac{1}{3}y + \frac{1}{9}y^2 + o\left(y^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{y}\left[-\frac{1}{3}y + \frac{13}{36}y^2 + o\left(y^2\right)\right] \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{13}{36}y + o(y) \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{13}{36}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) (x \to +\infty).
\end{aligned}$$

由此可知 f 当 $x \to +\infty$ 的无穷远分支 $\Gamma_{+\infty}$ 有水平渐近线 $y = -\frac{1}{3}$, 并且由于在 $+\infty$ 邻域内 $\frac{13}{36}\frac{1}{x} > 0$, 故此无穷远分支位于渐近线 $y = -\frac{1}{3}$ 的上方.

对于 $x \to -\infty$ 的无穷远分支 $\Gamma_{-\infty}$, 由于

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt[4]{\frac{1}{y^4}+\frac{1}{y^2}} - \sqrt[n]{\frac{1}{y^3}+\frac{1}{y^2}} \\
&= -\frac{1}{y}\left(\sqrt[4]{1+y^2}+\sqrt[n]{1+y}\right) \\
&= -\frac{1}{y}\left[1+\frac{1}{4}y^2+o\left(y^2\right)+1+\frac{1}{3}y-\frac{1}{9}y^2+o\left(y^2\right)\right] \\
&= -\frac{1}{y}\left[2+\frac{1}{3}y+\frac{5}{36}y^2+o\left(y^2\right)\right] \\
&= -\frac{1}{3}-2x-\frac{5}{36}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\ (x \to -\infty)
\end{aligned}$$

故 f 当 $x \to -\infty$ 的无穷远分支 $\Gamma_{-\infty}$ 有斜渐近线 $y=-\frac{1}{3}-2x$, 并且由于在 $-\infty$ 邻域内 $-\frac{5}{36}\frac{1}{x}>0$, 故此无穷远分支位于渐近线 $y=-\frac{1}{3}-2x$ 的上方.

3) 函数图形的可延展性

有时出现这种情形：f 在 a 处没有定义, 但经过适当的延拓后所得新函数 $\tilde{f}$ 不仅在点 a 处连续, 而且在点 a 处可导.

例题 8.33 研究函数 $x \longmapsto f(x)=\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{x}, x \neq 0$ 在 $x=0$ 处的可延拓性.

利用 e^x 在 $x=0$ 的邻域内的限定展开式, 我们有

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-\mathrm{e}^x}{x\left(\mathrm{e}^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x(x+o(x))}=-\frac{1}{2}$$

若令

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq 0; \\ -\dfrac{1}{2}, & x=0; \end{cases}$$

则函数 $\widetilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 处连续, 并且在 $x=0$ 处可导. 事实上,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\widetilde{f}(x)-\widetilde{f}(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\frac{1}{2}}{x} \\
=&\lim_{x\to 0}\frac{2+x+(x-2)\mathrm{e}^x}{2x^2\left(\mathrm{e}^x-1\right)} \\
=&\lim_{x\to 0}\frac{2+x+(x-2)\left[1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right]}{2x^2[x+o(x)]} \\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)}{2x^3+o\left(x^3\right)} \\
=&\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

因此 $\widetilde{f}$ 在 $x=0$ 处可导, 并且 $\widetilde{f}'(0)=\frac{1}{12}$.

最后我们总结上述研究, 给出函数作图的步骤.

4) 函数作图的具体步骤

1. 确定 f 的定义域 X . 通常 X 是由若干个开区间组成.
2. 计算 $f'(x), f''(x), x\in X$, 并确定 f', f'' 的符号变化区间, 从而确定 f 的单调性区间及凸凹性区间.

3. 确定 f 的无穷远分支、渐近线及其相互位置.
4. 确定 f 在其定义域 X 的每一个开子区间端点的可延拓性.
 5) 列出 $f(x), f'(x), f''(x)$ 的变化表格.
 6) 最后两出 f 的简图.

例题 8.34 画出函数 $x \longmapsto f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}$ 的图形.

1. f 的定义域 $X = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.
2. 计算 $f'(x)$ 及 $f''(x)$.
   直接计算得到
$$f'(x) = \frac{x-2}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}, f''(x) = \frac{1}{(x-1)^3}\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}$$
   由此可知:
$$\forall x \in (-\infty, 1), f'(x) > 0, f''(x) < 0$$
   因此 f 在此区间上单调上升, 并且是凹的.
   $\forall x \in (1, 2), f'(x) < 0, f''(x) > 0.$. 因此 f 在此区间上单调下降, 并且是凸的.
   $\forall x \in (2, +\infty), f'(x) > 0, f''(x) > 0$. 因此 f 在此区间上单调上升, 并且是凸的.
   当 $x = 2$ 时, $f'(2) = 0$
3. 确定 f 的无穷远分支及渐近线.
   因为
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x-1^-} (x-1)\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}} = \lim_{x\to 1^-} \mathrm{e}(x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}} = 0, \\
&\lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1)\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} \mathrm{e}(x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}} = +\infty, \\
&\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (x-1)\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}} = \pm\infty,
\end{aligned}$$
   所以 f 当 $x \to 1^+$ 及当 $x \to \pm\infty$ 时有无穷远分支 $\Gamma_{1^+}, \Gamma_{\pm\infty}$.
   当 $x \to 1^+$ 的 f 的无穷远分支 Γ_1+ 有垂直渐近线 $x = 1$.
   为了研究当 $x \to \pm\infty$ 时 f 的无穷远分支的渐近线, 我们对 f 在 $\pm\infty$ 邻域内作广义的限定展开.
$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}(x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}} \\
&= \mathrm{e}(x-1)\left[1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} + o\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)\right] (x \to \pm\infty) \\
&= \mathrm{e}x + \frac{\mathrm{e}}{2(x-1)} + o\left(\frac{1}{x-1}\right) (x \to \pm\infty)
\end{aligned}$$
   由此可知当 $x \to \pm\infty$ 时 f 的无穷远分支 $\Gamma_{\pm\infty}$ 有斜渐近线 $y = \mathrm{e}x$, 并且由于在 $+\infty$ 邻域内 $\frac{\mathrm{e}}{2(x-1)} > 0$, 故此无穷远分支 $\Gamma_{+\infty}$ 位于渐近线 $y = \mathrm{e}x$ 的上方, 而由于在 $-\infty$ 邻域内 $\frac{\mathrm{e}}{2(x-1)} < 0$, 故当 $x \to -\infty$ 时的无穷远分支 $\Gamma_{-\infty}$ 位于渐近线 $y = \mathrm{e}x$ 的下方.
4. 研究 f 在 $x = 1$ 处可延拓性.
   因为
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0, \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty,$$

所以 f 在 $(-\infty,1)$ 上可连续延拓到 $x=1$, 令

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(-\infty,1);\\ 0, & x=1\end{cases}$$

则

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\widetilde{f}(x)-\widetilde{f}(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}=0$$

因此 f 在 $x=1$ 处可导, 并且 $f'(1)=0$, 从而 f 的图形在 $x=1$ 处有切线 $y=0$.

5. 列出 $f(x),f'(x),f''(x)$ 的变化表格.

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	e^2	$\nearrow$
$f''(x)$	$-$		$+$		$+$

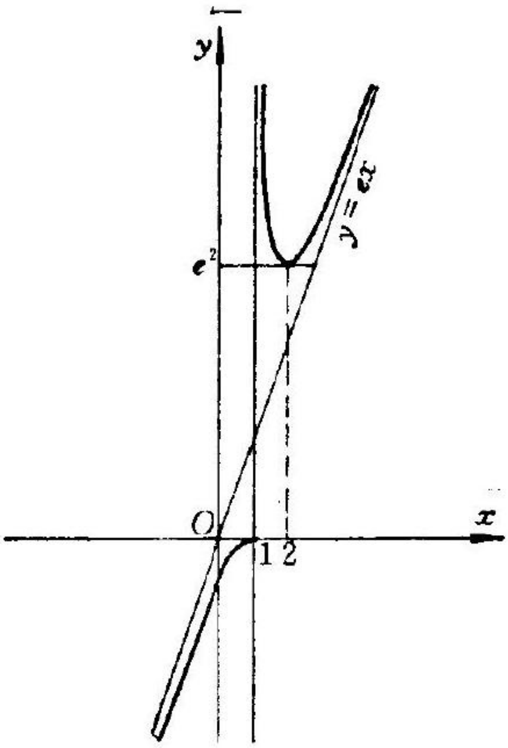

图 8.4

习 题 8.5

1. 计算下列各极限值：

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\tan^2 x}$　　2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\arctan x}{x\sin^2 x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\mathrm{e}^x)\sin x}{x^2+x^3}$　　4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{\frac{1}{\cos x}}\log\dfrac{2x}{\pi}$　　6) $\lim\limits_{x\to 0+}(\cos x)^{\frac{1}{x^a}}$, $(a\geqslant 0)$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\log\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$　　8) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\log x)^2\left[\sin\dfrac{1}{\log x}-\sin\dfrac{1}{\log(x+1)}\right]$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{x-\frac{1}{x}}-x}{(\log x)^2}$　　10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^7}\tan^8 x\left[(\cos x)^{x^2}-1\right]$

11) $\lim\limits_{x\to e}(\log x-1)\log|x-\mathrm{e}|$　　12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{1-\frac{x}{2}}}{(1+\tan x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{1-\frac{x}{2}}}$

13）确定常数 a，使得 $\lim\limits_{x\to 0}x^a\left[\dfrac{(\sinh\sqrt[n]{x})^3-x}{\sqrt[8]{\sinh x^3}-x}\right]=A\neq 0$.

2. 求下列各函数 f 的局部极值点与相应的局部极值：

1) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$　　2) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

3) $f(x)=x^x$　　4) $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x-1}{x^2}}$

5) $f(x)=\sqrt[n]{x^3-3x+2}$　　6) $f(x)=(1+\tan x)^{\cot x}$

3. 试求函数

$$x\longmapsto f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0;\\ x+1, & x\leqslant 0\end{cases}$$

的局部极值点与局部极值.

4. 设 $n,m\in\mathbb{N},a>0$，试确定函数

$$x\longmapsto f(x)=x^n\cdot(a-x)^m,\quad x\in\mathbb{R}$$

的局部极值点与局部极值，并画出图形.

5. 试找出 Riemann 函数

$$x\longmapsto R(x)=\begin{cases}0, & x\in(0,1)\cap\mathbb{Q}^c;\\ \dfrac{1}{p}, & x\in(0,1]\cap\mathbb{Q},x=\dfrac{q}{p},p,q\ \text{互质};\\ 1, & x=0\end{cases}$$

的全部严格局部极大值点.

6. 设 $a_i\in\mathbb{R}(i=1,2,\ldots,n)$.

1) 求函数 $x\longmapsto f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)^2$, $x\in\mathbb{R}$ 的局部极小值；

2) 求函数 $x\longmapsto f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}|x-a_i|^2$, $x\in\mathbb{R}$ 的局部极小值；

3) 求函数 $x\longmapsto f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i|x-a_i|$, $x\in\mathbb{R}$ 的局部极小值，其中 $\lambda_i>0(i=1,2,\ldots,n)$.

7. 设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上连续, 并且 $[a,b]$ 中的每一点 x 都是 f 的局部极大值点. 证明 f 是常值函数.
8. 试反证法及区间套定理证明：不可能存在一个函数 $f:I\to\mathbb{R}$(其中 $I\subset\mathbb{R}$ 是一区间), 使得 I 的每一点都是 f 的严格局部极大值点.
9. 求函数 $f(x)=x^3-3x$, $x\in\mathbb{R}$ 在集合 $E=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x^4+36\leqslant 13x^2\right\}$ 上的最大值.
10. 画出下列各函数 f 的图形：

$$1)\ f(x)=x^2\arctan\frac{1}{1+x}\qquad 2)\ f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$$

$$3)\ f(x)=x+\sqrt{x^2+1}\qquad 4)\ f(x)=\frac{\log|x-2|}{\log|x|}$$

第九章 广义积分

在第 5 章中我们研究的一元实值函数 f 的 Riemann 积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 有两方面的限制：一是 $[a,b]$ 为有限闭区间；二是函数 f 在 $[a,b]$ 上有界. 这一章我们取消这些限制，介绍函数的广义积分.

9.1 广义积分的定义

1. $\int_c^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 型广义积分

设 $c\in\mathbb{R}, c<b\leqslant+\infty$，假设函数 $f:[c,b)\to\mathbb{R}$ 满足下述条件：

1. f 在 $[c,b)$ 的任一有限闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上可积，
2. 当 $b<+\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\pm\infty$(这时 b 称为 f 的奇点或瑕点)

于是 $\forall d\in[c,b)$，积分 $\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$ 存在. 我们定义函数 $F:[c,b)\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\forall d\in[c,b), F(d)=\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$$

定义 9.1

设函数 $f:[c,b)\to\mathbb{R}$ 满足上面的条件，则 f 在 $[c,b)$ 上的广义积分，记为 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$，定义为：

1. $\int_c^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 存在 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{d\to b^-}F(d)=\lim\limits_{d\to b^-}\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$ 存在 (有限或 $\pm\infty$)，并且这时，
$$\int_c^{b^-} f(x)\mathrm{d}x\triangleq\lim_{d\to b^-}\int_c^d f(x)\mathrm{d}x;$$
2. $\int_c^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{d\to b^-}\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$ 有限；
3. $\int_c^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{d\to b^-}\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$ 不存在或 $\pm\infty$.

♣

从几何意义上来看，

$b=+\infty$：广义积分 $\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 就是平面上由 x 轴、直线 $x=c$ 及函数 $f:[c,+\infty)\to\mathbb{R}$ 的曲线 Γ 所围的向右无限伸展的平面图形 G 的“面积”.

若 $\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 G 的“面积”存在且有限

若 $\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 G 的“面积”存在但为正无穷大或负无穷大，或根本没有“面积”.

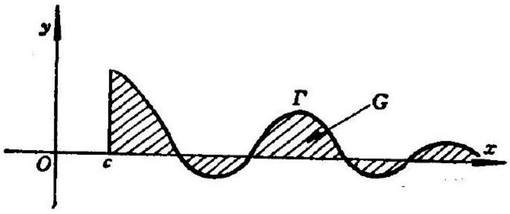

图 9.1

$b<+\infty$：广义积分 $\int_c^{b-} f(x)\mathrm{d}x$ 就是平面上由 x 轴、直线 $x=c$ 与 $x=b$ 及函数 $f:[c,b)\to\mathbb{R}$ 的曲线 Γ 所围的向正 y 轴方向无限伸展的平面图形 G 的 "面积"(这里我们假设 $\lim\limits_{d\to b^-} f(x)=+\infty$).

若 $\int_c^{b-} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 G 的 "面积" 存在且有限.

若 $\int_c^{b-} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 G 的 "面积" 存在但为正无穷大或负无穷大，或根本没有 "面积".

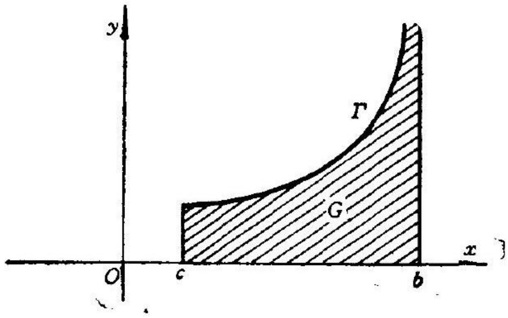

图 9.2

例题 9.1 考虑广义积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

函数 $x\longmapsto \mathrm{e}^{-x}, x\in[0,+\infty)$ 连续，并且

$$\lim_{d\to+\infty}\int_0^d \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\lim_{d\to+\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-d}\right)=1$$

因此广义积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛，并且

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1$$

例题 9.2 考虑广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

函数 $x\longmapsto \frac{1}{x}, x\in[1,+\infty)$ 连续，并且

$$\lim_{d\to+\infty}\int_1^d \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{d\to+\infty}\log d=+\infty$$

故广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散，但有值

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x=+\infty$$

例题 9.3 考虑广义积分 $\int_0^{+\infty} \cos x \mathrm{d}x$.

函数 $x \longmapsto \cos x, x \in [0, +\infty)$ 连续，并且

$$\lim_{d\to+\infty} \int_0^d \cos x \mathrm{d}x = \lim_{d\to+\infty} \sin d \text{ 不存在,}$$

故广义积分 $\int_0^{+\infty} \cos x \mathrm{d}x$ 不存在，从而 $\int_0^{+\infty} \cos x \mathrm{d}x$ 发散.

例题 9.4 考虑广义积分 $\int_0^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{1-} \frac{1}{1-x} \mathrm{d}x$.

这里两个函数 $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}, x \mapsto \frac{1}{1-x}, x \in [0, 1)$ 都连续，$x = 1$ 是 f 的奇点，并且

$$\lim_{c\to1^-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x = \lim_{c\to1^-} [-2\sqrt{1-x}]_0^c = 2 - \lim_{c\to1^-} 2\sqrt{1-c} = 2$$

$$\lim_{c\to1^-} \int_0^c \frac{1}{1-x} \mathrm{d}x = \lim_{c\to1^-} [-\log(1-x)]_0^c = -\lim_{c\to1^-} \log(1-c) = +\infty$$

因此广义积分 $\int_0^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x$ 收敛，而广义积分 $\int_0^{1-} \frac{1}{1-x} \mathrm{d}x$ 发散，并且

$$\int_0^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x = 2, \int_0^{1-} \frac{1}{1-x} \mathrm{d}x = +\infty$$

2. $\int_{a+}^c f(x) \mathrm{d}x$ 型广义积分

设 $-\infty \leqslant a < c < +\infty$，函数 $f : (a, c] \longrightarrow \mathbb{R}$ 满足下述条件：

1. f 在 $(a, c]$ 的任一有限闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上可积,
2. 当 $a > -\infty$ 时，$\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$(这时 a 称为 f 的奇点或瑕点).

这时，我们可以仿照 1，类似地定义 f 在 $(a, c]$ 上的广义积分 $\int_{a+}^c f(x) \mathrm{d}x$ 为：

$\int_{a+}^c f(x) \mathrm{d}x$ 存在 $\Longleftrightarrow \lim_{d\to a+} \int_d^c f(x) \mathrm{d}x$ 存在 (有限或 $\pm\infty$) 并且这时

$$\int_{a+}^c f(x) \mathrm{d}x \triangleq \lim_{d\to a+} \int_d^c f(x) \mathrm{d}x,$$

$\int_{a+}^c f(x) \mathrm{d}x$ 收敛 $\Longleftrightarrow \lim_{d\to a+} \int_d^c f(x) \mathrm{d}x$ 有限,

$\int_{a+}^c f(x) \mathrm{d}x$ 发散 $\Longleftrightarrow \lim_{d\to a+} \int_d^c f(x) \mathrm{d}x$ 不存在或为 $\pm\infty$.

例题 9.5 考虑广义积分 $\int_{0+}^1 \log x \mathrm{d}x$.

这里函数 $x \longmapsto \log x, x \in (0, 1]$ 连续，$x = 0$ 是它的唯一奇点，由于

$$\lim_{d\to0+} \int_d^1 \log x \mathrm{d}x = \lim_{d\to0+} \left([x \log x]_d^1 - \int_d^1 \mathrm{d}x \right) = -1$$

故广义积分 $\int_{0+}^1 \log x \mathrm{d}x$ 收敛，其值

$$\int_{0+}^1 \log x \mathrm{d}x = -1$$

例题 9.6 考虑广义积分 $\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x$.

这里函数 $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\cos x, x \in (-\infty, 0]$ 连续. $\forall d < 0$, 直接计算得到

$$\int_{d}^{0} \mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-d}(-\sin d + \cos d) - \frac{1}{2}$$

由此可知, 极限 $\lim\limits_{d\to-\infty}\int_{d}^{0} \mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x$ 不存在, 因此广义积分 $\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x$ 不存在, 从而发散.

3. $\int_{a+}^{b-} f(x)\mathrm{d}x$ 型广义积分

设 $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, 假设函数 $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ 满足下述条件:

1. f 在 (a, b) 的任一有限闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上可积,
2. 当 $a > -\infty, b < +\infty$ 时, $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \pm\infty$(即 a, b 是 f 的奇点或瑕点).

现在我们假设对某一 $c \in (a, b)$, 广义积分之和 $\int_{a+}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{b-} f(x)\mathrm{d}x \in \overline{\mathbb{R}}$. 于是由定义可推知下面两个简单结论成立:

1. $\forall c' \in (a, b)$, $\int_{a+}^{c'} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c'}^{b-} f(x)\mathrm{d}x \in \overline{\mathbb{R}}$,
2. $\int_{a+}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{b-} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a+}^{c'} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c'}^{b-} f(x)\mathrm{d}x$.

2) 式表明 $\int_{a+}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{b-} f(x)\mathrm{d}x$ 的值与 c 的选择无关, 因此我们引入下述定义.

定义 9.2

设函数 $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ 满足上面所述条件, 则 f 在 (a, b) 上的广义积分, 记为 $\int_{a+}^{b-} f(x)\mathrm{d}x$, 定义为:

1. $\int_{a+}^{b-} f(x)\mathrm{d}x$ 存在 $\Leftrightarrow$ 对某一 $c \in (a, b)$, $\int_{a+}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{b-} f(x)\mathrm{d}x$ 是有限实数或 $\pm\infty$. 并且这时
$$\int_{a+}^{b-} f(x)\mathrm{d}x \triangleq \int_{a+}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{b-} f(x)\mathrm{d}x$$
2. $\int_{a+}^{b-} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 对某一 $c \in (a, b)$, $\int_{a+}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{c}^{b-} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.
3. $\int_{a+}^{b-} f(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Longleftrightarrow$ 对某一 $c \in (a, b)$, $\int_{a+}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{c}^{b-} f(x)\mathrm{d}x$ 中至少有一个发散. 特别地, 若 $\int_{a+}^{c} f(x)\mathrm{d}x = +\infty(-\infty)$, $\int_{c}^{b-} f(x)\mathrm{d}x = -\infty(+\infty)$; 或 $\int_{a+}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{c}^{b-} f(x)\mathrm{d}x$ 中有一个不存在, 则我们称 $\int_{a+}^{b-} f(x)\mathrm{d}x$ 不存在.

♣

例题 9.7 考虑广义积分 $\int_{-1^+}^{1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

这里函数 $x\longmapsto\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x\in(-1,1)$ 连续，并且 $x=\pm1$ 是它的两个奇点. 由于

$$\begin{aligned}&\lim_{d\to-1^+}\int_d^0\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\lim_{d'\to1^-}\int_0^{d'}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\=&\lim_{d\to-1^+}(-\arcsin d)+\lim_{d'\to1^-}\left(\arcsin d'\right)\\=&\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\\=&\pi\end{aligned}$$

故广义积分 $\int_{-1^+}^{1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 收敛，并且

$$\int_{-1^+}^{1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\pi$$

例题 9.8 考虑广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

这里函数 $x\longmapsto\frac{1+x}{1+x^2}, x\in(-\infty,+\infty)$ 连续，由于

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x&=\lim_{d\to+\infty}\int_0^d\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\lim_{d\to+\infty}\left([\arctan x]_0^d+\frac{1}{2}\left[\log\left(1+x^2\right)\right]_0^d\right)\\&=\lim_{d\to+\infty}\left(\arctan d+\frac{1}{2}\log\left(1+d^2\right)\right)\\&=+\infty\end{aligned}$$

故广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 发散，并且由于

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x&=\lim_{c\to-\infty}\int_c^0\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\lim_{c\to-\infty}\left([\arctan x]_c^0+\frac{1}{2}\left[\log\left(1+x^2\right)\right]_c^0\right)\\&=\lim_{c\to-\infty}\left(-\arctan c-\frac{1}{2}\log\left(1+c^2\right)\right)=-\infty\end{aligned}$$

故广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 实际上不存在.

注 如果我们在例9.8的第 2 个积分 $\int_{-\infty}^0\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 计算过程中取 $c=-d$ ，并与第一个积分的极限计算过程合并在一起，则出现下述情形：

$$\begin{aligned}&\lim_{d\to+\infty}\left(\int_{-d}^0\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^d\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)\\=&\lim_{d\to+\infty}\left([\arctan x]_{-d}^d+\frac{1}{2}\left[\log\left(1+x^2\right)\right]_{-d}^d\right)\\=&\lim_{d\to+\infty}2\arctan d=\pi.\end{aligned}$$

由此似乎应推得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \pi$$

其实不然，因为根据广义积分 $\int_{a+}^{b-} f(x)\mathrm{d}x$ 的定义，

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{0} \frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \lim_{d\to+\infty}\int_{0}^{d} \frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

的右边 $c \to -\infty$ 与 $d \to +\infty$ 是两个完全独立的极限过程，而在上面我们的计算 $\lim\limits_{d\to+\infty}\left(\int_{-d}^{0} \frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{d} \frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)$ 中，已经通过令 $c = -d$ 而化为 $d \to +\infty$ 的一个极限过程，从而出现两种截然不同的结果.

为了区别这种情形，我们特作下述定义.

定义 9.3

对于广义积分 $\int_{a+}^{b-} f(x)\mathrm{d}x$，

1. 若 $a = -\infty, b = +\infty$：则 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的 Cauchy 广义积分主值，记为 $(C)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，定义为：

$$(C)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{d\to+\infty}\int_{-d}^{d} f(x)\mathrm{d}x$$

2. 若 $a > -\infty, b < +\infty$：则 f 在 (a, b) 上的 Cauchy 广义积分主值，记为 $(C)\int_{a+}^{b-} f(x)\mathrm{d}x$，定义为：

$$(C)\int_{a+}^{b-} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to0+}\int_{a+\eta}^{b-\eta} f(x)\mathrm{d}x$$

♣

由上述定义可知，若广义积分 $\int_{a+}^{b-} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛则它的值就是 Cauchy 广义积分主值 $(C)\int_{a+}^{b-} f(x)\mathrm{d}x$. 于是我们有

$$\int_{-1^-}^{1^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = (C)\int_{-1^-}^{1^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \pi,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x \text{ 发散，但 } (C)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \pi.$$

注 如果出现下述形式的两个广义积分：

$$\int_{a}^{c-} f(x)\mathrm{d}x, \int_{c+}^{b} f(x)\mathrm{d}x (\text{ 这里 } a > -\infty, b < +\infty, c \in \mathbb{R})$$

则它们的和 $\int_{a}^{c-} f(x) + \int_{c+}^{b} f(x)\mathrm{d}x$，记为 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$，自然应作如下规定：

1. 广义积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 存在 $\Longleftrightarrow \int_{a}^{c-} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 为有限实数或 $\pm\infty$，并且这时

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \triangleq \int_{a}^{c-} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

2. 广义积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Longleftrightarrow \int_{a}^{c-} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{c+}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

3. 广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散 $\Longleftrightarrow$ $\int_a^{c^-} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{c^+}^b f(x)\mathrm{d}x$ 中至少有一个发散.
4. 广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的 Cauchy 广义积分主值

$$(C)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \triangleq \lim_{\eta\to 0^+}\left(\int_a^{c-\eta} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\eta}^b f(x)\mathrm{d}x\right)$$

此外, 我们还可以将这种广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 推广到 f 在 (a,b) 上有有限个奇点的情形上去. 具体的叙述留给读者.

例题 9.9 考虑广义积分 $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}\mathrm{d}x$.

这里函数 $x\longmapsto \frac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}, x\in[0,2]-\{1\}$ 连续, 并且 $x=1$ 是它的唯一奇点, 由于

$$\int_0^{1^-}\frac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}\mathrm{d}x=\lim_{c\to 1^-}\int_0^c\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=1$$

$$\int_{1^+}^2\frac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}\mathrm{d}x=\lim_{d\to 1^+}\int_d^2\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\sqrt{3}$$

故广义积分 $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}\mathrm{d}x$ 收敛, 并且

$$\begin{aligned}\int_0^2\frac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}\mathrm{d}x&=\int_0^{1^-}\frac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}\mathrm{d}x+\int_{1^+}^2\frac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}\\&=1+\sqrt{3}\end{aligned}$$

例题 9.10 考虑广义积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

此函数 $x\longmapsto \frac{1}{x}, x\in[-1,1]-\{0\}$ 连续, $x=0$ 是它的唯一奇点. 由于

$$\int_{-1}^{0^-}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{c\to 0^-}\int_{-1}^c\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\infty$$

$$\int_{0^+}^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{d\to 0^+}\int_d^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x=+\infty$$

故广义积分 $\int_{-1}^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 不存在, 但是它的 Cauchy 广义积分主值

$$(C)\int_{-1}^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\eta}\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_\eta^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)=0$$

4. 广义积分的两个计算方法

对广义积分, 也有类似于普通 Riemann 积分的变元替换法与分部积分法. 下面我们只对 $\int_c^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 型广义积分叙述这两个计算方法, 对另外两种类型的广义积分, 读者可以自己补充.

定理 9.1 (变元替换法)

设函数 $\varphi:[\alpha,\beta)\longrightarrow\mathbb{R}$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上是 C^1 类的，$I\subset\mathbb{R}$ 是包含 $\varphi([\alpha,\beta))$ 的一个区间，函数 $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ 在 I 上连续. 那么广义积分 $\int_\alpha^{\beta^-} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ 收敛，当且仅当极限 $\lim\limits_{s\to\beta^-}\int_{\varphi(s)}^{\varphi(s)} f(x)\mathrm{d}x$ 存在并且有限. 并且这时

$$\int_\alpha^{\beta^-} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=\lim_{s\to\beta^-}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(s)} f(x)\mathrm{d}x$$

证明 设 $s\in[\alpha,\beta)$，根据定积分的变元替换法 (定理7.7推论7.2) 我们有

$$\int_\alpha^{s} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(s)} f(x)\mathrm{d}x$$

两边令 $s\to\beta^-$ 取极限即得.

例题 9.11 计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$.

令 $x=\varphi(t)=\tan t, t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. 显然 φ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上是 C^1 类的，并且 $[0,+\infty)=\varphi([0,\frac{\pi}{2}))$. 由于函数

$$x\longmapsto f(x)=\frac{\arctan x}{(1+x^2)^3}, x\in[0,+\infty)$$

在 $[0,+\infty)$ 上连续，故由上述定理知，

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x \text{ 收敛 } \Longleftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(\tan t)}{(1+\tan^2 t)^{3/2}}(\tan t)'\mathrm{d}t \text{ 收敛.}$$

这里

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(\tan t)}{(1+\tan^2 t)^{3/2}}(\tan t)'\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\mathrm{d}t$$

显然收敛，因此

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\mathrm{d}t\\&=[t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{2}-1\end{aligned}$$

定理 9.2 (分部积分法)

设函数 $u,v:[c,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ 在 $[c,b)$ 上是 C^1 类的，如果：

1. $\lim\limits_{x\to b^-} u(x)v(x)$ 存在并且有限，
2. 广义积分 $\int_c^{b^-} u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则广义积分 $\int_c^{b^-} u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ 也收敛，并且

$$\int_c^{b^-} u(x)v'(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to b^-}[u(x)v(x)-u(c)v(c)]-\int_c^{b^-} u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

证明 设 $d\in[c,b)$，由定积分的分部积分法 (定理7.6推论7.1) 我们有

$$\int_c^{d} u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(d)v(d)-u(c)v(c)-\int_c^{d} u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

两边令 $d \to b^-$ 取极限，由定理假设知左边极限 $\lim\limits_{d\to b^-}\int_c^d u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ 存在并且有限，故广义积分 $\int_c^{b^-} u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并且定理的等式成立.

习惯上我们把上述等式写成下述形式：

$$\int_c^{b^-} u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_c^{b^-} - \int_c^{b^-} u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

例题 9.12 计算广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\log x}{x^2}\mathrm{d}x$.

由于

$$\int_1^{+\infty}\frac{\log x}{x^2}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty}\log x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)'\mathrm{d}x$$

若令函数 $u, v : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\forall x \in [1, +\infty), u(x) = \log x, v(x) = -\frac{1}{x}.$$

则 u, v 满足分部积分法的两个条件，因此广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\log x}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，并且

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{\log x}{x^2}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{x}\log x\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)(\log x)'\mathrm{d}x\\ &= \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = 1\end{aligned}$$

5. 两个重要的广义积分

下面两个广义积分对判断一般广义积分的收敛与发散性将起着重要作用，我们把它们作为一个命题列出.

命题 9.1

对广义积分 $\int_0^1\frac{1}{x^\lambda}\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\lambda}\mathrm{d}x$ 下述结论成立：

1. $\int_0^1\frac{1}{x^\lambda}\mathrm{d}x\begin{cases}\text{收敛,} & \text{若 } \lambda < 1;\\ \text{发散,} & \text{若 } \lambda \geqslant 1.\end{cases}$
2. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\lambda}\mathrm{d}x\begin{cases}\text{收敛,} & \text{若 } \lambda > 1;\\ \text{发散,} & \text{若 } \lambda \leqslant 1.\end{cases}$

证明 直接利用定义计算这两个积分，即可验证命题成立.

最后作为这一节的结束，我们特作如下说明.

记号说明: 为了书写简单起见，今后对广义积分 $\int_c^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$, $\int_{a^+}^c f(x)\mathrm{d}x$ 及 $\int_{a^+}^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ ，如无特别指明需要，我们一律删去上标 “+” 与 “–”，读者从 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的具体形式可以明了它是普通 Riemann 积分还是广义积分.

✍ 习 题 9.1

1. 计算下列各广义积分：

$$1)\ \int_0^1 \frac{x\log x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x \qquad 2)\ \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$$

$$3)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x \qquad 4)\ \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\mathrm{d}x$$

$$5)\ \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \qquad 6)\ \int_0^{+\infty} \frac{x^3\log x}{(1+x^4)^3}\mathrm{d}x$$

2. 1) 证明：广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-2}{x^3-1}\mathrm{d}x$ 不存在；

2) 证明：广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 存在但不收敛；

3) 证明：广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

3. 计算下列各 Cauchy 广义积分主值：

$$1)\ (C)\int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x \qquad 2)\ (C)\int_0^4 \frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x$$

$$3)\ (C)\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,\mathrm{d}x \qquad 4)\ (C)\int_{1/2}^2 \frac{1}{x\log x}\mathrm{d}x$$

4. 计算广义积分：$I=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}\mathrm{d}x\,(\lambda\geqslant 0)$.

5. 计算下列各广义积分：

$$1)\ \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x}\mathrm{d}x \qquad 2)\ \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

$$3)\ \int_0^{\pi} \log(1+\cos\theta)\mathrm{d}\theta \qquad 4)\ \int_0^{+\infty} \log\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$5)\ \int_{-1}^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x \qquad 6)\ \int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt[n]{x^2(1-x)}}\mathrm{d}x$$

9.2 广义积分的收敛准则

在上一节，我们研究了三类广义积分：

$$\text{i)}\ \int_c^{b-} f(x)\mathrm{d}x,\quad \text{ii)}\ \int_{a+}^c f(x)\mathrm{d}x,\quad \text{iii)}\ \int_{a+}^{b-} f(x)\mathrm{d}x.$$

第 iii) 类广义积分 $\displaystyle\int_{a+}^{b-} f(x)\mathrm{d}x$ 实际上是第 i) 类与第 ii) 类广义积分的组合.

第 ii) 类广义积分 $\displaystyle\int_{a+}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ 可通过变元替换 $x=-y$ 化为第 i) 类广义积分. 因为我们有

$$\int_{a+}^c f(x)\mathrm{d}x=-\int_{(-a)^-}^{-c} f(-y)\mathrm{d}y=\int_{-c}^{(-a)^-} f(-y)\mathrm{d}y$$

因此要研究一般广义积分的收敛与发散性，实际上我们只需研究第 1) 类型的广义积分 $\displaystyle\int_c^{b-} f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛与发散性.

下面我们就来研究广义积分 $\int_c^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性与发散性.

1. 广义积分的一般收敛准则

定理 9.3

设 $\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{b^-} g(x)\mathrm{d}x$ 是任意两个广义积分.

1. 若 $\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{b^-} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则广义积分 $\int_a^{b^-} [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$ 也收敛，并且
$$\int_a^{b^-} [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{b^-} g(x)\mathrm{d}x.$$
2. 若 $\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$，广义积分 $\int_a^{b^-} (\lambda f)(x)\mathrm{d}x$ 也收敛，并且
$$\int_a^{b^-} (\lambda f)(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 直接由广义积分的定义及函数极限的性质推出.

定理 9.4 (Cauchy 收敛准则)

广义积分 $\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是:
$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left(\forall c, c' \in (b-\delta, b)\right) \Longrightarrow \left|\int_c^{c'} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

证明 因为广义积分 $\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当函数 $F:[a,b) \longrightarrow \mathbb{R}(\forall c \in [a,b), F(c) = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x)$ 当 $c \to b^-$ 时有有限的极限存在，而 $\forall c, c' \in (b-\delta, b)$，
$$F(c) - F\left(c'\right) = \int_c^{c'} f(x)\mathrm{d}x$$
因此上述广义积分 $\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件正好就是函数 F 当 $c \to b^-$ 的 Cauchy 收敛准则. 从而定理成立.

定理 9.5 (比较判别法)

设 $\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{b^-} g(x)\mathrm{d}x$ 是任意两个广义积分，函数 $f, g:[a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ 满足下述不等式:
$$\forall x \in [a,b), 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x).$$

1. 若 $\int_a^{b^-} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛，并且
$$\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^{b^-} g(x)\mathrm{d}x.$$
2. 若 $\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{b^-} g(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

证明 因为 $\forall x \in [a,b), 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，所以

$$\forall c \in [a,b), 0 \leqslant \int_a^c f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^c g(x)\mathrm{d}x.$$

1. 若 $\int_a^{b^-} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则由于函数 $c \longmapsto F(c) = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x (c \in [a,b))$ 关于 c 单调上升，并且
$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^c g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^{b^-} g(x)\mathrm{d}x < +\infty$$
故极限 $\lim\limits_{c \to b^-} F(c)$ 存在且有限，从而广义积分 $\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.
2. 若 $\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则由反证法及结论 1) 知，广义积分 $\int_a^{b^-} g(x)\mathrm{d}x$ 必然发散.

推论 9.1

若函数 $f, g : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ 满足条件：

$$f \geqslant 0, g \geqslant 0 \text{ 并且 } f(x) \sim g(x)\ (x \to b^-),$$

则广义积分 $\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{b^-} g(x)\mathrm{d}x$ 有相同的收敛与发散性.

证明 因为 $f(x) \sim g(x)\ (x \to b^-)$，所以存在 $B, a \leqslant B < b$ 使得

$$\frac{1}{2}g(x) \leqslant f(x) \leqslant 2g(x), \forall x \in [B,b).$$

由此不等式及上述比较判别法立即推知此推论成立.

例题 9.13 考虑广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

由于函数 $x \longmapsto \frac{\log x}{\sqrt{x}}, x \in [1,+\infty)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，并且

$$\forall x \geqslant \mathrm{e}, \frac{\log x}{\sqrt{x}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x}},$$

而广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 发散，故由比较判别法知，广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 发散.

例题 9.14 考虑广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+x+1}}\mathrm{d}x$.

函数 $x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{x^5+x+1}}, x \in [1,+\infty)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，并且. 由于 $x^5+x+1 = x^5\left(1+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}\right) \sim x^5 (x \to +\infty)$；故

$$\frac{x}{\sqrt{x^5+x+1}} \sim x \cdot x^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{x^{3/2}} (x \to +\infty).$$

广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\mathrm{d}x$ 收敛；故由上述推论知，广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+x+1}}\mathrm{d}x$ 收敛.

例题 9.15 考虑广义积分 $\displaystyle\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}\mathrm{d}x$.

$x=1$ 是此广义积分的唯一奇点. 并且

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} &= 1/\left[1-(x-1+1)^4\right]^{\frac{1}{4}} \\
&= 1/\left[4(1-x)-6(1-x)^2+4(1-x)^3-(1-x)^4\right]^{\frac{1}{4}} \\
&= 1/\left(\sqrt[4]{4}(1-x)^{\frac{1}{4}}\left[1-\frac{6}{4}(1-x)+(1-x)^2-\frac{1}{4}(1-x)^3\right]^{\frac{1}{4}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt[4]{4}(1-x)^{\frac{1}{4}}}\ (x\to 1^-)
\end{aligned}
$$

而广义积分 $\displaystyle\int_0^{1^-} \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}x$ 收敛，故广义积分 $\displaystyle\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}\mathrm{d}x$ 收敛.

例题 9.16 考虑广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\left(1+x^\beta\right)}\mathrm{d}x(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$.

$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，函数 $x\longmapsto\dfrac{1}{x^\alpha\left(1+x^\beta\right)}, x\in[1,+\infty)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续.

1)$\beta\leqslant 0$：这时

$$
\frac{1}{x^\alpha\left(1+x^\beta\right)} \sim \frac{1}{x^\alpha}(x\to+\infty)，若\ \beta<0;
$$
$$
\frac{1}{x^\alpha\left(1+x^\beta\right)} \sim \frac{1}{2x^\alpha}(x\to+\infty)，若\ \beta=0.
$$

因此广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\left(1+x^\beta\right)}\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $\alpha>1$.

2)$\beta>0$：这时

$$
\frac{1}{x^\alpha\left(1+x^\beta\right)} \sim \frac{1}{x^{\alpha+\beta}}(x\to+\infty).
$$

因此广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a\left(1+x^\beta\right)}\mathrm{d}x$ 收敛，当且仅当 $\alpha+\beta>1$.

特别地，当 $\alpha=1$ 时，$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\left(1+x^\beta\right)}\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $\beta>0$，并且这时

$$
\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\left(1+x^\beta\right)}\mathrm{d}x &= \int_1^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{x^\beta\left(1+x^\beta\right)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\beta}\int_1^{+\infty} \frac{1}{y(1+y)}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\beta}\log 2
\end{aligned}
$$

2. 广义积分的绝对收敛与条件收敛

定义 9.4

设 $\displaystyle\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 是任一广义积分.

1. 若 $\displaystyle\int_a^{b^-} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则称广义积分 $\displaystyle\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 是绝对收敛的.
2. 若 $\displaystyle\int_a^{b^-} |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散，但 $\displaystyle\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则称广义积分 $\displaystyle\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 是条件收敛的.

♣

定理 9.6

任何一个绝对收敛的广义积分 $\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的.

证明 因为 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 所以由定理9.4知,

$$
\begin{aligned}
(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(\forall c, c' \in (b-\delta, b)\right) &\Longrightarrow \left|\int_c^{c'} |f(x)|\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \\
&\Longrightarrow \left|\int_c^{c'} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

从而由同一定理知广义积分 $\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

例题 9.17 广义积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x (a > 0)$ 是绝对收敛的.

这是因为

$$
\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}, \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \ \text{收敛} \ (a > 0).
$$

例题 9.18 广义积分 $\int_0^1 \frac{\cos\left(x^2\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 是绝对收敛的.

因为

$$
\left|\frac{\cos\left(x^2\right)}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}, \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \ \text{收敛}.
$$

例题 9.19 广义积分 $\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\mathrm{d}x$ 是绝对收敛的.

因为

i) 在 $(0,1]$ 上: $\frac{\sin x}{x^{3/2}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \left(x \to 0^+\right)$, 广义积分 $\int_{0+}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛, 故广义积分 $\int_{0+}^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}}\mathrm{d}x$ 收敛.

ii) 在 $[1,+\infty)$ 上: $\left|\frac{\sin x}{x^{3/2}}\right| \leqslant \frac{1}{x^{3/2}}$. 而广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\mathrm{d}x$ 收敛, 故广义积分 $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^{3/2}}\right|\mathrm{d}x$ 收敛.

因此, 广义积分 $\int_{0+}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^{3/2}}\right|\mathrm{d}x$ 收敛, 从而原广义积分 $\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

例题 9.20 广义积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 是条件收敛的 ($a > 0$).

1) 首先证明 $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

为此由分部积分法, $\forall B \geqslant a$ 我们有

$$
\begin{aligned}
\int_a^B \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_a^B - \int_a^B \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\cos a}{a} - \frac{\cos B}{B} - \int_a^B \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

由于 $\lim\limits_{B\to+\infty}\dfrac{\cos B}{B}=0$, $\lim\limits_{B\to+\infty}\displaystyle\int_a^B\frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$ 是绝对收敛的 (见例9.17). 所以

$$\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\cos a}{a}-\lim_{B\to+\infty}\int_a^B\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

收敛.

2) 证明 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ 发散.

用反证法. 假设 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ 收敛. 那么由

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x},\ \forall x\geqslant a$$

及比较判别法知广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$ 收敛.

由于类似可证广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$ 收敛，故由定理9.3知，广义积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{2x}\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$$

应该收敛，这显然是矛盾的，因为广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散. 因此广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ 发散.

由 1)、2) 讨论知，广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 是条件收敛的.

为了确定这种非绝对收敛的广义积分的收敛性，下面我们来介绍更精细的判别法.

3. 广义积分的 Abel 与 Dirichlet 判别法

为此我们首先证明下述一般性结论.

定理 9.7

设函数 $f:[a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ 在 $[a,b)$ 上连续，函数 $g:[a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ 在 $[a,b)$ 上是 C^1 类的，并且还满足下述条件：

1. 广义积分 $\displaystyle\int_a^{b^-}|g'(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛.
2. 函数 $c\longmapsto F(c)=\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x, c\in[a,b)$ 在 $[a,b)$ 上有界.
3. $\lim\limits_{c\to b^-}g(c)F(c)$ 存在并且有限.

则广义积分 $\displaystyle\int_a^{b^-}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证明 由分部积分法，$\forall c\geqslant a$，我们得到

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)g(x)\mathrm{d}x&=\int_a^c g(x)F'(x)\mathrm{d}x\\&=[g(x)F(x)]_a^c-\int_a^c F(x)g'(x)\mathrm{d}x\\&=g(c)F(c)-g(a)F(a)-\int_a^c F(x)g'(x)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{9.1}$$

由假设 2), 存在常数 $M > 0$ 使得

$$\forall x \in [a,b), |F(x)| \leqslant M.$$

于是

$$\forall x \in [a,b), \left|F(x)g'(x)\right| \leqslant M \left|g'(x)\right|$$

而由假设 1), 积分 $\int_a^{b^-} \left|g'(x)\right| \mathrm{d}x$ 收敛, 故广义积分

$$\int_a^{b^-} \left|F(x)g'(x)\right| \mathrm{d}x = \lim_{c\to b^-} \int_a^c \left|F(x)g'(x)\right| \mathrm{d}x$$

收敛, 从而广义积分 $\int_a^{b^-} F(x)g'(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 即极限

$$\lim_{c\to b^-} \int_a^c F(x)g'(x)\mathrm{d}x \text{ 存在且有限.}$$

另一方面, 由假设 3), 极限 $\lim\limits_{c\to 0^-} g(c)F(c)$ 有限. 因此由上述式(9.1)立即推知极限

$$\lim_{a\to b^-} \int_a^a f(x)g(x)\mathrm{d}x = \lim_{c\to b^-} g(c)F(c) - g(a)F(a) - \lim_{c\to b^-} \int_a^c F(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

存在并且有限, 此即表明广义积分 $\int_a^{b^-} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

推论 9.2 (Abel 判别法)

设函数 $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a,b)$ 上连续, 函数 $g : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a,b)$ 上是 C^1 类的, 并且满足下述条件:

1. 函数 g 在 $[a,b)$ 上单调下降且有下界.
2. 广义积分 $\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

则广义积分 $\int_a^{b^-} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证明 为此我们只需验证上述定理的条件 1)、2)、3) 满足即可.

事实上, 由于 g 在 $[a,b)$ 上单调下降有下界, 所以

$$\lim_{c\to b^-} g(c) = l \in \mathbb{R}, g'(x) \leqslant 0, \forall x \in [a,b).$$

从而 $\forall c \geqslant a$,

$$\int_a^c \left|g'(x)\right| \mathrm{d}x = -\int_a^c g'(x)\mathrm{d}x = g(a) - g(c).$$

因此

$$\lim_{c\to b^-} \int_a^c \left|g'(x)\right| \mathrm{d}x = g(a) - \lim_{c\to b^-} g(c) = g(a) - l$$

此即表明广义积分 $\int_a^{b^-} \left|g'(x)\right| \mathrm{d}x$ 收敛.

其次, 由于广义积分 $\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 并且 $\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to b^-} F(c)$, 故存在 $B, a \leqslant B < b$ 使得函数 F 在 (B,b) 上有界. 而函数 F 连续, 故 F 在有界闭区间 $[a,B]$ 上有界, 从而函数 F 在 $[a,b)$ 上

有界.

最后，极限

$$\lim_{c\to b^-} g(c)F(c)=\lim_{c\to b^-} g(c)\cdot \lim_{c\to b^-} F(c)=l\int_a^{b^-} f(x)\mathrm{d}x\in\mathbb{R}.$$

因此定理9.7的条件全部满足，故广义积分 $\int_a^{b^-} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

例题 9.21 考虑广义积分 $\int_2^{+\infty}\frac{x\cos\left(x^2\right)}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

我们首先将它写成下述形式

$$\int_2^{+\infty}\frac{x\cos\left(x^2\right)}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{x^2}{x^2-1}\cdot\frac{\cos\left(x^2\right)}{x}\mathrm{d}x.$$

令 $g(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$, $f(x)=\frac{\cos\left(x^2\right)}{x}$, $\forall x\in[2,+\infty)$.

由于

$$g'(x)=\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)'=-\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}<0,\ \lim_{x\to+\infty} g(x)=1,$$

故 g 在 $[2+\infty)$ 上单调下降有下界.

另一方面，对于广义积分 $\int_2^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{\cos\left(x^2\right)}{x}\mathrm{d}x$ ，作变元替换 $x^2=y$ ，则

$$\int_2^{+\infty}\frac{\cos\left(x^2\right)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_4^{+\infty}\frac{\cos y}{y}\mathrm{d}y.$$

用类似于例9.20的方法可证广义积分 $\int_4^{+\infty}\frac{\cos y}{y}\mathrm{d}y$ 收敛，因此广义积分 $\int_2^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{\cos(x^2)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

根据 Abel 判别法知，广义积分 $\int_2^{+\infty}\frac{x\cos(x^2)}{x^2-1}\mathrm{d}x$ 收敛.

推论 9.3 (Dirichlet 判别法)

设函数 $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b)$ 上连续，函数 $g:[a,b)\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b)$ 上是 C^1 类的，并且满足下述条件：

1. 函数 g 在 $[a,b)$ 上单调下降且 $\lim_{x\to b^-} g(x)=0$.
2. 函数 $c\longmapsto F(c)=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x, c\in[a,b)$ 在 $[a,b)$ 上有界. 则广义积分 $\int_c^{b^-} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证明 与推论9.2的证明一样，我们来验证定理的条件全部满足.

事实上，因为 g 单调下降且 $\lim_{x\to b^-} g(x)=0$ ，所以

$$\lim_{c\to b^-}\int_a^c\left|g'(x)\right|\mathrm{d}x=\lim_{c\to b^-}\int_a^c -g'(x)\mathrm{d}x=g(a)-\lim_{c\to b^-} g(c)=g(a)$$

因此广义积分 $\int_a^{b^-}\left|g'(x)\right|\mathrm{d}x$ 收敛.

其次由于函数 F 在 $[a,b)$ 上有界，所以

$$\lim_{c\to b^-} g(c)F(c)=0$$

因此定理9.7的全部条件满足，故广义积分

$$\int_a^{b^-} f(x)g(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛.}$$

例题 9.22 考虑 Fresnel 积分

$$\int_0^{+\infty}\sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x \text{ 与 } \int_0^{+\infty}\cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x.$$

设 $0<c<+\infty$. 对积分 $\int_0^{+\infty}\sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x$ 作变元替换 $x^2=y$ 得到

$$\int_0^{+\infty}\sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$$

由此可知，我们只需讨论广义积分 $\int_{0+}^{+\infty}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$ 的收敛性.

对于广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$:

由于函数 $y\longmapsto g(y)=\frac{1}{\sqrt{y}}, y\in[1,+\infty)$ 在 $[1+\infty)$ 上单调下降且 $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y)=0$，而函数 $c\longmapsto F(c)=\int_1^c \sin y\mathrm{d}y(c\in[1,+\infty))$ 在 $[1,+\infty)$ 上以 2 为界，故根据 Dirichlet 判别法知，广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$ 收敛.

对于广义积分 $\int_0^1\frac{\sin y}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$:

由于 $|\frac{\sin y}{\sqrt{y}}|\leqslant\frac{1}{\sqrt{y}}, \forall y\in(0,1]$，而广义积分 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$ 收敛，故广义积分 $\int_0^1\frac{\sin y}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$ 也收敛.

因此广义积分 $\int_{0+}^{+\infty}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$ 收敛，从而 Fresnel 积分 $\int_0^{+\infty}\sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x$ 收敛

同理可证，Fresnel 积分 $\int_0^{+\infty}\cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x$ 收敛.

习 题 9.2

1. 研究下列各广义积分的收敛性：

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\log x}\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan x-1}{\sqrt{x}\sin x}\mathrm{d}x$ 4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\log(\sin x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x+\cos x}}\mathrm{d}x$

7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x}\mathrm{d}x$ 8) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}-\cos\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

2. 设 $\lambda \in \mathbb{R}$. 试讨论广义积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\lambda-1}{\log x}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

3. 设 $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos x\log(\tan x)\mathrm{d}x$.

 1) 证明广义积分 I 收敛；

 2) 计算广义积分 I. (提示作变换 $y=\sin x$).

4. 设 $\lambda \in \mathbb{R}$, $I=\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{\lambda-1}\cos x\mathrm{d}x$.

 1) 证明：$\lambda<0$，广义积分 I 绝对收敛；

 2) 由此推出广义积分 $J=\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\lambda \sin x\mathrm{d}x$ 对 $\lambda<0$ 时收敛. J 绝对收敛吗？

5. 设

$$I=\int_0^{\pi/2}\log(\sin x)\mathrm{d}x,\ J=\int_0^{\pi/2}\log(\cos x)\mathrm{d}x.$$

 1) 证明广义积分 I 与 J 收敛；

 2) 推导 I 与 J 之间的关系式, 并计算 I 与 J 的值.

6. 设 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足：

 1) $f\in C^2([0,+\infty),\mathbb{R})$；

 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_0^{+\infty}[f''(x)]^2\mathrm{d}x$ 收敛.

 试证明广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}[f'(x)]^2\mathrm{d}x$ 收敛.

7. 设 $\alpha\in\mathbb{R}_*^+$, 试讨论广义积分 $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 的绝对收敛性.

8. 设 $P(x)=\dfrac{A(x)}{B(x)}$ 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的有理函数, 并且 $B(x)>0$. 试研究广义积分

$$I=\int_a^{+\infty}P(x)\sin x\mathrm{d}x$$

 的收敛性与绝对收敛性.

 （提示：证 $\deg P=\deg A-\deg B$, 考虑以下情况：i) $\deg P\leqslant -2$, ii) $\deg P=-1$, iii) $\deg P\geqslant 0$.）

9. 设 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 在任意有限闭区间 $[a,b]\subset(0,+\infty)$ 上可积，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}_*^+$，令

$$J(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}\mathrm{d}x.$$

1) 举例说明 $J(\alpha,\beta)$ 可以发散；

2) 若 $a=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，$b=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，计算 $J(\alpha,\beta)$ 的值；

3) 若存在 $m,M\in\mathbb{R}$，使得

$$\int_0^1\frac{f(x)-m}{x}\mathrm{d}x \text{与} \int_1^{+\infty}\frac{f(x)-M}{x}\mathrm{d}x$$

收敛，计算 $J(\alpha,\beta)$ 的值；

4) 若 $a=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 且存在 $M>0$，使得

$$\forall c,d>0,\left|\int_c^d f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M,$$

计算 $J(\alpha,\beta)$ 的值；

5) 将上述结果应用到广义积分：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(2x)-\arctan x}{x}\mathrm{d}x \text{ 与 } \int_0^1\frac{x-1}{\log x}\mathrm{d}x.$$

10. 此题是要计算广义积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

的值.

1) 定义函数 $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ 如下：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2\sin x/2}, & x\in(0,\pi],\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

证明 $f\in C^1([0,\pi],\mathbb{R})$；

2) 设 $n\in\mathbb{N}$，令

$$I_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x.$$

证明：I_n 的值与 n 无关，并计算 I_n 的值；

3) 设 $\varphi\in C^1([0,\pi],\mathbb{R})$. 证明：积分

$$J_n=\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\mathrm{d}x$$

当 $n\to+\infty$ 时有极限 0 .

4) 最后计算 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 的值；

5) 利用 I 的值证明：

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4};$$

6) 对 J 用分部积分法，证明：

$$K=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2};$$

7) 应用恒等式 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, 由 K 的值证明：

$$L = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4};$$

8) 再由 L 的值证明：

$$M = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}.$$

第十章 度量空间

这一章我们介绍一般度量空间的概念, 主要是介绍四个基本空间: 赋范向量空间, 完备度量空间、紧度量空间与连通度量空间. 研究了度量空间上的点序列极限、映射的极限与连续性. 这些内容是以下各章的理论基础.

10.1 度量空间的定义

1. 概念的引入

首先我们回顾一下, 在第 2 章 §5 中我们特别指出过, $\mathbb{R}$ 上的绝对值 $|\cdot|$ 具有下面三个重要性质:

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| \geqslant 0$ 并且 $|x-y|=0 \Leftrightarrow x=y$;
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y|=|y-x|$;
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, |x-y| \leqslant |x-z|+|z-y|$.

并称实数 $|x-y|$ 为 $\mathbb{R}$ 上 x 与 y 之间的度量或距离. 实数集 $\mathbb{R}$ 连同这样一个度量称为一个实数空间.

为了能把这三个性质推广到实数集 $\mathbb{R}$ 之外的一般集合上去, 我们换一个角度来看一看上述绝对值的三个性质.

我们在乘积集合 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上定义映射 $d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$ 如下:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, d(x, y)=|x-y|.$$

显然上面所列的绝对值的三个性质就转化为非负实值函数 $d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$ 具有下述性质:

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, d(x, y) \geqslant 0$, 且 $d(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y$;
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, d(x, y)=d(y, x)$;
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, d(x, y) \leqslant d(x, z)+d(z, y)$.

这里我们利用映射 d 的形式就完全摆脱了绝对值的具体含义. 这是下面定义一般度量空间的基本构思.

定义 10.1

设 X 是任一非空集合, 若存在一个映射 $d: X\times X \to \mathbb{R}^{+}$, 它具有下述三个性质:

1. $\forall x, y \in X, d(x, y) \geqslant 0, d(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y$;
2. $\forall x, y \in X, d(x, y)=d(y, x)$;
3. $\forall x, y, z \in X, d(x, y) \leqslant d(x, z)+d(z, y)$,

则我们称 d 是 X 上的一个度量, (X, d) 称为一个度量空间.

♣

2. 几个度量空间的例子

例题 10.1 设 $X=\mathbb{R}^{n}\ (n \geqslant 1)$. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n}$, 令

$$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n), \boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots y_n).$$

我们分别定义映射 $d_1, d_2, d_3 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 如下:

$$\begin{aligned} d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}, \\ d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|, \\ d_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \cdots, |x_n - y_n|\}, \end{aligned}$$

则 d_1, d_2, d_3 都是 $\mathbb{R}^n$ 上的度量, 我们称这三个度量为 $\mathbb{R}^n$ 的基本度量 (当 $n = 1$ 时 $d_1 = d_2 = d_3$ 为绝对值度量)

由绝对值的性质验证 d_2, d_3 为 $\mathbb{R}^n$ 的度量是容易的, 我们来证明 d_1 是 $\mathbb{R}^n$ 的度量

设 $n > 1$, 度量的前两个性质

1. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqslant 0, d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ 是显然的. 现证性质
3. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n, d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqslant d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d_1(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$.

   此即等价于证明:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

这就是第 6 章 § 4 的 Minkowski 不等式.

例题 10.2 设 $X = \mathbb{C}$. 定义映射 $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ 如下:

$$\forall z, z_1 \in \mathbb{C}, d(z, z_1) = |z - z_1| (\text{复数模}).$$

则 d 是 $\mathbb{C}$ 上的一个度量, 因此 $(\mathbb{C}, d)$ 是一个度量空间.

这可由复数模的性质推出, 显然这里所定义的 $d(z, z_1)$ 就是通常复平面上两点 z 与 z_1 之间的距离.

例题 10.3 设 $X = \{z \in \mathbb{C} || z |= 1\} \triangleq S^1$.

于是 $z \in S^1$ 当且仅当 z 可表示成下述形式:

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

我们定义映射 $d : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}$ 为:

$$\forall \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \in S^1, d\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\right) = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |\beta - \alpha + 2k\pi|,$$

则 d 是 S^1 上的一个度量.

事实上,

1. $\forall \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \in S^1, d\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\right) \geqslant 0$, 并且

$$d\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\right) \geqslant 0 = 0 \Leftrightarrow \inf_{k \in \mathbb{Z}} |\beta - \alpha + 2k\pi| = 0 \Leftrightarrow \beta - \alpha = 2k_0\pi \ (k_0 \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}.$$

2. $\forall \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \in S^1, d\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\right) = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |\beta - \alpha + 2k\pi| = \inf_{k \in z} |\alpha - \beta + 2k\pi| = d\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)$.
3. $\forall \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma} \in S^1$,

$$\begin{aligned} d\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\right) &= \inf_{k \in \mathbb{Z}} |\beta - \alpha + 2k\pi| \leqslant \inf_{k \in \mathbb{Z}} |\beta - \alpha + 4k\pi| \\ &\leqslant \inf_{k \in \mathbb{Z}} |\beta - \gamma + 2k\pi| + \inf_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma - \alpha + 2k\pi| \\ &= d\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}\right) + d\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right) \\ &= d\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}\right) + d\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\right). \end{aligned}$$

从几何上来看, $d\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\right)$ 就是连结复平面的单位圆 S^1 上两点 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ 与 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ 的最短弧长.

如果我们将例10.2的复平面 $\mathbb{C}$ 上的度量 d 限制在 $S^1\times S^1$ 上, 则 $d: S^1\times S^1\to\mathbb{R}$ 也是 S^1 上的一个度量, 我们记 S^1 上的这个度量为 d , 于是 $d\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\right)$ 就是连结单位圆周 S^1 上两点 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ 与 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ 的直线距离

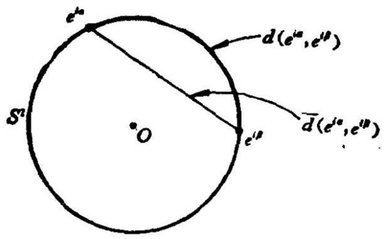

图 10.1

由上面例 10.1 与例 10.3 知, $\mathbb{R}^n$ 与 S^1 上有不止一个度量, 实际上, 如果集合 X 有度量 d , 则 X 上的度量就不是唯一的, 因为 $\forall\lambda>0$, λd 也是 X 上的一个度量, 下面我们介绍度量之间关系的一个概念, 即度量的等价.

3. 度量的等价

定义 10.2

设 d 与 d' 是 X 上的任意两个度量. 我们称 d 与 d' 是等价的, 如果存在常数 $A>0, B>0$ 使得

$$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X, Ad(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant d'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant Bd(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

♣

命题 10.1

$\mathbb{R}^n\ (n>1)$ 上的三个基本度量 d_1,d_2,d_3 是互相等价的, 并且成立下述不等式:

$$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n, d_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant d_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant d_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant nd_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

♠

证明 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$, 我们有

$$\begin{aligned}
d_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,\cdots,|x_n-y_n|\}\\
&= |x_k-y_k| \quad (\text{对某一个 } k=1,2,\cdots,n\,)\\
&\leqslant \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}\\
&= d_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\\
d_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}\\
&\leqslant |x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\cdots+|x_n-y_n|\\
&= d_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\\
d_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= |x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\cdots+|x_n-y_n|\\
&\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|+\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|+\cdots+\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|\\
&= nd_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),
\end{aligned}$$

因此

$$d_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant d_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant d_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant nd_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n.$$

由此不等式即可推知 d_1, d_2, d_3 是 $\mathbb{R}^n$ 上的三个互相等价的度量.

下面我们介绍一个特殊的度量空间.

4. 赋范向量空间

定义 10.3

设 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, E 是任一 $\mathbb{K}$–向量空间, 若存在一个映射 $\|\cdot\|: E \to \mathbb{R}$, 它具有下述三个性质:

1. $\forall \boldsymbol{x} \in E, \|\boldsymbol{x}\| \geqslant 0, \|\boldsymbol{x}\|=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=0$;
2. $\forall \boldsymbol{x} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda \boldsymbol{x}\|=|\lambda| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$;
3. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E, \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$.

则我们称 $\|\cdot\|$ 是 E 上的一个范数, $(E,\|\cdot\|)$ 称为一个赋范向量空间, 或简称为赋范空间. ♣

我们说赋范向量空间 $(E,\|\cdot\|)$ 是一个特殊的度量空间, 是因为:

若我们定义映射 $d: E \times E \to \mathbb{R}$ 如下:

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E, d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|.$$

则 d 是 E 上的一个度量. 事实上, 由范数 $\|\cdot\|$ 的性质推知

i) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E, d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \geqslant 0$, 且 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=0$, 当且仅当 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=0$ 即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$.

ii) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E, d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\|-(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\|=|-1|\,\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|=d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

iii) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in E$,

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \leqslant\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\|+\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\| \\ &=d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})+d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}). \end{aligned}$$

这个度量 d 称为由 E 的范数 $\|\cdot\|$ 诱导出来的度量, 因此 (E, d) 是一个度量空间.

注 由赋范空间 $(E,\|\cdot\|)$ 所诱导的度量空间 (E, d) 与一般度量空间 (X, d) 不同之处在于: E 不是一般的非空集合, 而是一个向量空间, 它的元素可以进行加、减、数乘运算, 而一般度量空间 (X, d) 中 X 的元素未必能定义这些运算.

如果 E 上可以定义范数, 那么 E 上的范数就不是唯一的, 像在度量空间中一样, 也可以定义范数的等价概念.

定义 10.4

设 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|'$ 是 E 上的任意两个范数, 我们称 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|'$ 是等价的, 如果存在常数 $A>0, B>0$ 使得

$$\forall \boldsymbol{x} \in E, A\|\boldsymbol{x}\| \leqslant\|\boldsymbol{x}\|' \leqslant B\|\boldsymbol{x}\|.$$

♣

最简单的赋范向量空间是下面两个例子.

例题 10.4 设 $E=\mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C}$, 令

$$\|z\|=|z|(\text{复数 } z \text{ 的模}).$$

容易验证如此定义的 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{C}$ 上的一个范数. 因此 $(\mathbb{C},\|\cdot\|)$ 是一个赋范向量空间.

例题 10.5 设 $E=\mathbb{R}^n\,(n\geqslant 1)$, $\forall \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 令

$$\|\boldsymbol{x}\|_1=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2},$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|,$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_3=\max\{|x_1|,\ |x_2|,\cdots,|x_n|\},$$

则 $\|\cdot\|_i\ (i=1,2,3)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的范数, 因此 $\left(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_i\right)$ 是赋范向量空间, 并且成立下述不等式:

$$\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|_3\leqslant\|\boldsymbol{x}\|_1\leqslant\|\boldsymbol{x}\|_2\leqslant n\|\boldsymbol{x}\|_3\ .$$

从而 $\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2,\|\cdot\|_3$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的三个互相等价的范数, 我们称这三个范数为 $\mathbb{R}^n$ 上的基本范数.

上述结论的证明是容易的, 我们留给读者.

下面我们再举两个今后常见的赋范向量空间的例子.

例题 10.6 设 $C^0([a,b],\mathbb{C})$ 为所有定义在有限闭区间 $[a,b]$ 上的连续复值函数的集合.

我们定义映射 $\|\cdot\|_\infty$: $C^0([a,b],\mathbb{C})\to\mathbb{R}$ 如下:

$$\forall f\in C^0([a,b],\mathbb{C}), \|f\|_\infty=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

则 $\|\cdot\|_\infty$ 是 $C^0([a,b],\mathbb{C})$ 上的一个范数, 因此 $\left(C^0([a,b],\mathbb{C}),\|\cdot\|_\infty\right)$ 是一个赋范向量空间.

首先我们证明映射 $\|\cdot\|_\infty$ 是有定义的, 这是因为 $\forall f\in C^0([a,b],\mathbb{C})$ 由 f 的连续性及 $[a,b]$ 的有限、闭性知, $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|<+\infty$, 故 $\|f\|_\infty<+\infty$.

其次, 若在 $C^0([a,b],\mathbb{C})$ 上定义加法与数乘运算为: $\forall f, g\in C^0([a,b],\mathbb{C})$, $\forall\lambda\in\mathbb{C}$,

$$\forall x\in[a,b], (f+g)(x)=f(x)+g(x), (\lambda f)(x)=\lambda f(x),$$

则 $C^0([a,b],\mathbb{C})$ 关于这两个运算形成一个 $\mathbb{C}$ –向量空间.

下面我们来验证 $\|\cdot\|_\infty$ 是 $C^0([a,b],\mathbb{C})$ 上的范数.

1. $\forall f\in C^0([a,b],\mathbb{C})$, $\|f\|_\infty\geqslant 0$, 并且 $\|f\|_\infty=0\Leftrightarrow\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|=0\Leftrightarrow\forall x\in[a,b], |f(x)|=0\Leftrightarrow f=0$.
2. $\forall f\in C^0([a,b],\mathbb{C})$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$,
$$\|\lambda f\|_\infty=\sup_{x\in[a,b]}|\lambda f(x)|=|\lambda|\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|=|\lambda|\,\|f\|_\infty\ .$$
3. $\forall f,g\in C^0([a,b],\mathbb{C})$,
$$\|f+g\|=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)+g(x)|\leqslant\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|+\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|=\|f\|_\infty+\|g\|_\infty\ .$$

因此 $\|\cdot\|_\infty$ 的确是 $C^0([a,b],\mathbb{C})$ 上的一个范数, 这个范数也称为 $C^0([a,b],\mathbb{C})$ 上的一致收敛范数, 为什么称 $\|\cdot\|_\infty$ 为一致收敛范数, 我们将在第 12 章进行解释.

例题 10.7 设 $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right)$ 是所有从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射的集合, 在 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$ 上各自取定三个基本范数中的一个.

我们定义映射 $\|\cdot\|$: $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right)\to\mathbb{R}$ 如下:

$$\forall T\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right), \|T\|=\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\|\boldsymbol{x}\|=1}\|T(\boldsymbol{x})\|\ .$$

则 $\|\cdot\|$ 是 $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right)$ 上的一个范数, 因此 $\left(\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right),\|\cdot\|\right)$ 是一个赋范向量空间.

为方便起见, 我们在 $\mathbb{R}^n$ 中取基本范数 $\|\cdot\|_2$.

首先我们容易验证 $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right)$ 是一个 $\mathbb{R}$ 一向量空间.

其次, 我们证明映射 $\|\cdot\|$ 有定义, 也即

$$\forall T \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right), \| T \|=\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|_2=1} \| T(\boldsymbol{x}) \|< +\infty.$$

事实上, 设 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基底. 则 $\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 我们有

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n.$$

若 $\| \boldsymbol{x} \|_2= 1$, 则 $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = 1$, 从而由 T 的线性性及范数的性质, 我们有

$$\begin{aligned}
\|T(\boldsymbol{x})\| &= \|T(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n)\| \\
&= \|x_1T(\boldsymbol{e}_1) + x_2T(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + x_nT(\boldsymbol{e}_n)\| \\
&\leqslant |x_1| \|T(\boldsymbol{e}_1)\| + |x_2| \|T(\boldsymbol{e}_2)\| + \cdots + |x_n| \|T(\boldsymbol{e}_n)\|.
\end{aligned}$$

令 $M = \max\{\|T(\boldsymbol{e}_1)\|, \|T(\boldsymbol{e}_2), \|\cdots, \|T(\boldsymbol{e}_n)\|\}$, 则 $M < +\infty$, 并且

$$\| T(\boldsymbol{x}) \|\leqslant M(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|) = M.$$

最后我们来验证 $\|\cdot\|$ 满足范数的三个条件.

1) $\forall T \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right), \| T \|\geqslant 0$ 显然, 下证 $\| T \|= 0 \Leftrightarrow T = \mathscr{O}$.

设 $T = \mathscr{O}$, 由 $\| T \|$ 的定义知 $\| T \|= 0$.

反之设 $\| T \|= 0$, 那么

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|=1} \| T(\boldsymbol{x}) \|= 0 \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \| \boldsymbol{x} \|= 1, \| T(\boldsymbol{x}) \|= 0.$$

现任取 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 且 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 则 $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\| \boldsymbol{x} \|} \in \mathbb{R}^n, \left\|\dfrac{\boldsymbol{x}}{\| \boldsymbol{x} \|}\right\| = 1$, 于是 $\left\|T\left(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)\right\| = 0$, 从而 $\| T(\boldsymbol{x}) \|= 0\cdot \| \boldsymbol{x} \|= 0$.

若 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 且 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 则显然有 $\| T(\boldsymbol{x}) \|= 0$. 因此 $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \| T(\boldsymbol{x}) \|= 0$, 此即表明 $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ 或 $T = \mathscr{O}$.

2) $\forall T \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \| \lambda T \|= |\lambda| \| T \|$.

这可由 $\| T \|$ 的定义直接推出.

3) $\forall T, S \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right), \| T + S \|\leqslant\| T \| + \| S \|$. 这是因为

$$\begin{aligned}
\| T + S \| &= \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|=1} \| (T + S)(\boldsymbol{x}) \| \\
&\leqslant \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|=1} \| T(\boldsymbol{x}) \| + \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|=1} \| S(x) \| \\
&=\| T \| + \| S \|.
\end{aligned}$$

因此上述定义的 $\|\cdot\|$ 是 $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$ 上的一个范数.

由范数的定义, 我们得到下述不等式.

重要不等式 $\forall T \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right), \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\| T(\boldsymbol{x}) \|\leqslant\| T \| \cdot \| \boldsymbol{x} \|.$$

注意这个不等式左、右两边的三个 $\|\cdot\|$ 代表三个不同空间中的范数. 此不等式的证明简单. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 且 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 我们有 $\left\|T\left(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\| \boldsymbol{x} \|}\right)\right\| \leqslant\| T \|$, 从而 $\| T(\boldsymbol{x}) \|\leqslant\| T \| \cdot \| \boldsymbol{x} \|$. 若 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 且 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 则 $\| T(\boldsymbol{x}) \|= 0 =\| T \| \cdot \| \boldsymbol{x} \|$. 因此

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \| T(\boldsymbol{x}) \|\leqslant\| T \| \cdot \| \boldsymbol{x} \|.$$

✍ 习题 10.1

1. 设 X 是任一非空集合，定义映射 $d: X\times X\to\mathbb{R}$ 如下：
$$\forall x,y\in X, d(x,y)=\begin{cases}0, & \text{若 } x=y,\\ 1, & \text{若 } x\neq y.\end{cases}$$
证明：d 是 X 上的一个度量.

2. 设 X 是任一非空集合，$f: X\to\mathbb{R}$ 是任一单射. 证明：映射 $d: X\times X\to\mathbb{R}$,
$$\forall x,y\in X, d(x,y)=|f(x)-f(y)|,$$
是 X 上的一个度量.

3. 设 (X,d) 是任一度量空间. 令
$$\overline{d}(x,y)=\min\big(d(x,y),\ 1\big), \forall x,y\in X.$$
证明：$\overline{d}$ 是 X 上的一个度量.

4. 设 $C^2([0,1],\mathbb{R})$ 表示所有定义在 $[0,1]$ 上的二次连续可导函数的集合.
   1) 对任意 $f,g\in C^2([0,1],\mathbb{R})$，定义：
$$d_1(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|,$$
$$d_2(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)-g'(x)|+|f(0)-g(0)|,$$
$$d_3(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|f''(x)-g''(x)|+|f'(0)-g'(0)|+|f(0)-g(0)|.$$
   证明：d_1,d_2,d_3 是 $C^2([0,1],\mathbb{R})$ 上的度量.
   2) 证明：对任意 $f,g\in C^2([0,1],\mathbb{R})$，有
$$d_1(f,g)\leqslant d_2(f,g)\leqslant d_3(f,g).$$

5. 设 G 是任一交换群，$p: G\to\mathbb{R}^+$ 是映射，满足：
$$p(x)=0 \iff x=0, p(-x)=p(x), p(x+y)\leqslant p(x)+p(y).$$
定义 $d: G\times G\to\mathbb{R}$ 为
$$d(x,y)=p(x-y), \forall x,y\in G.$$
证明：d 是 G 上的一个度量.

6. 设 (X,d) 是任一度量空间.
   1) 证明：$d'(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ 是 X 上的一个度量.
   2) 证明：d' 与第 3 题中的度量 $\overline{d}$ 是等价度量，且满足不等式
$$d'\leqslant\overline{d}\leqslant 2d'.$$

7. 设 $p\geqslant 1$，在 $\mathbb{R}^n$ 上定义映射 $N_p: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ 如下：
$$\forall \boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n, N_p(\boldsymbol{x})=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1) 证明：N_p 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个范数，称为 ℓ^p 范数.

2) 证明：范数 N_p 与 $\mathbb{R}^n$ 上的三个基本范数等价.

8. 设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的任一范数，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$. 若

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|=\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|,$$

则 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 应满足什么关系？

9. 设 N 与 N' 分别是 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$ 上的任一范数. 在 $\mathbb{R}^{n+m}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ 上定义映射 $N_1,N_2,N_3:\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^+$ 如下：

$$\begin{aligned}\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in R^n\times R^m=R^{n+m},N_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})&=\sqrt{N(\boldsymbol{x})^2+N'(\boldsymbol{y})^2},\\ N_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})&=N(\boldsymbol{x})+N'(\boldsymbol{y}),\\ N_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})&=\max\left\{N(\boldsymbol{x}),\ N'(\boldsymbol{y})\right\}.\end{aligned}$$

证明：N_1,N_2,N_3 是 $\mathbb{R}^{n+m}$ 上的三个范数.

10. 在 $C^0([a,b],\mathbb{R})$ 上定义映射 $N_1,N_2:C^0([a,b],\mathbb{R})\to\mathbb{R}^+$ 如下：

$$\forall f\in C^0([a,b],R),\quad N_1(f)=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x,N_2(f)=\left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明：N_1 与 N_2 是 $C^0([a,b],\mathbb{R})$ 上的两个范数，并判断它们是否等价.

11. 在 $C^1([a,b],\mathbb{R})$ 上定义映射 $N_1,N_2:C^1([a,b],\mathbb{R})\to\mathbb{R}^+$ 如下：

$$\forall f\in C^0([a,b],R),N_1(f)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|+\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|,N_2(f)=\sup_{x\in[a,b]}\left(|f(x)|+|f'(x)|\right).$$

证明：N_1 与 N_2 是 $C^1([a,b],\mathbb{R})$ 上的两个等价范数.

12. 证明：

1) 对 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$，有 $\|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\|=1$.

2) $\forall T\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$，$\forall S\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^k)$, $\|S\circ T\|\leqslant\|S\|\cdot\|T\|$.

10.2 度量空间的开集、闭集

为了进一步认识度量空间, 我们来介绍度量空间的开集、闭集及其基本性质.

1. 开球、闭球及球面

定义 10.5

设 (X,d) 是任一度量空间, $\forall a\in X,\forall\delta\geqslant 0$, 我们令

$$B(a,\delta)=\{x\in X\mid d(a,x)<\delta\},$$
$$\overline{B}(a,\delta)=\{x\in X\mid d(a,x)\leqslant\delta\},$$
$$S(a,\delta)=\{x\in X\mid d(a,x)=\delta\},$$

并分别称 $B(a,\delta)$, $\overline{B}(a,\delta)$ 及 $S(a,\delta)$ 为 X 的以 a 为中心, 以 δ 为半径的开球、闭球及球面. ♣

在赋范向量空间 $(E, \|\cdot\|)$ 中, 相应地我们有

$$B(a,\delta)=\{x\in E \mid \| x-a \|<\delta\},$$
$$\overline{B}(a,\delta)=\{x\in E \mid \| x-a \|\leqslant\delta\},$$
$$S(a,\delta)=\{x\in E \mid \| x-a \|=\delta\}.$$

注 若 $\delta=0$, 则 $B(a,\delta)=\varnothing, \overline{B}(a,\delta)=S(a,\delta)=\{a\}$. 若 $\delta>0$, 则 $a\in B(a,\delta)\subset\overline{B}(a,\delta)$, 并且

$$B(a,\delta)\cup S(a,\delta)=\overline{B}(a,\delta).$$

例题 10.8 设 $X=\mathbb{R}, d(x,y)=|x-y|$ 为绝对值度量, 于是

$$B(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta), \overline{B}(a,\delta)=[a-\delta,a+\delta], S(a,\delta)=\{a-\delta,a+\delta\}.$$

例题 10.9 设 $X=\mathbb{R}^2$. 我们来考虑在 $\mathbb{R}^2$ 的三个基本度量 d_1,d_2,d_3 下的 $B(a,\delta), \overline{B}(a,\delta)$ 与 $S(a,\delta)$.

记 $a=(a_1,a_2), \boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$.

1) 对度量 d_1 :

$$B(a,\delta)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}<\delta\right\},$$
$$\overline{B}(a,\delta)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}\leqslant\delta\right\},$$
$$S(a,\delta)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}=\delta\right\}.$$

这里 $B(a,\delta), \overline{B}(a,\delta), S(a,\delta)$ 就是平面上通常所说的以 a 为中心 δ 为半径的开圆盘、闭圆盘、圆周.

2) 对度量 d_2 :

$$B(a,\delta)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \mid |x_1-a_1|+|x_2-a_2|<\delta\right\},$$
$$\overline{B}(a,\delta)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \mid |x_1-a_1|+|x_2-a_2|\leqslant\delta\right\},$$
$$S(a,\delta)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \mid |x_1-a_1|+|x_2-a_2|=\delta\right\}.$$

这时 $B(a,\delta), \overline{B}(a,\delta), S(a,\delta)$ 是平面上以 a 为中心, 两条对角线分别平行于 x_1 轴与 x_2 轴而长为 2δ 的开菱形、闭菱形、四条菱边.

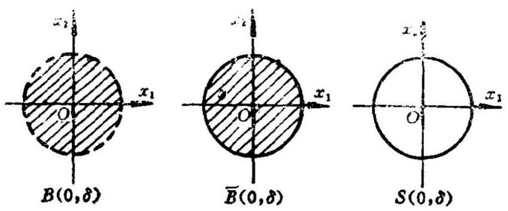

图 10.2

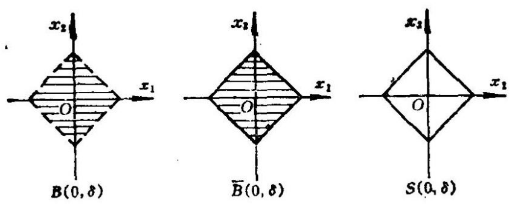

图 10.3

3) 对度量 d_3 :

$$B(a,\delta)=\left\{x\in\mathbb{R}^2\,|\max\{|x_1-a_1|,\}x_2-a_2|<\delta\right\},$$
$$\overline{B}(a,\delta)=\left\{x\in\mathbb{R}^2\,|\max\{|x_1-a_1|,\}|x_2-a_2|\right\}\leqslant\delta\},$$
$$S(a,\delta)=\left\{x\in\mathbb{R}^2\mid\max\{|x_1-a_1|,|x_2-a_2|\}=\delta\right\}.$$

显然这里 $B(a,\delta)$, $\overline{B}(a,\delta)$, $S(a,\delta)$ 是平面上以 a 为中心、两对边分别平行于 x_1 轴与 x_2 轴而长为 2δ 的开正方形、闭正方形、正方形四条边.

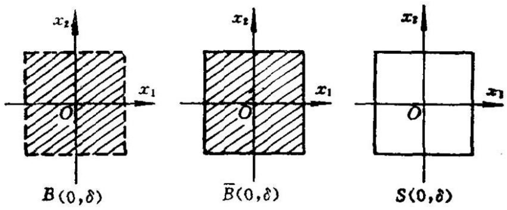

图 10.4

由此可知, 在同一 X 上, 对不同的度量 d, $B(a,\delta)$, $B(a,\delta)$ 与 $S(a,\delta)$ 可以有不同的几何形状.

2. 开集、闭集、邻域

定义 10.6

设 (X,d) 是任一度量空间, $U\subset X$ 是任一集合. $a\in X$.

1. 我们称 U 是 X 的开集, 如果
$$(\forall x\in U)\,(\exists\delta>0)\ \text{使得}\ B(x,\delta)\subset U.$$
2. 我们称 U 是 X 的闭集, 如果 $X-U$ 是 X 的开集.
3. 我们称 U 是 a 的一个邻域, 如果 U 是包含 a 的开集. 我们用 $\mathcal{N}(a)$ 表示 a 的所有邻域组成的集族, 称为 a 的邻域系.

♣

由上述定义可知: 空集 $\varnothing$ 与 X 本身既是开集又是闭集.

当然, 在度量空间中, 一般说来存在既非开又非闭的集合. 因此当 A 不是 (X,d) 中的开 (闭) 集时, 我们不能断定 A 就一定是 (X,d) 的闭开集.

例如熟知的半闭半开的区间 $[a,b)(a,b](a,b\in\mathbb{R}\,,a\neq b)$ 就是 $(\mathbb{R},|\cdot|)$ 中的既非开又非闭的集合.

最简单的开集、闭集

命题 10.2

设 (X,d) 是任一度量空间. 则

1. X 的任一单点集 $\{a\}$ 是闭集,
2. X 的任一开球 $B(a,\delta)$ 是开集,
3. X 的任一闭球 $\overline{B}(a,\delta)$ 是闭集.

♠

证明 1) 为了证明 $\{a\}$ 是闭集, 只需证明 $X-\{a\}$ 是开集. 事实上, $\forall x\in X-\{a\},d(x,a)>0$, 若取 $\delta=\dfrac{1}{2}d(x,a)$, 则 $\delta>0, B(x,\delta)\subset X-\{a\}$. 因此 $X-\{a\}$ 是 X 的开集.

2) 对开球 $B(a,\delta)$: 若 $\delta=0$, 则 $B(a,\delta)=\varnothing$, 它是开集. 现假设 $\delta>0$, 为了证明 $B(a,\delta)$ 是开集,

我们来证明:

$$(\forall x \in B(a,\delta))\,(\exists \delta_x > 0) \text{ 使得 } B(x,\delta_x) \subset B(a,\delta).$$

事实上, 由于 $x \in B(a,\delta)$, 故 $d(x,a) < \delta$. 令 $\delta_x = \delta - d(x,a)$, 则 $\delta_x > 0$.

现在设 $y \in B(x,\delta_x)$, 于是

$$\begin{aligned} d(a,y) &\leqslant d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + \delta_x \\ &= d(a,x) + \delta - d(x,a) = \delta. \end{aligned}$$

此即表明 $y \in B(a,\delta)$, 从而 $B(x,\delta_x) \subset B(a,\delta)$.

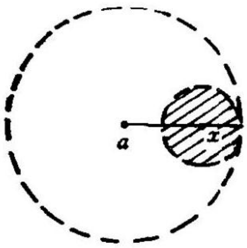

图 10.5

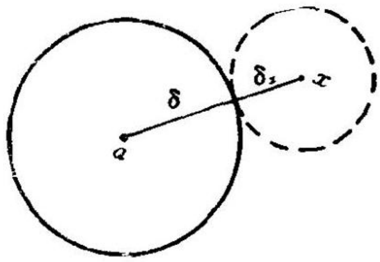

图 10.6

3) 对闭球 $\overline{B}(a,\delta)$: 若 $\delta = 0$, 则 $\overline{B}(a,\delta) = \{a\}$, 是闭集, 现假设 $\delta > 0$. 为了证明 $\overline{B}(a,\delta)$ 为闭集, 我们证明 $X - \overline{B}(a,\delta)$ 为开集, 即等价地证明:

$$(\forall x \in X - \overline{B}(a,\delta))\,(\exists \delta_x > 0) \text{ 使得 } B(x,\delta_x) \subset X - \overline{B}(a,\delta).$$

事实上, 由于 $x \notin \overline{B}(a,\delta)$, 故 $d(x,a) > \delta$. 令 $\delta_x = d(x,a) - \delta$, 则 $\delta_x > 0$. 于是 $\forall y \in B(x,\delta_x)$,

$$\begin{aligned} d(y,a) &\geqslant d(x,a) - d(y,x) \\ &> d(x,a) - d(x,a) + \delta = \delta. \end{aligned}$$

此即表明 $y \notin \overline{B}(a,\delta)$, 因此 $y \in X - \overline{B}(a,\delta)$, 即 $B(x,\delta_x) \subset X - \overline{B}(a,\delta)$.

度量空间的一个重要性质就是它的 Hausdorff 分离性.

Hausdorff 分离性

定理 10.1

设 (X,d) 是任一度量空间, $a,b \in X$ 且 $a \neq b$. 则存在 $U \in \mathcal{N}(a)$, $V \in \mathcal{N}(b)$ 使得

$$U \cap V = \varnothing.$$

证明 因为 $a \neq b$, 故 $d(a,b) > 0$, 取 $\delta = \frac{1}{2}d(a,b)$, 则 $B(a,\delta) \in \mathcal{N}(a)$, $B(b,\delta) \in \mathcal{N}(b)$, 并且

$$B(a,\delta) \cap B(b,\delta) = \varnothing.$$

最后令 $U = B(a,\delta)$, $V = B(b,\delta)$ 即可.

开集、闭集的性质

定理 10.2

设 (X,d) 是任一度量空间, 则

1. X 的有限个开集的交是 X 的开集,
2. X 的任意一族开集的并是 X 的开集.

证明

1. 设 $U_i\ (i = 1,2,\cdots,m)$ 是 X 的任意 m 个开集, 若 $\bigcap_{i=1}^{m} U_i = \varnothing$, 则它是开集, 因此不妨设 $\bigcap_{i=1}^{m} U_i \neq \varnothing$,
$$\forall x \in \bigcap_{i=1}^{m} U_i, \text{由 } x \in U_i \text{ 知, 存在 } \delta_i > 0 \text{使得 } B(x,\delta_i) \subset U_i \quad (i = 1,2,\cdots,m).$$
令 $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m\}$, 则 $\delta > 0$, $B(x,\delta) \subset B(x,\delta_i) \subset U_i\ (i = 1,2,\cdots,m)$, 从而 $B(x,\delta) \subset \bigcap_{i=1}^{m} U_i$, 因此 $\bigcap_{i=1}^{m} U_i$ 是 X 的开集.
2. 设 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 X 的任一开集族. 于是 $\forall x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, 存在 $\lambda_0 \in \Lambda$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x,\delta) \subset U_{\lambda_0}$, 从而 $B(x,\delta) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. 因此 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ 是 X 的开集.

定理 10.3

设 (X,d) 是任一度量空间, 则

1. X 的有限个闭集的并是 X 的闭集,
2. X 的任意一族闭集的交是 X 的闭集.

证明 1) 设 $F_i\ (i = 1,2,\cdots,m)$ 是 X 的任意 m 个闭集. 于是 $X - F_i\ (i = 1,2,\cdots,m)$ 是 X 的开集, 从而由 De Morgan 公式.

$$X - \bigcup_{i=1}^{m} F_i = \bigcap_{i=1}^{m} (X - F_i)$$

及定理10.2知 $X - \bigcup_{i=1}^{m} F_i$ 是 X 的开集, 因此 $\bigcup_{i=1}^{m} F_i$ 是 X 的闭集.

2) 现设 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 X 的任意一闭集族, 由于 $\forall\lambda \in \Lambda$, $X - F_\lambda$ 为 X 的开集, 故由 De Morgan 公式

$$X - \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (X - F_\lambda)$$

及定理 10.2知 $X - \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ 是 X 的开集, 从而交集 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ 是 X 的闭集.

现在我们用 τ 表示度量空间 (X,d) 的所有开集组成的集族, 由前面的讨论可知, τ 具有下述三个重要性质:

i) $\varnothing, X \in \tau$;

ii) 若 $U, V \in \tau$, 则 $U \cap V \in \tau$;

iii) 若 $U_\lambda \in \tau\ (\lambda \in \Lambda)$, 则 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \tau$.

我们称此开集族 τ 是由 X 的度量 d 诱导出来的一个拓扑 (Topology).

如果我们在一个集合 X 上直接地给出满足上述 i)、ii)、iii) 三个条件的 X 上的一个集族 τ，则我们称 τ 是 X 上的一个拓扑, $U \in \tau$ 称为开集, (X,τ) 称为一个拓扑空间, 若这个拓扑是由 X 上的某一个度量 d 所诱导的, 则称 (X,τ) 是可度量化拓扑空间. 这方面的内容属于专门的拓扑学的研究范畴, 已超出本书的范围, 我们就不在此多叙述.

3. 集合的闭包、内部、边界

定义 10.7

设 (X,d) 是任一度量空间, $A \subset X$ 是任一集合, $a \in X$.

1. 我们称 a 是集合 A 的聚点, 如果
$$\forall U \in \mathcal{N}(a), U \cap (A - \{a\}) \neq \varnothing.$$
A 的所有聚点组成的集与 A 的并记为 $\overline{A}$, 并称为 A 的闭包, $\overline{A}$ 的每一元素称为 A 的闭包点.
2. 我们称 a 是集合 A 的孤立点, 如果
$$\exists U \in \mathcal{N}(a), U \cap A = \{a\}.$$
3. 我们称 a 是集合 A 的内点, 如果
$$\exists U \in \mathcal{N}(a), U \subset A.$$
A 的所有内点组成的集合记为 $\mathring{A}$, 称为 A 的内部.
4. 我们称 a 是集合 A 的边界点, 如果
$$\forall U \in \mathcal{N}(a), U \cap A \neq \varnothing, U \cap (X - A) \neq \varnothing.$$
A 的所有边界点组成的集合记为 ∂A, 称为 A 的边界.

♣

例题 10.10 考虑实数空间 $(\mathbb{R},|\cdot|)$ 中的有理数集 $\mathbb{Q}$ 与无理数集 $\mathbb{Q}^c$. 我们有:
$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R},\ \mathring{\mathbb{Q}} = \varnothing,\ \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R},$$
$$\overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R},\ \mathring{\mathbb{Q}}^c = \varnothing,\ \partial\mathbb{Q}^c = \mathbb{R}.$$

例题 10.11 对任一度量空间 (X,d), $\forall a \in X, \forall \delta > 0$, 我们有:
$$\overline{B(a,\delta)} = \overline{B}(a,\delta), \mathring{B}(a,\delta) = B(a,\delta),$$
$$\partial B(a,\delta) = \partial\overline{B}(a,\delta) = S(a,\delta),$$
$$\overline{S(a,\delta)} = \partial S(a,\delta) = S(a,\delta), \mathring{S}(a,\delta) = \varnothing.$$

例题 10.12 设 $a,b \in \mathbb{R}, a < b$. $\varphi,\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ 是任意两个连续函数, 并且 $\varphi \leqslant \psi$. 令
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b], \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\right\}.$$
则
$$\mathring{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a,b), \varphi(x) < y < \psi(x)\right\},$$
$$\partial A = \left\{(a,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(a) \leqslant y \leqslant \psi(a)\right\} \cup (b,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(b) \leqslant y \leqslant \psi(b)\right\} \cup \mathrm{Gr}(\varphi) \cup \mathrm{Gr}(\psi).$$

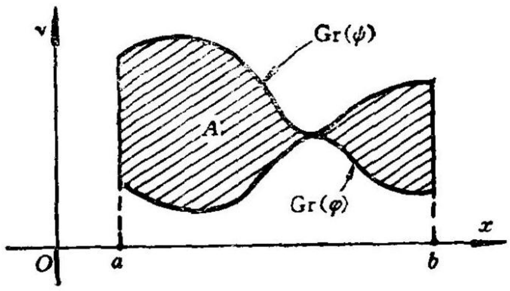

图 10.7

定理 10.4

设 A 是度量空间 (X, d) 的任一非空集合, 则

1. $\mathring{A}$ 是开集, $\overline{A}$ 是闭集;
2. ∂A 是闭集, 并且 $\partial A = \overline{A} \cap \left(\overline{X - A}\right)$.

证明

1. 由开集及 $\mathring{A}$ 的定义知 $\mathring{A}$ 是 X 的开集, 为了证明 $\overline{A}$ 是闭集, 我们证明 $X - \overline{A}$ 是开集.
   首先不难证明下述结论成立:
   $$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{N}(x), U \cap A \neq \varnothing. \tag{10.1}$$
   现任取 $x \in X - \overline{A}$. 由于 $x \notin \overline{A}$, 故存在 $U \in \mathcal{N}(x)$ 使得 $U \cap A = \varnothing$. 下面证明 $U \subset X - \overline{A}$. 事实上, $\forall y \in U, U \in \mathcal{N}(y)$. 由于 $U \cap A = \varnothing$, 故 $y \notin \overline{A}$, 从而 $y \in X - \overline{A}$ 即 $U \subset X - \overline{A}$, 由 $x \in X - \overline{A}$ 的任意性推知 $X - \overline{A}$ 是 X 的开集, 于是 $\overline{A}$ 是 X 的闭集.
2. 由 ∂A 的定义
   $$\partial A = \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{N}(x), U \cap A \neq \varnothing, U \cap (X - A) \neq \varnothing\}.$$
   故由上述式(10.1)即知 $\partial A = \overline{A} \cap \left(\overline{X - A}\right)$. 由于 $\overline{A}$ 与 $\left(\overline{X - A}\right)$ 都是闭集, 所以 ∂A 是 X 的闭集.

例题 10.13 $\forall a \in (X, d), \forall \delta \geqslant 0, S(a, \delta)$ 是闭集. 因为

$$S(a, \delta) = \partial \overline{B}(a, \delta).$$

4. 度量空间的子空间

设 (X, d) 是任一度量空间, $Y \subset X$ 是任一非空集合, 我们用 d_Y 表示 d 在 $Y \times Y$ 上的限制, 直接由度量的定义可知, d_Y 是 Y 上的一个度量. 于是 (Y, d_Y) 形成一个度量空间.

定义 10.8

度量空间 (Y, d_Y) 称为度量空间 (X, d) 的子空间.

下面我们来研究度量空间 (X, d) 与子空间 (Y, d_Y) 的开集之间的关系.

首先我们证明下述引理.

引理 10.1

若 (Y, d_Y) 是 (X, d) 的子空间, 则

$$\forall x \in Y, \ \forall \delta \geqslant 0, B_{d_Y}(x, \delta) = B_d(x, \delta) \cap Y.$$

证明 这可由 d_Y 的定义直接推出:

$$\begin{aligned} B_{d_Y}(x,\delta) &= \{y \in Y \mid d_Y(y,x) < \delta\} \\ &= \{y \in Y \mid d(y,x) < \delta\} \\ &= B_d(x,\delta) \cap Y. \end{aligned}$$

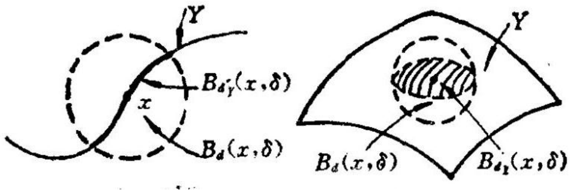

图 10.8

定理 10.5

$A \subset Y$ 是 Y 的开集, 当且仅当存在 X 中的开集 U 使得 $A = U \cap Y$.

证明 设 $A \subset Y$ 是 Y 的开集, 则

$$\begin{aligned} \forall x \in A, \exists \delta_x > 0 &\Rightarrow B_{d_Y}(x,\delta_x) \subset A \\ &\Rightarrow A = \bigcup_{x\in A} B_{d_Y}(x,\delta_x), \end{aligned}$$

令 $U = \bigcup\limits_{x\in A} B_d(x,\delta_x)$, 由定理 10.2知 U 是 X 的开集, 由引理 $B_{d_Y}(x,\delta_x) = B_d(x,\delta_x) \cap Y$, 故

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{x\in A} B_{d_Y}(x,\delta_x) = \bigcup_{x\in A} (B_d(x,\delta_x) \cap Y) \\ &= \left(\bigcup_{x\in A} B_d(x,\delta_x)\right) \cap Y = U \cap Y. \end{aligned}$$

反之, 设存在 X 中的开集 U 使得 $A = U \cap Y$. 那么 $\forall x \in A$, 存在 $\delta_x > 0$ 使得 $B_d(x,\delta_x) \subset U$, 再由引理10.1 $B_{d_Y}(x,\delta_x) = B_d(x,\delta_x) \cap Y$ 推得

$$A = \left(\bigcup_{x\in A} B_d(x,\delta_x)\right) \cap Y = \bigcup_{x\in A} (B_d(x,\delta_x) \cap Y) = \bigcup_{x\in A} B_{d_Y}(x,\delta_x).$$

因此 A 是 Y 中的开集.

推论 10.1

若 $A \subset Y$ 是 X 的开集, 则 A 也是 Y 的开集.

证明 因为 $A = A \cap Y$.

此推论的逆不成立, 即 Y 的开集不一定是 X 的开集.

例题 10.14 考虑实数空间 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 的子空间 $\left([0,1], |\cdot|_{[0,1]}\right)$. $\forall a, b \in [0,1]$ 且 $a < b$, 下述各集合

$$(a,b), [0,b), (a,1], \varnothing, [0,1]$$

都是 $[0,1]$ 的开集, 但 $[0,b), (a,1], (0,1)$ 不是 $\mathbb{R}$ 的开集 (这里 $b \neq 0, a \neq 1$), 而 (a,b) 仍是 $\mathbb{R}$ 中的开集

例题 10.15 考虑度量空间 $\left(\mathbb{R}^n, d_1\right)$ $(n > 1)$, 令

$$H = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geqslant 0\},$$

则 (H, d_{1H}) 是 $\left(\mathbb{R}^n, d_1\right)$ 的子空间. 设 A, B, C 是 (H, d_{1H}) 中如下图所示的三个集合

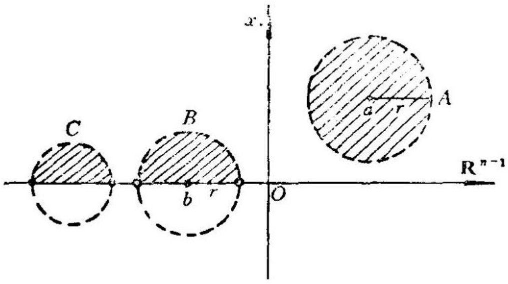

图 10.9

显然 A 是 H 的开集, 也是 $\mathbb{R}^n$ 的开集, 因为 $A = B_{d_1}(a,r) \subset H$； B 是 H 的开集, 因为 $B = B_{d_1}(b,r) \cap H$, 但 B 不是 $\mathbb{R}^n$ 的开集； C 不是 H 的开集, 当然也不是 $\mathbb{R}^n$ 的开集.

定理 10.6

$A \subset Y$ 是 Y 的闭集, 当且仅当存在 X 中的闭集 V 使得 $A = V \cap Y$.

证明 设 $A \subset Y$ 是 Y 的闭集. 那么 $Y - A$ 是 Y 的开集, 从而由定理10.5知存在 X 中的开集 U 使得 $Y - A = U \cap Y$, 于是

$$A = Y - (Y - A) = Y - (U \cap Y) = Y - U = (X - U) \cap Y = V \cap Y,$$

这里 $V = X - U$ 是 X 中的闭集.

反之设 $A = V \cap Y$, 这里 V 是 X 的闭集. 那么 $X - V$ 是 X 的开集, 从而由定理 10.5知, $(X - V) \cap Y$ 是 Y 的开集, 而

$$(X - V) \cap Y = X \cap Y - V \cap Y = Y - A,$$

故 A 是 Y 的闭集.

推论 10.2

若 $A \subset Y$ 是 X 的闭集, 则 A 也是 Y 的闭集.

证明 因为 $A = A \cap Y$.

注 此推论的逆也是不成立的, 即 Y 的闭集不一定是 X 的闭集.

习 题 10.2

1. 设 (X,d) 是任一度量空间, $a \in X$. 证明：
   1) $\forall U_i \in \mathscr{N}(a)(i = 1,2,\cdots,n)$, $\overset{n}{\underset{i=1}{}} U_i \in \mathscr{N}(a)$,.
   2) $\bigcap\limits_{U \in \mathscr{N}(a)} U = \{a\}$.
2. 设 (X,d) 是任一度量空间, $a \in X$. $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{N}(a)$ 的一子集, 我们称 $\mathscr{B}$ 是 a 的一个邻域基, 如果

$$\forall U \in \mathscr{N}(a), \exists V \in \mathscr{B} \Longrightarrow V \subset U.$$

   证明：(X,d) 的每一点 a 都有一个可数下降的邻域基 $\mathscr{B} = \{V_n \in \mathscr{N}(a) \mid V_{n+1} \subset V_n, n \in \mathbb{N}\}$.
3. 设 (X,d) 是任一度量空间, $A \subset X$ 是任一非空集合, $a \in X$.
   1) 证明：若 a 是 A 的聚点, 则 a 是 A 的闭包点, 反之则不然.

2) 设 $\mathscr{B}$ 是 a 的一个邻域基. 证明：

$$a \text{ 是 } A \text{的闭包点} \iff \forall V \in \mathscr{B},\ V \cap A \neq \varnothing;$$

$$a \text{ 是 } A \text{ 的聚点} \iff \forall V \in \mathscr{B},\ V \cap (A - \{a\}) \neq \varnothing.$$

3) 证明：A 是 X 的闭集, 当且仅当 $A = \overline{A}$.

4) 证明：$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

5) 证明：若 $A \subset B \subset X$, 则 $\overline{A} \subset \overline{B}$.

6) 证明：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. 举例说明 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 不一定成立.

4. 设 (X, d) 是任一度量空间, $A \subset X$ 是非空子集.

1) 证明：A 是 X 的开集, 当且仅当 $A = \mathring{A}$.

2) 证明：$\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.

3) 证明：若 $A \subset B$, 则 $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

4) 证明：$(A \cap B)^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$. 举例说明 $(A \cup B)^{\circ} = \mathring{A} \cup \mathring{B}$ 不成立

5. 设 (X, d) 是任一度量空间, $A \subset X$ 是非空子集. 证明：

1) $\partial A = \overline{A} - \mathring{A}$, 由此推出 ∂A 是闭集.

2) $\partial \overline{A} \subset \partial A, \partial(\mathring{A}) \subset \partial A, \partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$.

3) 若 $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$, 则 $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

4) A 是开集当且仅当 $\partial A = \overline{A} - A$.

6. 设 (X, d) 是任一度量空间, $E, F \subset X$ 是两个不相交的闭集. 证明：

1) $\forall x \in E$, 有 $d(x, F) = \inf\limits_{y \in F} d(x, y) > 0$($d(x, F)$ 称为 x 与 F 的距离).

2) 存在两个开集 U 和 V, 使得 $E \subset U$, $F \subset V$ 并且 $U \cap V = \varnothing$.

7. 设 (X, d) 是任一度量空间, $Y \subset X$ 是一非空集合. 证明：若 $A \subset Y$ 是 Y 的开 (闭) 集, Y 是 X 的开 (闭) 集, 则 A 是 X 的开 (闭) 集.

8. 写出图10.9中集合 A, B, C 分别在 $(\mathbb{R}^2, d_1)$ 与 (H, d_{1H}) 中的闭包、内部与边界.

9. 设 $\mathscr{F}$ 是如下定义的 $\mathbb{R}$ 上的子集族：

$$\mathcal{F} = \{U \subset \mathbb{R} \mid U = \varnothing \text{ 或 } \mathbb{R} - U \text{ 是可数集}\}.$$

1) 证明：$\mathscr{F}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个拓扑：

2) 证明：若 $U_n \in \mathscr{F}, (n \in \mathbb{N})$, 则 $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} U_n \in \mathscr{F}$.

3) 证明：$\mathscr{F}$ 不具有 Hausdorff 分离性, 即 "$\forall x, y \in \mathbb{R}$ 且 $x \neq y$, 存在 U, $V \in \mathscr{F}$ 使得 $x \in U, y \in V$ 且 $U \cap V = \varnothing$" 不成立.

4) 若改 $\mathscr{F}$ 为 $\mathscr{F}'$：

$$\mathscr{F}' = \{U \subset \mathbb{R} \mid U = \varnothing \text{ 或 } \mathbb{R} - U \text{ 为有限集}\}.$$

试问上述 1)、2)、3) 的结论仍然成立吗？

10.3 度量空间的点序列极限, 映射的极限与连续性

1. 度量空间的点序列极限

定义 10.9

设 X 是任一非空集合. 从 $\mathbb{N}$ 到 X 的任一映射 $x:\mathbb{N}\to X$ 称为 X 的一个点序列, 简记为 $\langle x_n\rangle$. $x_n\,(n\in\mathbb{N})$ 称为此序列的第 n 项或通项. ♣

例题 10.16 设 $\langle x_{ni}\rangle\,(i=1,2,\cdots,k)$ 是 k 个实数序列, 令 $x_n=(x_{n1},x_{n2},\cdots,x_{nk})\,(\forall n\in\mathbb{N})$, 则 $\langle x_n\rangle$ 是 $\mathbb{R}^k$ 的一个点序列.

例题 10.17 设 $\langle x_n\rangle$ 与 $\langle y_n\rangle$ 是两个实数序列, 令

$$z_n=x_n+\mathrm{i}y_n\,(\forall n\in\mathbb{N}),$$

则 $\langle z_n\rangle$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个复数序列.

例题 10.18 设 $f_n\in C^0([a,b],\mathbb{R})\,(\forall n\in\mathbb{N})$, 则 $\langle f_n\rangle$ 是 $C^0([a,b],\mathbb{R})$ 的一个连续函数序列.

定义 10.10

设 (X,d) 是任一度量空间, $\langle x_n\rangle$ 是 X 的任一点序列.

1. 我们称 $\langle x_n\rangle$ 收敛, 如果存在 $x\in X$, 它具有下述性质:

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists N\in\mathbb{N})\,(\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N)\Rightarrow d\,(x_n,x)<\varepsilon.$$

   这时我们也称点序列 $\langle x_n\rangle$ 当 $n\to+\infty$ 时收敛于 x 或以 x 为极限, 记为

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=x\quad\text{或}\quad x_n\to x\,(n\to+\infty).$$

2. 我们称 $\langle x_n\rangle$ 发散, 如果 $\langle x_n\rangle$ 不收敛. ♣

下面我们对度量空间点序列的收敛性作两点说明.

第一: 由度量空间 (X,d) 的 Hausdorff 分离性推知, 若 X 的点序列 $\langle x_n\rangle$ 有极限 x, 则此极限是唯一的.

第二: 点序列 $\langle x_n\rangle$ 的收敛性是依赖于 X 上所选择的度量 d 的. 也就是说, X 的同一点序列 $\langle x_n\rangle$ 对度量 d_1 收敛, 但对度量 d_2 可能发散.

然而若 d_1,d_2 是 X 上的两个等价度量, 则

$$\lim_{n\to+\infty}x_n\overset{d_1}{=\!=}x\quad\text{当且仅当}\quad\lim_{n\to+\infty}x_n\overset{d_2}{=\!=}x.$$

事实上, 由于 d_1 与 d_2 等价, 故存在常数 $A>0,B>0$ 使得

$$Ad_1\,(x,y)\leqslant d_2\,(x,y)\leqslant Bd_1\,(x,y),\ \ \forall x,y\in X.$$

从而

$$Ad_1\,(x_n,x)\leqslant d_2\,(x_n,x)\leqslant Bd_1\,(x_n,x)\,(\forall n\in\mathbb{N}).$$

由此即可推得我们的结论.

特别地, 当 $X=\mathbb{R}^k$ 时, 由于 $\mathbb{R}^k$ 上的三个基本度量 d_1,d_2,d_3 互相等价, 因此在 $\mathbb{R}^k$ 中考虑它的点序列的极限时, 我们可以取这三个度量中的任何一个而不会影响点序列的收敛性.

现在我们来研究 $\mathbb{R}^k$ 的点序列与 $\mathbb{C}$ 的复数序列的收敛性.

定理 10.7

设 $\langle \boldsymbol{x}_n \rangle$ 是 $\mathbb{R}^k$ $(k > 1)$ 中的任一点序列, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$. 令

$$\boldsymbol{x}_n = (x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{nk})\,(n \in \mathbb{N}),\, \boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_k),$$

则

$$\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_{ni} = \xi_i\,(i = 1, 2, \cdots, k).$$

证明 在 $\mathbb{R}^k$ 中取基本度量 d_3. 则

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{x}_n \overset{d_3}{=} \boldsymbol{x} &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Rightarrow d_3\,(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}) < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Rightarrow \max_{1\leqslant i\leqslant k} |x_{ni} - \xi_i| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Rightarrow |x_{ni} - \xi_i| < \varepsilon\,(i = 1, 2, \cdots, k) \\
&\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_{ni} = \xi_i\,(i = 1, 2 \cdots, k).
\end{aligned}$$

此定理表明在 $\mathbb{R}^k$ 中求点序列 $\langle \boldsymbol{x}_n \rangle$ 的极限可化为求 $\langle \boldsymbol{x}_n \rangle$ 的各相应分量组成的实数序列 $\langle x_{ni} \rangle\,(i = 1, 2, \cdots, k)$ 的极限.

定理 10.8

设 $\langle z_n \rangle = \langle x_n + \mathrm{i} y_n \rangle$ 是 $\mathbb{C}$ 的任一复数序列, $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, 则

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = x,\ \lim_{n\to+\infty} y_n = y.$$

证明 根据复数模的定义,

$$|z_n - z| = |(x_n - x) + \mathrm{i}\,(y_n - y)| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}.$$

由此立即推得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} z_n = z &\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |z_n - z| = 0 \\
&\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (x_n - x) = 0,\ \lim_{n\to+\infty} (y_n - y) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = x,\ \lim_{n\to+\infty} y_n = y.
\end{aligned}$$

这个定理表明求复数序列 $\langle z_n \rangle$ 的极限可化为分别求 $z_n\,(n \in \mathbb{N})$ 的实部与虚部系数组成的实数序列 $\langle x_n \rangle$ 与 $\langle y_n \rangle$ 的极限.

注 关于例 10.18 中 $C^0\,([a, b], \mathbb{R})$ 的连续函数序列 $\langle f_n \rangle$ 的收敛性, 也是相对它的某一个度量而言的.

例如在 $C^0\,([a, b], \mathbb{R})$ 中取由它的一致收敛范数 $\|\cdot\|_\infty$ 所诱导的度量 d (称为一致度量), 即

$$\forall f, g \in C^0\,([a, b], \mathbb{R}), d\,(f, g) = \| f - g \|_\infty$$

若 $f, f_n \in C^0\,([a, b], \mathbb{R})\,(n \in \mathbb{N})$, 则序列 $\langle f_n \rangle$ 关于此度量 d 收敛于 f 也称为 $\langle f_n \rangle$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 f.

关于函数序列的一致收敛性问题, 我们将在第 12 章中进行专门研究.

作为点序列极限的应用, 我们来证明下述定理.

定理 10.9

设 (X,d) 是任一度量空间, 则 $A\subset X$ 是闭集的充分必要条件是:

$$\text{若 } x_n\in A(n\in\mathbb{N}) \text{ 且 } x_n\to x(n\to+\infty)\,,\ \text{则 } x\in A.$$

证明 (必要性) 设 $A\subset X$ 是闭集, $x_n\in A\,(n\in\mathbb{N})$ 并且 $x_n\to x\ (n\to+\infty)$. 我们证明 $x\in A$.

用反证法. 假设 $x\notin A$, 则 $x\in X-A$: 由于 $X-A$ 是开集, 故存在 $\delta>0$ 使得 $B\,(x,\delta)\subset X-A$. 因为 $x_n\to x\,(n\to+\infty)$, 故存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant N, x_n\in B\,(x,\delta)\Rightarrow x_n\in X-A.$$

这与 $x_n\in A\,(n\in\mathbb{N})$ 矛盾. 因此 $x\in A$.

(充分性) 设定理的条件成立, 我们来证明 A 是闭集.

为此只需证明 $X-A$ 是开集. 仍然用反证法. 假设 $X-A$ 不是开集. 于是由开集定义知

$$(\exists x_0\in X-A)\,(\forall n\in\mathbb{N})\left(\exists x_n\in B\left(x_0,\frac{1}{n}\right)\right)\Rightarrow x_n\notin X-A.$$

由此得到 X 的一点序列 $\langle x_n\rangle$ 使得

$$x_n\in A\,(n\in\mathbb{N})\,, x_n\to x_0\,(n\to+\infty)\,.$$

由已知条件知, $x_0\in A$, 这与 $x_0\in X-A$ 矛盾, 因此 $X-A$ 为开集, 即 A 为闭集.

此定理是用序列的极限来刻划度量空间的闭集的, 应用它去判断集合的闭性十分方便.

例题 10.19 利用上述定理证明: 对任意集合 $A\subset X$, $\overline{A}$ 是闭集.

事实上, 若 $A=\varnothing$, 则 $\overline{A}=\varnothing$ 为闭集. 若 $A\neq\varnothing$, 则任取 $\overline{A}$ 中的点序列 $\langle x_n\rangle$ 使得 $x_n\to x\,(n\to+\infty)$, 我们来证明 $x\in\overline{A}$.

若存在 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得 $x_{n_0}=x$, 则 $x\in\overline{A}$, 因此不妨设 $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n\neq x$. 由于 $\forall n\in\mathbb{N}, x_n\in\overline{A}$, 故存在 $y_n\in A$ 使得 $d\,(x_n,y_n)<\dfrac{1}{n}$, $y_n\neq x$. 由此得到 A 的点序列 $\langle y_n\rangle$. 由不等式

$$d\,(y_n,x)\leqslant d\,(y_n,x_n)+d\,(x_n,x)<\frac{1}{n}+d\,(x_n,x)$$

知, $y_n\to x\,(n\to+\infty)$.

现任取 $U\in\mathcal{N}(x)$. 于是存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得

$$y_n\in U\cap(A-\{x\})\,.$$

此即表明 $x\in\overline{A}$, 因此 $\overline{A}$ 是闭集.

2. 度量空间上的映射的极限与连续性

定义 10.11

设 (X,d) 与 (Y,D) 是两个度量空间, $A\subset X$ 是任一非空集合, $f:A\to Y$ 是任一映射. $a\in X, l\in Y$.

1. 我们称映射 f 当 x 趋于 a 时以 l 为极限, 如果 a 是 A 的聚点, 并且下述性质成立:

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0)\,(\forall x\in A, 0<d\,(a,x)<\delta)\Rightarrow D\,(f\,(x)\,,l)<\varepsilon.$$

这时记为

$$\lim_{x\to a} f\,(x)=l \quad\text{或}\quad f\,(x)\to l\,(x\to a)\,.$$

2. 我们称映射 f 在 a 处连续, 如果 $a \in A$ 并且下述性质成立:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in A, d\,(a, x) < \delta) \Rightarrow D\,(f\,(x)\,, f\,(a)) < \varepsilon.$$

3. 我们称映射 f 在 A 上连续, 如果 f 在 A 的每一点 x 处连续.

注

1. 由上述定义可知, 当 $X = Y = \mathbb{R}$, 并且 $d\,(x, y) = D\,(x, y) = |x - y|$ 时, 上面的定义就是我们在第 4 章中研究过的一元实值函数的极限与连续性定义.
2. 现在设 d' 是 X 上的另一度量, D' 是 Y 上的另一度量, 并且 d' 与 d 等价, D' 与 D 等价. 则容易验证

$$\lim_{x \to a} f(x) \xlongequal{d,D} l \quad \text{当且仅当} \quad \lim_{x \to a} f\,(x) \xlongequal{d',D'} l.$$

换句话说, 映射 $f : A\,(\subset X) \to Y$ 的极限与连续性定义跟 X 中的等价度量及 Y 中的等价度量的选择无关.

因此, 特别地, 若我们考虑映射 $f : A\left(\subset \mathbb{R}^k\right) \to \mathbb{R}^m$, 则可以在 $\mathbb{R}^k$ 与 $\mathbb{R}^m$ 中任取各自的基本度量而不影响 f 的极限存在与连续性.

下面我们列出两类常用映射的极限与连续性定义, 以加深印象.

1) k 元实值函数的极限与连续性定义

取 $X = \mathbb{R}^k\,(k \geqslant 1)\,, d$ 为 $\mathbb{R}^k$ 中任一基本度量, 如 d_1; $Y = \mathbb{R}, D$ 为 $\mathbb{R}$ 上的绝对值度量 $|\cdot|$;

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_k)\,, \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathbb{R}^k,$$

则映射 $f : A\left(\subset \mathbb{R}^k\right) \to \mathbb{R}$ 称为 k 元实值函数, 这时

(1) 映射 $f : A\left(\subset \mathbb{R}^k\right) \to \mathbb{R}$ 当 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$ 时以 l 为极限, 当且仅当

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\left(\forall \boldsymbol{x} \in A, 0 < \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - a_i)^2} < \delta\right) \Rightarrow |f\,(\boldsymbol{x}) - l| < \varepsilon.$$

(2) 映射 $f : A\left(\subset \mathbb{R}^k\right) \to \mathbb{R}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 处连续, 当且仅当

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\left(\forall \boldsymbol{x} \in A, \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - a_i)^2} < \delta\right) \Rightarrow |f\,(\boldsymbol{x}) - f\,(\boldsymbol{x})| < \varepsilon.$$

例题 10.20 证明: 二元函数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f\,(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{若} \quad (x, y) > (0, 0) \\ 0, & \text{若} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

在 (0,0) 处连续.

事实上, $\forall\,(x, y) \neq (0, 0)$, 我们有

$$|f\,(x, y) - f\,(0, 0)| = \left|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right| \leqslant |y| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}.$$

若在 $\mathbb{R}^2$ 中取基本度量 d_1 , 则

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta = \varepsilon > 0)\left(\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} < \delta\right) \Rightarrow |f\,(x, y) - f\,(0, 0)| < \varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, 从而 f 在 (0,0) 处连续.

例题 10.21 设二元函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义如下:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & 若\quad (x,y)\neq(0,0)\,;\\ 0, & 若\quad (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

证明: f 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时极限不存在.

事实上, 若令 $y=kx\,(k\in\mathbb{R})$, 则 $\forall x\neq 0$,

$$f(x,kx)=\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx)=\dfrac{k}{1+k^2}$. 此极限依赖于 k, 故 f 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时不可能有极限存在.

对于 k 元实值函数的极限与连续性的运算性质. 可综合为下述定理.

定理 10.10

设 $f,g:A\left(\subset\mathbb{R}^k\right)\to\mathbb{R}$ 是任意两个 k 元实值函数, 并且当 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$ 时有极限存在, 则 $f+g, fg$ 与 $\dfrac{f}{g}:A\to\mathbb{R}$ 当 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$ 时也有极限存在 $\left(对\ \dfrac{f}{g}, \lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0\right)$, 并且

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}(f+g)(\boldsymbol{x})=\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})+\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}),$$

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}(fg)(\boldsymbol{x})=\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})\cdot\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}),$$

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\left(\frac{f}{g}\right)(\boldsymbol{x})=\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})\Big/\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}).$$

此定理的证明留给读者作为练习.

例题 10.22 证明: 如下定义的映射 $\varphi:[0,+\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]\to\mathbb{R}$:

$$\forall(r,\theta,\alpha)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi], \varphi(r,\theta,\alpha)=r\sin\theta\cos\alpha$$

在 $[0,+\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$ 上连续.

为此我们可以令为:

$$\forall(r,\theta,\alpha)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi], \varphi_1(r,\theta,\alpha)=r, \varphi_2(r,\theta,\alpha)=\sin\theta, \varphi_3(r,\theta,\alpha)=\cos\alpha$$

显然 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 在 $[0,+\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$ 上连续, 于是根据上述定理知, $\varphi=\varphi_1\cdot\varphi_2\cdot\varphi_3$ 在 $[0,+\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$ 上连续.

例题 10.23 计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

令 $f(x,y)=(x^2+y^2)^{x^2y^2}$. 两边取自然对数得

$$\log f(x,y)=x^2y^2\log(x^2+y^2)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2)\log(x^2+y^2).$$

由于

$$0\leqslant\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leqslant\frac{1}{2}|xy|\leqslant\frac{1}{4}(x^2+y^2),$$

$$(x^2+y^2)\log(x^2+y^2)=z\log z\,(z=x^2+y^2),$$

故

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0,$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\log(x^2+y^2) = \lim_{z\to 0^+} z\log z = 0.$$

因此,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \log f(x,y) = \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right)\cdot\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\log(x^2+y^2)\right) = 0.$$

由此推得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

2) k 元向量值函数的极限与连续性定义

取 $X=\mathbb{R}^k\ (k\geqslant 1)$, d 为$\mathbb{R}^k$ 中的任一基本度量, 如 d_2； $Y=\mathbb{R}^m(m>1)$, D 为 $\mathbb{R}^m$ 中的任一基本度量, 如 d_3；

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_k)\,,\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_k)\in\mathbb{R}^k;\quad \boldsymbol{l}=(l_1,l_2,\cdots,l_m)$$

$$f(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}))\in\mathbb{R}^m,$$

则映射 $\boldsymbol{f}:A\left(\subset\mathbb{R}^k\right)\to\mathbb{R}^m$ 称为 k 元向量值函数, $\forall i=1,2,\cdots.m$. 映射 $f_i:A\left(\subset\mathbb{R}^k\right)\to\mathbb{R}$ 称为 $\boldsymbol{f}$ 的分量函数, 它是 k 元实值函数, 这时

1) 映射 $\boldsymbol{f}:A\left(\subset\mathbb{R}^k\right)\to\mathbb{R}^m$ 当 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$ 时以 $\boldsymbol{l}$ 为极限当且仅当

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0)\left(\forall\boldsymbol{a}\in A,0<\sum_{i=1}^{k}|x_i-a_i|<\delta\right)$$

$$\Rightarrow \max_{1\leqslant i\leqslant m}|f_i(\boldsymbol{x})-l_i|<\varepsilon \Leftrightarrow |f_i(\boldsymbol{x})-l_i|<\varepsilon\,(\forall i=1,2,\cdots,m)\,.$$

因此

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{l}\Leftrightarrow\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f_i(\boldsymbol{x})=l_i\ (i=1,2,\cdots,m)\,.$$

2) 映射 $\boldsymbol{f}:A\left(\subset\mathbb{R}^k\right)\to\mathbb{R}^m$ 在 $\boldsymbol{a}$ 处连续当且仅当

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0)\left(\forall\boldsymbol{x}\in A,\sum_{i=1}^{k}|x_i-a_i|<\delta\right)$$

$$\Rightarrow \max_{1\leqslant i\leqslant m}|f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{a})|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{a})|<\varepsilon\,(\forall i=1,2,\cdots m)\,.$$

因此

$$\boldsymbol{f}\text{ 在 }\boldsymbol{a}\text{ 处连续 }\Leftrightarrow f_i\text{ 在 }\boldsymbol{a}\text{ 处连续 }(i=1,2,\cdots,m).$$

特别地, 当 $\boldsymbol{a}$ 是 A 的聚点时,

$$\boldsymbol{f}\text{ 在 }\boldsymbol{a}\text{ 处连续 }\Leftrightarrow\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$$

$$\Leftrightarrow\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f_i(\boldsymbol{x})=f_i(\boldsymbol{a})(i=1,2,\cdots,m).$$

上述分析表明, 对 k 元向量值函数的极限与连续性的研究可化为对它的各分量函数的极限与连续

性的研究.

例题 10.24 考虑如下定义的映射

$$f:[0,+\infty)\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2,$$

$$g:[0,+\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]\to\mathbb{R}^3, h:[0,+\infty)\times[0,2\pi]\times(-\infty+\infty)\to\mathbb{R}^3$$

$$\forall(r,\theta)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi],\ f(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta),$$

$$\forall(r,\theta,\alpha)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi],\ g(r,\theta,\alpha)=(r\sin\alpha\cos\theta,r\sin\alpha\sin\theta,r\cos\alpha),$$

$$\forall(r,\theta,z)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi]\times(-\infty,+\infty),\ h(r,\theta,z)=(r\cos\theta,r\sin\theta,z).$$

根据定理10.10知, 映射 f,g,h 的各分量函数 f_1,f_2,g_1,g_2 , g_3,h_1,h_2,h_3 在各自定义域上连续, 因此映射 f,g,h 在各自定义域上连续.

f 称为平面极坐标变换映射.

g 称为空间球面坐标变换映射.

h 称为空间柱面坐标变换映射.

这三个映射今后我们还要对它们进行研究, 它们在重积分计算中起着重要的作用.

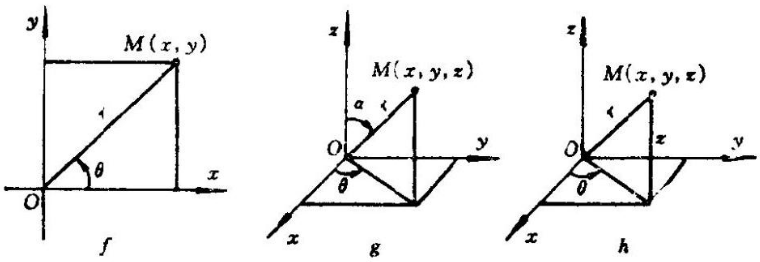

图 10.10

关于 k 元向量值函数的极限与连续性的运算性质, 我们有下述定理.

定理 10.11

设 $f,g:A\left(\subset\mathbb{R}^k\right)\to\mathbb{R}^m$ 是任意两个 k 元向量值函数, 并且当 $x\to a$ 时极限存在, $\lambda:A\left(\subset\mathbb{R}^k\right)\to\mathbb{R}$ 是任一 k 元实值函数, 当 $x\to a$ 时也有极限存在, 则 $f+g:A\to\mathbb{R}^m,\lambda f:A\to\mathbb{R}^m$ 当 $x\to a$ 时极限存在, 并且

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x),$$

$$\lim_{x\to a}(\lambda f)(x)=\lim_{x\to a}\lambda(x)\cdot\lim_{x\to a}f(x).$$

此定理的证明我们也留给读者作为练习.

下面一个定理是关于一般度量空间中复合映射的连续性的.

定理 10.12

设 $(X,d),(Y,D)$ 与 (Z,ρ) 是任意三个度量空间, $A\subset X,B\subset Y$ 是两个非空集合, $f:A\to Y$ 与 $g:B\to Z$ 是任意两个映射, 假设

1. $E=\mathrm{Dom}(g\circ f)\neq\varnothing$,
2. $x_0\in E$, f 在 x_0 处连续, g 在 $y_0=f(x_0)\in B$ 处连续, 则复合映射 $g\circ f:E\to Z$ 在 x_0 处连续.

证明 重复定理4.8的证明过程, 并对个别记号稍作修改即可.

推论 10.3

若映射 $f: A \to Y$ 在 A 上连续, 映射 $g: B \to Z$ 在 B 上连续, 并且 $E = \mathrm{Dom}(g \circ f) \neq \varnothing$, 则复合映射 $g \circ f: E \to Z$ 在 E 上连续.

作为这一段的结束, 我们来证明连续映射的一个等价定义, 即下面定理.

定理 10.13

设 (X, d) 与 (Y, D) 是任意两个度量空间, $A \subset X$ 是任一非空集合, 则映射 $f: A \to Y$ 在 A 上连续的充分必要条件是: 若 U 是 Y 的任一开集, 则 $f^{-1}(U)$ 是 A 的开集.

证明 (必要性) 设 f 在 A 上连续, U 是 Y 的任一开集. 若 $f^{-1}(U) = \varnothing$, 则 $f^{-1}(U)$ 是 A 的开集. 若 $f^{-1}(U) \neq \varnothing$, 任取 $a \in f^{-1}(U)$, 我们证明存在 $\delta_a > 0$ 使得 $A \cap B_d(a, \delta_a) \subset f^{-1}(U)$.

事实上, 由于 U 是开集, 并且 $f(a) \in U$, 故存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B_D(f(a), \varepsilon) \subset U$, 又因为 f 在 a 处连续, 所以存在 $\delta_a > 0$ 使得

$$\forall x \in A, d(a, x) < \delta_a \Rightarrow D(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

此即等价于 $f(A \cap B_1(a, \delta_a)) \subset B_D(f(a), \varepsilon)$ 或

$$A \cap B_d(a, \delta_a) \subset f^{-1}(B_D(f(a), \varepsilon)) \subset f^{-1}(U).$$

因为 $A \cap B_d(a, \delta_a) = B_{d_A}(a, \delta_a)$ 是 A 的以 a 为心以 δ_a 为半径的开球, 故由 a 的任意性推知, $f^{-1}(U)$ 是 A 的开集.

(充分性) 设对 Y 的任一开集 U, $f^{-1}(U)$ 是 A 的开集, 任取 $a \in A$, 于是 $\forall \varepsilon > 0$, $B_D(f(a), \varepsilon)$ 是 Y 的开集, 从而由假设知 $f^{-1}(B_D(f(a), \varepsilon))$ 是 A 的开集, 由于 $a \in f^{-1}(B_D(f(a), \varepsilon))$, 故存在 $\delta_a > 0$ 使得

$$B_{d_A}(a, \delta_a) = A \cap B_d(a, \delta_a) \subset f^{-1}(B_D(f(a), \varepsilon)),$$

或

$$f(A \cap B_d(a, \delta_a) \subset B_D(f(a), \varepsilon).$$

此即等价于

$$\forall x \in A, d(a, x) < \delta_a \Rightarrow D(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

因此 f 在 a 处连续. 由 a 的任意性知, f 在 A 上连续.

下面我们介绍映射的一致连续性.

3. 映射的一致连续性

定义 10.12

设 (X, d) 与 (Y, D) 是任意两个度量空间, $A \subset X$ 是任一非空集合, $f: A \to Y$ 是任一映射, 我们称 f 在 A 上一致连续, 如果它具有下述性质:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(\forall x, x' \in A, d\left(x, x'\right) < \delta\right) \Rightarrow D\left(f(x), f\left(x'\right)\right) < \varepsilon.$$

由这个定义可知, 若 f 在 A 上一致连续, 则 f 在 A 上连续, 但反之则不然.

例题 10.25 设二元函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义如下:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=\sin x\sin y.$$

证明: f 在 $\mathbb{R}^2$ 上一致连续.

事实上, $\forall (x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|f(x,y)-f\left(x',y'\right)\right| &= \left|\sin x\sin y-\sin x'\sin y'\right|\\ &\leqslant \left|\sin x\left(\sin y-\sin y'\right)\right|+\left|\sin y'\left(\sin x-\sin x'\right)\right|\\ &\leqslant \left|\sin y-\sin y'\right|+\left|\sin x-\sin x'\right|\\ &\leqslant \left|x-x'\right|+\left|y-y'\right|.\end{aligned}$$

若在 $\mathbb{R}^2$ 中取基本度量 d_2, 则

$$\begin{aligned}&(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta=\varepsilon>0)\left(\forall (x,y),\left(x',y'\right)\in\mathbb{R}^2,\right.\\ &\left|x-x'\right|+\left|y-y'\right|<\delta\Rightarrow\left|f(x,y)-f\left(x',y'\right)\right|<\left|x-x'\right|+\left|y-y'\right|<\varepsilon.\end{aligned}$$

故 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上一致连续.

例题 10.26 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是任一赋范向量空间, 则范数映射 $x\mapsto\|x\|, x\in X$ 在 X 上一致连续.

为此设 $x,x'\in X$, 则我们有不等式

$$\left|\|x\|-\|x'\|\right|\leqslant\|x-x'\|.$$

于是

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta=\varepsilon>0)\left(\forall x,x'\in X,\left\|x-x'\right\|<\delta\right)\Rightarrow\left|\|x\|-\left\|x'\right\|\right|\leqslant\left\|x-x'\right\|<\varepsilon$$

因此范数映射 $x\mapsto\|x\|, x\in X$ 在 X 上一致连续.

例题 10.27 设映射 $T:C^0([a,b],\mathbb{R})\to C^0([a,b],\mathbb{R})$ 定义如下:

$$\forall f\in C^0([a,b],\mathbb{R}),(Tf)(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ \forall x\in[a,b].$$

证明: T 在 $C^0([a,b]\mathbb{R})$ 上关于一致收敛范数一致连续.

事实上, $\forall f,g\in C^0([a,b],\mathbb{R})$, 我们有

$$\begin{aligned}\|Tf-Tg\|_\infty &= \sup_{x\in[a,b]}|(Tf)(x)-(Tg)(x)|\\ &= \sup_{x\in[a,b]}\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant (b-a)\|f-g\|_\infty\end{aligned}$$

于是

$$(\forall\varepsilon>0)\left(\exists\delta=\frac{\varepsilon}{b-a}>0\right)\left(\forall f,g\in C^0([a,b],\mathbb{R}),\|f-g\|_\infty<\delta\right)\Rightarrow\|Tf-Tg\|_\infty\leqslant(b-a)\|f-g\|_\infty<\varepsilon,$$

因此映射 T 在 $C^0([a,b],\mathbb{R})$ 上一致连续

4. 度量空间的同胚映射

定义 10.13

设 (X,d) 与 (Y,D) 是任意两个度量空间, $f:X\to Y$ 是任一映射, 若 f 具有下述性质:

1. f 是一一映射;
2. f 与 $f^{-1}:Y\to X$ 都是连续映射.

则我们称 f 是一个同胚映射 (也可简称同胚), 并称 X 与 Y 同胚. ♣

由定义可知, 若 $f: X \to Y$ 与 $g: Y \to Z((Z,\rho)$ 是一度量空间) 都是同胚, 则 $g \circ f: X \to Z$ 也是同胚.

例题 10.28 考虑映射 $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$:

$$\forall x \in (-1,1), f(x) = \tan\frac{\pi}{2}x.$$

则 f 是一个同胚映射, 从而 $(-1,1)$ 与 $\mathbb{R}$ 同胚.

事实上, f 是连续一一映射, 其逆 $f^{-1}: \mathbb{R} \to (-1,1)$ 为

$$\forall y \in \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \frac{2}{\pi}\arctan y.$$

显然 f^{-1} 连续. 故 f 是一个同胚映射, 从而 $(-1,1)$ 与 $\mathbb{R}$ 同胚.

例题 10.29 考虑 $\mathbb{R}^3$ 的单位球面 S^2:

$$S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\right\}.$$

设 $M(x,y,z)\left(M'\right)$ 是此球面上异于北极点 $N(0,0,1)$ (南极点 $S(0,0,-1)$) 的任意一点, 联结点 $N(S)$ 与 $M\left(M'\right)$ 的直线交 xOy 平面 π 上唯一一点 $P(t,s,0)$ $(Q(u,v,0))$ (如下图所示). 由于 π 平面上每一点的第 3 坐标为 0, 故可以认为 $(t,s,0)=(t,s)$, 从而可恒等 π 与 $\mathbb{R}^2$.

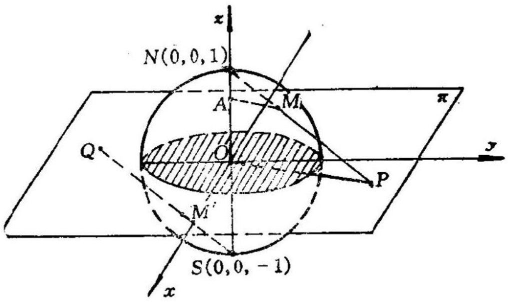

图 10.11

由此我们得到两个映射 $\Phi: S^2-\{N\} \to \mathbb{R}^2$ 与 $\Psi: S^2-\{S\} \to \mathbb{R}^2$, 它们分别定义如下:

$$\forall M \in S^2-\{N\}, \Phi(M)=P,$$

$$\forall M' \in S^2-\{S\}, \Psi\left(M'\right)=Q.$$

映射 Φ 与 Ψ 分别称为单位球面 S^2 关于北极点 N 与南极点 S 的球极投影.

下面我们来推导映射 Φ 的解析表达式.

由上图可得到下述明显比例关系式:

$$\frac{1-z}{1} = \frac{\overline{AM}}{\overline{OP}} = \frac{x}{t} = \frac{y}{s} \quad (P \neq 0).$$

于是

$$\begin{cases} t = \Phi_1(x,y,z) = \dfrac{x}{1-z}, \\ s = \Phi_2(x,y,z) = \dfrac{y}{1-z}, \end{cases} \quad \forall (x,y,z) \in S^2-\{N\}.$$

显然映射 Φ 在 $S^2-\{N\}$ 上连续并且是一一映射.

我们记 Φ 的逆映射为 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to S^2 - \{N\}$, 下面我们来推导 φ 的解析表达式. 由

$$t^2 + s^2 = \frac{x^2 + y^2}{(1-z)^2} = \frac{1-z^2}{(1-z)^2} = \frac{1+z}{1-z}$$

解得

$$z = \frac{t^2 + s^2 - 1}{1 + t^2 + s^2}.$$

将它代入 t, s 的表达式中得到

$$x = \frac{2t}{1 + t^2 + s^2}, y = \frac{2s}{1 + t^2 + s^2}.$$

因此 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to S^2 - \{N\}$ 的解析表达式为

$$\varphi(t, s) = \left(\frac{2t}{1 + t^2 + s^2}, \frac{2s}{1 + t^2 + s^2}, \frac{t^2 + s^2 - 1}{1 + t^2 + s^2} \right), \forall (t, s) \in \mathbb{R}^2.$$

由此可知, 映射 φ 在 $\mathbb{R}^2$ 上也是连续的, 故 $\Phi : S^2 - \{N\} \to \mathbb{R}^2$ 是一个同胚映射, 从而 $S^2 - \{N\}$ 与 $\mathbb{R}^2$ 同胚.

同理可证, 映射 $\Psi : S^2 - \{S\} \to \mathbb{R}^2$ 也是同胚映射. 从而 $S^2 - \{S\}$ 与 $\mathbb{R}^2$ 同胚, 并且 Ψ 与它的逆映射 $\psi : \mathbb{R}^2 \to S^2 - \{S\}$ 的解析表达式为:

$$\begin{cases} u = \Psi_1(x, y, z) = \dfrac{x}{1+z}, \\ v = \Psi_2(x, y, z) = \dfrac{y}{1+z}, \end{cases} \forall (x, y, z) \in S^2 - \{S\},$$

与

$$\psi(u, v) = \left(\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2} \right), \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

例题 10.30 设 S^1 是平面上的单位圆周:

$$S^1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\},$$

映射 $f : [0, 1) \to S^1$ 定义为

$$\forall t \in [0, 1), f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t).$$

容易证明 f 是连续的一一映射, 但 f 的逆映射 f^{-1} 不是连续映射 (见习题第 14 题), 因此 f 不是同胚映射. 能否由此断定 $[0, 1)$ 与 S^1 不同胚? 为什么?

注 1. 证明 f 是单射（不同的 t 映射到不同的点）

假设 $t_1, t_2 \in [0, 1)$ 且 $t_1 \neq t_2$, 要证明 $f(t_1) \neq f(t_2)$. $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ 是单位圆周上的点, 参数 t 表示角度（以弧度为单位, 但按比例缩放：$2\pi t$ 是从 0 到 2π 的角度）. 如果 $f(t_1) = f(t_2)$, 则：

$$\cos 2\pi t_1 = \cos 2\pi t_2 \quad \text{且} \quad \sin 2\pi t_1 = \sin 2\pi t_2.$$

这意味着 $2\pi t_1$ 和 $2\pi t_2$ 代表同一个角度（模 2π ）, 即：

$$2\pi t_1 = 2\pi t_2 + 2\pi k \quad \text{对某个整数 } k.$$

化简得：

$$t_1 = t_2 + k.$$

由于 $t_1, t_2 \in [0, 1)$, 且 k 是整数, 唯一可能是 $k = 0$（否则 t_1 或 t_2 会超出 $[0, 1)$ ）. 因此 $t_1 = t_2$. 所以若 $t_1 \neq t_2$, 则 $f(t_1) \neq f(t_2)$, 即 f 是单射.

2. 证明 f 是满射（S^1 中每一点都有原像）

任取 $(x,y) \in S^1$，即 $x^2+y^2=1$．要找到 $t \in [0,1)$ 使得 $f(t)=(x,y)$．由于 (x,y) 在单位圆上，存在角度 $\theta \in [0,2\pi)$ 使得：

$$x=\cos\theta, \quad y=\sin\theta.$$

令 $t=\dfrac{\theta}{2\pi}$, 则 $t \in [0,1)$（因为 $\theta \in [0,2\pi)$）．于是：

$$f(t)=(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)=(\cos\theta,\sin\theta)=(x,y)$$

因此对任意 $(x,y) \in S^1$, 存在 $t \in [0,1)$ 使得 $f(t)=(x,y)$, 即 f 是满射.

3. 证明 f^{-1} 不连续

考虑点 $p=(1,0) \in S^1$, 它对应 $t=0$（因为 $f(0)=(\cos 0,\sin 0)=(1,0)$）, 即 $f^{-1}(p)=0$. 现在构造 S^1 中一个序列 $\{p_n\}$ 收敛到 p: 令 $p_n=(\cos 2\pi t_n, \sin 2\pi t_n)$, 其中 $t_n=1-\dfrac{1}{n}$(注意 $t_n \in [0,1)$ 当 $n \geq 2$). 则 $p_n=\left(\cos 2\pi\left(1-\dfrac{1}{n}\right), \sin 2\pi\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right)=\left(\cos\dfrac{2\pi}{n}, -\sin\dfrac{2\pi}{n}\right)$. 当 $n\to\infty$, 有 $\dfrac{2\pi}{n}\to 0$, 所以 $\cos\dfrac{2\pi}{n}\to 1$, $-\sin\dfrac{2\pi}{n}\to 0$. 因此 $p_n\to(1,0)=p$. 但 $f^{-1}(p_n)=t_n=1-\dfrac{1}{n}$（因为 $f(t_n)=p_n$）, 所以 $f^{-1}(p_n)\to 1$（当 $n\to\infty$）. 然而 $f^{-1}(p)=0$. 因此序列 $\{f^{-1}(p_n)\}$ 收敛到 1, 而不是 $f^{-1}(p)=0$. 这说明 f^{-1} 在点 $p=(1,0)$ 处不连续.

习题 10.3

1. 设 (X,d) 是任一度量空间, $\langle x_n\rangle$ 是 X 的任一点序列, $a\in X$ 称为 $\langle x_n\rangle$ 的极限点, 如果

$$(\forall U \in \mathcal{N}(a))(\forall k \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}, n \geqslant k) \Longrightarrow x_n \in U.$$

   1) 证明：a 是 $\langle x_n\rangle$ 的极限点当且仅当 $\langle x_n\rangle$ 有收敛于 a 的子序列 $\langle x_{k_n}\rangle$．
   2) 证明：若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$，则 a 是 $\langle x_n\rangle$ 的唯一极限点.

2. 设 M 是所有 $k\times k$ 实矩阵的集合, $\forall A\in M$ 令

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \|A\|=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}|a_{ij}|.$$

   1) 证明：如此定义的映射 $\|\cdot\|: M\to\mathbb{R}^+$ 是 M 上的一个范数, 因此 $(M,\|\cdot\|)$ 是一赋范空间.
   2) 证明：若 $\langle A_n\rangle$ 收敛于 A, $\langle E_n\rangle$ 收敛于 B，则 $\langle A_nB_n\rangle$ 收敛于 AB．
   3) 设 $\langle A_n\rangle$ 是 M 的可逆矩阵序列, 并且 $\langle A_n\rangle$ 收敛于不可逆矩阵 A．证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|A_n^{-1}\right\|=+\infty$.

3. 设 (X,d) 是任一度量空间, $A\subset X$ 是任一非空集合, $a\in X$，我们称实数

$$d(a,A)=\inf_{x\in A} d(a,x)$$

为 a 与 A 的距离

   1) 证明：$a\in\overline{A} \Longleftrightarrow d(a,A)=0$．
   2) 证明：映射 $x\longmapsto d(x,A), x\in X$，是 Lipschitz 系数为 1 的 Lipschitz 映射, 即

$$\forall x,y\in X, |d(x,A)-d(y,A)|\leqslant d(x,y).$$

4. 设 (X,d) 是任一度量空间, $A\subset X$ 是任一非空集合. 我们称实数

$$d(A)=\sup_{x\in A} d(x,y)$$

为集合 A 的直径, 在 $X^2\times X^2$ 上定义映射 ρ 如下：

$$\forall (x,y),\left(x',y'\right)\in X^2, \rho\left((x,y),\left(x',y'\right)\right)=d\left(x,x'\right)+d\left(y,y'\right).$$

1) 证明：(X^2,ρ) 是一个度量空间.

2) 证明：映射 $(x,y)\mapsto d(x,y),(x,y)\in X^2$, 在 X^2 上是连续的.

3) 证明：$d(A)=d(\overline{A})$.

5. 设 (X,d) 是任一度量空间, $\mathscr{F}$ 是 X 的所有有界闭集的集合. 我们在 $\mathscr{F}$ 上定义 Hausdorff 度量 $\varDelta$ 如下：对任意 $A,B\in\mathscr{F}$, 令

$$\lambda(A,B)=\sup_{x\in A} d(x,B), \varDelta(A,B)=\max\left(\lambda(A,B),\lambda(B,A)\right).$$

证明：

1) $\lambda(A,B)=0 \iff A\subset B$.

2) $\forall A,B,C\in\mathscr{F}$, 有 $\lambda(A,C)\leqslant\lambda(A,B)+\lambda(B,C)$.

3) $\varDelta$ 是 $\mathscr{F}$ 上的一个度量.

4) 映射 $\delta:\mathscr{F}\longrightarrow\mathbb{R}(\forall A\in\mathscr{F},\delta(A)=d(A))$ 连续.

6. 设 (X,d) 与 (Y,D) 是两个度量空间, $f:X\to Y$ 是任一映射. 则下列条件等价：

1) f 在 X 上连续;

2) 对 $(Y,D$ 中任一闭集 F, $f^{-1}(F)$ 是 X 中的闭集;

3) 对任一集合 $A\subset X$, 有 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

7. 设 $A\subset\mathbb{R}^2$ 是一个开集, 函数 $f:A\to\mathbb{R}$ 满足：

1) f 分别关于 x 与 y 连续;

2) f 对其中一个变元是单调的.

证明 f 在 A 上连续.

8. 设函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|xy|^\lambda}{x^2+y^2}, & 若\ (x,y)\neq(0,0),(\lambda\in\mathbb{R});\\ 0, & 若\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

研究 f 在 $(0,0)$ 处的连续性.

9. 设函数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3+z^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, & 若\ (x,y,z)\neq(0,0,0);\\ 0, & 若\ (x,y,z)=(0,0,0).\end{cases}$$

研究 f 在 $(0,0,0)$ 处的连续性.

10. 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是一个开集, $(a,b)\in D$, $f:D\to\mathbb{R}$ 是一个函数. 我们称 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ 为**全面极限**, 而 $\lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right), \lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right)$ 为**累次极限**. 证明：若

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$ 存在;

2) $\forall y, \lim\limits_{x\to a} f(x,y)=h(y)$ 存在;

则累次极限 $\lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right)$ 存在，并且

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) = A.$$

11. 设函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

证明：累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)=0$，但全面极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

12. 设函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, & x\neq 0,\ y\neq 0,\\ 0, & x=0 \text{ 或 } y=0.\end{cases}$$

证明：累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ 与 $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ 都不存在，但全面极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 存在.

13. 计算下列极限：
   1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin xy}{x}$；
   2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y^2\log(x^2+y^2)$；
   3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\log(1+xy)-xy}{x^2y^2}$；
   4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x(x+y)^p}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,(p\geqslant 2)$；
   5) $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,+\infty)}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$；
   6) $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,0)}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

14. 证明：例10.30中的映射 f 的逆映射 f^{-1} 不是连续映射.
15. 证明：$\mathbb{R}$ 中所有非空开区间 (a,b) 都是同胚的.
16. 设 (X,d) 与 (Y,D) 是两个度量空间，$f:X\to Y$ 是任一映射. 我们称 f 是开 (闭) 映射，如果 A 是 X 中的开 (闭) 集. 则 $f(A)$ 是 Y 中的开 (闭) 集.

   现设 $f:X\to Y$ 是一一映射. 证明下述结论互相等价：
   1) f 是同胚映射；
   2) f 是连续的开映射；
   3) f 是连续的闭映射.

10.4 完备度量空间

在第 3 章 § 4 中我们定义了 Cauchy 实数序列, 利用它研究了实数集 $\mathbb{R}$ 的完备性. 对一般度量空间 (X, d) 也可以引进 Cauchy 序列的概念, 并利用它来研究 (X, d) 的完备性.

1. Cauchy 序列

定义 10.14

设 (X, d) 是任一度量空间, $\langle x_n \rangle$ 是 X 的任一点序列, 我们称 $\langle x_n \rangle$ 是 Cauchy 序列, 如果

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n, k \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Rightarrow d\left(x_{n+k}, x_n\right) < \varepsilon.$$

显然, 若点序列 $\langle x_n \rangle$ 收敛, 则 $\langle x_n \rangle$ 是 Cauchy 序列. 反之则不然. 但如果我们考虑的度量空间是 $\left(\mathbb{R}^k, d_i\right)$, 则另当别论, 即成立下面的定理.

定理 10.14 ($\mathbb{R}^k$ 中的 Cauchy 收敛准则)

$\left(\mathbb{R}^k, d_i\right)$ 中的点序列 $\langle x_n \rangle$ 收敛的充分必要条件是: $\langle x_n \rangle$ 为 Cauchy 序列.

证明 $k = 1$ 时, 结论已经证明了. 以下设 $k > 1$.

(必要性) 显然.

(充分性) 设 $\langle \boldsymbol{x}_n \rangle$ 是 $\left(\mathbb{R}^k, d_i\right)$ 的任一 Cauchy 序列, 不失一般性, 我们可以取 d_2. 于是

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N}, n > N) \Rightarrow d_2\left(\boldsymbol{x}_{n+m}, \boldsymbol{x}_n\right) < \varepsilon$$

令 $\boldsymbol{x}_n = (x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{nk})\,(\forall n \in \mathbb{N})$, 则由 $d_2\left(\boldsymbol{x}_{n+m}, \boldsymbol{x}_n\right) < \varepsilon$ 推知

$$\forall n, m \in N, n \geqslant N \Rightarrow \begin{cases} |x_{n+m1} - x_{n1}| < \varepsilon, \\ |x_{n+m2} - x_{n2}| < \varepsilon, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |x_{n+mk} - x_{nk}| < \varepsilon. \end{cases}$$

此即表明 $\forall i = 1, 2, \cdots, k$, 实数序列 $\langle x_{ni} \rangle$ 是 $\mathbb{R}$ 的 Cauchy 序列. 根据 $\mathbb{R}$ 的 Cauchy 收敛准则知, 每一个序列 $\langle x_{ni} \rangle$ 收敛. 令

$$\lim_{n \to +\infty} x_{ni} = \xi_i, \ (i = 1, 2, \cdots, k).$$

根据定理10.7 $\mathbb{R}^k$ 中的点序列 $\langle x_n \rangle$ 收敛于 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k$.

推论 10.4

复数空间 $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ 的点序列 $\langle z_n \rangle$ 收敛的充分必要条件是 $\langle z_n \rangle$ 为 Cauchy 序列.

证明 令 $z_n = x_n + \mathrm{i} y_n$, 则 $\langle z_n \rangle$ 是 Cauchy 序列当且仅当 $\langle x_n \rangle$ 与 $\langle y_n \rangle$ 是 Cauchy 实数序列, 因此推论成立.

下面我们研究的是除了 $\left(\mathbb{R}^k, d_i\right)$ 与 $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ 外还有哪些一般度量空间具有 “Cauchy 序列均收敛” 这一好性质的. 为此引入下述概念.

2. 完备度量空间

定义 10.15

设 (X, d) 是任一度量空间. 我们称它是完备的, 如果它的任一 Cauchy 序列都是收敛的. ♣

根据这一定义及定理 10.14 知, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\left(\mathbb{R}^k, d_i\right)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ 都是完备的度量空间.

下面是另一个典型的完备度量空间的例子.

例题 10.31 在 $C^0([a,b], \mathbb{C})$ 上取一致度量 d :

$$\forall f, g \in C^0([a,b], \mathbb{C}), d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|,$$

则 $\left(C^0([a,b], \mathbb{C}), d\right)$ 是完备度量空间.

为此设 $\langle f_n \rangle$ 是 $\left(C^0([a,b], \mathbb{C}), d\right)$ 的任一 Cauchy 序列. 于是

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, k \in \mathbb{N}, n \geqslant N) \Rightarrow d(f_{n+k}, f_n) = \sup_{x\in[a,b]} |f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

由此推得

$$(\forall n, k \in \mathbb{N}, n \geqslant N)(\forall x \in [a,b]) \Rightarrow |f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{10.2}$$

此即表明 $\forall x \in [a,b]$, 复数序列 $\{f_n(x)\}$ 是 $\mathbb{C}$ 中的 Cauchy 序列, 由 $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ 的完备性知 $\langle f_n(x) \rangle$ 收敛, 于是我们可定义函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 如下:

$$\forall x \in [a,b], f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

现在在式(10.2)中固定 $n \geqslant N$, 令 $k \to +\infty$ 得到

$$(\forall n \in N, n \geqslant N)(\forall x \in [a,b]) \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{10.3}$$

下面首先证明 $f \in C^0([a,b], \mathbb{C})$.

任取 $x_0 \in [a,b]$. 由于上述(10.3), $\forall x \in [a,b]$ 我们有:

$$\begin{aligned}
&|f(x) - f(x_0)| \\
\leqslant &|f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\
< &\varepsilon + |f_N(x) - f_N(x_0)| + \varepsilon \\
= &2\varepsilon + |f_N(x) - f_N(x_0)|.
\end{aligned}$$

因为 $f_N \in C^0([a,b], \mathbb{C})$, 故

$$\begin{aligned}
&(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [a,b] \cap B(x_0, \delta)) \\
\Rightarrow &|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon \\
\Rightarrow &|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

因此 f 在 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性知 $f \in C^0([a,b], \mathbb{C})$.

最后证明 $d(f_n, f) \to 0\ (n \to +\infty)$.

事实上, 由于

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|,$$

故由式(10.3)知, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N, d(f_n, f) \leqslant \varepsilon$. 此即表明 $d(f_n, f) \to 0\ (n \to +\infty)$.

综合上述所证, Cauchy 序列 $\langle f_n \rangle$ 收敛于 f. 因此 $C^0([a,b], \mathbb{C})$ 是完备的度量空间.

注 我们说度量空间 (X, d) 是完备的, 是相对于度量 d 而言, 因此可能出现这种情形: 同一基本集合 X,

对度量 $d,(X,d)$ 是完备的, 而对另一度量 $D,(X,D)$ 又不是完备的. 例如在同一 $C^0([a,b],\mathbb{C})$ 上, 我们定义度量 D 为:

$$\forall f,g \in C^0([a,b],\mathbb{C}), D(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x,$$

可以证明 $\left(C^0([a,b],\mathbb{C}), D\right)$ 不是完备的 (见习题第 4 题).

但如果 d 与 D 是等价度量, 则 (X,d) 是完备的 $\Leftrightarrow$ (X,D) 是完备的.

非完备度量空间的最简单例子就是熟知的实数空间 $(\mathbb{R},|\cdot|)$ 的有理数子空间 $\left(\mathbb{Q},|\cdot|_{\mathbb{Q}}\right)$.

3. 完备度量空间的不动点定理

定理 10.15 (Banach 不动点定理)

设 (X,d) 是一完备度量空间, $f: X \to X$ 是一压缩映射, 即 $\forall x,y \in X, d(f(x),f(y)) \leqslant \lambda d(x,y)\ (0 \leqslant \lambda < 1)$, 则存在唯一的 $a \in X$, 使得 $f(a) = a$.

证明 任取 $x_0 \in X$, 令

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \cdots, x_{n+1} = f(x_n) \cdots$$

于是我们得到 X 的点序列 $\langle x_n \rangle$.

下面证明 $\langle x_n \rangle$ 是 (X,d) 的 Cauchy 序列.

首先, 由 f 的压缩性, 我们有: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leqslant \lambda d(x_{n-1}, x_n) \leqslant \cdots \leqslant \lambda^n d(x_0, x_1).$$

因此 $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+k}) &\leqslant d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \\ &\leqslant \left(\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots + \lambda^{n+k-1}\right) d(x_0, x_1) \\ &< \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

若 $d(x_0,x_1) = 0$, 则 $x_0 = f(x_0)$.

若 $d(x_0,x_1) \neq 0$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0,x_1) < \varepsilon$ 得到 $n > \log\left(\frac{\varepsilon(1-\lambda)}{d(x_0,x_1)}\right) / \log\lambda$. 令

$$N = 1 + \left[\log\left(\frac{\varepsilon(1-\lambda)}{d(x_0,x_1)}\right) / \log\lambda\right],$$

则

$$\forall n,k \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow d(x_n, x_{n+k}) < \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0,x_1) < \varepsilon.$$

此即表明 $\langle x_n \rangle$ 是 (X,d) 的 Cauchy 序列.

因为 (X,d) 是完备的, 所以 $\langle x_n \rangle$ 在 X 中收敛, 令 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, 则 $a \in X$.

再证 a 是 f 的不动点, 即 $a = f(a)$.

由 f 的压缩性知, f 在 X 上连续 (实际上还是一致连续的). 在 $x_{n+1} = f(x_n)$ 的两边令 $n \to +\infty$ 取极限得到 $a = f(a)$.

最后证明不动点的唯一性.

假设存在 $b \in X$ 使得 $b = f(b)$ 且 $b \neq a$, 那么

$$d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leqslant \lambda d(a,b),$$

由于 $0 \leqslant \lambda < 1$，故必有 $d(a,b) = 0$ 或 $a = b$，矛盾. 因此 a 是 f 的唯一不动点.

注 从定理的证明过程可知，若 Y 是完备度量空间 (λ, d) 的闭集，$f: Y \to Y$ 是一压缩映射，则存在 f 的唯一不动点 $a \in Y$.

Banach 不动点定理是一个非常重要的定理，它在微分方程、代数方程的求解，计算数学的数值计算等许多数学研究领域中有着广泛的应用.

习题 10.4

1. 设 (X,d) 是任一度量空间，$\langle x_n \rangle$、$\langle y_n \rangle$ 是 X 中的两个点序列. 证明：
   1) 若 $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle$ 为 Cauchy 序列，则 $\langle d(x_n, y_n) \rangle$ 收敛.
   2) 若 $\langle x_n \rangle$ 是 Cauchy 序列，$d(x_n, y_n) \to 0$（$n \to +\infty$），则 $\langle y_n \rangle$ 也是 Cauchy 序列.
2. 设 (X,d) 是任一度量空间，$Y \subset X$ 是任一非空集合. 证明：(X,d) 的子空间 (Y, d_Y) 是完备的充分必要条件是 Y 为 X 的闭集.
3. 设 (X,d) 是任一度量空间，$A \subset X$ 且 $A \neq \varnothing$，

$$d(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y).$$

   为集合 A 的直径，证明：(X,d) 是完备的充分必要条件是：对 X 中任意一列闭集 $\langle A_n \rangle$，若

$$A_{n+1} \subset A_n, \lim_{n \to +\infty} d(A_n) = 0,$$

   则 $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ 是单点集.
4. 在 $C^0([0,1], \mathbb{C})$ 上定义度量 D 如下：

$$\forall f, g \in C^0([0,1], \mathbb{C}), D(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x.$$

   1) $\forall n \in \mathbb{N}$，定义函数 $f_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ 为

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1. \\ 1 - n\left(x - \dfrac{1}{2}\right), & \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

   证明：$f_n \in C^0([0,1], \mathbb{C})$，且 D 是 $C^0([0,1], \mathbb{C})$ 上的度量.

   2) 证明：$\langle f_n \rangle$ 是度量空间 $(C^0([0,1], \mathbb{C}), D)$ 中的 Cauchy 序列，但 $\langle f_n \rangle$ 在 $(C^0([0,1], \mathbb{C}), D)$ 中不收敛. 因此，$(C^0([0,1], \mathbb{C}), D)$ 不是完备度量空间.

解： 1）的结论是显然的.

2）证明 $\{f_n\}$ 是 Cauchy 序列但在 $\left(C^0([0,1], \mathbb{C}), D\right)$ 中不收敛：

先证 $\{f_n\}$ 是 Cauchy 序列：

对于 $m > n$，考虑 $D(f_n, f_m) = \displaystyle\int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| \, dx$. 注意 f_n 和 f_m 仅在 $x \in \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\right)$ 上可能不同（因为 $m > n$，所以 $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{m} < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}$）. 具体地：

当 $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ 时，$f_n(x) = f_m(x) = 1$.

当 $x \in \left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}, 1\right]$ 时，$f_n(x) = f_m(x) = 0$.

当 $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{m}\right]$ 时，两者都线性下降，但形式不同.
当 $x \in \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{m}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)$ 时，$f_m(x)=0$ 而 $f_n(x)>0$.
实际上，$|f_n(x)-f_m(x)| \leqslant 1$（因为函数值在 0 和 1 之间），且非零的区域长度不超过 $\frac{1}{n}$（因为 $m>n$，所以差异主要出现在 $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)$ 上）. 因此：

$$D\left(f_n, f_m\right) \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} 1 \mathrm{d} x=\frac{1}{n}$$

所以对于任意 $\varepsilon>0$，取 N 使得 $1/N<\varepsilon$，则当 $m>n>N$ 时，有 $D\left(f_n, f_m\right) \leqslant \frac{1}{n}<\varepsilon$. 故 $\{f_n\}$ 是 Cauchy 序列.
再证 $\{f_n\}$ 在 $\left(C^0([0,1], \mathbb{C}), D\right)$ 中不收敛：
假设存在连续函数 $g \in C^0([0,1], \mathbb{C})$ 使得 $D\left(f_n, g\right) \rightarrow 0$，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1\left|f_n(x)-g(x)\right| \mathrm{d} x=0$$

我们导出矛盾. 考虑区间 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{1}{2}+\delta, 1\right]$，其中 $0<\delta<\frac{1}{2}$ 是任意小的正数.
1. 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上：对于所有 n，当 $x \in\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 时，$f_n(x)=1$. 因此,

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f_n(x)-g(x)\right| \mathrm{d} x=\int_0^{\frac{1}{2}}|1-g(x)| \mathrm{d} x$$

由于 $D\left(f_n, g\right) \rightarrow 0$，特别地,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}}|1-g(x)| \mathrm{d} x=0$$

因为被积函数非负且连续，所以必须有 $g(x)=1$ 对所有 $x \in\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 成立（否则积分恒正，不会趋于零）.
2. 在 $\left[\frac{1}{2}+\delta, 1\right]$ 上: 取 N 足够大使得 $\frac{1}{N}<\delta$, 则当 $n>N$ 时, $\frac{1}{n}<\delta$, 所以对于 $x \in\left[\frac{1}{2}+\delta, 1\right]$, 有 $x \geq \frac{1}{2}+\delta>\frac{1}{2}+\frac{1}{n}$, 因此 $f_n(x)=0$. 于是,

$$\int_{\frac{1}{2}+\delta}^1\left|f_n(x)-g(x)\right| \mathrm{d} x=\int_{\frac{1}{2}+\delta}^1|0-g(x)| \mathrm{d} x=\int_{\frac{1}{2}+\delta}^1|g(x)| \mathrm{d} x .$$

同样由 $D\left(f_n, g\right) \rightarrow 0$，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{2}+\delta}^1|g(x)| \mathrm{d} x=0$$

由于被积函数非负且连续，所以必须有 $g(x)=0$ 对所有 $x \in\left[\frac{1}{2}+\delta, 1\right]$ 成立.
现在，由于 $\delta>0$ 是任意的，令 $\delta \rightarrow 0^{+}$，我们得到：
在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上, $g(x)=1$. 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 上, $g(x)=0$（因为对任意 $x>\frac{1}{2}$, 总存在 $\delta>0$ 使得 $x \geqslant \frac{1}{2}+\delta$, 从而 $g(x)=0$）.

因此

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

但 g 在 $x = \frac{1}{2}$ 处不连续（左极限为 1，右极限为 0），这与 $g \in C^0([0,1],\mathbb{C})$ 矛盾. 即我们证明了极限函数不在 $C^0([a,b],\mathbb{C})$ 中.

5. 设 (X,d) 与 (Y,D) 是两个度量空间, 其中 (Y,D) 是完备的, $A \subset X$ 是 X 的一稠密集 $(\overline{A} = X)$. 证明：若 $f : A \to Y$ 是任一连续映射, 则存在唯一的映射 $\tilde{f} : X \to Y$ 使得
   1) $\widetilde{f}$ 在 X 上一致连续,
   2) $\widetilde{f}\big|_A = f$.

   此结论称为连续延拓定理, $\widetilde{f}$ 称为 f 的延拓.
6. 设 (X,d)、(Y,D) 是两个度量空间, $f : X \to Y$ 是一致连续映射.
   1) 证明：若 $\langle x_n \rangle$ 是 (X,d) 中的 Cauchy 序列, 则 $\langle f(x_n) \rangle$ 是 (Y,D) 中的 Cauchy 序列.
   2) 证明：若 f 是一一映射, 且 $f^{-1} : Y \to X$ 也是一致连续的, 则 (X,d) 是完备的当且仅当 (Y,D) 是完备的.
7. 设 (X,d) 是完备度量空间, $f : X \to X$ 是一个映射, 记

$$f^0 = \mathrm{id}_X, f^{n+1} = f \circ f^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

   证明：若存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $f^m : X \to X$ 是压缩映射, 则 f 存在唯一的不动点 $a \in X$ 使得

$$\forall x_0 \in X, a = \lim_{n \to +\infty} f^n(x_0).$$

8. 设 (X,d)、(Y,D) 是两个度量空间, (X,d) 是完备的, 映射 $f : X \times Y \to X$ 满足下述两个条件：
   1) 存在 $0 \leqslant \lambda < 1$, 使得 $\forall t \in Y$, 映射 $f_t : x \mapsto f(x,t), x \in X$ 是压缩系数为 λ 的压缩映射, 即

$$\forall x, y \in X, d(f_t(x), f_t(y)) \leqslant \lambda d(x,y);$$

   2) $\forall x \in X$, 映射 $t \mapsto f(x,t)$, $t \in Y$ 是连续的.

   证明：若 a_t 是 f_t 的唯一不动点, 则映射 $t \mapsto a_t, t \in Y$ 在 Y 上连续.

10.5 紧度量空间

从第 3 章 §4 的 Cantor 有限覆盖定理 (定理3.10) 知道, $\mathbb{R}$ 的有限闭区间的一个重要性质就是它具有有限开覆盖性. 现在我们在一般度量空间中研究这种有限开覆盖性, 这就是下面介绍的紧集概念.

1. 紧度量空间与紧集概念

定义 10.16

设 (X,d) 是任一度量空间, $A \subset X$ 是任一非空集合, $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 X 的一族开集.

1. 若 $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, 则我们称 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 A 的一个开覆盖.
2. 设 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 A 的开覆盖, 若存在有限个 $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \cdots, U_{\lambda_m}$ 使得 $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{\lambda_i}$, 则我们称 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 有有限的开子覆盖 $\{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \cdots, U_{\lambda_m}\}$.

♣

定义 10.17

设 (X,d) 是任一度量空间.

1. 我们称 (X,d) 是紧度量空间, 如果 X 的任一开覆盖都有一个有限的开子覆盖.
2. 设 $Y \subset X$ 是任一非空集合, 我们称 Y 是紧集, 如果子空间 (Y, d_Y) 是紧的.

2. 紧度量空间的性质

首先我们给出紧度量空间与完备度量空间关系的下述性质.

定理 10.16

若 (X,d) 是紧度量空间, 则 (X,d) 是完备的.

证明 用反证法证明. 假设 (X,d) 不是完备的. 于是存在 (X,d) 的一个 Cauchy 序列 $\langle x_n\rangle$ 使得它在 X 中不收敛. 因此 $\forall y \in X, \langle x_n\rangle$ 不收敛于 y. 从而存在 $\varepsilon_y > 0$ 使得

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists k_n \in \mathbb{N}, k_n \geqslant n) \Rightarrow d\left(x_{k_n}, y\right) > 2\varepsilon_y.$$

由于 $\langle x_n\rangle$ 是 Cauchy 序列, 故

$$(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n,m \in \mathbb{N}, n,m \geqslant N) \Rightarrow d\left(x_n, x_m\right) < \varepsilon_y.$$

取 $m = k_N$, 则 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N$ 有

$$d\left(x_n, y\right) \geqslant d\left(x_{k_N}, y\right) - d\left(x_n, x_{k_N}\right) > 2\varepsilon_y - \varepsilon_y = \varepsilon_y.$$

由此可知, 在开球 $B\left(y, \varepsilon_y\right)$ 中最多只包含 $\langle x_n\rangle$ 的有限多项.

现在由 y 的任意性, $X = \bigcup\limits_{y\in X} B\left(y, \varepsilon_y\right)$. 因为 (X,d) 是紧的, 所以存在有限多个 $y_1, y_2, \cdots, y_m \in X$ 使得 $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m} B\left(y_i, \varepsilon_{y_i}\right)$. 由于每一个 $B\left(y_i, \varepsilon_{y_i}\right)$ 最多只包含 $\langle x_n\rangle$ 的有限多项, 故 $\langle x_n\rangle$ 就不是一个无穷点序列. 此矛盾说明 (X,d) 必是完备的.

这个定理的逆显然是不成立. 例如实数空间 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 是完备的, 但它不是紧的. 然而对定理再附加某些条件, 仍可以保证其紧性成立 (见习题第 2 题).

下面定理所述的性质可以作为紧度量空间的一个等价定义.

定理 10.17

度量空间 (X,d) 是紧的充分必要条件是 X 的每一个点序列 $\langle x_n\rangle$ 都有收敛的子序列.

证明 (必要性) 设 (X,d) 是紧的. $\langle x_n\rangle$ 是 X 的任一点序列. 为了证明 $\langle x_n\rangle$ 有收敛子序列, 我们来证明下述结论成立.

$$(\exists \overline{x} \in X)\,(\forall r > 0)\left(\exists x_{n(r)} \in X\right) \Rightarrow x_{n(r)} \in B\left(\overline{x}, r\right).$$

用反证法. 假设此结论不成立, 那么

$$(\forall y \in X)\left(\exists r_y > 0\right) \text{ 使得 } \forall n \in \mathbb{N}, x_n \notin B\left(y, r_y\right).$$

于是 $X = \bigcup\limits_{y\in X} B\left(y, r_y\right)$. 由 (X,d) 的紧性知, 存在有限多个 $y_1, y_2, \cdots, y_m \in X$ 使得 $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m} B\left(y_i, r_{y_i}\right)$.

然而这不可能, 因为每一个 $B\left(y_i, r_{y_i}\right)$ 中不包含任一 x_n. 此矛盾说明上述结论成立.

取 $r = \dfrac{1}{k}\ (k \in \mathbb{N})$, 于是存在 x_{n_k} 使得 $x_{n_k} \in B\left(\overline{x}, \dfrac{1}{k}\right)$. 我们可以假设 $n_k < n_{k+1}$, 于是我们得到

$\langle x_n\rangle$ 的一个子序列 $\langle x_{n_k}\rangle$, 它显然收敛于 $\overline{x}$.

为了证明充分性, 我们先来证明一个可作为独立结论的命题.

命题 10.3

若度量空间 (X,d) 的每一个点序列都有收敛的子序列, 则对 X 的任一开覆盖 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, 存在正数 β (称为 Lebesgue 数), 它具有下述性质:

$$(\forall x\in X)\,(\exists\lambda\in\Lambda)\Rightarrow B\,(x,\beta)\subset U_\lambda.$$

证明 用反证法证明. 假设对 X 的某一个开覆盖 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, 不存在具有上述性质的正数 β. 那么

$$(\forall n\in\mathbb{N})\,(\exists x_n\in X)\,(\forall\lambda\in\Lambda)\Rightarrow B\left(x_n,\frac{1}{n}\right)\not\subset U_\lambda.$$

由此得到 X 的一点序列 $\langle x_n\rangle$. 根据已知条件, $\langle x_n\rangle$ 有收敛子序列 $\langle x_{n_k}\rangle$, 令 $\overline{x}=\lim\limits_{k\to+\infty}x_{n_k}$. 于是存在 $\lambda_0\in\Lambda$ 使得 $\overline{x}\in U_{\lambda_0}$. 由于 U_{λ_0} 是开集, 故存在 $r>0$, 使得 $B\,(\overline{x},r)\subset U_{\lambda_0}$.

另一方面, 由于 $x_{n_k}\to\overline{x}\,(k\to+\infty)$, 故存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $x_{n_N}\in B\left(\overline{x},\frac{r}{2}\right)$, 并且 $\frac{1}{n_N}<\frac{r}{2}$, 于是

$$\begin{aligned}\forall y\in B\left(x_{n_N},\frac{1}{n_N}\right), d\,(y,\overline{x}) &\leqslant d\,(y,x_{n_N})+d\,(x_{n_N},\overline{x})\\ &<\frac{1}{n_N}+\frac{r}{2}<r\end{aligned}$$

此即表明 $B\left(x_{n_N},\frac{1}{n_N}\right)\subset B\,(\overline{x},r)\subset U_{\lambda_0}$, 这与前面的结论 $B\left(x_{n_N},\frac{1}{n_N}\right)\not\subset U_\lambda\,(\forall\lambda\in\Lambda)$ 相矛盾, 故命题得证.

现在我们可以来证明定理的充分性.

(充分性) 假设 X 的任一点序列都有收敛子序列, $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 X 的任一开覆盖.

根据上述命题, 存在与 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 相对应的 Lebesgue 数 β. 如果我们能证明:

$$\text{存在}\ \ x_1,x_2,\cdots,x_m\in X, X=\bigcup_{i=1}^{m}B\,(x_i,\beta),$$

则由数 β 的性质知, 对每一个 $i=1,2,\cdots,m$, 存在 U_{λ_i} 使得 $B\,(x_i,\beta)\subset U_{\lambda_i}$, 于是 $X=\bigcup\limits_{i=1}^{m}U_{\lambda_i}$. 从而 X 的开覆盖 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 有有限的开子覆盖 $\{U_{\lambda_1},U_{\lambda_2},\cdots,U_{\lambda_m}\}$.

为此任取 $x_1\in X$. 若 $B\,(x_1,\beta)=X$, 则结论证毕. 否则存在 $x_2\in X-B\,(x_1,\beta)$, 于是 $d\,(x_2,x_1)>\beta$. 若 $B\,(x_1,\beta)\cup B\,(x_2,\beta)=X$, 则结论证毕. 否则存在 $x_3\in X-(B\,(x_1,\beta)\cup B\,(x_2,\beta))$, 于是 $d\,(x_3,x_1)>\beta, d\,(x_3,x_2)>\beta$.

如果上述过程经有限 m 次后结束, 即存在 $x_1,x_2,\cdots,x_m\in X$ 使得 $X=\bigcup\limits_{i=1}^{m}B\,(x_i,\beta)$, 则结论成立. 因此不妨假设此过程可无限继续下去, 从而得到一无穷点序列 $\langle x_n\rangle$ 使得

$$d\,(x_n,x_m)>\beta,\ \forall n,m\in\mathbb{N}\ \text{且}\ \ n\neq m.$$

显然此点序列 $\langle x_n\rangle$ 不可能有任何收敛子序列. 这与充分性的假设相矛盾. 定理证毕.

例题 10.32 实数空间 $(\mathbb{R},|\cdot|)$ 不是紧的.

因为自然数序列 $\langle n\rangle$ 没有收敛的子序列.

我们知道, 对实数空间 $(\mathbb{R},|\cdot|)$, 有理数集 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密, 这个性质可以推广到一般紧度量空间上去, 即成立下述定理.

定理 10.18

任一紧度量空间 (X,d) 都有可数稠密集存在, 即存在 X 的一点序列 $\langle x_n\rangle$, 使得

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x_n \in B(x,\varepsilon).$$

(我们也称紧度量空间具有可分性).

证明 $\forall n \in \mathbb{N}, X$ 有开覆盖 $\left\{B\left(x,\frac{1}{n}\right)\right\}_{x\in X}$. 由于 (X,d) 是紧的, 故存在 X 的一有限集 F_n 使得 $X = \bigcup_{x\in F_n} B\left(x,\frac{1}{n}\right)$.

令 $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, 则 F 是可数集.

下面我们来证明 F 是 X 的稠密集. 事实上, 设 $F = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$.$\forall \varepsilon > 0$, 取 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{N} < \varepsilon$. 由于 $X = \bigcup_{y\in F_N} B\left(y,\frac{1}{N}\right)$, 故 $\forall x \in X$, 存在 $x_i \in F_N$ 使得 $x \in B\left(x_i,\frac{1}{N}\right)$. 由此推得

$$x_i \in B\left(x,\frac{1}{N}\right) \subset B(x,\varepsilon).$$

下面我们来研究度量空间的紧集.

3. 紧集的性质

直接按紧集的定义去判断度量空间的集合的紧性不方便, 下面几个定理刻划了紧集的特征性质, 利用它们去证明集合的紧性是行之有效的.

定理 10.19

设 (X,d) 是任一度量空间, $Y \subset X$ 是任一非空集合, 则 Y 是紧的充分必要条件是: Y 的任一 X 的开集族覆盖有有限开子覆盖.

证明 (必要性) 设 Y 是紧集. $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 Y 的任一 X 的开集族覆盖. 于是 $Y \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. $\forall \lambda \in \Lambda$, 令 $V_\lambda = U_\lambda \cap Y$, 则 V_λ 是 Y 的开集并且

$$Y \subset \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) \cap Y = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (U_\lambda \cap Y) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda.$$

此即表明 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是由 Y 的开集组成的 Y 的一个开覆盖. 由 Y 的紧性假设, 存在开子覆盖 $\left\{V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \cdots, V_{\lambda_m}\right\}$. 因此

$$Y \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{\lambda_i} \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{\lambda_i}.$$

(充分性) 设 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 Y 的任一 Y 的开集覆盖. 于是 $\forall \lambda \in \Lambda$, 存在 X 的开集 U_λ 使得 $V_\lambda = U_\lambda \cap Y$. 由于

$$Y = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (U_\lambda \cap Y) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda,$$

故 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 Y 的一个 X 的开集覆盖, 由充分性假设知, $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 有有限的开子覆盖 $\left\{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \cdots, U_{\lambda_m}\right\}$ 于是

$$Y = Y \cap Y \subset \left(\bigcup_{i=1}^{m} U_{\lambda_i}\right) \cap Y = \bigcup_{i=1}^{m} V_{\lambda_i}.$$

此即表明 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 有有限开子覆盖 $\left\{V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \cdots, V_{\lambda_m}\right\}$. 因此 Y 是紧的.

定理 10.20

设 (X,d) 是任一度量空间, $Y \subset X$ 是任一非空集合, 则 Y 是紧集的充分必要条件是: Y 的任一点序列有在 Y 中收敛的子序列.

证明 直接由紧集的定义及定理10.17 推出.

推论 10.5

设 (X,d) 是任一度量空间, $A \subset X$ 是任一紧集, 则

1. A 是 X 的闭集.
2. 若 $B \subset A$ 是闭集, 则 B 也是紧集.

证明 1) 设 $\langle x_n \rangle$ 是 A 的任一点序列使得 $x_n \to x\ (n \to +\infty)$. 我们来证明 $x \in A$.

事实上, 由 A 的紧性知, $\langle x_n \rangle$ 有在 A 中收敛的子序列 $\left\langle x_{k_n} \right\rangle$. 从而

$$\lim_{n\to+\infty} x_{k_n} = \lim_{n\to+\infty} x_n = x \in A.$$

由定理10.9知 A 是闭集.

2) 设 $B \subset A$ 是任一闭集, $\langle x_n \rangle$ 是 B 的任一点序列. 由于 $\langle x_n \rangle$ 也是紧集 A 的点序列, 故 $\langle x_n \rangle$ 有在 A 中收敛的子序列 $\left\langle x_{k_n} \right\rangle$. 令 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n} = x$, 于是 $x \in A$.

另一方面, 因为 B 是闭集, 故 $x \in B$. 此即表明 $\langle x_n \rangle$ 有在 B 中收敛的子序列 $\left\langle x_{k_n} \right\rangle$. 因此 B 是紧的.

例题 10.33 实数空间 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 的下述各集合都不是紧的:

1. 自然数集 $\mathbb{N}$, 整数集 $\mathbb{Z}$,
2. 有理数集 $\mathbb{Q}$, 无理数集 $\mathbb{Q}^c$.
3. $(a,b), (a,b], [a,b), (a<b)$.

注 度量空间的闭集不一定是紧集. 例如对实数空间 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $\mathbb{R}$ 是闭的, 但它不是紧的. 下面定理是关于度量空间 $\left(\mathbb{R}^k, d_i\right)$ 的紧集的判别准则.

定理 10.21

设 $A \subset \mathbb{R}^m$ 是任一非空集合, 则 A 是 $\left(\mathbb{R}^m, d_i\right)$ 的紧集的充分必要条件是: A 为有界闭集.

(我们称度量空间 (X,d) 的集合 A 是有界的, 如果存在一开球 $B(a,r)$ 使得 $A \subset B(a,r)$).

证明 (必要性) 设 A 为紧集, 由上述推论知, A 是闭集, 下证 A 是有界集.

考虑 $\mathbb{R}^m$ 的开覆盖 $\{B(\mathbf{0},n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, 由于 $A \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B(\mathbf{0},n)$, 故由定理 10.19 知, A 包含在有限个开球 $B(\mathbf{0},n_i)\ (i=1,2,\cdots,l)$ 的并内, 于是存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $A \subset B(\mathbf{0},N)$ 因此 A 是有界集.

(充分性) 设 A 是有界闭集. $\langle x_n \rangle$ 是 A 的任一点序列. 我们来证明 $\langle x_n \rangle$ 有在 A 中收敛的子序列. 为此令

$$x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{nm})\ \ (n \in \mathbb{N}).$$

由于 A 有界, 故 $\forall i = 1,2,\cdots,m$, $\langle x_{ni} \rangle$ 是有界实数序列.

对 $\langle x_{n1} \rangle$, 由 Bolzano-Weierstrass 定理, 存在收敛的子序列 $\left\langle x_{k_n^{(1)}1} \right\rangle$, 令

$$\lim_{n\to+\infty} x_{k_n^{(1)}1} = \xi_1 \in \mathbb{R}\ (n \to +\infty).$$

对 $\langle x_{n2}\rangle$ 的子序列 $\left\langle x_{k_n^{(1)}2}\right\rangle$. 同理有收敛子序列 $\left\langle x_{k_n^{(2)}2}\right\rangle$, 令 $x_{k_n^{(2)}2}=\xi_2\in\mathbb{R}$, 于是

$$x_{k_n^{(2)}1}\to\xi_1, x_{k_n^{(2)}2}\to\xi_2\ \ (n\to+\infty).$$

如此继续 k 次后, 我们得到自然数序列 $\langle n\rangle$ 的一个子序列 $\left\langle k_n^{(m)}\right\rangle$, 使得

$$x_{k_n^{(m)}1}\to\xi_1, x_{k_n^{(m)}2}\to\xi_2,\cdots,x_{k_n^{(m)}m}\to\xi_m\ (n\to+\infty).$$

由于

$$\boldsymbol{x}_{k_n^{(m)}1}=\left(x_{k_n^{(m)}2},x_{k_n^{(m)}},\cdots,x_{k_n^{(m)}m}\right)\ (\forall n\in\mathbb{N}),$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\boldsymbol{x}_{k_n^{(m)}}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)$. 因为 A 是闭的, 所以 $(\xi_1,\xi_2\ ,\cdots,\xi_m)\in A$. 此即表明 $\langle\boldsymbol{x}_n\rangle$ 有在 A 中收敛的子序列 $\left\langle\boldsymbol{x}_{k_n^{(m)}}\right\rangle$, 从而 A 是紧集.

例题 10.34 $(\mathbb{R}^n,d_i)$ 中的任一闭球 $\overline{B}(a,r)$ 及

$$\mathbb{P}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

都是紧集. 因为它们是 $(\mathbb{R}^n,d_i)$ 中的有界闭集.

注意定理10.21不能推广到一般度量空间中去. 例如, 在无穷维赋范向量空间 $(X,\|\cdot\|)$ 中, 单位球 $V=\{x\in X\mid\|x\|\leqslant 1\}$ 就不是紧集. 可以证明一个赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$ 的单位球 V 是紧的当且仅当 X 是有限维的. (例如见 W · Rudin,《泛函分析》, (中译本). 湖北教育出版社, (1989))

下面关于紧集的一个性质类似于实数空间中的闭区间套定理.

定理 10.22

设 (X,d) 是任一度量空间, $F_n\subset X\ (n\in\mathbb{N})$ 是任一紧集序列, 使得 $F_{n+1}\subset F_n\ (\forall n\in\mathbb{N})$, 则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing$$

如果 F_n 的直径 $d(F_n)=\sup\limits_{x,y\in F_n}d(x,y)\to 0\,(n\to+\infty)$, 则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$ 是一单点集.

证明 $\forall n\in\mathbb{N}$, 任取 $x_n\in F_n$. 由此得到 F_1 的一点序列 $\langle x_n\rangle$. 由 F_1 的紧性知 $\langle x_n\rangle$ 有在 F_1 中收敛的子序列 $\langle x_{k_n}\rangle$. 令 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{k_n}=\overline{x}\in F_1$. 我们来证明

$$\overline{x}\in\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$$

$\forall n\in\mathbb{N}\,(n\geqslant 2)$, $\langle x_{k_{n+m}}\rangle$ 是 F_n 的点序列, 由 F_n 的紧性知, $\langle x_{k_{n+m}}\rangle$ 有在 F_n 中收敛的子序列, 不失一般性, 可以假设 $\lim\limits_{m\to+\infty}x_{k_{n+m}}=x'\in F_n$. 显然 $x'=\overline{x}$. 因此 $\overline{x}\in F_n$, 从而

$$\overline{x}\in\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$$

若 $d(F_n)\to 0\,(n\to+\infty)$, 并且 $x^*\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$, 则

$$d\left(\overline{x},x^*\right)\leqslant d\left(F_n\right)\ \forall\,(n\in\mathbb{N}),$$

从而 $d\left(\overline{x},x^*\right)=0$, 即 $x^*=\overline{x}$, 故

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=\{\overline{x}\}.$$

4. 紧集上连续映射的性质

定理 10.23

设 (X,d) 与 (Y,D) 是两个度量空间, $A \subset X$ 是任一非空集合, $f: A \to Y$ 是任一连续映射, 若 A 是紧集, 则 $f(A)$ 是 Y 的紧集.

证明 设 $\langle y_n \rangle$ 是 $f(A)$ 的任一点序列, 令 $x_n \in A$ 使得 $f(x_n) = y_n \ (n \in \mathbb{N})$.

由 A 的紧性知, $\langle x_n \rangle$ 有在 A 中收敛的子序列 $\langle x_{k_n} \rangle$. 令 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{k_n} = \overline{x}$, 则 $\overline{x} \in A$. 于是由 f 的连续性推得

$$\lim_{n \to +\infty} y_{k_n} = \lim_{n \to +\infty} f(x_{k_n}) = f(\overline{x}) \in f(A).$$

此即表明 $\langle y_n \rangle$ 有在 $f(A)$ 中收敛的子序列 $\langle y_{k_n} \rangle$. 因此 $f(A)$ 是 Y 的紧集.

例题 10.35 证明: $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, (a,b)$ 与 $[a,b]$ 不同胚. § 3 例 10.30 中的 $[0,1)$ 不同胚.

事实上, 若 (a,b) 与 $[a,b]$ 同胚, 则存在同胚映射 $f\colon [a,b] \to (a,b)$. 由于 $[a,b]$ 是 $\mathbb{R}$ 中的紧集, 故 $f([a,b]) = (a,b)$ 也是 $\mathbb{R}$ 中的紧集, 这不可能, 因为 (a,b) 不是闭集.

同理, 若 $[0,1)$ 与 S^1 同胚, 则推出 $[0,1)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的紧集的矛盾.

定理10.23表明集合的紧性是连续映射下的一个不变性质. 在下一节我们将研究度量空间的其他的不变性质.

定理 10.24

设 (X,d) 是任一度量空间, $A \subset X$ 是任一紧集, $f: A \to \mathbb{R}$ 是任一连续函数. 则

1. f 在 A 上是有界的.
2. 存在 $x^*, x_* \in A$ 使得 f 在这两点处分别达到它的最大值与最小值, 即

$$f(x^*) = \sup_{x \in A} f(x), f(x_*) = \inf_{x \in A} f(x).$$

证明 首先由于 A 是紧集, f 连续, 故 $f(A)$ 是 $\mathbb{R}$ 的紧集, 从而是 $\mathbb{R}$ 的有界闭集, 因此 $f(A)$ 的上、下确界存在, 令

$$y* = \sup_{x \in A} f(x), y_* = \inf_{x \in A} f(x),$$

则 $y*, y_* \in f(A)$. 于是存在 $x^*, x_* \in A$ 使得

$$y^* = f(x^*), y_* = f(x_*).$$

此定理是我们在第 4 章中研究过的一元实值函数 Weierstrass 定理 (定理4.9) 的推广.

定理 10.25

设 (X,d) 与 (Y,D) 是两个度量空间, $A \subset X$ 是任一紧集, $f: A \to Y$ 是任一映射, 若 f 在 A 上连续, 则 f 在 A 上一致连续.

证明 因为 f 在 A 上连续, 所以

$$(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_x > 0)(\forall y \in B(x, \delta_x) \cap A) \Rightarrow D(f(y), f(x)) < \varepsilon/2.$$

由此得到 A 的一个开覆盖 $\{B(x,\delta_x) \cap A\}_{x \in A}$. 令 β 为与之对应的 Lebesgue 数. 则

$$(\forall y, y' \in A, d(y, y') < \beta)(\exists x_0 \in A) \Rightarrow y, y' \in B(x_0, \delta_{x_0}) \cap A$$

于是

$$D\left(f\left(y\right),f\left(y'\right)\right)\leqslant D\left(f\left(y\right),f\left(x_0\right)\right)+D\left(f\left(x_0\right),f\left(y'\right)\right)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

因此 f 在 A 上一致连续.

这个定理是定义在有界闭区间上一元实值连续函数一致连续性定理4.10的推广.

习题 10.5

1. 设 (X,d) 是任一紧度量空间, $A\subset X$ 是非空子集. 证明 A 是紧集的充分必要条件是 A 为闭集.
2. 设 (X,d) 是任一度量空间, 我们称它是全有界的, 如果 $\forall\varepsilon>0$, 存在有限集 F 使得 $X=\bigcup\limits_{x\in F}B(x,\varepsilon)$.($F$ 称为 (X,d) 的有限 ε–网). 证明: (X,d) 是完备及全有界的, 则 (X,d) 是紧的.
3. 设 (X,d) 是任一度量空间, $A\subset X$ 是一紧集, $B\subset X$ 是一闭集使得 $A\cap B=\varnothing$. 证明: A 与 B 之间的距离
$$d(A,B)=\inf_{(x,y)\in A\times B}d(x,y)>0.$$
4. 设 (X,d) 是任一度量空间, $A,B\subset X$ 是任意两个紧子集. 证明: 存在 $(a,b)\in A\times B$, 使得
$$d(a,b)=d(A,B).$$
如果 $X=\mathbb{R}^n$, 则当 $A\subset\mathbb{R}^n$ 为紧集, $B\subset\mathbb{R}^n$ 为闭集时上述结论仍然成立.
5. 设 (X,d) 是任一紧度量空间, $f:X\to X$ 满足:
$$\forall x,y\in X,\text{且 } x\neq y\Rightarrow d(f(x),f(y))<d(x,y).$$
证明: f 有唯一的不动点.
6. 设 (X,d) 是任一紧度量空间, $f:X\to X$ 满足:
$$\forall x,y\in X,d(f(x),f(y))\geqslant d(x,y).$$
   1) 设 $(a,b)\in X\times X,\langle a_n\rangle,\langle b_n\rangle$ 是如下定义的 X 的两个点序列:
   $$a_0=a,\ a_{n+1}=f(a_n),b_0=b,\ b_{n+1}=f(b_n),\forall n\in\mathbb{N}.$$
   $\forall\varepsilon>0,\exists n\in\mathbb{N}$ 使得 $d\left(a,a_n\right)\leqslant\varepsilon,d\left(b,b_n\right)\leqslant\varepsilon$.
   2) 由此推出 $d(a,b)=d(f(a),f(b))$ 及 $\overline{f(X)}=X$.
   3) 证明: f 是从 X 到 X 上的等距映射 (即 f 是满射, 并且 $d(f(x),f(y))=d(x,y),\forall x,y\in X$).
7. 设 (X,d) 与 (Y,D) 是两个度量空间, $f:X\to Y$ 是一个映射, 满足下述条件:
   1) (Y,D) 是紧的;
   2) $\forall y\in Y$, $f^{-1}(y)\subset X$ 是紧集;
   3) 若 $A\subset X$ 是闭集, 则 $f(A)\subset Y$ 也是闭集, 即 f 是闭映射.

   证明: (X,d) 是紧度量空间.
8. 设 (X,d),(Y,D) 是两个度量空间, 且 (X,d) 是紧空间, $f:X\to Y$ 是一一映射. 证明: 若 f 连续, 则其逆映射 $f^{-1}:Y\to X$ 也连续.
9. 设 (X,d) 是任一紧度量空间, $\mathscr{F}$ 是 X 的所有非空有界闭子集的集合, $\varDelta$ 是 $\mathscr{F}$ 上的 Hausdorff 度量（参见 10.3 习题集第 5 题）. 证明 $(\mathscr{F},\varDelta)$ 是紧的.
10. 设 (X,d) 是一紧度量空间, $f:X\to X$ 是连续满射. 引入以下定义:

1) 设 $x,y\in X,\varepsilon>0$，我们称有限序列 $\langle x_0,x_1,\cdots,x_n\rangle$ 是从 x 到 y 的 ε –有限链，如果

$$x_0=x,x_n=y,d\left(f\left(x_{i-1}\right),x_i\right)<\varepsilon(\forall i=1,2,\cdots n).$$

2) $x\overset{\varepsilon}{\sim}y$，如果存在从 x 到 y 的一个 ε —有限链及从 y 到 x 的一个 ε –有限链.

3) $x\sim y$，如果 $\forall\varepsilon>0,\ x\overset{\varepsilon}{\sim}y$.

4) x 称为链回复点，如果 $x\sim x$. $R(f)=\{x\in X\mid x\sim x\}$ 称为 f 的链回复集.

5) 我们称 f 是链传递的，如果 $\forall x,y\in X,x\sim y$. X 的一个闭子集 Y 称为链传递的，如果 $f(Y)=Y$ 并且 $f|_Y$ 是链传递的.

证明下述各结论：

1) 证明：关系 “$\sim$” 满足对称性，传递性. “$\sim$” 是 X 上的等价关系吗？

2) 证明：$R(f)$ 是闭集.

3) 证明：$f(R(f))\subset R(f)$.

4) 我们承认 $f(R(f))=R(f)$. 证明：“$\sim$” 是 $R(f)$ 上的一个等价关系.

5) 设 F 是 $R(f)/\sim$ 的任一等价类——称为 f 的链分支. 证明：$f(F)\subset F$，由此并利用 $f(R(f))=R(f)$ 的结论推出 $f(F)=F$.

6) 证明：若 F 是 f 的链分支，则 F 是链传递的. （提示：设 $(\mathscr{F},\Delta)$ 是习题第 9 题中的紧度量空间，$\forall x,y\in F$，令 $C_n=\left\langle x_0^n,x_1{}^n,\cdots,x_{m_n}^n\right\rangle$ 是从 x 经过 y 到 x 的 $\dfrac{1}{n}$ –链. 由 $(\mathscr{F},\Delta)$ 的紧性，$\langle C_n\rangle$ 存在收敛子序列 $\left\langle C_{n_k}\right\rangle$，令

$$\lim_{k\to+\infty}C_{n_k}=C\in\mathscr{F}.$$

证明：$\forall z,w\in C,\quad\forall\varepsilon>0$，存在从 z 到 w 并属于 C 的 ε –有限链，然后证明 $f(C)=C$，最后由 $C\subset F$ 及 $x,y\in F$ 的任意性推出 F 的链传递性）

10.6 连通度量空间

从几何直观上我们知道，一条平面或空间直线 l 挖去一点后就成为两条不连接的半直线. 又平面上一条圆周曲线 Γ 的内部与外部形成分离的两部分. 这种几何直观的“不连接”与“分离”的数学抽象就是下面我们要介绍的度量空间的“非连通性”概念.

1. 连通空间与连通子集

定义 10.18

设 (X,d) 是任一度量空间.

1. 若 $A,B\subset X$ 是两个非空开集，并且满足

$$A\cup B=X,A\cap B=\varnothing,$$

则我们称 (A,B) 是 X 的一个分裂.

2. 若 X 存在一个分裂 (A,B)，则我们称度量空间 (X,d) 是不连通的，否则，我们称 (X,d) 是连通的度量空间.

3. 设 $Y\subset X$. 若子空间 (Y,d_Y) 是连通的或不连通的，则我们称 Y 是 X 的连通或不连通子集. ♣

例题 10.36 实数空间 $(\mathbb{R},|\cdot|)$ 是连通的.

事实上，若 $(\mathbb{R},|\cdot|)$ 是不连通的，则存在 $\mathbb{R}$ 的一个分裂 (A,B).

任取一点 $x \in B$，于是 $A \cap (-\infty, x]$ 与 $A \cap [x, +\infty)$ 中至少有一个非空，不妨设 $D = A \cap [x, +\infty) \neq \varnothing$.

因为 $[x, +\infty)$ 是闭集，$A = \mathbb{R} - B$ 也是闭集，故 D 是闭集. 从而 $m = \inf D \in D$.

另一方面，$x \in A$，所以 $D = A \cap (x, +\infty)$，而 A 与 $(x, +\infty)$ 都是开集. 故 D 又是开集. 从而存在 $\delta > 0$，使得 $(m - \delta, m + \delta) \subset D$. 于是 $\inf D \leqslant m - \delta$. 这不可能. 因此 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 是连通的.

2. 连通空间与连通集的等价定义

定理 10.26

设 (X, d) 是任一度量空间. 则下述结论等价:

1. (X, d) 是连通的.
2. 不存在 X 的两个非空闭集 C，D 使得
$$C \cup D = X, C \cap D = \varnothing.$$
3. 不存在 X 的既开又闭的非空真子集.

证明 1) $\Rightarrow$ 2). 假设存在 X 的两个非空闭集 C 与 D 使得 $C \cup D = X, C \cap D = \varnothing$.

因为 $C = X - D, D = X - C$ 又是 X 的两个非空开集，故 (C, D) 是 X 的一个分裂. 从而 (X, d) 是不连通的，这与假设相矛盾.

2) $\Rightarrow$ 3). 假设存在 X 的一个既开又闭的非空真子集 A，则 $B = X - A$ 是 X 的非空闭集. 并且满足
$$A \cup B = X, A \cap B = \varnothing.$$
这与 2) 的假设相矛盾.

3) $\Rightarrow$ 1). 假设 (X, d) 不连通，那么存在 X 的一个分裂 (A, B). 于是 A 是 X 的既开又闭的非空真子集. 这与 3) 的假设相矛盾. 因此 (X, d) 是连通的.

定理 10.27

设 (X, d) 是任一度量空间，$Y \subset X$. 则下述结论等价:

1. Y 是连通子集.
2. 不存在 Y 的两个非空子集 A 与 B 使得
$$A \cup B = Y, \overline{A} \cap B = \varnothing, A \cap \overline{B} = \varnothing.$$
(这里 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 表示 A 与 B 在 X 中的闭包).

证明 1) $\Rightarrow$ 2). 若存在 Y 的非空子集 A 与 B 使得 $A \cup B = Y, \overline{A} \cap B = \varnothing, A \cap \overline{B} = \varnothing$，则
$$A = \overline{A} \cap Y, B = \overline{B} \cap Y.$$

事实上，由已知条件我们有
$$\overline{A} \cap Y = \overline{A} \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = (\overline{A} \cap A) \cup \varnothing = \overline{A} \cap A = A,$$
$$\overline{B} \cap Y = \overline{B} \cap (A \cup B) = (\overline{B} \cap A) \cup (\overline{B} \cap B) = \varnothing \cup (\overline{B} \cap B) = \overline{B} \cap B = B.$$
由于 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 是 X 中的闭集，故由定理10.6 知 A 与 B 是 Y 中的闭集，并且 $A \cap B = \varnothing$，由定理10.26,Y 不连通，这与 (Y, d_Y) 连通相矛盾,

2) $\Rightarrow$ 1). 若 (Y, d_Y) 不连通，则由定理10.26知存在 Y 中的非空闭集 A, B 使得 $A \cup B = Y, A \cap B = \varnothing$.

现在我们用 $\overline{A}_Y$ 表示 A 在 Y 中的闭包，则我们有

$$\overline{A}_Y=\bigcap_{\substack{A\subset G\cap Y\\ G\text{ 在 }X\text{ 中闭}}}(G\cap Y)=\left(\bigcap_{\substack{A\subset G\\ G\text{ 在 }X\text{ 中闭}}}G\right)\cap Y=\overline{A}\cap Y.$$

因 A 是 Y 中的闭集，所以 $A=\overline{A}_Y$，又 $B\subset Y$，故

$$\overline{A}\cap B=\overline{A}\cap Y\cap B=\overline{A}_Y\cap B=A\cap B=\varnothing.$$

同理可证 $A\cap\overline{B}=\varnothing$，这与 2) 的假设矛盾，故 (Y,d_Y) 连通.

例题 10.37 $\forall a\in\mathbb{R},\mathbb{R}-\{a\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的不连通子集.

为此我们令

$$A=(-\infty,a),\ \ B=(a,+\infty),$$

则 $A\neq\varnothing, B\neq\varnothing, A\cup B=\mathbb{R}-\{a\},\overline{A}\cap B=A\cap\overline{B}=\varnothing$，由定理10.27知，$\mathbb{R}-\{a\}$ 不连通.

例题 10.38 有理数集 $\mathbb{Q}$ 与无理数集 $\mathbb{Q}^c$ 都是不连通集.

事实上，对 $\mathbb{Q}$：取 $a\in\mathbb{Q}^c$，则

$$A=\mathbb{Q}\cap(-\infty,a)\neq\varnothing,\ \ B=\mathbb{Q}\cap(a,+\infty)\neq\varnothing,$$
$$A\cup B=\mathbb{Q},\ \ \overline{A}\cap B=\varnothing,\ \ A\cap\overline{B}=\varnothing,$$

因此 $\mathbb{Q}$ 是不连通集.

对 $\mathbb{Q}^c$：取 $a\in\mathbb{Q}$，则

$$C=\mathbb{Q}^c\cap(-\infty,a)\neq\varnothing,\ \ D=\mathbb{Q}^c\cap(a,+\infty)\neq\varnothing,$$
$$C\cup D=\mathbb{Q}^c,\ \ \overline{C}\cap D=\varnothing,\ \ C\cap\overline{D}=\varnothing,$$

故 $\mathbb{Q}^c$ 也是不连通集.

3. 连通集的性质

定理 10.28

设 (X,d) 是任一度量空间，$A,B\subset X$ 并且 $A\subset B\subset\overline{A}$. 若 A 连通，则 B 与 $\overline{A}$ 都是连通集.

证明 由于可以取 $B=\overline{A}$，故我们只需证明 B 连通即可. 用反证法，假设 B 不是连通集，则存在 B 的非空子集 C,D 使得 $C\cup D=B,\overline{C}\cap D=\varnothing,C\cap\overline{D}=\varnothing$. 令 $C_1=C\cap A,D_1=D\cap A$，则

$$A=C_1\cup D_1,C_1\cap D_1=\varnothing.$$

下面证明 $C_1\neq\varnothing,D_1\neq\varnothing$.

若 $C_1=\varnothing$，则 $A=D_1$，于是 $A\subset D$. 由 $A\subset D\subset\overline{A}$ 知 $\overline{A}=\overline{D}$.

另一方面，由于 $\overline{A}=\overline{C\cup D}=\overline{C}\cup\overline{D}$，故

$$\overline{C}=\varnothing\text{ 或 }\overline{C}\subset\overline{D}.$$

这与 $C\neq\varnothing,\overline{D}\cap C=\varnothing$ 矛盾，因此 $C_1\neq\varnothing$.

同理可证 $D_1\neq\varnothing$.

最后证明 $\overline{C}_1\cap D_1=\varnothing,C_1\cap\overline{D}_1=\varnothing$.

若存在 $x\in\overline{C}_1\cap D_1$，则 $x\in\overline{C}_1,x\in D_1$，于是

$$x\in\overline{C\cap A}\subset\overline{C}\cap\overline{A},x\in D\cap A\Rightarrow x\in\overline{C}\cap D.$$

这与 $\overline{C} \cap D = \varnothing$ 矛盾, 故 $\overline{C}_1 \cap D_1 = \varnothing$.

同理可证 $C_1 \cap \overline{D}_1 = \varnothing$.

上述分析表明, A 是不连通子集, 这与 A 为连通集假设矛盾, 故 B 连通, 从而 $\overline{A}$ 连通.

定理 10.29

设 (X, d) 与 (Y, ρ) 是两个度量空间, $A \subset X$ 是任一非空集合, $f: A \to Y$ 是任一连续映射. 若 A 连通, 则 $f(A)$ 是 Y 的连通集.

证明 用反证法. 假设 $f(A)$ 不连通, 则存在 $f(A)$ 的两个非空开集 C 与 D 使得

$$C \cup D = f(A), C \cap D = \varnothing.$$

由于 f 连续, 故 $f^{-1}(C)$ 与 $f^{-1}(D)$ 是 A 的两个非空开集, 并且

$$f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) = A,\ f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) = \varnothing.$$

此即表明 $\left(f^{-1}(C), f^{-1}(D)\right)$ 是集 A 的一个分裂. 从而 A 不连通, 这与假设 A 为连通集矛盾. 因此 $f(A)$ 连通.

这个定理表明集合的连通性是连续映射下的一个不变性质.

利用连通性是连续映射下的不变性, 可以证明许多集合的连通性.

例题 10.39 $\mathbb{R}$ 的任一区间是连通集.

因为 $\mathbb{R}$ 的区间只有下列三种类型:

1. $(a, b), (a, b], [a, b), [a, b]\ (a, b \in \mathbb{R})$;
2. $(-\infty, b), (-\infty, b], (a, +\infty), [a, +\infty)\ (a, b \in \mathbb{R})$;
3. $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ 已证是连通的.

由于 $(a, b) \subset (a, b], [a, b) \subset [a, b], (-\infty, b) \subset (-\infty, b], (a, +\infty) \subset [a, +\infty)$, 因此只需证明

$$(a, b),\ (-\infty, b),\ (a, +\infty)$$

是连通集.

考虑映射 $f: \mathbb{R} \to (a, b)$ 如下:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{\pi} \arctan(x).$$

由于 f 连续, 故由定理10.29推知 $f(\mathbb{R}) = (a, b)$ 是连通的.

映射 g: $\mathbb{R} \to (-\infty, b)$ 可取为 $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = b - \mathrm{e}^{-x}$. 而映射 h: $\mathbb{R} \to (a, +\infty)$ 可取为 $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = a + \mathrm{e}^{x}$.

例题 10.40 利用连通性的不变性证明一元实值连续函数的介值定理:

设 $I \subset \mathbb{R}$ 是任一非空区间, $f: I \to \mathbb{R}$ 是任意一个连续函数, 则 $f(I) \subset \mathbb{R}$ 是一区间.

为此我们只需证明 $\forall y_1, y_2 \in f(I), (y_1, y_2) \subset f(I)$.

假设 $\exists \mu \in (y_1, y_2), \mu \notin f(I)$.

令 $x_1, x_2 \in I$ 使得 $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$, 不妨设 $x_1 < x_2$. 于是 $\forall x \in (x_1, x_2), f(x) \neq \mu$. 令

$$A = f\left([x_1, x_2]\right) \cap (-\infty, \mu), B = f\left([x_1, x_2]\right) \cap (\mu, +\infty)$$

则 A 与 B 是 $f([x_1, x_2])$ 的两个非空开集 $\left(\text{因 } f(x_1) \in A, f(x_2) \in B\right)$, 并且

$$A \cup B = f([x_1, x_2]), A \cap B = \varnothing.$$

这表明 (A,B) 是 $f([x_1,x_2])$ 的一个分裂, 于是集 $f([x_1,x_2])$ 不连通. 这不可能, 因为 $[x_1,x_2]$ 连通, f 连续, 故 $f([x_1,x_2])$ 必连通. 因此 $\forall \mu \in (y_1,y_2)$, 存在 $\xi \in I$ 使得 $f(\xi)=\mu$.

定理 10.30

设 (X,d) 是任一度量空间, (A,B) 是 X 的任一分裂. 若 $Y \subset X$ 是连通集, 则

$$Y \subset A \text{ 或 } Y \subset B.$$

证明 若 $C=A\cap Y \neq \varnothing, D=B\cap Y\neq\varnothing$, 则 C、 D 是 Y 的两个非空开集, 并且

$$C\cup D=Y, C\cap D=\varnothing.$$

因此 (C,D) 是 Y 的一个分裂, 这与 Y 是连通集矛盾.

定理 10.31

设 $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是度量空间 (X,d) 的一连通集族, 并且 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \neq \varnothing$, 则 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ 是连通集.

证明 假设 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ 不连通. 于是存在 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ 的一个分裂 (A,B), 取 $a\in\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$. 则 $a\in A$ 或 $a\in B$, 不妨令 $a\in A$.

$\forall \lambda\in\Lambda, Y_\lambda$ 是连通集, 并且 $a\in A\cap Y_\lambda$. 故由上一定理知, $Y_\lambda\subset A$. 从而 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \subset A$, 由此推知 $B=\varnothing$. 这与 (A,B) 为分裂相矛盾, 因此 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ 是连通集.

例题 10.41 $\forall n\in\mathbb{N}, \left(\mathbb{R}^n, d_i\right)$ 是连通的.

当 $n=1$ 时, 我们已证 $(\mathbb{R},|\cdot|)$ 是连通的.

假设 $n\geqslant 2, \forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$. 令

$$Y_{\boldsymbol{x}}=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{y}=t\boldsymbol{x}, t\in\mathbb{R}\},$$

则

$$\bigcap_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} Y_{\boldsymbol{x}}=\{\boldsymbol{0}\},\quad \bigcup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} Y_{\boldsymbol{x}}=\mathbb{R}^n.$$

若能证明 $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, Y_{\boldsymbol{x}}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的连通集, 则由上述定理10.31 知, $\bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} Y_{\boldsymbol{x}}=\mathbb{R}^n$ 是连通的.

为此考虑映射 $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ 如下:

$$\forall t\in\mathbb{R}, \boldsymbol{f}(t)=t\boldsymbol{x}\ \left(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\right).$$

显然 f 连续, 并且 $f(\mathbb{R})=Y_{\boldsymbol{x}}$. 由于 $\mathbb{R}$ 连通, 故由定理 10.29 知, $Y_{\boldsymbol{x}}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的连通集.

4. 道路连通空间

定义 10.19

设 (X,d) 是任一度量空间.

1. 设 $x,y\in X$, 若存在连续映射 $\varphi:[a,b]\to X$ 使得 $\varphi(a)=x, \varphi(b)=y$, 则我们称 φ 是联结 x 与 y 的一条道路.
2. 若 $\forall x,y\in X$, 都有联结 x 与 y 的一条道路, 则我们称 (X,d) 是道路连通的.
3. 设 $Y\subset X$ 是任一非空集合, 若子空间 (Y,d_Y) 是道路连通的, 则我们称 Y 是道路连通集.

例题 10.42 度量空间 (X,d) 的任一凸集 Y 是道路连通的. ($Y\subset X$ 称为凸集, 若 $\forall x,y\in Y$, 联结 x 与 y

的线段 $\{z \in X \mid z = tx + (1-t)y, t \in (0,1)\} \subset Y$).

事实上, 映射 $\varphi : (0,1) \to Y$

$$\varphi(t) = tx + (1-t)y, \ \forall t \in (0,1)$$

连续, 并且 $\varphi(0) = y, \varphi(1) = x$, 故 φ 是 Y 的连结 x 与 y 的一条道路, 从而 Y 是道路连通的.

特别地,(X,d) 的任一开球 $B(a,r)$ 与闭球 $\overline{B}(a,r)$ 都是道路连通的, 因为它们都是凸集,

例题 10.43 若 $n > 1$, 则 $\forall a \in \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{a\}$ 是道路连通的, 若 $n = 1$, 则 $\mathbb{R} - \{a\}$ 不是道路连通的.

因为 $n > 1, \forall x, y \in \mathbb{R}^n - \{a\}$, 存在一点 $b \in \mathbb{R}^n - \{a\}$, 使得联结 x 与 b 的线段与连结 b 与 y 的线段都不经过点 a , 由此可得 $\mathbb{R}^n - \{a\}$ 中联结 x 与 y 的一条道路. 故 $\mathbb{R}^n - \{a\}$ 是道路连通的.

若 $n = 1$, 则由连通不变性知, $\forall x \in (-\infty, a), \forall y \in (a, +\infty)$, 不可能存在 $\mathbb{R} - \{a\}$ 中联结 x 与 y 的任何道路, 故 $\mathbb{R} - \{a\}$ 不是道路连通的.

注 按照我们的定义, 度量空间 (X,d) 中联结 x 与 y 的一条道路是一个连续映射 $\varphi : [a,b] \to X$, 而不是指象集 $\varphi([a,b])$, 因此若 $\psi : [\alpha, \beta] \to X$ 是另一连续映射, 即使

$$\psi(\alpha) = x, \psi(\beta) = y, \psi([\alpha,\beta]) = \varphi([a,b]),$$

则 φ 与 ψ 应该看作联结 x 与 y 的两条不同的道路.

5. 道路连通的性质

定理 10.32

设 $(X,d), (Y,D)$ 是两个度量空间, $A \subset X$ 是任一非空集合, $f : A \to Y$ 是任一连续映射, 若 A 是道路连通的, 则 $f(A)$ 也是道路连通的.

证明 任取两点 $y, y' \in f(A)$. 令 $x, x' \in A$ 使得 $f(x) = y$, $f(x') = y'$. 由于 A 是道路连通的, 故存在联结 x 与 x' 的道路 $\varphi : [a,b] \to A$.

令 $\psi = f \circ \varphi$, 则 $\psi : [a,b] \to f(A)$ 就是联结 y 与 y' 的一条道路, 因此 $f(A)$ 是道路连通的.

这个定理表明道路连通性是在连续映射下的一个不变性质.

例题 10.44 设 P 是 $\mathbb{R}^3$ 中单位球面 S^2 上任一点, 则 $S^2 - \{P\}$ 是道路连通的.

不失一般性, 我们可以假设 P 就是 S^2 的北极点 N , 考虑 S^2 关于北极点的球极投影映射

$$\Phi : S^2 - \{N\} \to \mathbb{R}^2.$$

由于 Φ 是同胚, 故 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to S^2 - \{N\}$ 连续, 而 $\mathbb{R}^2$ 是道路连通的, 因此 $\varphi(\mathbb{R}^2) = S^2 - \{N\}$ 是道路连通的.

类似可证, 若 $P \in S^{n-1}$, 则 $S^{n-1} - \{P\}$ 也是道路连通的.

定理 10.33

若度量空间 (X,d) 是道路连通的, 则它也是连通的.

证明 假设 (X,d) 是不连通的, 那么存在 X 的一个分裂 (A, B).

任取 $x \in A, y \in B$. 由于 (X,d) 是道路连通的, 故存在联结 x 与 y 的道路 $\varphi : [a,b] \to X$.

另一方面, 因为 $[a,b]$ 连通, 故由 φ 的连续性知, $\varphi([a,b])$ 也是连通的, 从而 $\varphi([a,b]) \subset A$ 或 $\varphi([a,b]) \subset B$. 这显然不可能, 因为 $\varphi(a) = x \in A, \varphi(b) = y \in B, A \cap B = \varnothing$. 此矛盾说 (X,d) 连通.

这个定理的逆不成立.

例题 10.45 考虑下述集合

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,y=\sin\frac{1}{x},x\in(0,1]\right\}.$$

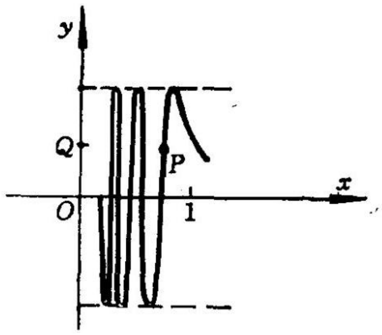

图 10.12

定义映射 $f:(0,1]\to\mathbb{R}^2$ 如下:

$$\forall x\in(0,1],f(x)=\left(x,\sin\frac{1}{x}\right),$$

则映射 f 连续. 由于 $(0,1]$ 连通, 故 $f((0,1])=A$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的连通集, 从而 $\overline{A}$ 也是连通的.

下面我们证明 A 是道路连通的, 而 $\overline{A}$ 不是道路连通的.

为此设 $P(x,y),Q\left(x',y'\right)\in A$, 不妨设 $x<x'$. 则

$$f(x)=P,f\left(x'\right)=Q.$$

f 在 $\left[x,x'\right]$ 上的限制 $f|_{[x,x']}$ 是连续映射, 因此它是 A 的联结 P 与 Q 的一条道路, 故 A 是道路连通集,

现在设 $P(x,y)\in A,Q\left(0,y'\right)$ 为 $\overline{A}$ 在 y 轴上的任意一点 (如图10.12所示). 我们来证明不可能存在 $\overline{A}$ 中联结 P 与 Q 的任何道路.

假设存在这样的一条道路 $\varphi:[a,b]\to\overline{A}$, 使得 $\varphi(a)=Q(0,y'),\varphi(b)=P(x,y)$. 记 $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$, 则 $\varphi_1(a)=0$, $\varphi_1(b)=x>0$. 令

$$t_0=\inf\{t\in[a,b]\mid\varphi_1(t)>0\}.$$

由 φ_1 的连续性及 t_0 的定义知, $t_0<b$ 且 $\varphi_1(t_0)=0$. 于是存在 $t_n>t_0$, 且 $t_n\to t_0$, 使 $\varphi_1(t_n)>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_1(t_n)=0$. 由此推得 $\varphi_2(t_0)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\dfrac{1}{\varphi_1(t_n)}$, 这不可能, 因该极限不存在. 故 $\overline{A}$ 非道路连通.

注 虽然定理10.33的逆不成立, 但对 $\mathbb{R}^n$ 中的开集来说, 连通与道路连通是等价的. 因为道路连通开集必是连通的, 故我们只需证明 $\mathbb{R}^n$ 的连通开集是道路连通的. 实际上我们可以证明所谓的 “折线连通性”, 为此我们首先介绍 $\mathbb{R}^n$ 中的折线与 “折线连通” 的概念.

定义 10.20

设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是任一非空集合.

1. 一条道路 $\varphi:[a,b]\to U$ 称为折线, 如果像集 $\varphi([a,b])$ 是有限条线段的并.
2. U 称为是折线连通的, 如果 U 中任意两点 x 与 y 都可以用 U 中的一条折线联结.

♣

定理 10.34

$\mathbb{R}^n$ 的任一连通开集是折线连通的.

♡

证明 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的任一连通开集, $x_0 \in U$. 定义集合 A 与 B 如下:

$$A = \left\{x \in U \mid \text{可用 } U \text{ 中的一折线联结 } x_0 \text{ 与 } x\right\}, B = U - A,$$

于是

$$A \cap B = \varnothing, A \cup B = U.$$

下面我们来证明 A 与 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个开集.

因为 $x_0 \in A$, 故 $A \neq \varnothing$, 任取 $x \in A$. 由于 $x \in U$, 故存在 $\delta > 0$ 使得 $B(x, \delta) \subset U$. $\forall y \in B(x, \delta)$, x 与 y 可用一折线 l_1 联结, 而 x_0 与 x 可用折线 l_2 联结, 故 x_0 与 y 可用折线 $l_2 \cup l_1$ 联结, 从而 $y \in A$, 即 $B(x, \delta) \subset A$, 因此 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空开集.

如果 $B = \varnothing$, 则 $U = A$ 为折线连通集.

假设 $B \neq \varnothing$, 下面我们来证明 B 也是 $\mathbb{R}^n$ 的开集. 设 $b \in B$, 由于 $b \in U$, 故存在 $\eta > 0$ 使得 $B(b, \eta) \subset U$. 如果存在 $y \in B(b, \eta)$, 使得 x_0 与 y 可用折线 L_1 联结, 则由于 y 与 b 可用折线 L_2 联结知, x_0 与 b 可用折线 $L_1 \cup L_2$ 联结, 从而 $b \in A$, 这与 $b \in B$ 矛盾. 故 $B(b, \eta) \subset B$, 即 B 为 $\mathbb{R}^n$ 的开集. 这时 (A, B) 形成 U 的一个分裂, 这与 U 的连通性假设矛盾, 故必有 $B = \varnothing$, 定理证毕.

例题 10.46 例 10.45中的集合 A 虽然是道路连通的, 但不是折线连通的.

✍ 习 题 10.6

1. 证明：$(-\infty, b)$ 与 $(a, +\infty)$ 是 $\mathbb{R}$ 的连通集.
2. 证明：$\mathbb{R}^2$ 的下述集合
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y = \frac{1}{x}\right\}$$
是非连通的.
3. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是任一连通集, 它至少包含两个点. 证明：I 是 $\mathbb{R}$ 的一个区间.
4. 设 (X, d) 是任一度量空间. 证明：(X, d) 是非连通的, 当且仅当存在一个连续映射 $f: X \to \mathbb{R}$ 和两个点 $a, b \in \mathbb{R}$, 使得 $f(X) = \{a, b\}$（$a \neq b$）.
5. 证明：若度量空间 (X, d) 连通且至少包含两个点, 则存在连续映射 $f: X \to [0, 1]$, 使得 $f(X) = [0, 1]$.
6. 设 $\langle A_n \rangle$ 是度量空间 (X, d) 中的一列连通子集, 满足 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$. 证明 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 也是连通集.
7. 设 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是度量空间 (X, d) 的一个连通子集族, A 是 (X, d) 的一个连通子集, 满足 $\forall \lambda \in \Lambda$, 有 $A \cap A_\lambda \neq \varnothing$. 证明：$A \cup \left(\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)$ 也是连通集.
8. 设 $D = \left\{\dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$, 定义 $\mathbb{R}^2$ 中的两个集合 A、B 如下：
$$A = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (D \times [0, 1]) \cup (\{0\} \times [0, 1]),$$
$$B = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (D \times [0, 1]) \cup \{(0, 1)\}.$$
A 称为梳空间, B 称为缺边梳空间.
   1) 画出 A 与 B 的图形.
   2) 证明：A 是道路连通的及折线连通的.

3) 证明：B 是连通的，但不是道路连通的.

9. 证明下述各结论：

1) $\forall n > 1, \mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}$ 不同胚，S^{n-1} 与 S^1 不同胚.

2) $\forall n > 1, \mathbb{R}^n$ 的全体有理点（即它的 n 个坐标全为有理数）的集合是不连通的；$\mathbb{R}^n$ 的非有理点（即它的 n 个坐标中至少有一个是无理数）的集合是折线连通的.

3) 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 的任一可数集 $(n > 1)$，则 $\mathbb{R}^n - D$ 是道路连通的.

10. 证明：函数 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是单调函数的充要条件是：$\forall y \in \mathbb{R}, f^{-1}(y)$ 是 $\mathbb{R}$ 的连通子集.

11. 设 $a > 0$，$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个连续映射，它满足下述条件：

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, d(f(x), f(y)) \geqslant a\, d(x, y).$$

证明：$f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

12. 设 $(X, d), (Y, D)$ 是两个度量空间，$f: X \to Y$ 是任一连续满射使得 $\forall y \in Y, f^{-1}(y)$ 是连通集. 证明：若 $B \subset Y$ 是连通集，则 $f^{-1}(B)$ 也是连通集.

13. 设 (X, d) 是任一度量空间，$x, y \in X, \varepsilon > 0$. 我们称 X 的一个有限点序列 $\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle$ 是从 x 到 y 的一个 ε–有限链，如果下述性质成立：

$$x = x_1, y = x_n, d\left(x_i, x_{i+1}\right) < \varepsilon \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

证明：

1) 若 (X, d) 连通，则 $\forall x, y \in X, \forall \varepsilon > 0$，存在从 x 到 y 的 ε–有限链.

2) 若 (X, d) 是紧的，并且 $\forall x, y \in X, \forall \varepsilon > 0$，存在从 x 到 y 的 ε–有限链，则 (X, d) 是连通的.