数学分析考研真题汇编

数学类适用

作者：Weierstrass

组织：Institute of Mathematics

时间：October 10, 2025

版本：第五次修正

Dampier：再没有什么故事能比科学思想发展的故事更有魅力了

作者联系方式：learnweierstrass@gmail.com

目 录

序 言

遇到困难, 请查阅此题的来源, 找到解答, 一天能做出十道题, 你就成功了. 祝好运.

中国科学技术大学 2025 年数学分析试卷

一、 计算题. 每题 10 分, 共 40 分.

1. 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.
2. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.
3. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^{2n}}\mathrm{d}x$.
4. 由方程 $\sin x+\ln y-xy^3=0$ 在 $(0,1)$ 附近确定的隐函数 $y=f(x)$, 求 $f'(0)$.

解: (1)【法 1】利用重要极限的性质可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} &= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)+1\right]^{x^2}\\ &=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)+1\right]^{\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1}\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)x^2}\\ &=\exp\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)x^2\right]\end{aligned}$$

令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则 $t\to0^+$, 再利用 L'Hôpital 法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)x^2=\lim_{t\to0^+}\frac{\cos t-1}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{-\sin t}{2t}=-\frac{1}{2}$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)x^2}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

【法 2】利用 Taylor 展开公式可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} &= \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)^{x^2}\\ &=\exp\left[x^2\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\right]=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

(2)【法 1】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n!)}{n}-\ln n\right)}$. 由于 $\ln x$ 在定义域内是单调递增的, 所以

$$\int_{k-1}^{k}\ln x\mathrm{d}x<\ln k<\int_k^{k+1}\ln x\mathrm{d}x,\ (k=1,2,3,\cdots)$$

对上述不等式组进行求和:

$$\sum_{k=1}^n\int_{k-1}^{k}\ln x\mathrm{d}x<\sum_{k=1}^n\ln k<\sum_{k=1}^n\int_k^{k+1}\ln x\mathrm{d}x$$

所以 $\displaystyle\int_0^n\ln x\mathrm{d}x<\ln(n!)<\int_1^{n+1}\ln x\mathrm{d}x$, 且

$$\begin{aligned}&\int_0^n\ln x\mathrm{d}x=n\ln n-\int_0^n\mathrm{d}x=n\ln n-n\\ &\int_1^{n+1}\ln x\mathrm{d}x=(n+1)\ln(n+1)-n\end{aligned}$$

所以 $n\ln n-n<\ln(n!)<(n+1)\ln(n+1)-n$, 故

$$\begin{aligned}\frac{n\ln n-n}{n}-\ln n&<\frac{\ln(n!)}{n}-\ln n\\&<\frac{(n+1)\ln(n+1)-n}{n}-\ln n\end{aligned}$$

即 $-1<\dfrac{\ln(n!)}{n}-\ln n<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{\ln(n+1)}{n}-1$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{\ln(n+1)}{n}-1\right)=-1$$

由夹逼准则可知, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln(n!)}{n}-\ln n\right)=-1$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

【法 2】运用 Stolz 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n!)-n\ln n}{n}}\\&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln n!-n\ln n)-(\ln(n-1)!-(n-1)\ln(n-1))}{n-(n-1)}}\\&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\frac{n!}{(n-1)!}-n\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)-\ln(n-1)\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)-n\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)}\\&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}(1-n)\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}=\mathrm{e}^{-1}\end{aligned}$$

【法 3】运用定积分的定义：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)}\\&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln x\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-1}.\end{aligned}$$

【法 4】由 Stirling 公式可知, 当 $n\to\infty$, 有 $n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}}{n}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(2\pi n)}{n}}=\mathrm{e}^0=1$

【法 5】记 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, 考虑到：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}}\\&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\end{aligned}$$

由算术平均不等式可知, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 这里 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e},\text{即原式}=\mathrm{e}^{-1}.$$

(3)【法 1】令 $t=x^{2n}$, 有 $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2n}t^{\frac{1}{2n}-1}\mathrm{d}t$, 所以

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}x^2\cdot\mathrm{e}^{-x^{2n}}\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{n}}\cdot\mathrm{e}^{-t}\frac{1}{2n}t^{\frac{1}{2n}-1}\mathrm{d}t\\
=&\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{\frac{3}{2n}-1}\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}\Gamma\left(\frac{3}{2n}\right)\\
=&\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}\frac{2n}{3}\Gamma\left(\frac{3}{2n}+1\right)=\frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\Gamma\left(\frac{3}{2n}+1\right)\\
=&\frac{1}{3}\Gamma\left(\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2n}+1\right)\right)=\frac{1}{3}\Gamma(1)=\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

【法 2】对积分区间进行拆分：

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}x^2\cdot\mathrm{e}^{-x^{2n}}\mathrm{d}x\\
=&\int_0^{1-\varepsilon}x^2\cdot\mathrm{e}^{-x^{2n}}\mathrm{d}x+\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}x^2\cdot\mathrm{e}^{-x^{2n}}\mathrm{d}x+\int_{1+\varepsilon}^{+\infty}x^2\cdot\mathrm{e}^{-x^{2n}}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

其中 ε 是一个任意小的正数, $0<\varepsilon<1$.

(i) 对积分 $\int_0^{1-\varepsilon}x^2\cdot\mathrm{e}^{-x^{2n}}\mathrm{d}x$ 而言：当 $x\in[0,1-\varepsilon]$ 时, 由于 $0\leqslant x<1$, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}x^{2n}=0$, 又因为 $y=\mathrm{e}^u$ 是连续的, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-x^{2n}}=\mathrm{e}^0=1$, 由函数极限的局部有界性可知, 对于任意给定的 $\delta>0$, 存在正整数 N_1, 当 $n>N_1$ 时, 对于所有 $x\in[0,1-\varepsilon]$, 有 $\left|\mathrm{e}^{-x^{2n}}-1\right|<\delta$, 即 $1-\delta<\mathrm{e}^{-x^{2n}}<1+\delta$, 故

$$\begin{aligned}
\frac{(1-\delta)}{3}(1-\varepsilon)^3=(1-\delta)\int_0^{1-\varepsilon}x^2\mathrm{d}x<\int_0^{1-\varepsilon}x^2\cdot\mathrm{e}^{-x^{2n}}\mathrm{d}x\\
<(1+\delta)\int_0^{1-\varepsilon}x^2\mathrm{d}x=\left[(1+\delta)\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{1-\varepsilon}\right]=\frac{(1+\delta)}{3}(1-\varepsilon)^3
\end{aligned}$$

令 $\delta\to0^+$, 则夹逼可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{1-\varepsilon}x^2\cdot\mathrm{e}^{-x^{2n}}\mathrm{d}x=\dfrac{(1-\varepsilon)^3}{3}$.

(ii) 对于积分 $\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}x^2\cdot\mathrm{e}^{-x^{2n}}\mathrm{d}x$ 而言：当 $x\in[1-\varepsilon,1+\varepsilon]$ 时, 有

$$x^2\mathrm{e}^{-(1+\varepsilon)^{2n}}\leqslant x^2\mathrm{e}^{-x^{2n}}\leqslant x^2\mathrm{e}^{-(1-\varepsilon)^{2n}}$$

对不等式两边同时在 $[1-\varepsilon,1+\varepsilon]$ 上积分可得：

$$\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}x^2\mathrm{e}^{-(1+\varepsilon)^{2n}}\mathrm{d}x\leqslant\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}x^2\mathrm{e}^{-x^{2n}}\mathrm{d}x\leqslant\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}x^2\mathrm{e}^{-(1-\varepsilon)^{2n}}\mathrm{d}x.$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-(1+\varepsilon)^{2n}}=0$, 从而当 $n\to+\infty$ 时, 有

$$0\leqslant\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}x^2\mathrm{e}^{-x^{2n}}\mathrm{d}x\leqslant\frac{(1+\varepsilon)^3-(1-\varepsilon)^3}{3}.$$

(iii) 对于 $\int_{1+\varepsilon}^{+\infty}x^2\cdot\mathrm{e}^{-x^{2n}}\mathrm{d}x$ 而言：令 $t=x^{2n}$, 有 $\mathrm{d}x=\dfrac{t^{\frac{1}{2n}-1}}{2n}\mathrm{d}t$, 则 $\int_{1+\varepsilon}^{+\infty}x^2\cdot\mathrm{e}^{-x^{2n}}\mathrm{d}x=\int_{(1+\varepsilon)^{2n}}^{+\infty}\dfrac{1}{2n}t^{\frac{3}{2n}-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.
当 n 充分大时, 对于任意固定的 $M>0$, 存在 $N_2\in\mathbb{N}_+$, 当 $n>N_2$ 时,

$$\left|\int_{(1+\varepsilon)^{2n}}^{+\infty}\frac{1}{2n}t^{\frac{3}{2n}-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right|<M$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{1+\varepsilon}^{+\infty}x^2\cdot\mathrm{e}^{-x^{2n}}\mathrm{d}x=0$. 综上所述, 令 $\varepsilon\to0^+$ 时, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}x^2\cdot\mathrm{e}^{-x^{2n}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$.

(4)【法 1】对 $\sin x+\ln y-xy^3=0$ 两边求导

$$\cos x+\frac{y'}{y}-\left(y^3+x\cdot3y^2y'\right)=0$$

所以 $y'=\dfrac{\cos x-y^3}{x\cdot3y^2-\frac{1}{y}}=\dfrac{y\cos x-y^4}{3xy^3-1}$, 所以 $f'(0)=0$.

【法 2】: 令 $F(x,y)=\sin x+\ln y-xy^3$, 则

$$F_x'(x,y)=\cos x-y^3,\ F_y'(x,y)=\frac{1}{y}-3xy^2$$

由二元函数的隐函数定理, 可得

$$f'(x)=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}=-\frac{\cos x-y^3}{\frac{1}{y}-3xy^2},\ \text{即} f'(0)=0.$$

二、 (15 分) 把 $f(x)=\frac{\pi}{2}-x, x\in[0,\pi]$ 展开成余弦级数, 并计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

解: 将 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上偶延拓为一个连续函数, 记

$$F(x)=\begin{cases} f(x), x\in(0,\pi] \\ f(-x), x\in[-\pi,0)\end{cases}=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-x, x\in[0,\pi] \\ \frac{\pi}{2}+x, x\in[-\pi,0)\end{cases}$$

再对 $F(x)$ 作周期为 2π 的周期延拓, 将其展开为余弦级数:

$$\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x \\ &=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}t\mathrm{d}t=0\end{aligned}$$

显然 $b_n=0$, 其中 $n=0,1,2,\cdots$, 那么

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos(nx)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \\ &=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(nx)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{n}\sin(nx)\right) \\ &=\frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{1}{n}\sin(nx)\right)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin(nx)\right)\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right] \\ &=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin(nx)\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\mathrm{d}x \\ &=\frac{2}{\pi n}\frac{1-\cos(n\pi)}{n}=\frac{2}{\pi n^2}[1-(-1)^n]\end{aligned}$$

所以 $f(x)=\frac{\pi}{2}-x,(x\in[0,\pi])$ 展开成余弦级数为:

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{\pi}{2}-x=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx) \\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}[1-(-1)^n]\cos(nx)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}\end{aligned}$$

由 Dirichlet 判别法可知在 $x\in[0,\pi]$ 中均成立. 取 $x=0$ 可得:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

Parseval 等式: 若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积, 其 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 则成立:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

所以, 利用 Parseval 等式可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{\pi n^2}\left[1-(-1)^n\right]\right)^2\right)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^4}=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^4}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\frac{\pi^3}{12}=\frac{\pi^2}{6}$$

化简为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$, 将 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的奇偶项拆分后再组合后求和可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{16}{15}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{16}{15}\cdot\frac{\pi^4}{96}=\frac{\pi^4}{90}$.

记 $H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, 所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{n(n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)&=\frac{H_n}{n(n+1)}=H_n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{H_n}{n}-\frac{H_n}{n+1}=\frac{H_n}{n}-\frac{H_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{H_n}{H_{n+1}}\\&=\frac{H_n}{n}-\frac{H_{n+1}}{n+1}\frac{H_{n+1}-\frac{1}{n+1}}{H_{n+1}}\\&=\frac{H_n}{n}-\frac{H_{n+1}}{n+1}\left(1-\frac{1}{(n+1)H_{n+1}}\right)\\&=\frac{H_n}{n}-\frac{H_{n+1}}{n+1}+\frac{H_{n+1}}{(n+1)(n+1)H_{n+1}}\\&=\left(\frac{H_n}{n}-\frac{H_{n+1}}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$

即 $\frac{1}{n(n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{H_n}{n}-\frac{H_{n+1}}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)^2}$, 故

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{H_n}{n}-\frac{H_{n+1}}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n}{n}-\frac{H_{n+1}}{n+1}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\\&=H_1-\lim_{n\to+\infty}\frac{H_{n+1}}{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{1^2}-\frac{1}{1^2}\\&=1-\lim_{n\to+\infty}\frac{H_{n+1}}{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-1=\frac{\pi^2}{6}-\lim_{n\to+\infty}\frac{H_{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{H_{n+1}}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{H_{n+1}-H_n}{n+1-n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi^2}{6}.$$

三、 (15 分) f 是定义在 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\pi\}$ 上的二阶连续可微函数, 且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\sin\left(x^2+y^2\right).$$

计算 $\oint_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s$, 其中 $\boldsymbol{n}$ 为 ∂D 的单位外法向量.

解: f 在点 (x,y) 沿单位向量 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 方向的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$, 其中 $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ 是函数 f 的梯度, 所以 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}=\nabla f\cdot\boldsymbol{n}$. 已知 $I=\oint_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s$, f 在点 (x,y) 的单位切向量 $\boldsymbol{\tau}=(\cos\beta,-\cos\alpha)$ 根据上述方向导数表达式可得

$$I=\oint_{\partial D}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta\right)\mathrm{d}s,\ 设\ P=\frac{\partial f}{\partial y},Q=-\frac{\partial f}{\partial x}.$$

所以 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, 据 Green 公式以及极坐标变换可得

$$\begin{aligned}
I&=\oint_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\oint_{\partial D}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta\right)\mathrm{d}s\\
&=\iint_D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\sin\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\pi}}r\cdot\sin\left(r^2\right)\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{\sqrt{\pi}}r\cdot\sin\left(r^2\right)\mathrm{d}r\\
&=\pi\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin\left(r^2\right)\mathrm{d}\left(r^2\right)=\pi\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t=2\pi
\end{aligned}$$

四、 (15 分) Σ 为 $z=x^2+y^2,0\leqslant z\leqslant 1$, 取下侧, 计算

$$\iint_{\Sigma}(2y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解: 曲面 Σ 为 $z=x^2+y^2,(0\leqslant z\leqslant 1)$, 补面：$\Sigma_1:z=1$, 方向取上侧, 记 Σ 与 Σ_1 围成立体区域为 V. 令 $P=2y+z,Q=0,R=z$, 则由 Gauss 公式可得

$$\begin{aligned}
I&=\iint_{\Sigma}(2y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}(2y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V-\iint_{\Sigma_1}(2y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iiint_V\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{\Sigma_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_V\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^1\mathrm{d}z-\pi\\
&=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\pi\\
&=-\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r=-2\pi\cdot\frac{1}{4}=-\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

五、 (15 分) 计算 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)\mathrm{d}x$, 其中 $\alpha>0,\beta\in\mathbb{R}$.

解：【法 1】将 $\cos(\beta x)$ 展开成幂级数, 再逐项积分得到：

$$\begin{aligned}
I(\alpha,\beta) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\cdot\cos(\beta x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\beta x)^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\beta^{2n}}{(2n)!}\int_0^{+\infty} x^{2n}\cdot\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\beta^{2n}}{(2n)!}I_n
\end{aligned}$$

由分部积分法可得

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{+\infty} x^{2n}\cdot\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{1}{-2\alpha x}x^{2n}\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\right) \\
&= \left[\left(\frac{1}{-2\alpha x}x^{2n}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\right)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{-2\alpha x}x^{2n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\alpha}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}\left(x^{2n-1}\right) = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}(2n-1)x^{2n-2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2n-1}{2\alpha}\int_0^{+\infty}x^{2(n-1)}\cdot\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{2n-1}{2\alpha}I_{n-1}
\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{I_n}{I_{n-1}} = \dfrac{2n-1}{2\alpha}$, 对 n 使用递推法可得

$$I_n = \frac{2n-1}{2\alpha}\frac{2n-3}{2\alpha}I_{n-2} = \cdots = \frac{(2n-1)!!}{(2\alpha)^n}I_0$$

其中 $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, 则 $I_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2\alpha)^n}\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$, 故

$$\begin{aligned}
I(\alpha,\beta) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\beta^{2n}}{(2n)!}I_n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\beta^{2n}}{(2n)!}\frac{(2n-1)!!}{(2\alpha)^n}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!}\left(\frac{-\beta^2}{2\alpha}\right)^n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\cdot(2n)!!}{(2n)!\cdot(2n)!!}\left(\frac{-\beta^2}{2\alpha}\right)^n \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(2n)!\cdot(2n)!!}\left(\frac{-\beta^2}{2\alpha}\right)^n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!!}\left(\frac{-\beta^2}{2\alpha}\right)^n \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{-\beta^2}{2\alpha}\right)^n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}
\end{aligned}$$

【法 2】：对 $I(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\cdot\cos(\beta x)\mathrm{d}x$ 关于 β 求导

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\beta}(I(\alpha,\beta)) &= \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\cdot\cos(\beta x)\mathrm{d}x\right) \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)\right)\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\sin(\beta x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{+\infty}\frac{x}{-2\alpha x}\sin(\beta x)\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\right) = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{+\infty}\sin(\beta x)\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\right) \\
&= \frac{1}{2\alpha}\left[\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\sin(\beta x)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}(\sin(\beta x))\right] \\
&= -\frac{\beta}{2\alpha}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)\mathrm{d}x = -\frac{\beta}{2\alpha}I(\alpha,\beta)
\end{aligned}$$

由此得到关于 β 的一阶线性微分方程 $I'(\alpha,\beta) + \dfrac{1}{2\alpha}\beta I(\alpha,\beta) = 0$, 解得

$$I(\alpha,\beta) = C\cdot\mathrm{e}^{-\int\frac{\beta}{2\alpha}\mathrm{d}\beta} = C\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}$$

当 $\beta=0$, 有

$$C=I(\alpha,0)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}$$

所以 $I(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}$.

六、(20 分) 定义在 $[0,1]$ 上的连续函数列 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 一致收敛于 $f(x)$.

1. 证明: 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x,y\in[0,1]$ 且 $|x-y|<\delta$ 时, $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$ 对 $n=1,2,\cdots$ 成立.
2. 证明: 存在 $M>0$, 使得 $\sup\limits_{x\in[0,1]}\{|f_n(x)|\}\leqslant M$ 对所有 $n=1,2,\cdots$ 成立 ($\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致有界).

证明: (1) 因为 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 且 $\{f_n(x)\}$ 连续, 根据一致收敛的性质, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 根据闭区间上连续函数性质可知：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致连续. 即对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 δ, 当 $x,y\in[0,1]$ 且 $|x-y|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

且对上述 $\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}_+$, 由 $\{f_n(x)\}$ 的一致收敛性知, 当 $n>N$ 时, 对 $\forall x\in[0,1]$, 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

于是对任何 $n>N$ 和 $x,y\in[0,1]$, 从 $|x-y|<\delta$ 可推出

$$\begin{aligned}&|f_n(x)-f_n(y)|\\&=|(f_n(x)-f(x))+(f(x)-f(y))+(f(y)-f_n(y))|\\&\leqslant|f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f(y)|+|f(y)-f_n(y)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

即证出 $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$ 对 $n=1,2,\cdots$ 成立.

【法 2】假设 $\exists\varepsilon_0>0$, 对 $\forall\delta>0$, 均 $\exists n\in\mathbb{N}_+, x_\delta,y_\delta\in[0,1]$, 满足: $|x_\delta-y_\delta|<\delta$ 且 $|f_n(x_\delta)-f_n(y_\delta)|\geqslant\varepsilon_0$. 因 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ 一致收敛于 $f(x)$, 对于 $\varepsilon_0>0,\exists N\in\mathbb{N}_+$, 当 $n>N$ 时, 对于任意的 $x\in[0,1]$, 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon_0}{3}.$$

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 由 Cantor 定理可知, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致连续. 对于 $\varepsilon_0>0,\exists\delta_0>0$, 当 $x,y\in[0,1]$ 且 $|x-y|<\delta_0$ 时, 有

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon_0}{3}.$$

取 $\delta=\delta_0$, 当 $n>N$ 时, 对满足 $|x_\delta-y_\delta|<\delta_0$ 的 $x_\delta,y_\delta\in[0,1]$ 有

$$\begin{aligned}&|f_n(x_\delta)-f_n(y_\delta)|\\&=|f_n(x_\delta)-f(x_\delta)+f(x_\delta)-f(y_\delta)+f(y_\delta)-f_n(y_\delta)|\\&\leqslant|f_n(x_\delta)-f(x_\delta)|+|f(x_\delta)-f(y_\delta)|+|f(y_\delta)-f_n(y_\delta)|\\&<\frac{\varepsilon_0}{3}+\frac{\varepsilon_0}{3}+\frac{\varepsilon_0}{3}=\varepsilon_0\end{aligned}$$

这与假设的 $|f_n(x_\delta)-f_n(y_\delta)|\geqslant\varepsilon_0$ 矛盾！所以假设不成立！对于 $n=1,2,\cdots,N$, 因为每一个 $f_n(x)$ 一致连续, 同样可以推出矛盾！综上所述, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x,y\in[0,1]$ 且 $|x-y|<\delta$ 时, 有 $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$ 对 $n=1,2,\cdots$ 成立！

(2) 因为 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 所以对 $\varepsilon=1$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 对任意的 $x\in[0,1]$ 有

$$|f_n(x)-f(x)|<1, \text{即} f_n(x)<1+f(x).$$

又存在 $M_0>0$, 对任意的 $x\in[0,1]$, 有 $|f(x)|\leqslant M_0$, 同时也存在 $M_1,M_2,\cdots,M_N$, 使得

$$|f_1(x)|\leqslant M_1,|f_2(x)|\leqslant M_2,\cdots,|f_N(x)|\leqslant M_N$$

取 $M=\max\{M_0+1,M_1+1,\cdots,M_N+1\}$, 则对任意的 $n\in N_+$, 有 $\sup\limits_{x\in[0,1]}\{|f_n(x)|\}\leqslant M$, 得证！

七、(20 分) 设 $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2\ln n}$.

1. 证明: $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续.
2. 证明: $f(x)$ 在 $x=-1$ 处右可导.
3. 证明: $\lim\limits_{x\to1^-}f'(x)=+\infty$.
4. 证明: $f(x)$ 在 $x=1$ 处左不可导.

证明: (1) 因为当 $|x|\leqslant1$ 时, 对于 $\forall n\in[2,+\infty)$, 有 $\left|\dfrac{x^n}{n^2\ln n}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2\ln n}\leqslant\dfrac{1}{n^2\ln 2}$, 因为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2\ln 2}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法可知, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2\ln n}$ 一致收敛, 由连续性定理可得 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续, 得证！

(2) 由逐项微分定理可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\ln n}\right)&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^n}{n^2\ln n}\right)\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n^2\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\ln n},(-1\leqslant x\leqslant1)\end{aligned}$$

当 $x=-1$ 时, 由 Leibniz 判别法可知, 交错级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\ln n}$ 收敛. 因此, 根据 Abel 第二定理可知, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n\ln n}$ 在 $[-1,0]$ 上一致收敛. 注意到: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2\ln n}$ 在 $[-1,0]$ 上收敛, 再由逐项微分定理可知,

$$f'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\ln n},(x\in[-1,0]).$$

从而 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处右可导, 得证！

(3)【法 1】: 由 $f'(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n\ln n}, x\in[0,1)$, 可以看出 $f'(x)$ 为正的递增函数, 因此广义极限 $\lim\limits_{x\to1^-}f'(x)=A$ 存在, 若 $A<+\infty$, 那么 $f'(x)$ 在 $[0,1)$ 上有界, 又因为 $\dfrac{1}{n\ln n}>0,(n=2,3,\cdots)$. 根据 Abel 第二定理可知: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 收敛; 但是由 Cauchy 积分判别法可知, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散, 这就产生了矛盾！因此 $A=+\infty$, 所以

$$\lim_{x\to1^-}f'(x)=+\infty$$

【法 2】由 (3) 可知, $f'(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n\ln n}$, 由连续性可得

$$\lim_{x\to1^-}f'(x)=\lim_{x\to1^-}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\lim_{x\to1^-}\frac{x^{n-1}}{n\ln n}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}.$$

由积分判别法可知, 下面的敛散性等价性, 具体如下:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}&\sim\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}(\ln x)\\&=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\lim_{t\to+\infty}\ln t-\frac{1}{\ln 2}=+\infty\end{aligned}$$

所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散, 从而 $\lim\limits_{x\to1^-}f'(x)=+\infty$.

(4) 结合 (3) 并由 L'Hospital 法则可得

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}f'(x)=+\infty.$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处左不可导, 得证!

八、 (10 分) 证明: $\mathbb{R}$ 上任意函数的严格极大值点至多可数.

证明: 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的一个存在严格极大值点的函数, 任取 x_0 为 $f(x)$ 的一个严格极大值点, 那么存在对应的 $\delta>0$, 使得 $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 时, 有 $f(x)<f(x_0)$. 而对于上述 $\delta>0$, 显然存在正整数 N, 满足 $\frac{1}{N}<\delta$, 那么当 $x\in\left(x_0-\frac{1}{N},x_0\right)\cup\left(x_0,x_0+\frac{1}{N}\right)$ 时, 有 $f(x)<f(x_0)$. 我们记

$$H_n=\left\{x\in\mathbb{R}\mid f(t)<f(x),t\in\left(x-\frac{1}{n},x\right)\cup\left(x,x+\frac{1}{n}\right)\right\}\ (n=1,2,\cdots).$$

即有 $x_0\in H_N$, 那么 $x_0\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}H_n$. 而显然 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}H_n$ 中的点均是 $f(x)$ 的严格极大值点, 因此 $f(x)$ 的所有严格极大值点构成的集合是 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}H_n$.

下面证明对每个正整数 n, H_n 至多为可数集：当 H_n 为有限集时, 结论显然成立. 当 H_n 为无限集时, 任取 $x_1,x_2\in H_n$, 不妨设 $x_1<x_2$, 且 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$. 注意到

$$f(x)<f(x_1),x\in\left(x_1-\frac{1}{n},x_1\right)\cup\left(x_1,x_1+\frac{1}{n}\right).$$

若 $x_2\in\left(x_1,x_1+\frac{1}{n}\right)$, 则 $f(x_2)<f(x_1)$, 矛盾. 因此 $x_2\geqslant x_1+\frac{1}{n}$, 这说明

$$\left(x_1-\frac{1}{2n},x_1+\frac{1}{2n}\right)\cap\left(x_2-\frac{1}{2n},x_2+\frac{1}{2n}\right)=\varnothing.$$

这样我们得到 H_n 中的每个点对应一个以它为中心以 $\frac{1}{2n}$ 为半径的开区间, 且这些开区间两两不相交. 在每个开区间任取一个有理数, 可以得到一个有理数集 E, 它与 H_n 一一对应. 而 $E\subset\mathbb{Q}$, 其中 $\mathbb{Q}$ 为可数集, 因此 E 也为可数集, 对应 H_n 为可数集.

既然每个 H_n 至多是可数集, 那么 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}H_n$ 也至多是可数集, 对应 $f(x)$ 的严格极大值点至多可数.

复旦大学 2025 年数学分析试卷

一、 填空题. 每题 10 分, 共 50 分.

1. 求极限 $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\sqrt[n]{2025}}{2}\right)^n =$ ________.

解: 【法 1】已知重要极限 $\lim_{f(x)\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = \mathrm{e}$, 所以

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\sqrt[n]{2025}}{2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{2025}-1}{2}+1\right)^n$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{2025}-1}{2}+1\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{2025}-1}\cdot\left(\frac{\sqrt[n]{2025}-1}{2}\cdot n\right)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{2025}-1)\cdot n}$$

$$= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(2025)}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\cdot n} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(2025)}{2}} = 45.$$

【法 2】取对数后, 令 $x=\frac{1}{n}$, 则 $x\to 0^+$, 由 L'Hôpital 法则可得

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\sqrt[n]{2025}}{2}\right)^n = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{1+\sqrt[n]{2025}}{2}\right)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{2}(1+2025^{\frac{1}{n}})\right)}{\frac{1}{n}}}$$

$$= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+2025^x)-\ln 2}{x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2025^x\ln(2025)}{1+2025^x}} = 45.$$

2. 求不定积分 $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x =$ ________.

解: 【法 1】利用三角函数公式可以注意到

$$\begin{aligned}\frac{1+\sin x}{1+\cos x} &= \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\\ &= \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\\ &= \frac{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1+2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)+\tan\left(\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

所以 $\frac{1+\sin x}{1+\cos x} = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)+\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, 于是

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x\cdot\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x &= \int \mathrm{e}^x\cdot\left[\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]\mathrm{d}x\\ &= \int\left(\mathrm{e}^x\cdot\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\mathrm{d}x+\int \mathrm{e}^x\cdot\tan\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+\int \mathrm{e}^x\cdot\tan\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{e}^x\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\int\tan\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)+\int \mathrm{e}^x\cdot\tan\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{e}^x\tan\left(\frac{x}{2}\right)+C.\end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

【法 2】利用平方差公式可得

$$\begin{aligned}\int e^x\cdot\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx&=\int e^x\cdot\frac{(1+\sin x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}dx\\&=\int e^x\cdot\frac{(1+\sin x)(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}dx\\&=\int e^x\cdot\frac{1-\cos x+\sin x-\sin x\cos x}{\sin^2 x}dx\\&=\int\frac{e^x}{\sin^2 x}dx-\int\frac{e^x\cos x}{\sin^2 x}dx+\int\frac{e^x}{\sin x}dx-\int\frac{e^x\cos x}{\sin x}dx\\&=\int e^x d(-\cot x)+\int e^x d\left(\frac{1}{\sin x}\right)+\int\frac{e^x}{\sin x}dx-\int e^x\cot x dx\\&=-e^x\cot x+\int e^x\cot x dx+\frac{e^x}{\sin x}-\int\frac{e^x}{\sin x}dx+\int\frac{e^x}{\sin x}dx-\int e^x\cot x dx\\&=-e^x\cot x+\frac{e^x}{\sin x}+C.\end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

3. $f(x)$ 为定义在 $(0,1)$ 上的实值函数, 满足 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=0$. 则 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f(x)}{x}=$ ____________.

解: 由已知, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $0<x<\delta$ 时, 有

$$-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

特别地, 取 $x_k=\dfrac{x}{2^{k-1}}(k\in\mathbb{N})$, 有

$$-\frac{\varepsilon}{2^k}<\frac{f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^k}\right)}{x}<\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

上式关于 $k=1,2,\cdots,n$ 求和可得

$$-\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\varepsilon<\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x}<\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\varepsilon.$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)=0$, 因此上式关于 $n\to\infty$ 取极限可得 $-\varepsilon\leqslant\dfrac{f(x)}{x}\leqslant\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

4. 平面 $x+y+z=0$ 与椭球 $x^2+y^2+4z^2=1$ 相交得到的椭圆面积 $S=$ ____________.

解: 【法 1—解方程组】设 a,b 为该椭圆的长半轴与短半轴, 且该椭圆的面积为 πab, 由于该椭圆的中心为原点, 所以椭圆上的点到原点的最大距离为 a, 最小距离为 b, 这样问题就可以化为在约束条件 $\begin{cases}x+y+z=0\\x^2+y^2+4z^2=1\end{cases}$ 下求 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 的最大值和最小值, 作 Lagrange 函数:

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x+y+z)+\mu\left(x^2+y^2+4z^2-1\right).$$

关于各变量求一阶偏导数, 并得到方程组: $\begin{cases}L'_x=2x+\lambda+2\mu x=0\\L'_y=2y+\lambda+2\mu y=0\\L'_z=2z+\lambda+8\mu z=0\\L'_\lambda=x+y+z=0\\L'_\mu=x^2+y^2+4z^2-1=0\end{cases}$

化简可得

$$\begin{cases} 2x(1+\mu)+\lambda=0 \\ 2y(1+\mu)+\lambda=0 \\ 2z(1+4\mu)+\lambda=0 \\ x+y+z=0 \\ x^2+y^2+4z^2-1=0 \end{cases} \tag{2.1}$$

将第 1 个方程乘以 $1+4\mu$, 第 2 个方程乘以 $1+4\mu$, 第 3 个方程乘以 $1+\mu$ 后相加, 得

$$2(x+y+z)(1+\mu)(1+4\mu)+\lambda(3+9\mu)=0. \tag{2.2}$$

将式(2.1)中第 4 个方程代入式(2.2)中可得 $\lambda(1+3\mu)=0$, 解得 $\lambda=0$ 或 $\mu=-\frac{1}{3}$.

(i) 若 $\lambda=0$, 则

$$\begin{cases} 2x(1+\mu)=0 \\ 2y(1+\mu)=0 \\ 2z(1+4\mu)=0 \\ x+y+z=0 \\ x^2+y^2+4z^2-1=0 \end{cases} \tag{2.3}$$

将式(2.3)中前 3 个方程相加得：

$$(1+\mu)(x+y+z)+3z\mu=0. \tag{2.4}$$

将 $x+y+z=0$ 代入式(2.4)中可得：

$$z\mu=0. \tag{2.5}$$

(i-1) 当 $z=0$ 时, 将其代入式(2.1)最后两个方程可得

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \tag{2.6}$$

将 $y=-x$ 代入式(2.6)中第 2 个方程得 $x^2=\frac{1}{2}$, 再代回式(2.6)中得到椭圆上两个驻点: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$, $f(x,y,z)$ 在这两个点的函数值均为 1 .

(i-2) 当 $\mu=0$ 时, 得到 $x=y=z=0$, 不满足式(2.3)中第 5 个方程, 矛盾！

(ii) 若 $\mu=-\frac{1}{3}$, 则

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x+\lambda=0 \\ \frac{4}{3}y+\lambda=0 \\ -\frac{2}{3}z+\lambda=0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x=-\frac{3}{4}\lambda \\ y=-\frac{3}{4}\lambda \\ z=\frac{3}{2}\lambda \end{cases} \tag{2.7}$$

将式(2.7)代入式(2.1)中第 5 个方程可得: $\left(-\frac{3}{4}\lambda\right)^2+\left(-\frac{3}{4}\lambda\right)^2+4\left(\frac{3}{2}\lambda\right)^2=1$. 所以 $\lambda^2=\frac{8}{81}$, 所以

$\lambda=\pm\sqrt{\frac{8}{81}}=\pm\frac{2\sqrt{2}}{9}$, 进而代入式(2.7)中可得

$$x=-\frac{3}{4}\lambda, y=-\frac{3}{4}\lambda, z=\frac{3}{2}\lambda.$$

所以它对应的 (x,y,z) 的两组解为:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{2}}{6},-\frac{\sqrt{2}}{3}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{6},-\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{2}}{3}\right).$$

函数 $f(x,y,z)$ 在这两个点的函数值均为 $\frac{1}{3}$. 由于椭圆的长轴与短轴均存在, 所以 $f(x,y,z)$ 在椭圆上的最大值与最小值均存在, 由讨论可见该椭圆的长半轴为 $a=1$, 短半轴为 $b=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 所以, 所求椭圆面积为 $\pi ab=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

【法 2—不解方程组】构造 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda(x+y+z)+\mu\left(x^2+y^2+4z^2-1\right).$$

考虑方程组

$$\begin{cases} L_x=2x+\lambda+2\mu x=0; \\ L_y=2y+\lambda+2\mu y=0; \\ L_z=2z+\lambda+8\mu z=0; \\ L_\lambda=x+y+z=0; \\ L_\mu=x^2+y^2+4z^2-1=0. \end{cases}$$

其中前两个方程相减可得

$$2(x-y)(1+\mu)=0.$$

(i) 若 $y=x$, 结合第四个方程有 $z=-2x$, 将此代入到第五个方程, 有 $18x^2=1$, 进而

$$x^2+y^2+z^2=6x^2=\frac{1}{3}.$$

(ii) 若 $\mu=-1$, 将其代入到第一个方程可知 $\lambda=0$, 将此代入到第三个方程有 $z=0$, 再结合第五个方程, 有

$$x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+4z^2=1.$$

由于 f 在有界闭区域

$$D=\left\{(x,y,z)\middle|x+y+z=0,x^2+y^2+4z^2=1\right\}$$

上连续, 从而一定存在最大值与最小值. 于是上述得到最小值与最大值分别为 $\frac{1}{3}$, 1, 因此 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 与 1 就是两面相交所得椭圆的半短轴与半长轴, 对应椭圆的面积为 $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

【法 2】平面 $x+y+z=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{1,1,1\}$, $|\boldsymbol{n}|=\sqrt{3}$, 法向量与 z 轴夹角 γ 的余弦值 $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$, 把 $z=-x-y$ 代入椭球方程 $x^2+y^2+4z^2=1$ 后可得 $x^2+y^2+4(-x-y)^2=1$. 整理后可得 $5x^2+8xy+5y^2=1$, 通过正交变换化为标准形为 $9x^{*2}+y^{*2}=1$, 故该投影椭圆面积是 $S_D=\pi\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{\pi}{3}$. 通过投影面积公式可知, $S=\frac{S_D}{\cos\gamma}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

【法 3】

引理 2.1

椭球被平面所截的面积的一般公式: 记作: 椭球 $G:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a,b,c>0)$, 平面

$K: Ax+By+Cz+D=0$, 则平面 K 截椭球 $G: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a,b,c>0)$ 所得截面面积为:

$$S=\frac{\pi Tabc\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{(a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2)^{\frac{3}{2}}}$$

其中 $T=a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2-D^2$,

代入 $\begin{cases} A=B=C=1, D=0 \\ a=b=1, c=\frac{1}{2} \end{cases}$, 则所求椭球面积为:

$$S=\frac{\pi Tabc\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{(a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\pi\left(1+1+\frac{1}{4}-0\right)\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\left(1+1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi.$$

5. 设 L 为任一包含原点的光滑曲线, 取顺时针方向, 求 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=$ ________.

解: 记作 $L_1: x^2+y^2=\varepsilon^2$, 其中 $\varepsilon>0$ 且充分小, 取顺时针, 令 $P=\frac{-y}{x^2+y^2}, Q=\frac{x}{x^2+y^2}$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{(-1)\left(x^2+y^2\right)-(-y)2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

补线后由两次 Green 公式可得

$$\begin{aligned} I&=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=-\oint_{L^-}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\\ &=-\left(\oint_{L^-+L_1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}-\oint_{L_1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\right)\\ &=-\oint_{L^-+L_1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}-\oint_{L_1^-}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\\ &=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L_1^-}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=-\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L_1^-}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\\ &=-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_{L_1}}(1-(-1))\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{2}{\varepsilon^2}S_{D_{L_1}}=-\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\pi\varepsilon^2=-2\pi. \end{aligned}$$

二、(20 分). 设 $\alpha>\beta>1$, 求 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^\alpha|\sin x|^\beta}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解: 由于 $\frac{1}{1+x^\alpha|\sin x|^\beta}$ 为 $[0,+\infty)$ 上的非负函数, 所以 $F(u)=\int_0^u\frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha|\sin x|^\beta}$ 为 $[0,+\infty)$ 上的单调递增函数. 注意到 $|\sin x|$ 以 π 为周期, 下面考虑数列 $F(n\pi)$ 的收敛性: 由于

$$F(n\pi)=\int_0^{n\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha|\sin x|^\beta}=\sum_{k=1}^n a_k,\ \text{其中} a_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha|\sin x|^\beta}.$$

由于在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上, 有 $\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x$, 于是当 $k\geqslant 2$ 时, 有

$$\begin{aligned} a_k&=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha|\sin x|^\beta}\leqslant\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^\alpha\pi^\alpha|\sin x|^\beta}=\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^\alpha\pi^\alpha|\sin x|^\beta}\\ &=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^\alpha\pi^\alpha\sin^\beta x}\leqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(k-1)^\alpha\pi^\alpha\left(\frac{2}{\pi}x\right)^\beta}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(s_kx)^\beta}\\ &=\frac{2}{s_k}\int_0^{\frac{\pi}{2}s_k}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\beta}\leqslant\frac{2}{s_k}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\beta}=\frac{2A}{s_k} \end{aligned}$$

其中 $s_k = 2\left[(k-1)^{\alpha}\pi^{\alpha-\beta}\right]^{\frac{1}{\beta}}$, $A = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{\beta}} > 0$. 注意到当 $k \to +\infty$ 时, $\frac{2A}{s_k}$ 与 $\frac{1}{k^{\frac{\alpha}{\beta}}}$ 为同阶无穷小量, 同时由 $\alpha > \beta > 1$ 即 $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ 可知 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{\alpha}{\beta}}}$ 收敛, 从而由数项级数的比较原则可知 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A}{s_k}$ 收敛, 进而正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛, 即极限 $\lim_{n\to\infty} F(n\pi)$ 存在, 结合 $F(u)$ 单调递增可知极限 $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ 存在, 即无穷积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{\alpha}|\sin x|^{\beta}}$ 收敛.

三、 (20 分). 求使得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\csc\frac{1}{n} - 1\right)^{2025p}$ 收敛的 p 的取值范围.

解: 先证明: $\frac{1}{n}\csc\left(\frac{1}{n}\right) - 1 > 0$, 只需证明: $\csc\left(\frac{1}{n}\right) > n$, 只需证明 $\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} > n$, 只需证明 $1 > n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$. 令 $t = \frac{1}{n}$, 则 $t \in (0,1]$, 只需证明: $1 > \frac{\sin t}{t}$, 只需证明 $t > \sin t$. 这是显然成立的, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\csc\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right]^{2025p}$ 是正项级数. 当 $n \to +\infty$ 时, 注意到 $\frac{1}{n}\csc\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ 或记作:

$$\frac{1}{n}\csc\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \sim \frac{1}{6n^2}, \quad \text{所以} \quad \left[\frac{1}{n}\csc\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right]^{2025p} \sim \frac{1}{6^{2025p}n^{4050p}}.$$

要使得 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\csc\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right]^{2025p}$ 收敛, 则需要 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^{2025p}n^{4050p}}$ 收敛. 所以需要满足 $4050p > 1$, 即 $p > \frac{1}{4050}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\csc\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right]^{2025p}$ 收敛.

四、 (10 分) 设 f 为一实连续函数, 求解微分方程:

$$xf\left(x^2+y^4\right)\mathrm{d}x + 2y^3 f\left(x^2+y^4\right)\mathrm{d}y = 0.$$

解: 注意到

$$\mathrm{d}(x^2+y^4) = 2x\mathrm{d}x + 4y^3\mathrm{d}y,$$

故原微分方程变形为

$$f(x^2+y^4)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^4) = 0.$$

故通解为 $x^2+y^4 = C$, 或 $f(x^2+y^4) = 0$, 其中 C 为任意常数.

五、 (10 分). 方程 $y^{(4)} + a_2 y^{(2)} + a_1 y' + a_0 y = 0$ 的两个解为 $y = \cos(4x)$ 与 $y = \sin(3x)$. 确定此微分方程并求出通解.

解: 由题意可知特征方程为 $\left(r^2+16\right)\left(r^2+9\right) = 0$, 即微分方程为 $y'''' + 25y'' + 144y = 0$. 求解得到通解为

$$y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x + C_3\cos 3x + C_4\sin 3x.$$

其中 C_1, C_2, C_3, C_4 为任意常数.

六、 (10 分). 设

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x,y); \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(x,y). \end{cases}$$

且

$$f(0,0) = 0, g(0,0) = 0.$$

1. 叙述 Lyapunov 意义下的解稳定、渐进稳定、不稳定的概念.

2. $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x^5 + y^3; \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x^3 - y^3. \end{cases}$ 分析其在 $(0,0)$ 处的稳定性.

解: (1) 解的稳定性：如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ (δ 一般与 ε 和 t_0 有关）, 使当任一 $\boldsymbol{x}_0$ 满足 $\|\boldsymbol{x}_0\| \leqslant \delta$ 时, 方程组的由初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 确定的解 $\boldsymbol{x}(t)$, 对一切 $t \geqslant t_0$ 均有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon,$$

则称方程组的零解 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 为稳定的.

解的渐近稳定性：如果方程组的零解 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 稳定, 且存在这样的 $\delta_0 > 0$ 使当 $\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta_0$ 时, 满足初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 均有

$$\lim_{t \to +\infty} \boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0},$$

则称零解 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 为渐近稳定的.

解的不稳定性：当零解 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 不是稳定时, 称它是不稳定的. 即是说：如果对某个给定的 $\varepsilon > 0$ 不管 $\delta > 0$ 怎样小, 总有一个 $\boldsymbol{x}_0$ 满足 $\|\boldsymbol{x}_0\| \leqslant \delta$, 使由初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 所确定的解 $\boldsymbol{x}(t)$, 至少存在某个 $t_1 > t_0$ 使得

$$\|\boldsymbol{x}(t_1)\| = \varepsilon,$$

则称方程组的零解 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 为不稳定的.

(2) 考虑取正定的 Lyapunov 函数为 $V(x, y) = x^4 + y^4$, 则

$$V_t = 4x^3\left(-x^5 + y^3\right) + 4y^3\left(-x^3 - y^3\right) = -4x^8 - 4y^6 \leqslant 0.$$

等号成立当且仅当 $x = y = 0$. 故该 Lyapunov 函数的导数是负定的, 即原点是渐近稳定的.

南开大学 2025 年数学分析试卷

一、 (25 分) 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\ln(1+x))-\ln(1+\sin x)}{\sin(\sin x)-\ln(1+\ln(1+x))}.$$

解: 对于分母, 注意到

$$\sin(\sin x)=\sin x+o\left(\sin^2 x\right)=x+o\left(x^2\right)(x\to 0);$$

$$\begin{aligned}\ln(1+\ln(1+x))&=\ln(1+x)-\frac{1}{2}\ln^2(1+x)+o\left(\ln^2(1+x)\right);\\&=x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)=x-x^2+o\left(x^2\right)(x\to 0).\end{aligned}$$

两者相减可得

$$\sin(\sin x)-\ln(1+\ln(1+x))=x^2+o\left(x^2\right)(x\to 0).$$

对于分子, 注意到

$$\sin(\ln(1+x))=\ln(1+x)+o\left(\ln^2(1+x)\right)=x-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)(x\to 0);$$

$$\ln(1+\sin x)=\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x+o\left(\sin^2 x\right)=x-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)(x\to 0).$$

两者相减可得

$$\sin(\ln(1+x))-\ln(1+\sin x)=o\left(x^2\right)(x\to 0).$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\ln(1+x))-\ln(1+\sin x)}{\sin(\sin x)-\ln(1+\ln(1+x))}=\lim_{x\to 0}\frac{o\left(x^2\right)}{x^2+o\left(x^2\right)}=0.$$

二、 (25 分) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 在 x_0 的去心邻域内二阶可导且二阶导函数有界. 证明: $f(x)$ 在点 x_0 处左右导数都存在.

证明: 设函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 上二阶可导, 且满足 $\left|f''(x)\right|\leqslant M(M>0)$, 那么对任意的 $\varepsilon>0$, 取 $\delta'=\min\left\{\frac{\varepsilon}{M},\delta\right\}$, 当 $x',x''\in\left(x_0,x_0+\delta'\right)$ 时, 根据 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi\in\left(x_0,x_0+\delta'\right)$, 满足

$$\left|f'\left(x'\right)-f'\left(x''\right)\right|=\left|f''(\xi)\left(x'-x''\right)\right|\leqslant M\left|x'-x''\right|<M\delta'\leqslant\varepsilon.$$

由 Cauchy 准则可知 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$ 存在. 另外 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 上二阶可导, 因此 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta)$ 上连续, 根据导数极限定理可知 $f'_+(x_0)$ 存在, 且 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$. 同理可知 $f'_-(x_0)$ 也存在.

三、 (25 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)g(x)\mathrm{d}x=A\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

证明: 首先根据 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 易知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界, 那么 $|f(x)-A|$ 也有界, 可设正数 $M_1\geqslant 1$ 满足

$$|f(x)-A|\leqslant M_1,x\in[0,+\infty)$$

另外, 由于 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, 那么存在 $M_2\geqslant 1$. 满足

$$|g(x)|\leqslant M_2,x\in[0,1].$$

对任意的 $\varepsilon > 0$(限制 $\varepsilon < 1$), 取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M_1 M_2} \in (0,1)$. 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. 所以存在 $N > 0$. 当 $x \geqslant N$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{M_2}.$$

特别地, 当 $n \geqslant \dfrac{N}{\delta}$ 时, 对任意的 $x \in [\delta, 1]$. 有 $nx \geqslant n\delta \geqslant N$. 那么

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 [f(nx) - A]g(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_0^\delta |f(nx) - A||g(x)|\mathrm{d}x + \int_\delta^1 |f(nx) - A||g(x)|\mathrm{d}x \\ &< M_1 M_2 \delta + \int_\delta^1 \frac{\varepsilon}{M_2} \cdot M_2 \mathrm{d}x < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 [f(nx) - A]g(x)\mathrm{d}x = 0$. 也就是 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)g(x)\mathrm{d}x = A\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$.

四、 (20 分) 设 $f:(a,b) \to (a,b)$ 满足对任意的 $x, y \in (a,b)$, 当 $x \neq y$ 时, 有

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

任取 $x_1 \in (a,b)$, 令 $x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, \cdots$, 证明：数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛.

证明： 首先根据已知, 对任意的 $x, y \in (a,b)$, 有 $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$, 这意味着 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续. 另外, 当 $x > y$ 时, 也有 $f(x) - f(y) < x - y$, 也就是 $f(x) - x < f(y) - y$, 因此 $f(x) - x$ 是 (a,b) 上严格递减的连续函数.

(i) 若 $f(x) - x$ 在 (a,b) 上不变号, 不妨设 $f(x) - x$ 恒正, 也就是 $f(x) > x$, 那么 $x_{n+1} = f(x_n) > x_n$, 这说明 $\{x_n\}$ 单调递增, 再结合 $\{x_n\} \subset (a,b)$ 可知 $\{x_n\}$ 收敛. 同理, 若 $f(x) - x$ 恒负, 则 $\{x_n\}$ 单调递减, 进而 $\{x_n\}$ 依旧收敛.

(ii) 若 $f(x) - x$ 在 (a,b) 上变号, 那么存在 $\xi \in (a,b)$, 满足 $f(\xi) = \xi$. 根据已知, 有

$$|x_{n+1} - \xi| = |f(x_n) - f(\xi)| \leqslant |x_n - \xi|.$$

因此 $\{|x_n - \xi|\}$ 单调递减有下界 0, 那么 $\{|x_n - \xi|\}$ 收敛, 设其极限为 A. 若 $\{x_n\}$ 不收敛, 则 $A > 0$, 同时 $\{x_n\}$ 有且仅有两个聚点 $\xi + A, \xi - A$, 那么存在正整数 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi + A$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k+1} = \xi - A$. 容易证明这里 $\xi + A, \xi - A \in (a,b)$, 因此对等式 $x_{n_k+1} = f\left(x_{n_k}\right)$ 关于 $k \to \infty$ 取极限, 可得 $\xi - A = f(\xi + A)$, 而 $f(\xi) = \xi$, 再结合已知, 有

$$A = |(\xi - A) - \xi| = |f(\xi + A) - f(\xi)| < |(\xi + A) - \xi| = A.$$

这是矛盾的. 因此 $\{x_n\}$ 收敛.

五、 (20 分) 设定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 对任意满足 $a_n < 0 < b_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ 的点列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$ 都存在. 证明：函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可微.

证明： 首先任取 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{a_n'\}, \{b_n'\}$ 满足

$$a_n < 0 < b_n, a_n' < 0 < b_n', \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n' = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n' = 0.$$

记数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足

$$x_{2n-1} = a_n, x_{2n} = a_n', y_{2n-1} = b_n, y_{2n} = b_n'.$$

显然 $x_n < 0 < y_n$, 同时 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, 因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$$

存在, 那么 $\left\{\dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}\right\}$ 与 $\left\{\dfrac{f(b_n') - f(a_n')}{b_n' - a_n'}\right\}$ 作为 $\left\{\dfrac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}\right\}$ 的子列自然也收敛, 且极限相同. 因此, 对任意满足 $a_n < 0 < b_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ 的点列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$

都存在且相等, 设此极限值为 A. 这说明重极限

$$\lim_{h\to 0^+,k\to 0^-}\frac{f(h)-f(k)}{h-k}=A. \tag{3.1}$$

原因如下：若式(3.1)不成立, 则存在 $\varepsilon_0>0$, 对任意的 $\delta_n=\dfrac{1}{n}>0$, 存在 $h_n\in(0,\delta_n)$, $k_n\in(-\delta_n,0)$, 满足

$$\left|\frac{f(h_n)-f(k_n)}{h_n-k_n}-A\right|\geqslant\varepsilon_0.$$

显然 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ 满足 $k_n<0<h_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=\lim\limits_{n\to\infty}k_n=0$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(h_n)-f(k_n)}{h_n-k_n}\neq A$, 这与已知相矛盾. 因此式(3.1)成立, 那么对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $h\in(0,\delta)$, $k\in(-\delta,0)$ 时, 有

$$\left|\frac{f(h)-f(k)}{h-k}-A\right|<\varepsilon. \tag{3.2}$$

特别地, 让 $k\to 0^-$, 结合 $f(x)$ 在 $x=0$ 的连续性可知

$$\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}-A\right|\leqslant\varepsilon.$$

这意味着

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=A.$$

也就是 $f'_+(0)=A$. 同理, 式(3.2)中令 $h\to 0^+$ 可得 $f'_-(0)=A$, 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微, 且 $f'(0)=A$.

六、(20 分) 设 $f(x)=\arctan(\sin x)$, $x_1=\dfrac{1}{2}$, 令 $x_{n+1}=f(x_n)$, $n=1,2,\cdots$, 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 的敛散性.

解: 首先由数学归纳法容易证明 $x_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 再结合不等式 $\sin x<\tan x$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 可知

$$x_{n+1}=\arctan(\sin x_n)<\arctan(\tan x_n)=x_n, n=1,2,\cdots.$$

即 $\{x_n\}$ 严格单调递减且有界, 因此 $\{x_n\}$ 收敛, 设其极限为 $c\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 对等式 $x_{n+1}=\arctan(\sin x_n)$ 关于 $n\to\infty$ 取极限可得 $c=\arctan(\sin c)$, 若 $c\neq 0$, 则 $c\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 此时

$$c=\arctan(\sin c)<\arctan(\tan c)=c.$$

矛盾. 因此 $c=0$. 那么 $\left\{\dfrac{1}{x_n^2}\right\}$ 严格递增趋于 $+\infty$, 利用 Stolz 公式, 有

$$\lim_{n\to\infty}nx_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2x_{n+1}^2}{x_n^2-x_{n+1}^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\arctan(\sin x))^2}{x^2-(\arctan(\sin x))^2}.$$

其中

$$\begin{aligned}(\arctan(\sin x))^2&=\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+o\left(\sin^3 x\right)\right)^2\\&=\left(x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right)^2=x^2-x^4+o\left(x^4\right)(x\to 0)\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}nx_n^2=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(x^2-x^4+o\left(x^4\right)\right)}{x^4+o\left(x^4\right)}=1.$$

根据数项级数的比较原则可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 发散.

七、(15 分) 求重积分 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y})\cos x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解: 【法 1】先证明平均值定理的复变函数形式：$f(a)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f\left(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta$,
以 a 为中心、r 为半径的圆周可表示为 $\gamma(\theta)=a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 其中 $\theta\in[0,2\pi]$. 其导数为 $\gamma'(\theta)=\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 由于 f

在 $\bar{B}(a,r)$ 上解析, 由 Cauchy 积分公式：

$$f(a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z.$$

代入 $z=\gamma(\theta)=a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 和 $\mathrm{d}z=\gamma'(\theta)\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$

$$f(a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\cdot\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$$

化简后得到：

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(a+r\mathrm{e}^{i\theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

利用以上公式, 并注意到二重积分的对称性

$$\begin{aligned}I&=2\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{e}^{y}\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{e}^{x}\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{e}^{x}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{e}^{r\cos\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\sin\theta}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta\right)r\mathrm{d}r=2\int_0^1 2\pi r\mathrm{d}r=2\pi.\end{aligned}$$

【法 2】记所求定积分为 I, 由对称性易知 $\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{e}^{y}\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{e}^{-y}\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 因此

$$I=2\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{e}^{y}\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{e}^{x}\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

作极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 可得

$$I=2\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta)\mathrm{d}\theta.\tag{3.3}$$

注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta)&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{r\cos\theta}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\sin\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\sin\theta}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n(\cos n\theta-\mathrm{i}\sin n\theta)}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\cos n\theta\end{aligned}$$

任取 $r\in[0,1]$, 对任意的 $\theta\in[0,2\pi]$, 由于 $\left|\frac{r^n}{n!}\cos n\theta\right|\leqslant\frac{1}{n!}$, 且 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛, 因此 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\cos n\theta$ 关于 θ 在 $[0,2\pi]$ 上一致收敛于 $\mathrm{e}^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta)$, 那么

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\cos n\theta\right)\mathrm{d}\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\int_0^{2\pi}\cos n\theta\mathrm{d}\theta=2\pi$$

将此代入到式(3.3), 有 $I=2\int_0^1 2\pi r\mathrm{d}r=2\pi$.

山东大学 2025 年数学分析试卷

一、 计算题. 每题 15 分, 共 45 分.

1. 设 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可微, 满足

$$g(0)=g'(0)=0,\quad g''(0)=2a.$$

设 $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}\ (x\neq 0)$, $f(0)=0$, 求 $f'(0)$.

解: 利用导数定义计算 $f'(0)$, 得

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}.$$

由 Maclaurin 公式可知, $g(x)=g(0)+g'(0)x+\dfrac{g''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$. 又因为 $g(0)=g'(0)=0, g''(0)=2a$, 所以

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[g(0)+g'(0)x+\frac{g''(0)}{2!}x^2+o(x^2)\right]\\&=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+o(x^2)}{x^2}=a.\end{aligned}$$

2. 求积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解: 令 $x=\tan u$, 则 $\mathrm{d}x=(1+\tan^2 u)\mathrm{d}u$, 所以

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan u)\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{\cos u+\sin u}{\cos u}\right)\mathrm{d}u\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos u+\sin u)\mathrm{d}u-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos u)\mathrm{d}u\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\sqrt{2}\cos\left(u-\frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{d}u-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos u)\mathrm{d}u\\&=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\cos\left(u-\frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{d}u-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos u)\mathrm{d}u\\&=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos v)\mathrm{d}v-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos u)\mathrm{d}u=\frac{\pi}{8}\ln 2.\end{aligned}$$

其中令 $v=u-\dfrac{\pi}{4}$, 则 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}u$, 所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\cos\left(u-\frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{d}u=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\ln(\cos v)\mathrm{d}v.$$

再利用对称性可知, $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\ln(\cos v)\mathrm{d}v=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos v)\mathrm{d}v$, 所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\cos\left(u-\frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos v)\mathrm{d}v.$$

即 $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

3. 若 $F(t)=\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, t>0$. 其中 f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续可微函数.

(1). 计算 $F'(t)$.

(2). 若 $f'(0)=0$, 计算 $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^5}$.

解:

(1). 作球坐标变换：$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ ，其中 $\begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \\ 0 \leqslant r \leqslant t \end{cases}$ ，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$, 所以

$$\begin{aligned} F(t) &= \iiint_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r = 4\pi\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r \end{aligned}$$

所以 $F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2), t > 0$.

(2). 利用 L'Hôpital 法则可知, 令 $u = t^2$, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{t\to0+}\frac{F(t)}{t^5} &= \lim_{t\to0+}\frac{F'(t)}{5t^4} = \lim_{t\to0+}\frac{4\pi t^2 f(t^2)}{5t^4} = \frac{4\pi}{5}\lim_{t\to0+}\frac{f(t^2)}{t^2} \\ &= \frac{4\pi}{5}\lim_{u\to0+}\frac{f(u)}{u} = \frac{4\pi}{5}\lim_{u\to0+}f'(u) = \frac{4\pi}{5}f'(0) = 0. \end{aligned}$$

二、 证明题. 每题 15 分, 共 45 分.

1. 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上可导, $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上有界, 证明: $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有界且一致连续.

证明: 因为 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上有界, 所以存在 $M > 0$, 使得 $|f'(x)| \leqslant M$.

由 Lagrange 中值定理可知, 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得

$$f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'(\xi)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

所以 $f(x) = f'(\xi)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$, 所以

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left|f'(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant |f'(\xi)|\left|x-\frac{1}{2}\right| + \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \\ &\leqslant M\left|x-\frac{1}{2}\right| + \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant M + \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|, \end{aligned}$$

所以函数 $f(x)$ 在开区间 $(0,1)$ 上有界. 对 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \dfrac{\varepsilon}{M} > 0, \forall x, y \in (0,1)$, 只要 $|x-y| < \delta$, 有

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}(x-y)\right| = |f'(\eta)|\,|x-y| \\ &\leqslant M|x-y| < M\cdot\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

其中 η 介于 x 与 y 之间, 所以函数 $f(x)$ 在开区间 $(0,1)$ 上一致连续, 得证！

2. 设 $f(x,y) = \varphi(|xy|)$, 且在 $u = 0$ 的附近满足 $|\varphi(u)| \leqslant u^2$. 证明: $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

证明: 在 $u = 0$ 附近有 $|\varphi(u)| \leqslant u^2$, 两边取极限可得

$$0 \leqslant \lim_{u\to0}|\varphi(u)| \leqslant \lim_{u\to0}u^2 = 0.$$

由夹逼准则可知, $\lim\limits_{u\to0}|\varphi(u)| = 0$, 而 $\varphi(0) = 0$ 是显然的. 所以 $f(0,0) = \varphi(0) = 0$.

$$\begin{aligned} f_x'(0,0) &= \lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{\varphi(0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{0}{x} = 0 \\ f_y'(0,0) &= \lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to0}\frac{\varphi(0)}{y} = \lim_{y\to0}\frac{0}{y} = 0 \end{aligned}$$

所以, 利用可微定义计算极限

$$\begin{aligned} &\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varphi(|xy|)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy|^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

由基本不等式可知, $x^2+y^2 \geqslant 2\sqrt{x^2y^2}=2|xy|$, 所以

$$\begin{aligned}&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \leqslant &\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|^2}{\sqrt{2|xy|}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{(x,y)\to(0,0)}|xy|^{\frac{3}{2}}=0\end{aligned}$$

由夹逼准则可知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

由可微性定义可知,$f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处可微.

3. 设非负连续函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减, 证明:

$$F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\mathrm{d}t$$

是 $[0,+\infty)$ 上的凸函数.

证明: 由题意可知,$F(x)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$, 则 $F'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)$. 对 $\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$, 切不妨设：$x_1\leqslant x_2$, 则

$$\begin{aligned}&F'(x_2)-F'(x_1)\\ =&\left[\int_0^{x_2} f(t)\mathrm{d}t-x_2f(x_2)\right]-\left[\int_0^{x_1} f(t)\mathrm{d}t-x_1f(x_1)\right]\\ =&\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t-x_2f(x_2)+x_1f(x_1)\\ \geqslant& f(x_2)\int_{x_1}^{x_2} 1\mathrm{d}t-x_2f(x_2)+x_1f(x_1)\\ =&f(x_2)(x_2-x_1)-x_2f(x_2)+x_1f(x_1)\\ =&x_1f(x_1)-x_1f(x_2)=x_1[f(x_1)-f(x_2)]\geqslant 0\end{aligned}$$

所以对 $\forall x_1\leqslant x_2$, 有 $F'(x_2)\geqslant F'(x_1)$. 所以 $F'(x)[0,+\infty)$ 上单调递增, 所以 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是下凸函数, 得证.

三、 综合题. 每题 20 分, 共 60 分.

1. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$.

(1). 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)-f\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]$.

(2). 证明: $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致连续.

解: (1)【法 1】由 Lagrange 中值定理, 存在 ξ 介于 $1-\dfrac{1}{n}$ 与 $1-\dfrac{1}{n+1}$ 之间, 使得 $\dfrac{f\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(1-\frac{1}{n}\right)}=f'(\xi)$, 故

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\left[f\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\\ =&\lim_{n\to+\infty} f'(\xi)\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\\ =&\lim_{n\to+\infty} f'(\xi)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

又因为 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$, 所以 $f'(x)=\dfrac{-(-2x)}{(1-x^2)^2}=\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$, 则

注意到

$$\frac{2\xi}{(1-\xi^2)^2}\cdot\frac{1}{n(n+1)}\leqslant\frac{2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{\left(1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2\right)^2}\cdot\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{\left(\left(2-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{n+1}\right)^2}\cdot\frac{1}{n(n+1)}\to\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\quad(n\to+\infty),$$

$$\frac{2\xi}{(1-\xi^2)^2}\cdot\frac{1}{n(n+1)}\geqslant\frac{2\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right)^2}\cdot\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{2\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\left(2-\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n^2}}\cdot\frac{1}{n(n+1)}\to\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\quad(n\to+\infty).$$

所以, 由夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[f\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}$.

【法 2】因为 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$, 所以

$$f\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2}=\frac{(n+1)^2}{2n+1}.$$

并且 $f\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}=\dfrac{n^2}{n^2-(n-1)^2}=\dfrac{n^2}{2n-1}$. 所以

$$\lim_{n\to+\infty}\left[f\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(n+1)^2}{2n+1}-\frac{n^2}{2n-1}\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2(2n-1)-n^2(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(n^2+2n+1\right)(2n-1)-n^2(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2-1}{4n^2-1}=\frac{1}{2},$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[f\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)-f\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]=\dfrac{1}{2}$.

(2) 取 $x_n=1-\dfrac{1}{n}$, $y_n=1-\dfrac{1}{n+1}$, 则

$$|x_n-y_n|=\frac{1}{n(n+1)}\to 0,\ (n\to+\infty)$$

但是 $|f(x_n)-f(y_n)|\to\dfrac{1}{2}\neq 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上不一致连续.

2. 设

$$u_n(x)=x^n\ln x,\quad x\in(0,1].$$

讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(0,1]$ 上的收敛性与一致收敛性, 并计算 $\int_0^1\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\mathrm{d}x$.

解: (1) 由题意可知, 当 $x\in(0,1)$ 时, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\ln x=\ln x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x\ln x}{1-x}.$$

且当 $x=1$ 时, 有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}0=0$. 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(0,1]$ 上是收敛的, 且和函数为:

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{1-x}, & x\in(0,1),\\ 0, & x=1.\end{cases}$$

但是 $\lim\limits_{x\to1^-}S(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x\ln x}{1-x}$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{\ln(x-1+1)}{1-x}=\lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{1-x}=-1.$$

所以 $S(x)$ 在 $(0,1]$ 上不连续, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(0,1]$ 上并不一致收敛.

(2) 对 $\forall\delta\in(0,1)$, 因为

$$|u_n(x)|=|x^n\ln x|=|x\cdot x^{n-1}\ln x|\leqslant M\cdot\delta^{n-1}.$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(0,\delta]$ 上一致收敛, 或者考虑部分和的余项

$$R_N(x)=\sum_{n=N}^{\infty}x^n\ln x=\ln x\cdot\sum_{n=N}^{\infty}x^n=\ln x\cdot\frac{x^N}{1-x}$$

我们需要证明 $\sup\limits_{x\in(0,\delta]}|R_N(x)|\to0$ 当 $N\to\infty$. 计算:

$$|R_N(x)|=\left|\ln x\cdot\frac{x^N}{1-x}\right|=-\ln x\cdot\frac{x^N}{1-x}$$

因为 $\ln x<0$ 和 $1-x>0$ 对于 $x\in(0,\delta]$. 我们需要找到 $\sup\limits_{x\in(0,\delta]}-\ln x\cdot\dfrac{x^N}{1-x}$. 注意到对于 $x\in(0,\delta]$, 函数 $-x^N\ln x$ 在 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{N}}$ 处取到最大值 $\dfrac{1}{N\mathrm{e}}$ 因此:

$$|R_N(x)|\leqslant\frac{1}{N\mathrm{e}}\frac{1}{1-\delta}.$$

所以:

$$\sup_{x\in(0,\delta]}|R_N(x)|\leqslant\frac{1}{N\mathrm{e}}\frac{1}{1-\delta}\to0\quad 当\quad N\to\infty$$

因此, 级数在 $(0,\delta]$ 上一致收敛. 所以此时有

$$\begin{aligned}\int_0^{\delta}S(x)\mathrm{d}x&=\int_0^{\delta}\sum_{n=1}^{\infty}x^n\ln x\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\delta}x^n\ln x\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x^{n+1}((n+1)\ln x-1)}{(n+1)^2}\right]_0^{\delta}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta^{n+1}((n+1)\ln\delta-1)}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$

上式右端级数关于 $\delta\in\left[\dfrac12,1\right)$ 上一致收敛, 所以令 $\delta\to1^-$, 可得

$$\begin{aligned}\int_0^1S(x)\mathrm{d}x&=\lim_{\delta\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta^{n+1}((n+1)\ln\delta-1)}{(n+1)^2}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{(n+1)^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-1\right)\\&=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1-\frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

3. 设 $u(x,y,z)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的连续函数, 而且在点 (x_0,y_0,z_0) 的某个邻域上有连续的二阶偏导数. 记 Σ 是以点 (x_0,y_0,z_0) 为球心, R 为半径的球面, 令 $T(R)=\dfrac{1}{4\pi R^2}\displaystyle\iint_{\Sigma}u(x,y,z)\mathrm{d}S$, $R>0$. 证明:

(1). $\lim\limits_{R\to0^+}T(R)=u(x_0,y_0,z_0)$.

(2). $\lim\limits_{R\to0^+}\dfrac{T(R)-u(x_0,y_0,z_0)}{R^2}=\dfrac16\Delta u(x_0,y_0,z_0)$, 其中 $\Delta u=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}$.

证明: (1) 根据曲面积分中值定理, 存在 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Sigma$, 满足

$$T(R)=\frac{u(\xi,\eta,\zeta)}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=u(\xi,\eta,\zeta)$$

而当 $R\to 0^+$ 时, 有 $(\xi,\eta,\zeta)\to(x_0,y_0,z_0)$, 结合 u 的连续性可知 $\lim\limits_{R\to 0^+}T(R)=u(x_0,y_0,z_0)$.

(2) 为了方便, 记 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$, 根据 Taylor 公式, 对任意的 $(x,y,z)\in S$, 有

$$u(x,y,z)=u(P_0)+\nabla u(P_0)X^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2}XH(P_0)X^{\mathrm{T}}+o\left(R^2\right). \tag{4.1}$$

其中 $\nabla u(P_0)=\left(u_x(P_0),u_y(P_0),u_z(P_0)\right)$, $X=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$, 而 $H(P_0)$ 为 u 在 P_0 处的 Hesse 矩阵, $R=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$. 根据对称性容易发现

$$\iint_S(x-x_0)\,\mathrm{d}S=\iint_S(y-y_0)\,\mathrm{d}S=\iint_S(z-z_0)\,\mathrm{d}S=0$$

$$\iint_S(x-x_0)(y-y_0)\,\mathrm{d}S=\iint_S(x-x_0)(z-z_0)\,\mathrm{d}S=\iint_S(y-y_0)(z-z_0)\,\mathrm{d}S=0$$

同时

$$\begin{aligned}&\iint_S(x-x_0)^2\,\mathrm{d}S=\iint_S(y-y_0)^2\,\mathrm{d}S=\iint_S(z-z_0)^2\,\mathrm{d}S\\=&\frac{1}{3}\iint_S\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint_S R^2\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\pi R^4.\end{aligned}$$

因此式(4.1)取积分可得

$$\iint_S u(x,y,z)\mathrm{d}S=4\pi R^2u(P_0)+\frac{2}{3}\pi R^4\Delta u(P_0)+o\left(R^4\right).$$

特别地, 也有

$$T(R)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_S u(x,y,z)\mathrm{d}S=u(P_0)+\frac{1}{6}R^2\Delta u(P_0)+o\left(R^2\right)$$

自然

$$\lim_{R\to 0+}\frac{T(R)-u(P_0)}{R^2}=\lim_{R\to 0+}\frac{\frac{1}{6}R^2\Delta u(P_0)+o\left(R^2\right)}{R^2}=\frac{1}{6}\Delta u(P_0).$$

北京理工大学 2025 年数学分析试卷

一、 计算题.

1. $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t)-2}{t}=3$, 求 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^{f(t)}-2}{t-2}$.

解: 因为 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t)-2}{t}=3$, 由极限存在定理可知, $\lim\limits_{t\to0}[f(t)-2]=0$, 所以 $\lim\limits_{t\to0}f(t)=2$, 那么 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^{f(t)}-2}{t-2}=\dfrac{e^{\lim\limits_{t\to0}f(t)}-2}{\lim\limits_{t\to0}(t-2)}=\dfrac{e^2-2}{-2}$.

注 改编一下：已知 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t)-2}{t}=3$, 求 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^{f(t)}-e^2}{t}$.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0}\frac{e^{f(t)}-e^2}{t}&=\lim_{t\to0}\frac{e^{f(t)}-e^2}{f(t)-2}\cdot\frac{f(t)-2}{t}\\&=3\lim_{t\to0}\frac{e^{f(t)}-e^2}{f(t)-2}\\&=3\lim_{t\to0}\frac{e^2(e^{f(t)-2}-1)}{f(t)-2}\\&=3\lim_{t\to0}\frac{e^2(f(t)-2)}{f(t)-2}=3e^2.\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

解: 【法 1】利用 L'Hôpital 法则结合等价替换.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{1}{x^2}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^2\sin^2x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x\cos x}{2x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x+\sin^2x}{6x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2x}{6x^2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

【法 2】利用等价替换：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{1}{x^2}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^2\sin^2x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^4}\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{6}x^3\right)\frac{2x}{x^4}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

【法 3】利用 Maclaurin 展开公式可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{1}{x^2}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^4}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^4}\left[x^2-\left(x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)\right)\right]=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

3. $f(x,y)=7xy$ 在 $(x-1)^2+y^2=1$ 上的最大值.

解: 任取 $(x-1)^2+y^2=1$ 上一点 $x=1+\cos\theta, y=\sin\theta$, 其中 $\theta\in[0,2\pi]$, 有

$$f(x,y)=7(1+\cos\theta)\sin\theta.$$

为了方便, 记 $g(\theta)=(1+\cos\theta)\sin\theta$, 则

$$g'(\theta)=-\sin^2\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta=(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1).$$

由此可知 $g(\theta)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增, 在 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{5}{3}\pi\right]$ 上单调递减, 在 $\left[\frac{5}{3}\pi,2\pi\right]$ 上单调递增, 同时

$$g(2\pi)=0<g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

因此 $g(\theta)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的最大值为 $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, 对应 $f(x,y)$ 在 $(x-1)^2+y^2=1$ 上的最大值为 $\frac{21\sqrt{3}}{4}$.

4. $\iint_D(x+2xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D:-1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant x$.

解: 将二重积分化为二次积分可得

$$\begin{aligned}I&=\iint_D(x+2xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{x}(x+2xy)\mathrm{d}y\\&=\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}x\int_{-1}^{x}\mathrm{d}y+2\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}x\int_{-1}^{x}y\mathrm{d}y\\&=\int_{-1}^{1}x(x+1)\mathrm{d}x+2\int_{-1}^{1}x\frac{1}{2}(x^2-1)\mathrm{d}x\\&=2\int_0^1x^2\mathrm{d}x+0=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

5. $F(x)=\int_1^{x^2}\mathrm{d}t\int_{t^2}^{x^2}f(s,t)\mathrm{d}s$, 求 $F'(x),F''(x)$.

解: 若 $F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)}g(x,t)\mathrm{d}t$, 则

$$F'(x)=g(x,b(x))b'(x)-g(x,a(x))a'(x)+\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}t.$$

本题 $g(x,t)=\int_{t^2}^{x^2}f(s,t)\mathrm{d}s$, $F(x)=\int_1^{x^2}g(x,t)\mathrm{d}t$. 从而

$$F'(x)=\int_1^{x^2}\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}t+g(x,x^2)\cdot 2x.$$

式中, $\frac{\partial g}{\partial x}=f(x^2,t)\cdot 2x$, $g(x,x^2)=\int_{x^4}^{x^2}f(s,x^2)\mathrm{d}s$. 从而

$$F'(x)=\int_1^{x^2}2xf(x^2,t)\mathrm{d}t+2x\int_{x^4}^{x^2}f(s,x^2)\mathrm{d}s.$$

$$\begin{aligned}F''(x)=2\int_1^{x^2}f(x^2,t)\mathrm{d}t+2x\left[\int_1^{x^2}\frac{\partial f}{\partial x}(x^2,t)\cdot 2x\mathrm{d}t+f(x^2,x^2)2x\right]\\+2\int_{x^4}^{x^2}f(s,x^2)\mathrm{d}s+2x\left[\int_{x^4}^{x^2}\frac{\partial f}{\partial t}(s,x^2)\cdot 2x\mathrm{d}s+f(x^2,x^2)2x-f(x^4,x^2)4x^3\right]\end{aligned}$$

6. $u=x^2y+y^2z+z^2x$, 求 $\left.\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right|_{(0,0,1)}$, $\left.\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0,-1)}$, $\left.\frac{\partial^2u}{\partial x\partial z}\right|_{(1,0,-1)}$.

解:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)}{\partial x} = 2xy+z^2,\\
\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(0,0,1)} &= \left.\frac{\partial\left(2xy+z^2\right)}{\partial x}\right|_{(0,0,1)} = 2y|_{(0,0,1)} = 0,\\
\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0,-1)} &= \left.\frac{\partial\left(2xy+z^2\right)}{\partial y}\right|_{(1,0,-1)} = 2x|_{(1,0,-1)} = 2,\\
\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right|_{(1,0,-1)} &= \left.\frac{\partial\left(2xy+z^2\right)}{\partial z}\right|_{(1,0,-1)} = 2z|_{(1,0,-1)} = -2.
\end{aligned}$$

7. 求反常积分 $I=\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$,

解:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\ln x\right)\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 x^{2n}\ln x\,\mathrm{d}x\right) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\\
&= -\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\right]\\
&= -\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned}$$

二、 解答如下问题:

1. 证明: $\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}>x^2-2, x\neq 0$.

证明: 令 $g(x)=\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}-x^2+2$, 则

$$g'(x) = -\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}-2x$$
$$g''(x) = \mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}-2 \geqslant 2\sqrt{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{x}}-2 = 0.$$

所以 $g'(x)$ 单调递增, 又因为 $g'(0)=-1+1-0=0$, 所以 $g'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上小于零, 在 $(0,+\infty)$ 上大于零; 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减, 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 且 $g(0)=1+1-0+2=4>0$, 所以 $g(x)>g(0)>0$. 即

$$\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}>x^2-2,(x\neq 0).$$

2. 设 $f(x)$ 连续, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(5x)-f(x)}{x}=3$, 证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=\frac{3}{4}$.

解: 定义

$$g(x)=f(x)-f(0).$$

则 $g(0)=0$, 且 g 连续. 已知

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(5x)-f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(5x)-g(x)}{x}=3.$$

由于

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\left[g\left(\frac{x}{5^k}\right)-g\left(\frac{x}{5^{k+1}}\right)\right]+g\left(\frac{x}{5^n}\right)$$

令 $n\to\infty$, 由于 g 连续且 $g(0)=0$, 有 $g\left(\frac{x}{5^n}\right)\to 0$, 所以

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[g\left(\frac{x}{5^k}\right)-g\left(\frac{x}{5^{k+1}}\right)\right]$$

令 $t=\frac{x}{5^{k+1}}$, 则 $\frac{x}{5^k}=5t$, 由已知,

$$\lim_{t\to 0}\frac{g(5t)-g(t)}{t}=3,$$

于是, 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|t|<\delta$ 时,

$$\left|\frac{g(5t)-g(t)}{t}-3\right|<\varepsilon.$$

取 x 足够小, 使得对于所有 $k\geqslant 0$, 有 $\left|\frac{x}{5^{k+1}}\right|<\delta$, 则

$$\left|g\left(\frac{x}{5^k}\right)-g\left(\frac{x}{5^{k+1}}\right)-3\cdot\frac{x}{5^{k+1}}\right|<\varepsilon\cdot\left|\frac{x}{5^{k+1}}\right|.$$

于是,

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[g\left(\frac{x}{5^k}\right)-g\left(\frac{x}{5^{k+1}}\right)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}3\cdot\frac{x}{5^{k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k,$$

其中 $|\eta_k|<\varepsilon\cdot\left|\frac{x}{5^{k+1}}\right|$. 计算几何级数:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3x}{5^{k+1}}=\frac{3x}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{5^k}=\frac{3x}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{3x}{5}\cdot\frac{5}{4}=\frac{3x}{4}$$

而误差项:

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k\right|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}|\eta_k|<\varepsilon|x|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{5^{k+1}}=\varepsilon|x|\cdot\frac{1}{4}=\frac{\varepsilon|x|}{4}.$$

因此,

$$\left|g(x)-\frac{3x}{4}\right|<\frac{\varepsilon|x|}{4}.$$

即

$$\left|\frac{g(x)}{x}-\frac{3}{4}\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$

由于 ε 任意, 这表明

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\frac{3}{4},$$

即

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{3}{4}.$$

所以 f 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=\frac{3}{4}$.

三、 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的收敛半径, 收敛点集, 和函数.

解: 令 $u_n(x)=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^{2n+3}}{2n+3}}{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{x^2}{2n+3}}{2n+1}\right|=x^2<1.$$

所以幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 收敛半径为 $x=1$, 收敛点集为 $x\in(-1,1)$.

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, 所以 $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$, 所以

$$S(x)=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,\quad x\in(-1,1).$$

四、 $u=f\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$, 求 $f(t)$ 的表达式.

解: 为了方便, 记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, 则 $x^2+y^2=r^2$, 且 $r_x=\frac{x}{r}, r_y=\frac{y}{r}$, 同时 $u=f(\ln r)$, 那么

$$u_x=f'(\ln r)\frac{r_x}{r}=f'(\ln r).\frac{x}{r^2}$$

进而

$$u_{xx}=f''(\ln r)\frac{x^2}{r^4}+f'(\ln r)\frac{r^2-x\cdot 2r\cdot\frac{x}{r}}{r^4}=f''(\ln r)\frac{x^2}{r^4}+f'(\ln r)\frac{r^2-2x^2}{r^4}.$$

根据对称性, 也有 $u_{yy}=f''(\ln r)\frac{y^2}{r^4}+f'(\ln r)\frac{r^2-2y^2}{r^4}$, 因此

$$u_{xx}+u_{yy}=f''(\ln r)\frac{x^2+y^2}{r^4}+f'(\ln r)\frac{2r^2-2\left(x^2+y^2\right)}{r^4}=\frac{f''(\ln r)}{r^2}.$$

而已知 $u_{xx}+u_{yy}=r^3$, 因此 $\frac{f''(\ln r)}{r^2}=r^3$, 即 $f''(\ln r)=r^5$, 对应

$$f''(t)=\mathrm{e}^{5t}.$$

积分可得 $f'(t)=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5t}+C_1$, 再次积分可得 $f(t)=\frac{1}{25}\mathrm{e}^{5t}+C_1t+C_2$, 其中 C_1,C_2 为任意常数.

五、 $f(x)=\sin\frac{2}{x}$, 证明 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ $(a>0)$ 上一致连续, 在 $(0,+\infty)$ 上不一致连续.

解: (1) 因为 $f(x)=\sin\left(\frac{2}{x}\right)$, 所以

$$|f'(x)|=\left|-\frac{2}{x^2}\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right|\leqslant\frac{2}{x^2}\leqslant\frac{2}{a^2},\quad x\in(a,+\infty),(a>0).$$

所以导数有界, 满足 Lipschitz 条件, 自然 $f(x)$ 在 $(a,+\infty),(a>0)$ 上一致连续.

(2) 取 $x_n'=\frac{1}{n\pi}$, $y_n'=\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{4}}$, 那么有 $|x_n'-y_n'|\to 0$, 但是 $|\sin(x_n')-\sin(y_n')|\nrightarrow 0$.

六、 $f(x)$ 非负二阶可导, 且存在 $M>0$ 满足 $|f''(x)|\leqslant M$, 证明: $f'(x)\leqslant\sqrt{2Mf(x)}$.

证明: 首先若 $M=0$, 则 $f''(x)=0$, $f'(x)$ 为常值函数, $f(x)$ 为一次函数, 再结合 $f(x)\geqslant 0$ 可知 $f(x)$ 为常值函数, 此时结论显然成立. 下面考虑 $M>0$ 的情况: 若存在 $x_0\in(-\infty,+\infty)$, 满足 $\left(f'(x_0)\right)^2>2Mf(x_0)$, 构造二次函数

$$g(h)=\frac{1}{2}Mh^2+f'(x_0)h+f(x_0),h\in(-\infty,+\infty).$$

则有判别式 $\Delta=\left(f'(x_0)\right)^2-2Mf(x_0)>0$, 因此存在 $h_0\in(-\infty,+\infty)$, 使得

$$g(h_0)=\frac{1}{2}Mh_0^2+f'(x_0)h_0+f(x_0)<0.$$

而根据 Taylor 定理, 存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$, 使得

$$f(x_0+h_0)=f(x_0)+f'(x_0)h_0+\frac{1}{2}f''(\xi)h_0^2\leqslant g(h_0)<0.$$

这与 $f(x)\geqslant 0$ 相矛盾. 因此

$$\left(f'(x)\right)^2\leqslant 2Mf(x),x\in(-\infty,+\infty).$$

七、 已知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x\to\infty}f(x)=f(0)$.

1. 证明: 存在 $\xi_1,\xi_2\in(0,+\infty)$, $\xi_1\neq\xi_2$, 使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)$.
2. $f(x)$ 至少有一个最大值或最小值.
3. $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{x^3}{\mathrm{e}^x}$, 证明: 存在 ξ 满足 $f'(\xi)=\frac{\xi^2(3-\xi)}{\mathrm{e}^{\xi}}$.

证明: (1) 因为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 若 $f(x)\equiv f(0)$, 则结论成立!

若 $f(x)\not\equiv f(0)$, 则存在 $a>0$, 使得 $f(a)\neq f(0)$. 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(0)$, 则存在 $b>a$, 使得 $f(b)$ 接近于 $f(0)$. 比如我们取 $f(0)<f(b)<f(a)$, 且 $0<a<b$. 由连续函数的介值定理可知, 存在 $\xi_1\in(0,a),\xi_2\in(a,+\infty)$, 使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)$, 得证!

(2) 若 $f(x)\equiv f(0)$, 则结论成立! 若 $f(x)\not\equiv f(0)$, 即 $\exists x_0\in[0,+\infty)$, 使得 $f(x_0)\neq f(0)$, 不妨设: $f(x_0)>f(0)$, 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(0)<f(x_0)$ 可知, 存在 $M>0$, 使得对任意的 $x\in[M,+\infty)$, 有 $f(x)<f(x_0)$. 显然 $x_0\in[0,M]$, 若 $x_0\in[M,+\infty)$ 时, 有 $f(x_0)<f(x_0)$ 矛盾! 取

$$f(c)=\max_{x\in[0,+\infty)} f(x)=\begin{cases} f(x)\leqslant f(c), & x\in[0,M] \\ f(x)<f(x_0)\leqslant f(c), & x\in[M,+\infty)\end{cases}$$

故 $f(c)$ 为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值, 同理最小值得证!

综上所述,$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上至少有一个最大值或最小值.

(3) 令 $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{\mathrm{e}^x}$, 显然有 $g(x)$ 连续, 且

$$g(0)=f(0)-0=0,\quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{x^3}{\mathrm{e}^x}\right)=0.$$

且 $g'(x)=f'(x)-\dfrac{3x^2\mathrm{e}^x-x^3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}=f'(x)-\dfrac{3x^2-x^3}{\mathrm{e}^x}$. 由推广的 Rolle 定理可知, 存在 $\xi\in(0,+\infty)$, 使得 $g'(\xi)=f'(\xi)-\dfrac{3\xi^2-\xi^3}{\mathrm{e}^\xi}=0$. 即

$$f'(\xi)=\frac{\xi^2(3-\xi)}{\mathrm{e}^\xi},\quad \text{其中}\xi\in(0,+\infty).$$

八、 $I(p)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x.$

1. 求 $I(p)$ 的定义域.
2. 讨论 $I(p)$ 在定义域上的连续性.
3. 证明 $I(p)$ 在 $(0,1)$ 不一致收敛.

证明: (1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x.$

对 $\displaystyle\int_0^1\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$ 有 $\dfrac{\cos x}{x^p}\sim\dfrac{1}{x^p},(x\to0^+)$ 在 $p<1$ 收敛, $p\geqslant1$ 发散, 所以 $\displaystyle\int_0^1\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$ 在 $p<1$ 收敛, $p\geqslant1$ 发散.

对 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$, 当 $p>1$ 时绝对收敛, 当 $0<p\leqslant$ 时, 由 Dirichlet 判别法可知, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛, 当 $p\leqslant0$ 时发散. 综上所述, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$ 在 $0<p<1$ 时收敛, 其余情况时发散. 故 $I(p)$ 的定义域为 $p\in(0,1)$.

(2) 任取 $0<a\leqslant p\leqslant b<1$, 对于积分 $I_1(p)=\displaystyle\int_0^1\frac{\cos x}{x^p}$, 由于 $\left|\dfrac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x\right|\leqslant\dfrac{1}{x^a}$ 且 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^a}\mathrm{d}x$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法, $I_1(p)$ 在 $p\in[a,b]$ 上一致收敛, 因此由被积函数 $\dfrac{\cos x}{x^p}$ 在 $(0,1]\times[a,b]$ 上的连续性知 $I_1(p)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 对于积分 $I_2(p)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}$, 由于 $\displaystyle\int_1^A\cos x\mathrm{d}x$ 一致有界, 且函数 $\dfrac{1}{x^p}$ 关于 x 单调且关于 $p\in[a,b]$ 一致趋于零. 从而由 Dirichlet 判别法知 $I_2(p)$ 一致收敛, 再由被积函数的连续性知 $I_2(p)$ 在 $[1,+\infty)\times[a,b]$ 上连续, 综上由于 a,b 的任意性知 $I(p)$ 在定义域 $(0,1)$ 上连续.

(3) 对于任意小的 $\delta>0$(取 $0<\delta<1$), 我们取 $p_0=1-\dfrac{1}{|\ln\delta|}$. 当 $\delta\to0^+$ 时, $|\ln\delta|\to+\infty$, 所以 $p_0\to1^-$, 且 $p_0\in(0,1)$（只要 δ 足够小）. 考虑瑕点附近的积分:

$$I(\delta,p_0)=\int_0^\delta\frac{\cos x}{x^{p_0}}\mathrm{d}x$$

由于 $x\in(0,\delta)$ 很小, $\cos x\approx1$, 所以我们可以控制这个积分. 具体地, 存在常数 $c>0$ 使得当 $x\in(0,\delta)$ 时,

$\cos x \geqslant \frac{1}{2}$（例如取 $\delta < \frac{\pi}{3}$, 则 $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$ ）. 于是：

$$I(\delta, p_0) \geqslant \int_0^{\delta} \frac{1/2}{x^{p_0}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{\delta} x^{-p_0} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \frac{\delta^{1-p_0}}{1-p_0} = \frac{-\ln \delta}{2\mathrm{e}} \to +\infty.$$

取 $\varepsilon_0 = 1$, 则对任意小的 $\delta > 0$, 总存在 $p_0 = 1 - \frac{1}{|\ln \delta|} \in (0,1)$, 使得

$$\left| \int_0^{\delta} \frac{\cos x}{x^{p_0}} \mathrm{d}x \right| = I(\delta, p_0) \geqslant \frac{-\ln \delta}{2\mathrm{e}} > 1 = \varepsilon_0$$

只要 δ 足够小. 这违反了一致收敛的定义 (因为如果一致收敛, 对任意 $\varepsilon > 0$, 应存在与 p 无关的 $\delta > 0$, 使得对一切 $p \in (0,1)$ 和一切 $u < \delta$, 都有 $\left| \int_0^{u} \frac{\cos x}{x^{p}} \mathrm{d}x \right| < \varepsilon$).

北京师范大学 2025 年数学分析试卷

一、(15 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\sqrt{3}, a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

证明: 【法 1】首先记方程 $x=\sqrt{3+x}$ 的根为 $a=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, 显然 $a>\dfrac{\sqrt{12}}{2}=\sqrt{3}=a_1$, 现在假设正整数 k 满足 $a_k<a$, 那么 $a_{k+1}=\sqrt{3+a_k}<\sqrt{3+a}=a$. 于是对任意的正整数 n, 均有 $a_n<a$. 另外, 注意到

$$a_2=\sqrt{3+a_1}=\sqrt{3+\sqrt{3}}>\sqrt{3}=a_1.$$

设正整数 k 满足 $a_{k+1}>a_k$, 那么 $\sqrt{3+a_{k+1}}>\sqrt{3+a_k}$, 也就是 $a_{k+2}>a_{k+1}$, 由数学归纳法可知 $\{a_n\}$ 单调递增. 根据单调有界定理可知 $\{a_n\}$ 收敛.

【法 2】显然 $a_n>0(n=1,2,3,\ldots)$, 令 $f(x)=\sqrt{3+x}$, 则

$$\left|f'(x)\right|=\frac{1}{2\sqrt{3+x}}<\frac{1}{2\sqrt{3}}<1.$$

利用压缩映射原理可知, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛.

二、(15 分) 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

解: 令 $t=\pi x$, 则 $\mathrm{d}t=\pi\mathrm{d}x$, 所以由定积分定义可知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}&=\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos(\pi x)}\\&=\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}t}{2+\cos t}\\&=\int_0^\pi\frac{\tan^2\frac{t}{2}+1}{\tan^2\frac{t}{2}+3}\mathrm{d}t\\&=2\int_0^\pi\frac{1}{\tan^2\frac{t}{2}+3}\mathrm{d}\left(\tan\frac{t}{2}\right).\end{aligned}$$

令 $v=\tan\dfrac{t}{2}$, 则 $\displaystyle 2\int_0^\pi\frac{1}{\tan^2\frac{t}{2}+3}\mathrm{d}\left(\tan\frac{t}{2}\right)=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}v}{v^2+3}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. 即

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

三、(15 分) 已知 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上可导, 且 $f(0)=0$, $f'(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续. 证明:

$$\int_0^2|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^2|f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

证明: 【法 1】

引理 6.1

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微且 $f(a)=f(b)=0$, 则 $\displaystyle\int_a^b|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{4}\int_a^b|f'(x)|^2\mathrm{d}x$.

证明: 令 $g(x)=\displaystyle\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t$, $h(x)=\displaystyle\int_x^b|f'(t)|\mathrm{d}t$, 在积分号下求导数, 可得 $g'(x)=|f'(x)|$, $h'(x)=-|f'(x)|$. 由 $f(a)=f(b)=0$, 则 $\forall x\in[a,b]$, 有

$$|f(x)|=\left|\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t=g(x)$$

$$|f(x)|=\left|\int_x^b f'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_x^b|f'(t)|\mathrm{d}t=h(x)$$

由 $|f(x)|=\left|\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t=g(x)$ 和 $g'(x)=|f'(x)|$ 可得

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^{\frac{a+b}{2}}g(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

利用

$$|f(x)|=\left|\int_x^b f'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_x^b|f'(t)|\mathrm{d}t=h(x).$$

和 $h'(x)=-|f'(x)|$ 可得

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant-\int_{\frac{a+b}{2}}^b h(x)h'(x)\mathrm{d}x.$$

且 $\int_a^{\frac{a+b}{2}}g(x)g'(x)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}g^2(x)\right]_a^{\frac{a+b}{2}}=\frac{1}{2}g^2\left(\frac{a+b}{2}\right).$

$$-\int_{\frac{a+b}{2}}^b h(x)h'(x)\mathrm{d}x=-\left[\frac{1}{2}h^2(x)\right]_{\frac{a+b}{2}}^b=\frac{1}{2}h^2\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

所以 $\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}g^2\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 及

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}h^2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

再由 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得

$$\begin{aligned}g^2\left(\frac{a+b}{2}\right)&=\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t\right)^2\\&\leqslant\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}1^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|f'(t)\right|^2\mathrm{d}t\right)=\frac{b-a}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|f'(t)\right|^2\mathrm{d}t\end{aligned}$$

以及

$$h^2\left(\frac{a+b}{2}\right)=\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b1^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|f'(t)\right|^2\mathrm{d}t\right)=\frac{b-a}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|f'(t)\right|^2\mathrm{d}t$$

因此

$$\begin{aligned}\int_a^b\left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x&=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{1}{2}g^2\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}h^2\left(\frac{a+b}{2}\right)\\&\leqslant\frac{b-a}{4}\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|f'(t)\right|^2\mathrm{d}t+\frac{b-a}{4}\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|f'(t)\right|^2\mathrm{d}t\\&=\frac{b-a}{4}\int_a^b\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

即 $\int_a^b\left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{4}\int_a^b\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x,$

取 $a=0,b=2$ 可得

$$\int_0^2\left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_0^2\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_0^2\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x.$$

即证出 $\int_0^2\left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^2\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x.$

【法 2】构造函数 $F(x)=\int_0^x\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t$, 显然 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 上可导, 且 $F'(x)=\left|f'(x)\right|$, 同时

$$F(x)\geqslant\left|\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right|=|f(x)|$$

因此结合 Schwarz 不等式可知

$$\int_0^2\left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^2 F(x)F'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^2=\frac{1}{2}\left(\int_0^2\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^2\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x.$$

四、 (15 分) 求级数和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(n+1)(n+2)x^n$.

解: 首先注意到 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x, x\in(-\infty,+\infty)$, 那么 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!}=x^2\mathrm{e}^x, x\in(-\infty,+\infty)$, 通过两次逐项求导可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(n+1)(n+2)x^n=\left(x^2+4x+2\right)\mathrm{e}^x, x\in(-\infty,+\infty).$$

五、 (15 分) 已知 $A\in\mathbb{R}$, 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$. 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=A.$$

证明: 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 所以 $\exists X>0$, 当 $x\geqslant X$ 时, $|f(x)-A|<1$, 从而有 $|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|$. 即 $f(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 内有界, 又易知 $f(x)$ 在 $[0,X]$ 内有界, 所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界, 故存在 $M>0$, 使得 $|f(x)|\leqslant M$. 将 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 拆分为 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^x f(t)\mathrm{d}t$. 当 $x\to+\infty$ 时, 第一项有 $\left|\frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}}f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}}|f(t)|\mathrm{d}t\leqslant\frac{M}{\sqrt{x}}\to 0,(x\to+\infty)$. 对于第二项, 使用积分第一中值定理可知,$\exists\xi_x\in[\sqrt{x},x]$, 使得

$$\frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{x-\sqrt{x}}{x}f\left(\xi_x\right)\to f\left(\xi_x\right)\to A,(x\to+\infty)$$

即证出 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=A$.

六、 (15 分) 判断 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{\ln x}\arctan x\mathrm{d}x$ 的敛散性, 并说明理由.

解: 由于 $\frac{1}{\ln x}$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递减且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0$, 同时对任意的 $M>2$, 还有

$$\left|\int_2^M\sin x\mathrm{d}x\right|<2.$$

由 Dirichlet 判别法可知 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{\ln x}\mathrm{d}x$ 收敛. 另外, 明显 $\arctan x$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调有界, 再结合 Abel 判别法可知 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{\ln x}\arctan x\mathrm{d}x$ 收敛.

七、 (15 分) 求

$$f(x,y)=-x^2y(x+y-4)$$

在与 x 轴, y 轴, 直线 $y=6-x$ 围成的闭区域 D 中的极值, 最大值与最小值.

解: 首先在 $\operatorname{int}D$ 中考虑

$$\begin{cases}f_x=-2xy(x+y-4)-x^2y=0\\f_y=-x^2(x+y-4)-x^2y=0\end{cases}$$

解得 $(x,y)=(2,1)$, 同时

$$f(2,1)=4.$$

而在 ∂D, 若 $x=0, y\in[0,6]$ 或 $y=0, x\in[0,6]$, 此时有 $f(x,y)=0$. 若 $y=6-x, x\in[0,6]$, 记

$$g(x)=f(x,6-x)=-2x^2(6-x).$$

则 $g'(x)=-4x(6-x)+2x^2=6x(x-4)$, 那么 $g(x)$ 在 $[0,4]$ 上单调递减, 在 $[4,6]$ 上单调递增, 同时

$$g(0)=g(6)=0, g(4)=-64.$$

由此可知 $f(x,y)$ 在 D 上的最小值为 -64, 最大值为 4 , 既然 $(2,1)$ 为 f 的最大值点, 那么它也是 f 的极大值点.

八、 (15 分) 已知 $f(x,y)=g(|xy|)$, 且 $g(0)=0$, 在 $z>0$ 附近, 有 $|g(z)|\leqslant z^{\alpha}, \alpha>\dfrac{1}{2}$. 证明: $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

证明: 首先注意到 $f(x,0)=f(0,y)=f(0,0)=g(0)=0$, 因此

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0.$$

同理可知 $f_y(0,0)=0$. 那么当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, 有

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{g(|xy|)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

再结合已知, 有 $|g(|xy|)|\leqslant|xy|^{\alpha}\leqslant\dfrac{(x^2+y^2)^{\alpha}}{2^{\alpha}}$, 于是结合 $\alpha>\dfrac{1}{2}$ 可知

$$\left|\frac{g(|xy|)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{(x^2+y^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{2^{\alpha}}\to 0\quad((x,y)\to(0,0)).$$

这说明 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{g(|xy|)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, 也就是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

九、 (15 分) 已知 Σ 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$, 取外侧. 求曲面积分

$$\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(2x^2+2y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

解:

引理 6.2

设 $a,b,c>0$, S 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧, 则

$$I=\iint_{S}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4\pi}{\sqrt{abc}}.$$

作 $\Sigma: ax^2+by^2+cz^2=\varepsilon^2, (\varepsilon>0)$, ε 足够小, 并使得其完全包含单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 内, 取内侧, 令

$$P=\frac{x}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}, Q=\frac{y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}, R=\frac{z}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}$$

则 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$, 所以, 利用 Gauss 公式可知

$$\begin{aligned}
I&=\iint_{S+\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}-\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&=0-\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{\Sigma^-}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{\Omega'}(1+1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{3}{\varepsilon^3}\iiint_{\Omega'}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

其中 Ω' 为 $\Sigma: ax^2+by^2+cz^2=\varepsilon^2, (\varepsilon>0)$ 围成的立体. 根据椭球体积公式可知

$$V_{\Omega'}=\frac{4}{3}\pi\frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\varepsilon}{\sqrt{b}}\cdot\frac{\varepsilon}{\sqrt{c}}=\frac{4\pi\varepsilon^3}{3\sqrt{abc}}$$

所以

$$\begin{aligned}I&=\iint_S\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{\varepsilon^3}\iiint_{\Omega'}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\frac{3}{\varepsilon^3}V_{\Omega'}=\frac{3}{\varepsilon^3}\frac{4\pi\varepsilon^3}{3\sqrt{abc}}=\frac{4\pi}{\sqrt{abc}}\end{aligned}$$

取 $a=2,b=2,c=1$ 可得

$$\iint_S\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(2x^2+2y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4\pi}{\sqrt{4}}=2\pi.$$

十、 (15 分) 求三重积分

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2z}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}+x-y^3\right)\mathrm{d}V.$$

证明: 记所求重积分为 I, 根据对称性易知 $\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2z}\left(x-y^3\right)\mathrm{d}V=0$, 因此

$$I=\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2z}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}V$$

作球坐标变换 $x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi$, 其将 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2z$ 对应为

$$\Omega: 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant 2\cos\varphi.$$

同时 $J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=r^2\sin\varphi$, 因此

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{8\pi}{5}$$

上海交通大学 2025 年数学分析试卷

一、 计算题.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^6}$.

解: 【法 1】利用定积分定义.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^6}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^5=\int_0^1 x^5\mathrm{d}x=\frac{1}{6}.$$

【法 2】利用 Stolz 定理.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^6}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^5}{n^6}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^5-\sum\limits_{k=1}^{n-1}k^5}{n^6-(n-1)^6}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^5}{n^6-(n-1)^6}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^5}{(n-1)^6\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^6-1\right]}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^5}{(n-1)^6\cdot 6\cdot\frac{1}{n-1}}=\frac{1}{6}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^5}{(n-1)^5}=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$.

解: 令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}x^{n+1}, x\in\mathbb{R}$, 则

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\\&=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x\mathrm{e}^x, x\in(-\infty,+\infty).\end{aligned}$$

且 $f(0)=0$,

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+f(0)=\int_0^x t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=(x-1)\mathrm{e}^x+1.$$

所以 $f(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}=1$.

【法 2】

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1-1}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}-1-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}+2-2\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}-1-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}-2\right)=1.\end{aligned}$$

3. 设 Ω 为 $x^2+y^2=1$ 的圆柱面在 $0\leqslant z\leqslant 1$ 的部分, 求 $\iint_{\Omega}\dfrac{\mathrm{d}S}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

解: 注意到 Ω 关于 yoz, xoz 平面均对称, 被积函数对 x,y 均为偶函数, 故

$$I=\iint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\iint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{1+z^2}}=4\iint_{\Omega_1}\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{1+z^2}}$$

其中 $\Omega_1=\Omega\cap\{x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$, 投影在 yoz 平面上, 则

$$\Omega_1: x=\sqrt{1-y^2},(0\leqslant z\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1)$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}},\ \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

于是

$$\begin{aligned}I&=4\iint_{\Omega_1}\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=4\iint_{\Omega_1}\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\int_0^1\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}\\&=4\cdot\sinh^{-1}(1)\cdot\arcsin(1)=2\pi\sinh^{-1}(1)=2\pi\ln(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

4. 求 $I(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)\mathrm{d}t,x\in(-\infty,+\infty)$.

解: 首先记 $g(x,t)=\mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)$, 显然 $g(x,t)$ 连续, 且关于 x 存在连续的偏导数, 同时

$$|g(x,t)|\leqslant \mathrm{e}^{-t^2},|g_x(x,t)|=\left|-2t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\right|\leqslant 2t\mathrm{e}^{-t^2}$$

而 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 与 $\int_0^{+\infty}2t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 均收敛, 由 Weierstrass 判别法 $\int_0^{+\infty}g(x,t)\mathrm{d}t$ 与 $\int_0^{+\infty}g_x(x,t)\mathrm{d}t$ 均关于 $x\in(-\infty,+\infty)$ 一致收敛, 于是 $I(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, 且

$$\begin{aligned}I'(x)&=\int_0^{+\infty}g_x(x,t)\mathrm{d}t=-\int_0^{+\infty}2t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\sin(2xt)\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-t^2}\right)\\&=\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\Big|_0^{+\infty}-2x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)\mathrm{d}t=-2xI(x)\end{aligned}$$

从而 $\left[I(x)\mathrm{e}^{x^2}\right]'=\left[I'(x)+2xI(x)\right]\mathrm{e}^{x^2}=0$, 所以 $I(x)\mathrm{e}^{x^2}$ 为常值函数, 再结合 Euler-Possion 积分就有

$$I(x)\mathrm{e}^{x^2}=I(0)\mathrm{e}^{0^2}=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

即 $I(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2},x\in(-\infty,+\infty)$.

二、 求证: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}$ 在 $x\in[a,b]$ 上一致收敛, 但对任意的 x 都不绝对收敛.

证明: 首先对任意的正整数 n, 有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\right|\leqslant 1$, 而对任意的 $x\in[a,b]$, 明显 $\left\{\frac{x^2+n}{n^2}\right\}$ 关于 n 单调递减, 并且

$$0<\frac{x^2+n}{n^2}\leqslant\frac{a^2+b^2+n}{n^2}\to 0(n\to\infty).$$

因此 $\frac{x^2+n}{n^2}\rightrightarrows 0$, 由 Dirichlet 判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}$ 在 $x\in[a,b]$ 上一致收敛.

另外, 对任意的 $x\in\mathbb{R}$, 由于

$$\left|(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}\right|=\frac{x^2}{n^2}+\frac{1}{n}$$

其中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{n^2}$ 收敛, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{n^2}+\frac{1}{n}\right)$ 发散, 也就是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}$ 不绝对收敛.

三、 设 $T\in(0,+\infty)$, 存在 $b,\tau>0$, 对任意的 $t\in(0,T)$, 满足 $\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}g(s)\mathrm{d}s<b$, 其中 $g(s)$ 为非负连续函数, 求证: 对任意的正数 a, 有 $\int_0^t\mathrm{e}^{-a(t-s)}g(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{b\tau}{1-\mathrm{e}^{-a\tau}}$.

证明: 对 $t \in (0,T)$, 取 $N \in \left(\frac{t}{\tau}-1, \frac{t}{\tau}\right] \cap \mathbb{Z}$, 于是 $t-N\tau \geqslant 0 > t-(N+1)\tau$, 注意到

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)} g(s)\mathrm{d}s &= \int_0^{t-N\tau} \mathrm{e}^{-a(t-s)} g(s)\mathrm{d}s + \int_{t-N\tau}^{t} \mathrm{e}^{-a(t-s)} g(s)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{t-N\tau} \mathrm{e}^{-a(t-s)} g(s)\mathrm{d}s + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t-(k+1)\tau}^{t-k\tau} \mathrm{e}^{-a(t-s)} g(s)\mathrm{d}s \\
&\leqslant \mathrm{e}^{-aN\tau} \int_0^{\tau} g(s)\mathrm{d}s + \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-ak\tau} \int_{t-(k+1)\tau}^{t-k\tau} g(s)\mathrm{d}s \\
&\leqslant b\tau \mathrm{e}^{-aN\tau} + b\tau \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-ak\tau} = b\tau \sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{-ak\tau} \\
&\leqslant b\tau \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ak\tau} = \frac{b\tau}{1-\mathrm{e}^{-a\tau}}.
\end{aligned}$$

即证得 $\int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-s)} g(s)\mathrm{d}s \leqslant \frac{b\tau}{1-\mathrm{e}^{-a\tau}}$.

四、 $y = f(x)$ 为 $[a,b]$ 上严格单调递增的连续函数, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$. 证明: $f(x)$ 的值域为 $[\alpha,\beta]$, 且 $x = f^{-1}(y)$ 为连续函数.

证明: 因为 $y = f(x)$ 为 $[a,b]$ 上严格单增的连续函数, 所以 $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$. 又因为 $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$, 因此 $f(x)$ 的值域为 $f([a,b]) \subset [\alpha,\beta]$.

再证明 $[\alpha,\beta] \subseteq f([a,b])$. 任取 $y_0 \in [\alpha,\beta]$, 要证明存在 $x_0 \in [a,b]$ 使得 $f(x_0) = y_0$. 由连续函数的介值定理 (由于 f 连续), 因为 $f(a) = \alpha \le y_0 \le$ 所以存在 $x_0 \in [a,b]$ 使得 $f(x_0) = y_0$. 因此, $[\alpha,\beta] \subseteq f([a,b])$. 综上, 值域 $f([\alpha,\beta]) = [\alpha,\beta]$.

再证 $f^{-1}(y)$ 连续. 设 $x_0 = f^{-1}(y_0) \in [a,b]$. 取 $\varepsilon > 0$(不妨设 ε 足够小, 使得 $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \subseteq [a,b]$). 令

$$y_1 = f(x_0-\epsilon), \quad y_2 = f(x_0+\epsilon).$$

由于 f 严格单调递增, 有

$$y_1 < y_0 < y_2$$

取 $\delta = \min\{y_0-y_1, y_2-y_0\} > 0$. 则当 $|y-y_0| < \delta$ 时, 有

$$y_0-\delta < y < y_0+\delta$$

由于 $\delta \leqslant y_0-y_1$ 和 $\delta \leqslant y_2-y_0$, 所以

$$y_1 < y < y_2.$$

又因为 f 严格单调递增, 其反函数 f^{-1} 也严格单调递增, 故

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) \Longrightarrow x_0-\varepsilon < f^{-1}(y) < x_0+\varepsilon.$$

即

$$\left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| < \varepsilon.$$

因此, f^{-1} 在 y_0 处连续. 由 y_0 的任意性, f^{-1} 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

引理 7.1

设 $f:(a,b) \to (c,d)$ 是一一满射, 并且作为函数是严格单调的, 则 f 是 (a,b) 上的连续函数, 且其反函数 f^{-1} 是 (c,d) 上的连续函数. 这里的区间 $(a,b),(c,d)$ 为闭区间或半开半闭均成立.

由上述【引理】可知, $x = f^{-1}(y)$ 为连续函数.

五、 曲面 $\Omega: x^4+y^4+z^4 = 1$, V 是 Ω 所围区域的体积. 求证: $V = \frac{1}{3}\iint_{\Omega} \frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{x^6+y^6+z^6}}$.

解: 显然 Ω 在点 (x,y,z) 处的单位外法向量为

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{x^6+y^6+z^6}}\left(x^3,y^3,z^3\right)$$

同时在 Ω 上还有 $x^4+y^4+z^4=1$, 因此

$$\frac{1}{\sqrt{x^6+y^6+z^6}}=\frac{x^3\cdot x+y^3\cdot y+z^3\cdot z}{\sqrt{x^6+y^6+z^6}}=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma.$$

那么结合两类曲面积分的联系及高斯公式, 有

$$\frac{1}{3}\iint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{x^6+y^6+z^6}}=\frac{1}{3}\iint_{\Omega}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=V$$

其中第二型曲面积分的方向取外侧, Λ 表示 S 所围的立体.

六、 $f\in C^2[a,b]$, $f_x(a)=f_x(b)=0$, 求证: $\displaystyle\int_a^b|f_x|^6\mathrm{d}x\leqslant 25\int_a^b|f_x|^2|f_{xx}|^2\mathrm{d}x\cdot\left(\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\right)^2$.

证明: 首先注意到

$$\int_a^b f_x^6\mathrm{d}x=\int_a^b f_x^5\mathrm{d}f=ff_x^5\Big|_a^b-5\int_a^b ff_x^4f_{xx}\mathrm{d}x=-5\int_a^b ff_x^4f_{xx}\mathrm{d}x$$

因此结合 Schwarz 不等式可知

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f_x^6\mathrm{d}x\right)^2&=25\left(\int_a^b ff_x^4f_{xx}\mathrm{d}x\right)^2=25\left(\int_a^b\left(f_x^3\right)\left(ff_xf_{xx}\right)\mathrm{d}x\right)^2\\&\leqslant 25\int_a^b f_x^6\mathrm{d}x\int_a^b\left(ff_xf_{xx}\right)^2\mathrm{d}x\leqslant 25\int_a^b f_x^6\mathrm{d}x\int_a^b f_x^2f_{xx}^2\mathrm{d}x\cdot\left(\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\right)^2\end{aligned}$$

化简可得 $\displaystyle\int_a^b f_x^6\mathrm{d}x\leqslant 25\int_a^b f_x^2f_{xx}^2\mathrm{d}x\cdot\left(\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\right)^2$.

浙江大学 2025 年数学分析试卷

一、 1. $\lim_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{2024}{n}-\arctan\frac{2024}{n+1}\right)$.

解: 由 Taylor 定理可知 $\arctan x = x + o\left(x^2\right)(x\to 0)$, 因此

$\arctan\frac{2024}{n}-\arctan\frac{2024}{n+1}=\frac{2024}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{2024}{n+1}+o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{2024}{n(n+1)}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)(n\to\infty)$.

因此

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{2024}{n}-\arctan\frac{2024}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2024n}{n+1}+o(1)\right)=2024.$$

2. $z=z(x,y)$ 由 $f(z-x,z-y)$ 确定, $f(u,v)$ 有一阶偏导数, 且 $\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\neq 0$, 计算 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$.

解: 对 $f(z-x,z-y)=0$ 关于 x 和 y 分别求偏导数, 有

$$f_u\left(z_x-1\right)+f_v z_x=0;$$
$$f_u z_y+f_v\left(z_y-1\right)=0.$$

解得 $z_x=\frac{f_u}{f_u+f_v}, z_y=\frac{f_v}{f_u+f_v}$, 那么 $z_x+z_y=1$.

3. 计算 $\int_{-8}^{8}\frac{1+\sin x}{1+\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x$.

解: 记所求定积分为 I, 注意到 $\frac{\sin x}{1+\sqrt[3]{x^2}}$ 为奇函数, 因此 $\int_{-8}^{8}\frac{\sin x}{1+\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x=0$, 那么

$$I=\int_{-8}^{8}\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x$$

而 $\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}$ 为偶函数, 结合换元 $t=x^{\frac{1}{3}}$ 可得

$$I=2\int_0^8\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x=2\int_0^2\frac{3t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=6\int_0^2\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=6(2-\arctan 2).$$

4. $\Sigma=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1, z\geqslant 0\}$, 取上侧, 计算

$$\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[z^2+\sin(xy)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解: 记所求曲面积分为 I, 记平面 $\Sigma_1: z=0, x^2+y^2\leqslant 1$, 取下侧,

$$\iint_{\Sigma_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[z^2+\sin(xy)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\sin(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

因此

$$I=\iint_{\Sigma+\Sigma_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[z^2+\sin(xy)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

记 $\Sigma+\Sigma_1$ 所围区域为 $V: x^2+y^2+z^2\leqslant 1, z\geqslant 0$, 根据高斯公式可得

$$I=\iiint_V(2x+2y+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

由对称性可知 $\iiint_V(2x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$, 那么

$$I=\iiint_V 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant 1-z^2}2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 2\pi z\left(1-z^2\right)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}$$

二、 设 $\{a_n\}$ 为非负递减数列, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

证明: 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 所以对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

再结合 $\{a_n\}$ 的非负递减性, 有

$$(n-N)a_n \leqslant a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

而对于上述的 N, 明显 $\lim\limits_{n\to\infty} Na_n = 0$, 那么存在 $M > N$, 当 $n > M$ 时, 有 $Na_n < \frac{\varepsilon}{2}$, 于是 $n > M$ 时, 有

$$0 \leqslant na_n = (n-N)a_n + Na_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

三、 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 且对任意的 $(0,1)$, $f'_+(x)$ 存在. 若 $f(0) = f(1)$, 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'_+(\xi) \leqslant 0$.

证明: 为了方便, 记函数 $g(x) = f(x) - f(0)$, 显然 $g(x)$ 也在 $[0,1]$ 上连续, $g(0) = g(1) = 0$, 同时对任意的 $x \in (0,1)$, 有 $g'_+(x) = f'_+(x)$. 下面说明存在 $\xi \in (0,1)$, 满足 $g'_+(\xi) \leqslant 0$: 若 $g(x) \equiv 0$ 为常值函数, 结论显然成立. 否则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在正的最大值或负的最小值, 若前者成立, 可设 $g(\xi) = \max\limits_{x\in[0,1]} g(x)$, 其中 $\xi \in (0,1)$, 那么对任意的 $x \in (\xi,1)$, 有 $g(x) \leqslant g(\xi)$, 进而

$$\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} \leqslant 0, x \in (\xi, 1)$$

特别地, 令 $x \to \xi^+$ 可知 $g'_+(\xi) \leqslant 0$.

若后者成立, 可设 $g(d) = \min\limits_{x\in[0,1]} g(x) < 0 = g(0)$, 其中 $d \in (0,1)$. 任取 $c \in (0,d)$, 满足 $g(c) > g(d)$, 再任取 y_1, y_2 满足 $g(c) > y_1 > y_2 > g(d)$, 记过点 $(c,y_1), (d,y_2)$ 的直线为 $h(x) = k(x-c) + y_1$, 其中 $k = \frac{y_2-y_1}{d-c} < 0$. 构造函数 $F(x) = g(x) - h(x)$, 我们知道 $F(x)$ 在 $[c,d]$ 上连续, 且 $F(c) = g(c) - y_1 > 0$, $F(d) = g(d) - y_2 < 0$, 记数集 $E = \{x \in [c,d] \mid F(x) > 0\}$, 显然 E 为非空有界数集, 设 ξ 为其上确界, 容易发现 $\xi \in (c,d)$, $F(\xi) = 0$, 同时当 $x \in (\xi, d]$ 时, 有 $F(x) \leqslant 0$, 也就是

$$g(\xi) = h(\xi), g(x) \leqslant h(x), x \in (\xi, d].$$

进而

$$\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} \leqslant \frac{h(x)-h(\xi)}{x-\xi}.$$

特别地, 让 $x \to \xi^+$, 有 $g'_+(\xi) \leqslant h'(\xi) = k < 0$.

四、 叙述闭区间套定理, 用该定理证明闭区间上连续函数可达最大值.

证明: 闭区间套定理：若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是闭区间套, 即满足

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] \, (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$$

则存在唯一的实数 ξ, 使得 $\xi \in [a_n, b_n] \, (n = 1, 2, \cdots)$. 设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界, 记 $[a_1, b_1] = [a,b]$, $c_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$, 那么 $f(x)$ 必然在 $[a_1, c_1]$ 或 $[c_1, b_1]$ 上无界, 这里不妨设前者成立, 记 $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$, 再将 $[a_2, b_2]$ 等分为两个闭子区间, 其中至少有一个闭子区间满足 f 在其上无界, 记这个闭子区间为 $[a_3, b_3]$. 以此类推, 可以得到闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$, 满足

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n], b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} \to 0 (n \to \infty)$$

根据闭区间套定理, 存在

$$\xi \in [a_n, b_n] \, (n = 1, 2, \cdots)$$

由于 $f(x)$ 在 ξ 处连续, 根据局部有界性, 存在 $M>0, \delta>0$, 满足当 $x \in(\xi-\delta, \xi+\delta)$ 时, 有 $|f(x)| \leqslant M$, 而我们知道 $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} a_n=\lim\limits_{n \rightarrow \infty} b_n=\xi$, 因此存在正整数 N, 满足 $[a_N, b_N] \subset(\xi-\delta, \xi+\delta)$, 那么 $f(x)$ 在 $[a_N, b_N]$ 上也有界, 这显然是矛盾的. 综上, 我们得到 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 设 μ 为其上确界.

记 $[\alpha_1, \beta_1]=[a, b]$, 将 $[\alpha_1, \beta_1]$ 等分为两个闭子区间 $[\alpha_1, \gamma_1],[\gamma_1, \beta_1]$, 其中 $\gamma_1=\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1)$, 容易证明 μ 为 $f(x)$ 在 $[\alpha_1, \gamma_1]$ 或 $[\gamma_1, \beta_1]$ 上的上确界, 不妨设前者成立, 那么记 $[\alpha_2, \beta_2]=[\alpha_1, \gamma_1]$. 以此递推, 可以得到闭区间列 $\{[\alpha_n, \beta_n]\}$, 满足

$$
[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}] \subset[\alpha_n, \beta_n], \beta_n-\alpha_n=\frac{b-a}{2^{n-1}} \rightarrow 0(n \rightarrow \infty)
$$

同时 $f(x)$ 在每个 $[\alpha_n, \beta_n]$ 上的上确界均为 μ. 根据闭区间套定理, 存在唯一的 $\eta \in[\alpha_n, \beta_n](n=1,2, \cdots)$, 显然 $f(\eta) \leqslant \mu$. 另外, 取 $\varepsilon_n=\frac{1}{n}(n=1,2, \cdots)$, 根据上确界的定义, 存在 $x_n \in[\alpha_n, \beta_n]$, 满足 $f(x_n)>\mu-\frac{1}{n}$, 现在令 $n \rightarrow \infty$, 由于 $x_n \rightarrow \eta$, 因此结合 f 的连续性可得

$$
f(\eta)=\lim _{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geqslant \lim _{n \rightarrow \infty}\left(\mu-\frac{1}{n}\right)=\mu
$$

于是 $f(\eta)=\mu$. 这就说明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可达最大值.

五、 设

$$
f(x, y)= \begin{cases}(x+y)^2 \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq(0,0) ; \\ 0, & (x, y)=(0,0) .\end{cases}
$$

讨论 f 和 f 的偏导数在 $(0,0)$ 处的连续性及 f 在 $(0,0)$ 的可微性.

解: 明显 $\lim\limits_{(x, y) \rightarrow(0,0)} f(x, y)=0=f(0,0)$, 即 $f(x, y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

其次, 注意到

$$
f_x(0,0)=\lim _{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0)-f(0,0)}{x}=\lim _{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2}=0 .
$$

同时当 $(x, y) \neq(0,0)$ 时, 有

$$
f_x(x, y)=2(x+y) \sin \frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2 x(x+y)^2}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2} .
$$

其中 $\lim\limits_{(x, y) \rightarrow(0,0)} 2(x+y) \sin \frac{1}{x^2+y^2}=0$, 而 $\frac{2 x(x+y)^2}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}$ 若沿着 x 轴趋于 $(0,0)$, 极限

$$
\lim _{(x, y=0) \rightarrow(0,0)} \frac{2 x(x+y)^2}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}=\lim _{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} .
$$

不存在, 因此重极限 $\lim\limits_{(x, y) \rightarrow(0,0)} \frac{2 x(x+y)^2}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}$ 不存在, 那么 $\lim\limits_{(x, y) \rightarrow(0,0)} f_x(x, y)$ 也不存在, 自然 $f_x(x, y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续. 另外, 根据对称性可知 $f_y(0,0)=0$, 但 $f_y(x, y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

最后, 由于

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{f(x, y)-f(0,0)-f_x(0,0) x-f_y(0,0) y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| & =\left|\frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin \frac{1}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
& \leqslant \frac{2\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=2 \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0 \quad((x, y) \rightarrow(0,0))
\end{aligned}
$$

所以 $f(x, y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

六、 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \mathrm{e}^{-n x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛, 在 $[1,+\infty)$ 上一致收敛.

证明: 因为根据 d'Alembert 判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上收敛, 又 $\left|u_n\left(\frac{1}{n}\right)\right|=n^2 \mathrm{e}^{-1} \rightarrow+\infty$. 所以 $u_n(x) \not\rightrightarrows 0$, 对于 $\forall x \in(0,+\infty)$ 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛, 得证!

在 $x \geqslant 1$ 处, 有 $\mathrm{e}^{-nx} \leqslant \mathrm{e}^{-n}$, 因此 $\left|n^2\mathrm{e}^{-nx}\right| \leqslant n^2\mathrm{e}^{-n}, (\forall x \geqslant 1)$. 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\mathrm{e}^{-nx} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\mathrm{e}^{-n}$, 下面验证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\mathrm{e}^{-n}$ 收敛. 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{(n+1)^2\mathrm{e}^{-(n+1)}}{n^2\mathrm{e}^{-n}}\right| = \mathrm{e}^{-1}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 = \mathrm{e}^{-1} < 1$. 所以, 利用 d'Alembert 判别法可知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\mathrm{e}^{-n}$ 收敛. 再利用 Weierstrass 判别法可知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致收敛.

七、 证明: $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上一致连续的充要条件是对任意 $(0,1)$ 上的 Cauchy 列 $\{x_n\}, \{f(x_n)\}$ 也为 Cauchy 列.

证明: (必要性) 已知函数 $f(x)$ 在有界区间 I 上一致连续, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

又 $\{a_n\}$ 是 I 上的 Cauchy 数列, 即 $\exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n, m > N$, 有 $|a_n - a_m| < \delta$, 因而 $\exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n, m > N$ 有 $|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$. 即 $\{f(a_n)\}$ 也是 Cauchy 数列, 得证!

(充分性) 假设函数 $f(x)$ 在有界区间 I 上非一致连续. 即 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta = \dfrac{1}{n} > 0, (n \in \mathbb{N}_+), \exists a_n', a_n'' \in I, \left|a_n' - a_n''\right| < \dfrac{1}{n}$, 有

$$\left|f(a_n') - f(a_n'')\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

因为 I 是有界的, 由 Bolzano-Weierstrass 定理可知, 数列 $\{a_n'\}$ 存在收敛的子列 $\{a_{n_k}'\}$. 设 $a_{n_k}' \to x_0, (k \to +\infty)$, 且已知 $\left|a_{n_k}' - a_{n_k}''\right| < \dfrac{1}{n_k}$. 所以, 当 $k \to +\infty$ 时, $\dfrac{1}{n_k} \to 0, a_{n_k}' \to x_0$, 得到 $a_{n_k}'' \to x_0$.

把收敛的两个子列 $\{a_{n_k}'\}, \{a_{n_k}''\}$ 的项交替组成一个新数列 $\{a_{n_k}', a_{n_k}''\}$. 利用子数列定理可知, 新数列 $\{a_{n_k}', a_{n_k}''\}$ 是收敛的, 所以是 Cauchy 数列. 但是当 k 充分大时, $\left|f(a_{n_k}') - f(a_{n_k}'')\right| \geqslant \varepsilon_0$. 也即 $\{f(a_{n_k}'), f(a_{n_k}'')\}$ 不是 Cauchy 列, 这与已知条件矛盾! 所以函数 $f(x)$ 在有界区间 I 上一致连续, 得证!

八、 设 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为全体有理数, 令

$$f(x) = \sum_{n: r_n < x} \frac{1}{2^n}.$$

其中上述和式是对所有满足 $r_n < x$ 的正整数 n 求和. 证明: $f(x)$ 在无理点连续, 在有理点间断, 且单调递增.

证明: 若 $x_0 \in \mathbb{R}$ 是有理数, 可设 $x_0 = r_N$, 则对任意的 $x > x_0$, 有

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{n: r_n < x} \frac{1}{2^n} - \sum_{n: r_n < x_0} \frac{1}{2^n} = \sum_{n: x_0 \leqslant r_n < x} \frac{1}{2^n} \geqslant \frac{1}{2^N}.$$

这说明 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$, 因此 $f(x)$ 在 x_0 处不连续. 若 $x_0 \in \mathbb{R}$ 为无理数. 注意到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ 收敛, 因此对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 满足 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$. 对于上述 N, 由于 $r_i \neq x_0 (i = 1, 2, \cdots, N)$, 记 $\delta = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} |r_i - x_0| > 0$, 则 $r_i \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\ (i = 1, 2, \cdots, N)$, 进而对任意的 $x \in U(x_0;\ \delta)$, 有

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\sum_{n: r_n < x} \frac{1}{2^n} - \sum_{n: r_n < x_0} \frac{1}{2^n}\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

这说明 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

最后, 任取 $x_1 < x_2$, 明显 $f(x_2) - f(x_1) = \sum\limits_{n: x_1 \leqslant r_n < x_2} \dfrac{1}{2^n} > 0$, 因此 $f(x)$ 单调递增.

九、 对任意的实数 x 与正整数 n, 记 $\varphi_n(x) = \dfrac{n}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-n^2x^2}$. 证明: 对任意在实轴上连续且有界的函数 f, 对任意的实数 x, 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi_n(x-y)\mathrm{d}y = f(x). \tag{8.1}$$

证明: 首先作换元 $x-y=t$, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi_n(x-y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t$$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(nt)^2}\mathrm{d}(nt)=1$, 那么 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_n(t)\mathrm{d}t=f(x)$, 因此为证明式(18.2)成立, 只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_n(t)\mathrm{d}t\right)=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x-t)-f(x)]\varphi_n(t)\mathrm{d}t=0 \tag{8.2}$$

由于 f 有界, 可设正数 M 满足 $|f|\leqslant M$. 另外, 由于 f 在 x 处连续, 因此对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $y\in[x-\delta,x+\delta]$ 时, 有 $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$. 而对于上述 $\delta>0$, 结合 $\varphi_n(t)$ 为偶函数及不等式 $\mathrm{e}^{-u}<\frac{1}{u}(u>0)$, 有

$$0<\int_{-\infty}^{-\delta}\varphi_n(t)\mathrm{d}t=\int_{\delta}^{+\infty}\varphi_n(t)\mathrm{d}t<\frac{n}{\sqrt{\pi}}\int_{\delta}^{+\infty}\frac{1}{n^2t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\pi}\delta n}\to 0(n\to\infty)$$

因此存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有 $\int_{-\infty}^{-\delta}\varphi_n(t)\mathrm{d}t=\int_{\delta}^{+\infty}\varphi_n(t)\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{2M}$, 进而

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-t)-f(x)|\varphi_n(t)\mathrm{d}t&\leqslant 2M\int_{-\infty}^{-\delta}\varphi_n(t)\mathrm{d}t+\varepsilon\int_{-\delta}^{\delta}\varphi_n(t)\mathrm{d}t+2M\int_{\delta}^{+\infty}\varphi_n(t)\mathrm{d}t\\&<2M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(t)\mathrm{d}t+2M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=3\varepsilon\end{aligned}$$

这就说明式(8.2)成立.

厦门大学 2025 年数学分析试卷

一、判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2024n)^n}{2025^n n!}$ 的敛散性.

解: 记 $u_n=\frac{(2024n)^n}{2025^n n!}$, 则有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2024^{n+1}(n+1)^{n+1}}{2025^{n+1}(n+1)!}\cdot\frac{2025^n n!}{2024^n n^n}=\frac{2024}{2025}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to\frac{2024}{2025}\mathrm{e}>1(n\to\infty).$$

因此正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2024n)^n}{2025^n n!}$ 发散.

二、设 $f_1(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, $x_0\in[a,b]$, $f_{n+1}(x)=\int_{x_0}^{x}f_n(t)\mathrm{d}t$, 讨论函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上的一致收敛性, 并求出极限函数.

解: 由于 $f_1(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 从而有界, 设正数 M 满足 $|f_1(x)|\leqslant M$, 那么

$$|f_2(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}f_1(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant M|x-x_0|$$

进而

$$|f_3(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}f_2(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}M|t-x_0|\mathrm{d}t\right|=\frac{1}{2}M|x-x_0|^2$$

由此递推, 对任意的正整数 n 及 $x\in[a,b]$, 有

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{M}{(n-1)!}|x-x_0|^{n-1}\leqslant\frac{M(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

而明显 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}=0$, 因此 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0 .

三、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, $f(a)=0$, 证明: $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x$.

证明: 首先对任意的 $x\in[a,b]$, 由 Schwarz 不等式可知

$$f^2(x)=\left(\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right)^2\leqslant(x-a)\int_a^x[f'(t)]^2\mathrm{d}t\leqslant(x-a)\int_a^b[f'(t)]^2\mathrm{d}t$$

那么积分可得

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x\int_a^b[f'(t)]^2\mathrm{d}t=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x$$

四、设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上有界且可导, 若 $x^{2025}f'(x)$ 单调, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x)f'(x)=0$.

证明: 由于 $x^{2025}f'(x)$ 单调, 若其再有界, 则其收敛, 于是

$$x\ln xf'(x)=x^{2025}f'(x)\cdot\frac{\ln x}{x^{2024}}\to 0.$$

因此不妨假设其无界. 要么单调递增趋于 $+\infty$, 要么单调递减趋于 $-\infty$, 令 x 充分大, 可定 $x^{2025}f'(x)$ 不变号, 则 $f'(x)$ 不变号, 因此 $f(x)$ 单调, 从而 $f(x)$ 极限存在, 进而 $\int_a^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 当 x 充分大时, 不妨设 $x^{2025}f'(x)$ 单调递增, $f'(x)>0$. 由 Cauchy 准则可知, 对 $s>1$ 有

$$\int_x^{x^s}f'(t)\mathrm{d}t<\varepsilon$$

而

$$\begin{aligned}\int_x^{x^s} f'(t)\mathrm{d}t &= \int_x^{x^s} t^{2025} f'(t)\cdot t^{-2025}\mathrm{d}t \\ &> x^{2025} f'(x)\int_x^{x^s} t^{-2025}\mathrm{d}t \\ &> x^{2025} f'(x)\cdot x^{-2024s}\int_x^{x^s} t^{-1}\mathrm{d}t \\ &= x^{2025-2024s} f'(x)(s-1)\ln x > 0\end{aligned}$$

取 $s \in \left(1, \dfrac{2025}{2024}\right)$, 则

$$x^{2025-2024s} f'(x)\ln x \to 0.$$

则

$$x f'(x)\ln x = \frac{x^{2025-2024s} f'(x)\ln x}{x^{2024-2024s}} \to 0.$$

五、 设 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$ 是一族闭集, 其中至少有一个是有界闭集, 且 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Gamma} F_\lambda = \varnothing$. 证明: 存在有限个 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \Gamma$, 使得 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} F_{\lambda_k} = \varnothing$.

证明: 不妨设 F_{λ_1} 是有界闭集, 根据已知, 有

$$F_{\lambda_1} \cap \bigcap_{\lambda\in\Gamma,\lambda\neq\lambda_1} F_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Gamma} F_\lambda = \varnothing.$$

这意味这

$$F_{\lambda_1} \subseteq \left(\bigcap_{\lambda\in\Gamma,\lambda\neq\lambda_1} F_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Gamma,\lambda\neq\lambda_1} F_\lambda^c.$$

而其中 $F_\lambda^c\ (\lambda\in\Gamma, \lambda\neq\lambda_1)$ 均为开集, 根据有限覆盖定理, 存在 $\lambda_2, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \Gamma$, 满足

$$F_{\lambda_1} \subseteq \bigcup_{k=2}^{n} F_{\lambda_k}^c.$$

这意味着

$$F_{\lambda_1} \cap \left(\bigcup_{k=2}^{n} F_{\lambda_k}^c\right)^c = F_{\lambda_1} \cap \bigcap_{k=2}^{n} F_{\lambda_k} = \bigcap_{k=1}^{n} F_{\lambda_k} = \varnothing.$$

六、 计算 $\iiint_\Omega \mathrm{e}^{3z^2-z^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω: $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2z$.

证明: 注意到 Ω : $0\leqslant z\leqslant 2, x^2+y^2\leqslant 2z-z^2$, 因此

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \mathrm{e}^{3z^2-z^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^2 \mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2\leqslant 2z-z^2} \mathrm{e}^{3z^2-z^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \pi\left(2z-z^2\right)\mathrm{e}^{3z^2-z^3}\mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi}{3}\int_0^2 \mathrm{e}^{3z^2-z^3}\mathrm{d}\left(3z^2-z^3\right) = \frac{\pi}{3}\mathrm{e}^{3z^2-z^3}\Big|_0^2 = \frac{\pi}{3}\left(\mathrm{e}^4-1\right).\end{aligned}$$

七、 在 $\mathbb{R}^3$ 中函数 $u(\boldsymbol{x}) = u(x_1, x_2, x_3)$ 二阶可微, 设 $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, B_r 表示以原点为球心, 半径为 r 的球. 记

$$H(r) = \int_{B_r} u^2(\boldsymbol{x})(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2)^\alpha \mathrm{d}x,$$

$$I(r) = \int_{B_r} \|\nabla u(\boldsymbol{x})\|^2(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2)^{\alpha+1}\mathrm{d}x, \quad \alpha\geqslant 2.$$

1. 证明: $H'(r) = 2\alpha r\int_{B_r} u^2(\boldsymbol{x})(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2)^{\alpha-1}\mathrm{d}x$.
2. 进一步地, 若 $u(\boldsymbol{x})$ 为调和函数, 证明: $H'(r) = \dfrac{2\alpha+3}{r}H(r) + \dfrac{1}{(\alpha+1)r}I(r)$.

证明: 【解法 1】1. 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$, 在球坐标系下:

$$x_1=\rho\sin\theta\cos\phi,\quad x_2=\rho\sin\theta\sin\phi,\quad x_3=\rho\cos\theta$$

其中 $\rho\in[0,r],\theta\in[0,\pi],\phi\in[0,2\pi]$, 体积元素为 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\rho^2\sin\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$. 因此, $H(r)$ 可以表示为:

$$H(r)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r}u^2(\rho,\theta,\phi)\left(r^2-\rho^2\right)^{\alpha}\rho^2\sin\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi.$$

注意到上式中积分上限和积分表达式中都含有 r, 使用 Leibniz 积分法则:

$$H'(r)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[u^2(r,\theta,\phi)\left(r^2-r^2\right)^{\alpha}r^2\sin\theta\right]\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi+\int_{B_r}\frac{\partial}{\partial r}\left[u^2(\boldsymbol{x})\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

第一项在 $\rho=r$ 时 $\left(r^2-r^2\right)^{\alpha}=0$, 因此为零. 第二项为:

$$H'(r)=\int_{B_r}u^2(\boldsymbol{x})\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{B_r}u^2(\boldsymbol{x})\cdot\alpha\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha-1}\cdot 2r\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

因此:

$$H'(r)=2\alpha r\int_{B_r}u^2(\boldsymbol{x})\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

2. 引入辅助积分

$$J(r)=\int_{B_r}u^2(\boldsymbol{x})\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

则由第一问知 $H'(r)=2\alpha rJ(r)$. 注意到

$$\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha}=\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)\cdot\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha-1}$$

因此:

$$H(r)=\int_{B_r}u^2\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=r^2J(r)-\int_{B_r}u^2\|\boldsymbol{x}\|^2\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

设:

$$K(r)=\int_{B_r}u^2\|\boldsymbol{x}\|^2\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

则:

$$H(r)=r^2J(r)-K(r)\tag{9.1}$$

设 $\phi=\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha+1}$, 则:

$$\nabla\phi=-2(\alpha+1)\boldsymbol{x}\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha}$$

利用 Green 第一公式:

$$\int_{B_r}u^2\Delta\phi\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{B_r}\nabla u^2\cdot\nabla\phi\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\partial B_r}u^2\nabla\phi\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\tag{9.2}$$

由于 $\phi=0$ 在 ∂B_r, 边界项为零. 计算 $\Delta\phi$:

$$\Delta\phi=-2(\alpha+1)\left[3\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha}-2\alpha\|\boldsymbol{x}\|^2\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha-1}\right]$$

因此

$$\int_{B_r}u^2\Delta\phi d\boldsymbol{x}=-2(\alpha+1)[3H(r)-2\alpha K(r)]\tag{9.3}$$

再利用 $\nabla\phi$ 的表达式计算

$$\int_{B_r}\nabla u^2\cdot\nabla\phi\mathrm{d}\boldsymbol{x}=-4(\alpha+1)\int_{B_r}u\nabla u\cdot\boldsymbol{x}\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\tag{9.4}$$

由公式(9.3), 式(9.4),b 并两边除以 $-2(\alpha+1)$ 得

$$3H(r)-2\alpha K(r)=-2\int_{B_r}u\nabla u\cdot\boldsymbol{x}\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\tag{9.5}$$

由分部积分公式:
$$\int_{B_r} u(\nabla\cdot \boldsymbol{F})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_{B_r} \nabla u\cdot \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial B_r} u\boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$
其中 $\boldsymbol{n}$ 是边界 ∂B_r 的单位外法向量. 如果选择 $\boldsymbol{F}=\phi\nabla u$, 则:
$$\nabla\cdot \boldsymbol{F} = \nabla\cdot(\phi\nabla u) = \nabla\phi\cdot\nabla u + \phi\Delta u.$$
由于 u 是调和函数 $(\Delta u=0)$, 所以:
$$\nabla\cdot(\phi\nabla u) = \nabla\phi\cdot\nabla u.$$
从而有恒等式
$$\int_{B_r} u\left(\nabla\phi\cdot\nabla u\right)\mathrm{d}x = -\int_{B_r}\nabla u\cdot(\phi\nabla u)\,\mathrm{d}x + \int_{B_r} u\left(\phi\nabla u\right)\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S.$$
从而有
$$I(r) = \int_{B_r}\|\nabla u\|^2\phi\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{B_r}\nabla u\cdot(\phi\nabla u)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_{B_r} u\left(\nabla\phi\cdot\nabla u\right)\mathrm{d}x + \int_{B_r} u\left(\phi\nabla u\right)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$
由于 $\phi=\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha+1}$ 在边界 ∂B_r 上为零, 即
$$\int_{\partial B_r} u(\phi\nabla u)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = 0$$
因此
$$I(r) = -\int_{B_r} u\nabla\cdot(\phi\nabla u)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_{B_r} u(\nabla\phi\cdot\nabla u)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$
再带入 $\nabla\phi$ 的表达式
$$\nabla\phi = -2(\alpha+1)\boldsymbol{x}\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha}$$
所以
$$I(r) = -\int_{B_r} u\left[-2(\alpha+1)\boldsymbol{x}\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha}\right]\cdot\nabla u\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 2(\alpha+1)\int_{B_r} u\nabla u\cdot\boldsymbol{x}\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$
由公式(9.5)得到
$$I(r) = (\alpha+1)[2\alpha K(r) - 3H(r)]. \tag{9.6}$$
联立公式(9.1), 式(9.6) 和 $H'(r)=2\alpha rJ(r)$ 推得
$$H'(r) = \frac{2\alpha+3}{r}H(r) + \frac{1}{(\alpha+1)r}I(r).$$
【解法 2】(1) 利用球坐标变换, 记
$$x_1 = t\sin\varphi\cos\theta, x_2 = t\sin\varphi\sin\theta, x_3 = t\cos\varphi, t\in[0,r], \varphi\in[0,\pi], \theta\in[0,2\pi].$$
此时雅克比行列式 $J=\dfrac{\partial\left(x_1,x_2,x_3\right)}{\partial(t,\varphi,\theta)} = t^2\sin\varphi$, 因此
$$H(r) = \int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^r u^2(t\sin\varphi\cos\theta, t\sin\varphi\sin\theta, t\cos\varphi)\left(r^2-t^2\right)^{\alpha} t^2\sin\varphi\mathrm{d}t$$
利用积分号下求导, 有
$$\begin{aligned} H'(r) = &\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi} u^2(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\left(r^2-r^2\right)^{\alpha} r^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta \\ &+ \int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^r u^2(t\sin\varphi\cos\theta, t\sin\varphi\sin\theta, t\cos\varphi)2r\alpha\left(r^2-t^2\right)^{\alpha-1} t^2\sin\varphi\mathrm{d}t \\ =&2\alpha r\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^r u^2(t\sin\varphi\cos\theta, t\sin\varphi\sin\theta, t\cos\varphi)\left(r^2-t^2\right)^{\alpha-1} t^2\sin\varphi\mathrm{d}t \\ =&2\alpha r\int_{B_r} u^2(\boldsymbol{x})\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

(2) 由于

$$\nabla\left(u^2\right)=\left(2uu_{x_1},2uu_{x_2},2uu_{x_3}\right).$$

再结合 u 为调和函数, 有

$$\Delta\left(u^2\right)=2u\Delta u+2\|\nabla u\|^2=2\|\nabla u\|^2.$$

记 $v(\boldsymbol{x})=\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha+1}$, 那么 $\nabla v=(\alpha+1)\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha}(-2x_1,-2x_2,-2x_3)$, 且

$$I(r)=\int_{B_r}\|\nabla u\|^2\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha+1}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\int_{B_r}v\Delta\left(u^2\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

而在 ∂B_r 上, 有 $\|\boldsymbol{x}\|=r$, 因此 $v=0,\nabla v=\mathbf{0}$, 那么 $\dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}=0$, 这里 $\dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}$ 表示 v 沿 ∂B_r 单位外法线方向的方向导数, 那么

$$\int_{\partial B_r}u^2\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\int_{\partial B_r}v\frac{\partial\left(u^2\right)}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=0.$$

而由 Green 第二恒等式, 还有

$$\int_{\partial B_r}\left(u^2\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}-v\frac{\partial\left(u^2\right)}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S=\int_{B_r}\left(u^2\Delta v-v\Delta\left(u^2\right)\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

由此可知

$$I(r)=\frac{1}{2}\int_{B_r}v\Delta\left(u^2\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\int_{B_r}u^2\Delta v\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

而其中

$$\begin{aligned}\Delta v&=-6(\alpha+1)\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha}+4\alpha(\alpha+1)\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha-1}\|\boldsymbol{x}\|^2\\&=-6(\alpha+1)\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha}+4\alpha(\alpha+1)\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha-1}\left[r^2-\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)\right]\\&=4\alpha(\alpha+1)r^2\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha-1}-2(\alpha+1)(2\alpha+3)\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}I(r)&=2\alpha(\alpha+1)r^2\int_{B_r}u^2\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}\boldsymbol{x}-(\alpha+1)(2\alpha+3)\int_{B_r}u^2\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&=(\alpha+1)rH'(r)-(\alpha+1)(2\alpha+3)H(r)\end{aligned}$$

也就是 $H'(r)=\dfrac{2\alpha+3}{r}H(r)+\dfrac{1}{(\alpha+1)r}I(r)$.

注 第 (2) 问也可以采用如下方式解答：考虑曲面积分

$$I=\iint_{\partial B_r}u(\boldsymbol{x})\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha+1}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S$$

其中 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 表示 u 沿 ∂B_r 单位外法线方向的方向导数. 由于在 ∂B_r 上有 $\|\boldsymbol{x}\|=r^2$, 因此 $I=0$, 同时根据 Green 第一恒等式, 还有

$$\begin{aligned}0=I=&\int_{B_r}u(\boldsymbol{x})\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha+1}\Delta u\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{B_r}\|\nabla u(\boldsymbol{x})\|^2\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha+1}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&-2(\alpha+1)\int_{B_r}(\nabla u\cdot\nabla v)u(\boldsymbol{x})\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

其中 $v(\boldsymbol{x})=\dfrac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2$. 而 u 为调和函数, 对应 $\displaystyle\int_{B_r}u(\boldsymbol{x})\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha+1}\Delta u\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0$, 因此上式说明

$$I(r)=\int_{B_r}\|\nabla u(\boldsymbol{x})\|^2\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha+1}\mathrm{d}x=2(\alpha+1)\int_{B_r}(\nabla u\cdot\nabla v)u(\boldsymbol{x})\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

再次根据 Green 恒等式, 有

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial B_r} u^2(\boldsymbol{x})\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^\alpha \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S \\
&= \int_{B_r} u^2(\boldsymbol{x})\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^\alpha \Delta v \mathrm{d}\boldsymbol{x} + 2\int_{B_r} (\nabla u\cdot\nabla v)u(\boldsymbol{x})\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^\alpha \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\quad - 2\alpha \int_{B_r} u^2(\boldsymbol{x})\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha-1} \|\boldsymbol{x}\|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= 3\int_{B_r} u^2(\boldsymbol{x})\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^\alpha \mathrm{d}\boldsymbol{x} + 2\int_{B_r} (\nabla u\cdot\nabla v)u(\boldsymbol{x})\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^\alpha \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\quad - 2\alpha \int_{B_r} u^2(\boldsymbol{x})\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha-1} \left(r^2-\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= (3+2\alpha)\int_{B_r} u^2(\boldsymbol{x})\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^\alpha \mathrm{d}\boldsymbol{x} + 2\int_{B_r} (\nabla u\cdot\nabla v)u(\boldsymbol{x})\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^\alpha \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\quad - 2r^2\alpha \int_{B_r} u^2(\boldsymbol{x})\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha-1} \mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

化简可得

$$
\begin{aligned}
2r\alpha \int_{B_r} u^2(\boldsymbol{x})\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^{\alpha-1} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = &\frac{3+2\alpha}{r}\int_{B_r} u^2(\boldsymbol{x})\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^\alpha \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&+ \frac{2}{r}\int_{B_r} (\nabla u\cdot\nabla v)u(\boldsymbol{x})\left(r^2-\|\boldsymbol{x}\|^2\right)^\alpha \mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

这说明

$$
H'(r) = \frac{2\alpha+3}{r}H(r) + \frac{1}{(\alpha+1)r}I(r)
$$

八、 设 $f(x)=x^2, x\in[-\pi,\pi]$.

1. 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数.
2. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

解: 函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上是偶函数. Fourier 级数的表达式为:

$$
f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)
$$

由于 $f(x)$ 是偶函数, 所有 $b_n=0$. 只需计算 a_0 和 a_n. 计算 a_0 :

$$
a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3}=\frac{2\pi^2}{3}.
$$

计算 a_n :

$$
a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=\frac{4(-1)^n}{n^2}
$$

Fourier 级数:

$$
f(x)\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx
$$

在 $x=\pi$ 处, Fourier 级数收敛于:

$$
f(\pi)=\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos n\pi=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.
$$

因为 $\cos n\pi=(-1)^n$. 解得

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}
$$

哈尔滨工业大学 2025 年数学分析试卷

一、 判断题. 正确的给出证明, 错误的给出反例.

1. 设 $b_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 若数列 $\{b_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 收敛.

   解: 错误.

   反例: 取 $a_n=(-1)^n$, 则

$$b_n=\begin{cases}0, & n\text{为偶数}\\ -\dfrac{1}{2k+1}, & n=2k+1\text{为奇数}\end{cases}\to 0,(n\to+\infty).$$

   此时, 数列 $\{b_n\}$ 收敛, 但是数列 $\{a_n\}$ 发散.

   结论: 记 $b_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 则 $\{b_n\}$ 收敛是 $\{a_n\}$ 收敛的必要非充分条件, 即平均数列收敛, 原数列可能发散.

2. 两个在 x_0 附近无界的函数之积仍为无界函数.

   解: 错误.

   反例: 取 $x_0=0$, 定义两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 如下:

   令 $x_n=\dfrac{1}{n},(n\in\mathbb{N}_+)$, 定义 $f(x_n)=n$, 其余点满足 $f(x)=0$.

   令 $y_n=\dfrac{1}{n+\frac{1}{2}},(n\in\mathbb{N}_+)$, 定义 $g(y_n)=n$, 其余点满足 $g(x)=0$. 则 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 附近无界且 $g(x)$ 在 $x_0=0$ 附近也无界, 如下:

   当 x 沿着序列 $x_n=\dfrac{1}{n}$ 趋近于 0 时, $f(x_n)=n\to+\infty$, 因此, $f(x)$ 在 $x_0=0$ 附近无界. 当 x 沿着序列 $y_n=\dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}$ 趋近于 0 时, $g(y_n)=n\to+\infty$, 因此, $g(x)$ 在 $x_0=0$ 附近无界.

   下面考虑乘积 $f(x)g(x)$ 是否无界: 对于任意 x, 均有

   若 $x=x_n=\dfrac{1}{n}$, 则 $g(x_n)=0$, 故 $f(x_n)g(x_n)=0$.

   若 $x=y_n=\dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}$, 则 $f(y_n)=0$, 故 $f(y_n)g(y_n)=0$.

   其余点 $f(x)g(x)=0$, 因此 $f(x)g(x)\equiv 0$, 显然是有界的!

   结论: 两个在 x_0 附近无界的函数之积可能是有界函数!

3. 若 $y=f(x)$ 在点 x_0 不连续, $u=g(y)$ 在点 $y_0=f(x_0)$ 不连续, 则复合函数 $u=g(f(x))$ 在点 x_0 不连续.

   解: 错误.

   反例:

   取 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\\ 0, & x\in\mathbb{Q}^c\cap(0,1)\end{cases}$, $g(y)=\begin{cases}1, & y\in\mathbb{Q}\\ 0, & y\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$. 取 $x_0=\dfrac{1}{2}$, 则 $f(x_0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\in\mathbb{Q}$, 则 $g(y)$ 在 $y_0=\dfrac{1}{2}$ 处不连续, 而 $u(x)=g(f(x))\equiv 1$ 在 $x_0=\dfrac{1}{2}$ 处连续.

   结论: 若 $y=f(x)$ 在点 x_0 不连续, $u=g(y)$ 在点 $y_0=f(x_0)$ 不连续, 则复合函数 $u=g(f(x))$ 在点 x_0 可能是连续的.

4. 一元函数的定积分, 若 $|f(x)|$ 可积, 则 $f(x)$ 可积.

   解: 错误.

反例：取

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ -1, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases},$$

则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积, 下证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积. 对 $[a,b]$ 上作任意划分：

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上, 既存在有理数 x_{i1}, 又存在无理数 x_{i2}.

当 ξ_i 为有理数时, 和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i=b-a$.

当 ξ_i 为无理数时, 和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)\Delta x_i=-(b-a)$.

当划分细度 $\lambda=\max\{\Delta x_i\}\to 0$ 时, 这两个和式的极限不相等, 不满足定积分定义中极限唯一的要求, 所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积, 得证!

5. 若二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的两个二次极限都存在, 则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的二重极限也存在.

解： 错误.

反例：取 $f(x,y)=\dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$, 则

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,y)=\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x+x^2}{x}\right)=1+0=1$$

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}f(x,y)=\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}\right)=\lim_{y\to0}\left(\frac{-y+y^2}{y}\right)=-1+0=-1.$$

两个累次极限都存在, 而取沿着 $y=kx$ 趋于 0 的路径, 有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0,y=kx}f(x,y)&=\lim_{x\to0}f(x,kx)=\lim_{x\to0}\frac{x-kx+x^2+k^2x^2}{x+kx}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x(1-k+x+k^2x)}{x(1+k)}=\lim_{x\to0}\frac{1-k+x+k^2x}{1+k}=\frac{1-k}{1+k}.\end{aligned}$$

类似的反例还有 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2},\quad (x,y)\neq(0,0)$.

二、 解答如下问题:

1. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续, 证明: $f(x)$ 在 (a,b) 上有界.

证明： 因为函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续, 所以对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|x_2-x_1|<\delta$ 时, 有 $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$. 所以当 $x_1,x_2\in(a,a+\delta)$ 时, 恒有 $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$. 再由函数极限的 Cauchy 收敛准则可知, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a+0)$ 收敛. 同理可证明 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b-0)$.

令 $F(x)=\begin{cases}f(a+0), & x=a\\ f(x), & a<x<b\\ f(b-0), & x=b\end{cases}$. 从而 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 进而函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界, 得证!

2. 用两种方法证明函数 $y=\ln x$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.

证明： 【法 1】假设函数 $y=\ln x$ 在 $(0,1)$ 上一致连续, 则由 (1) 可知：$y=\ln x$ 在 $(0,1)$ 上有界, 又 $\lim\limits_{x\to0^+}y=\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$. 所以假设矛盾, 即函数 $y=\ln x$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.

【法 2】取 $x_n=\mathrm{e}^{-n},y_n=\mathrm{e}^{-(n+1)}$, 则

$$|x_n-y_n|=\left|\mathrm{e}^{-n}-\mathrm{e}^{-(n+1)}\right|=\mathrm{e}^{-n}\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)\to0\quad(n\to+\infty).$$

而 $|\ln(x_n)-\ln(y_n)|=|-n-(-(n+1))|=1\nrightarrow0$. 所以函数 $y=\ln x$ 在 $(0,1)$ 上非一致连续.

三、 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^\alpha\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

1. 求 α 的范围, 使函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续.
2. 求 α 的范围, 使函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微.
3. 求 α 的范围, 使函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的偏导数连续.

解: (1) 若函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续, 则要求满足:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0.$$

又因为 $0<|f(x,y)|=\left|\left(x^2+y^2\right)^\alpha\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)\right|\leqslant\left(x^2+y^2\right)^\alpha$, 所以, 当 $\alpha>0$ 时, 有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)^\alpha=0$. 此时, 由夹逼准则可知, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. 即当 $\alpha>0$ 时, 函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

(2) 若函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 则要求满足: 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, 有

$$f(x,y)=f(0,0)+f_x'(0,0)x+f_y'(0,0)y+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

由定义和对偏导数的计算可知,

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}x^{2\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}y^{2\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

所以要想极限存在, 一定要满足: $2\alpha-1>0$, 即 $\alpha>\dfrac{1}{2}$. 此时,

$$f_x'(0,0)=0,\quad f_y'(0,0)=0,$$

故要求可微, 即满足 $f(x,y)=o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, $(x,y)\to(0,0)$, 则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{\alpha-\frac12}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)=0.$$

综上所述, 当 $\alpha>\dfrac12$ 时, 函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 得证!

(3) 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, 由偏导数公式可知:

$$\begin{aligned}f_x'(x,y)&=\alpha(x^2+y^2)^{\alpha-1}\cdot 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)+\left((x^2+y^2)^\alpha\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)\cdot\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}\\&=2\alpha x(x^2+y^2)^{\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-2x(x^2+y^2)^{\alpha-2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$, 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, 则 $r\to0$, 代入得有

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_x'(x,y)&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}2\alpha x(x^2+y^2)^{\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-2x(x^2+y^2)^{\alpha-2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\\&=2\alpha\cos\theta\lim_{r\to0}r^{2\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{r^2}\right)-2\cos\theta\lim_{r\to0}r^{2\alpha-3}\cos\left(\frac{1}{r^2}\right)=0.\end{aligned}$$

所以只需同时满足: $\begin{cases}2\alpha-1>0\\ 2\alpha-3>0\end{cases}$, 即 $\alpha>\dfrac32$, 得证!

四、 分别从微积分的角度, 用五种方法证明: $e^x\geqslant1+x$.

证明: 【法 1】令 $f(x)=e^x-1-x,(x\in(-\infty,+\infty))$, 则

$$f'(x)=e^x-1,(x\in(-\infty,+\infty)).$$

当 $f'(x)=e^x-1\geqslant0$ 时, 有 $x\geqslant0$, 即 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.
当 $f'(x)=e^x-1\leqslant0$ 时, 有 $x\leqslant0$, 即 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减.
所以 $f(x)\geqslant f(0)=0$, 即 $e^x\geqslant1+x,(x\in(-\infty,+\infty))$, 得证!

【法 2】由带有 Lagrange 余项的 Taylor 展开公式可知, 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2!}\mathrm{e}^{\xi} \cdot x^2 \geqslant 1 + x, \quad 其中\xi \in \mathbb{R}.$$

【法 3】由于 $(\mathrm{e}^x)'' = \mathrm{e}^x > 0, (\forall x \in \mathbb{R})$, 所以 e^x 是一个下凸函数, 故函数图像恒在其任一点的切线上方, 又在 $x = 0$ 处的切线为 $y = 1 + x$. 所以

$$\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x, (x \in (-\infty, +\infty))$$

【法 4】由 Lagrange 中值定理可知,$\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x - 0} = \mathrm{e}^{\xi}$, 即

$$\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^{\xi} + 1 \geqslant 1 + x, \quad 其中x \in (-\infty, +\infty).$$

【法 5】由 Bernoulli 不等式可知,$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$, $x \geqslant -1$. 所以 $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \geqslant 1 + x$. 令 $n \to +\infty$, 有 $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$, 其中 $x \in (-\infty, +\infty)$. 这里值得注意的是 n 很大的时候是可以保证 Bernoulli 不等式 $(x \geqslant -1)$ 成立.

【法 6】由积分中值定理可知, 当 $x \geqslant 0$ 时, $\exists \xi \in [0, x]$, 使得

$$\mathrm{e}^x - 1 = \int_0^x \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\xi} x \geqslant x, \quad 即\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x.$$

$x \leqslant 0$ 时, $\exists \xi \in [x, 0]$, 使得

$$1 - \mathrm{e}^x = -\int_0^x \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{\xi} x \leqslant -x, \quad 即1 + x \leqslant \mathrm{e}^x.$$

综上所述, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$, 其中 $x \in (-\infty, +\infty)$.

五、 若对 $\forall x \in [a, b]$, 函数 $f(x)$ 满足 $f(x) \geqslant 0$, $f''(x) \leqslant 0$. 求证: $f(x) \leqslant \dfrac{2}{b - a} \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

证明: 将 $f(x)$ 在点 $t \in [a, b]$ 处展开成一阶 Taylor 公式:

$$f(x) = f(t) + f'(t)(x - t) + \frac{1}{2!} f''(\xi)(x - t)^2.$$

其中 ξ 介于 x 与 t 之间, 由 $f''(x) \leqslant 0$ 可得: $f''(\xi) \leqslant 0$, 于是

$$f(x) \leqslant f(t) + f'(t)(x - t).$$

两边同时在 $[a, b]$ 上对 t 积分可得

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}t &\leqslant \int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t + \int_a^b f'(t)(x - t) \,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t + \int_a^b (x - t) \,\mathrm{d}(f(t)) \\
&= \int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t + \left[(x - t) f(t) \Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f(t) \,\mathrm{d}(x - t) \right] \\
&= \int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t + (x - b) f(b) - (x - a) f(a) + \int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t \\
&= 2 \int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t + (x - b) f(b) - (x - a) f(a).
\end{aligned}$$

所以

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}[f(x)(b - a) + (x - a) f(a) - (x - b) f(b)].$$

因为 $x \in [a, b]$, 所以 $b - x \geqslant 0, x - a > 0$ 或 $b - x > 0, x - a \geqslant 0$. 反正等号不能同时全部取到, 又因为 $f(x) \geqslant 0$, 所以 $f(a) \geqslant 0$, $f(b) \geqslant 0$, 故

$$(x - a) f(a) - (x - b) f(b) = (x - a) f(a) + (b - x) f(b) \geqslant 0.$$

所以 $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2} f(x)(b - a)$, 那么 $f(x) \leqslant \dfrac{2}{b - a} \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

六、 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续且无极大值点, $\{x_n\} \subset (a, b)$ 满足 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \inf\limits_{a<x<b} f(x)$.

1. 用肯定语言叙述 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \overline{x}$ 的 $\varepsilon - N$ 定义.
2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, 是否有 $x_0 \in (a,b)$? 如果有, 请加以证明, 否则请举反例.
3. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

解: (1) 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对任意的正整数 N, 存在 $n_0 > N$, 满足 $|x_{n_0} - \overline{x}| \geqslant \varepsilon_0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \overline{x}$.

(2) 例如 $f(x) = x$, $(a,b) = (0,1)$, $x_n = \dfrac{1}{2^n}$, 此时

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = 0 = \inf_{0<x<1} f(x).$$

但其中 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \notin (0,1)$.

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在, 结合 $\{x_n\} \subset (a,b)$ 可知 $\{x_n\}$ 至少有两个聚点, 不妨设为 $\alpha, \beta \in [a,b]$, 其中 $\alpha < \beta$. 再设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$, $\lim\limits_{l\to\infty} x_{n_l} = \beta$, 同时 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{l\to\infty} f(x_{n_l}) = \inf\limits_{a<x<b} f(x)$. 由于 $f(x)$ 在 (a,b) 上无极大值点, 因此在 (α,β) 上也无极大值点, 那么必定存在 $x_0 \in (\alpha,\beta)$, 满足 $f(x_0) > \inf\limits_{a<x<b} f(x)$ (否则 $f(x) \equiv \inf\limits_{a<x<b} f(x)$ 为常值函数, 这与无极大值点矛盾). 那么根据保号性, 存在正整数 K, L, 满足

$$x_{n_K} < x_0 < x_{n_L}, \quad \text{且} \quad f(x_{n_K}), f(x_{n_L}) < f(x_0).$$

而 $f(x)$ 在 $[x_{n_K}, x_{n_L}]$ 上连续, 因此 $f(x)$ 在 $[x_{n_K}, x_{n_L}]$ 存在最大值, 设最大值点为 $\xi \in [x_{n_K}, x_{n_L}]$, 那么

$$f(\xi) \geqslant f(x_0) > f(x_{n_K}) > f(x_{n_L}).$$

这说明 $\xi \neq x_{n_K}, x_{n_L}$, 即 $\xi \in (x_{n_K}, x_{n_L})$, 因此 ξ 为 $f(x)$ 的极大值点, 矛盾. 综上可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

七、 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ 收敛. 记 $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{A_k^2} a_k$, $C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k}$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{A_k}$. 证明:

1. $B_n < \dfrac{5}{a_1} + 2S_n + C_n$.
2. $S_n < \sqrt{B_n C_n}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ 收敛.

证明: (1) 因为 $a_n > 0$, 所以 A_n 单调递增, 即 $A_k \geqslant A_{k-1}$, $A_k \geqslant a_k$. 注意到 $a_k = A_k - A_{k-1}$, 所以

$$\begin{aligned}
B_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{A_k^2} a_k = \frac{1}{A_1^2} a_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{A_k^2} a_k = \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{A_k^2} a_k \\
&= \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{A_k^2}(A_k - A_{k-1}) \leqslant \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{A_k A_{k-1}}(A_k - A_{k-1}) \\
&= \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^{n} k^2 \left(\frac{A_k}{A_k A_{k-1}} - \frac{A_{k-1}}{A_k A_{k-1}} \right) = \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^{n} k^2 \left(\frac{1}{A_{k-1}} - \frac{1}{A_k} \right) \\
&= \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{A_{k-1}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{A_k} = \frac{1}{a_1} + \frac{4}{A_1} + \sum_{k=3}^{n} \frac{k^2}{A_{k-1}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{A_k} \\
&= \frac{5}{a_1} + \sum_{k=3}^{n} \frac{k^2}{A_{k-1}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{A_k} = \frac{5}{a_1} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(k+1)^2}{A_k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{A_k} \\
&= \frac{5}{a_1} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k^2 + 2k + 1}{A_k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{A_k} \\
&= \frac{5}{a_1} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k^2}{A_k} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{2k}{A_k} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{A_k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{A_k}
\end{aligned}$$

$$= \frac{5}{a_1} + 2\sum_{k=2}^{n-1}\frac{k}{A_k} + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{A_k} - \frac{n^2}{A_n} < \frac{5}{a_1} + 2\sum_{k=2}^{n-1}\frac{k}{A_k} + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{A_k}$$
$$< \frac{5}{a_1} + 2\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{A_k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} = \frac{5}{a_1} + 2S_n + C_n.$$

即证出 $B_n < \frac{5}{a_1} + 2S_n + C_n$.

(2) 由 Cauchy 不等式可知,

$$B_nC_n = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{A_k^2}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{k^2}{A_k^2}a_k}\right)^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{1}{a_k}}\right)^2\right)$$
$$\geqslant \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k^2}{A_k^2}a_k}\sqrt{\frac{1}{a_k}}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k^2}{A_k^2}}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{A_k}\right)^2 = S_n^2.$$

取等条件是：当且仅当 $\sqrt{\frac{k^2}{A_k^2}a_k}$ 与 $\sqrt{\frac{1}{a_k}}$ 成比例, 即对 $\forall k \in \mathbb{N}_+$, 有 $\sqrt{\frac{k^2}{A_k^2}a_k^2} = \frac{ka_k}{A_k}$ 为一个常数, 下面证明这是不可能的.

假设: 对 $\forall k \in \mathbb{N}_+$, 均有 $\frac{ka_k}{A_k} = C$ 常数, 当 $k=1$ 时, 有 $\frac{a_1}{A_1} = \frac{a_1}{a_1} = 1$; 故 $\frac{2a_2}{A_2} = 1$,
解得 $2a_2 = A_2$, 所以 $a_2 = a_1$, 下面证明 a_k 为常数：当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_k$ 时, 有

$$\frac{(k+1)a_{k+1}}{A_{k+1}} = 1, \text{即}(k+1)a_{k+1} = A_{k+1}.$$

所以 $(k+1)a_{k+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = ka_1 + a_{k+1}$. 所以 $a_{k+1} = a_1$, 综上所述, 对 $\forall k \in \mathbb{N}_+$, 有 a_k 为常数. 由此可知, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k} = +\infty$, 是发散的, 故矛盾！ 则不能取等.

综上所述, $B_nC_n > S_n^2$, 即 $S_n < \sqrt{B_nC_n}$, 得证!

(3)

引理 10.1

若 $\{a_n\}, (n \geqslant 1)$ 是正实数序列, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(a_1+\cdots+a_n)^2}a_n$ 也收敛.

【法 1】考虑级数部分和 $B_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2a_k}{(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2}$. 记作 $A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, 则 $B_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{A_k^2}a_k$.
由于 $\{a_n\}, (n \geqslant 1)$ 是正实数序列, 所以 $A_k^2 \geqslant A_kA_{k-1}$, 进而

$$B_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{A_k^2}a_k = \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{A_k^2}a_k \leqslant \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{A_kA_{k-1}}a_k$$
$$= \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{A_{k-1}} - \frac{1}{A_k}\right)k^2 = \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{A_{k-1}} - \sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{A_k}$$
$$= \frac{5}{a_1} + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{A_k} + 2\sum_{k=2}^{n-1}\frac{k}{A_k} - \frac{n^2}{A_n} \leqslant \frac{5}{a_1} + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{A_k} + 2\sum_{k=2}^{n-1}\frac{k}{A_k}.$$

由题意可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{A_n}$ 收敛, 表明 $\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{A_k}$ 是收敛的, 故原级数的收敛性与 $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{A_k}$ 相同. 为此引入 Hardy 不等式

引理 10.2

设 $a_n \geqslant 0, A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, 则对于 $p > 1$ 有如下的 Hardy 不等式

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{N} a_n^p$$

证明 令 $b_n = \dfrac{A_n}{n}$, 则

$$\begin{aligned}
& b_n^p - \frac{p}{p-1} b_n^{p-1} a_n \\
= & b_n^p\left(1 - \frac{np}{p-1}\right) + \frac{(n-1)p}{p-1}\left(b_n^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(b_{n-1}^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
\leqslant & b_n^p\left(1 - \frac{np}{p-1}\right) + \frac{(n-1)p}{p-1}\left(\frac{p-1}{p} b_n^p + \frac{1}{p} b_{n-1}^p\right) \\
= & n b_n^p\left(1 - \frac{p}{p-1}\right) + \frac{n-1}{p-1} b_{n-1}^p \\
= & \frac{1}{p-1}\left[(n-1) b_{n-1}^p - n b_n^p\right]
\end{aligned}$$

对上式求和得

$$\sum_{n=1}^{N} b_n^p - \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N} b_n^{p-1} a_n \leqslant -\frac{1}{p-1} N b_N^p \leqslant 0$$

因此

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} b_n^p & \leqslant \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N} b_n^{p-1} a_n \\
& \leqslant \frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^{N}\left(b_n^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{Holder} \\
& = \frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^{N} b_n^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

化简并移项可得

$$\sum_{n=1}^{N} b_n^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{N} a_n^p$$

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 收敛, 则令 $N \to \infty$ 就得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p.$$

注意到在 Hardy 不等式中令 $p \to +\infty$ 就得到所谓的 Carleman 不等式：设 $a_n \geqslant 0$ 则成立

$$\sum_{n=1}^{N} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \mathrm{e} \sum_{n=1}^{N} a_n$$

回到本题

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{A_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_1+a_2+\cdots+a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}}$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}}\leqslant \mathrm{e}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛, 从而得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{A_n}$ 收敛.

【法 2】前面证明同【法 1】, 后面运用 Cauchy 不等式级数形式, 注意到:

$$B_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{A_k^2}a_k\leqslant\frac{5}{a_1}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{A_k}+2\sum_{k=2}^{n-1}\frac{k}{A_k}$$
$$\leqslant\frac{5}{a_1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{A_k}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{A_k}=\frac{5}{a_1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{A_k}+2\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{A_k}\right)^2}$$
$$=\frac{5}{a_1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{A_k}+2\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k\sqrt{a_k}}{A_k}\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)^2}$$
$$\leqslant\frac{5}{a_1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{A_k}+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2a_k}{A_k^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}$$
$$=\frac{5}{a_1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{A_k}+2\sqrt{B_n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}\leqslant\frac{5}{a_1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}+2\sqrt{B_n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}$$

所以 $\left(\sqrt{B_n}\right)^2-2\sqrt{B_n}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}-\left(\frac{5}{a_1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\leqslant 0.$

$$\left(\sqrt{B_n}\right)^2-2\sqrt{B_n}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}-\left(\frac{5}{a_1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\leqslant 0.$$

进而 $\left(\sqrt{B_n}-\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}\right)^2\leqslant\frac{5}{a_1}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$, 解得

$$\sqrt{B_n}\leqslant\sqrt{\frac{5}{a_1}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}$$

由于 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ 收敛, 所以 $\sqrt{B_n}$ 收收敛, 进而 B_n 收敛.

八、 证明:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\ln x$ 在 $(0,1]$ 上不一致收敛.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\frac{\ln x}{1+|\ln(-\ln x)|}$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛.

证明: (1) 记 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}x^k\ln x$, 则 $S_n(1)=0$, 且 $x\in(0,1)$ 时, 有

$$S_n(x)=\ln x\cdot\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\to\frac{x\ln x}{1-x}\quad(n\to\infty).$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \ln x$ 的极限函数为

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{1-x}, & x\in(0,1)\\ 0, & x=1\end{cases}$$

由于每个 $x^n\ln x$ 均为 $(0,1]$ 上的连续函数, 但

$$\lim_{x\to1^-}S(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x\ln x}{1-x}=\lim_{x\to1^-}\frac{x(x-1)}{1-x}=-1\neq S(1).$$

即 $S(x)$ 在 $x=1$ 处不连续, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \ln x$ 在 $(0,1]$ 上不一致收敛.

也可以考虑, 当 $x\in(0,1)$ 时级数的余项

$$R_N(x)=S(x)-S_N(x)=\ln x\cdot\frac{x}{1-x}-\ln x\cdot\frac{x\left(1-x^N\right)}{1-x}=\ln x\cdot\frac{x^{N+1}}{1-x}$$

要级数一致收敛, 需要 $\sup\limits_{x\in(0,1)}|R_N(x)|\to0$ 当 $N\to\infty$.

令 $t=-\ln x>0$(因为 $x\in(0,1)$), 则 $x=\mathrm{e}^{-t}$, 且当 $x\to0^+$ 时 $t\to+\infty$, 当 $x\to1^-$ 时 $t\to0^+$. 代入:

$$|R_N(x)|=\left|(-t)\cdot\frac{\mathrm{e}^{-t(N+1)}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right|=t\cdot\frac{\mathrm{e}^{-t(N+1)}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\to1.$$

从而级数在 $(0,1)$ 上不一致收敛.

(2) 当 $x\in(0,1)$ 时, 记

$$T_n(x)=\sum_{k=1}^{n}x^k\frac{\ln x}{1+|\ln(-\ln x)|}=\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\cdot\frac{\ln x}{1+|\ln(-\ln x)|}.$$

明显 $\{T_n(x)\}$ 在 $(0,1)$ 上收敛, 且极限函数为 $T(x)=\dfrac{x}{1-x}\cdot\dfrac{\ln x}{1+|\ln(-\ln x)|}$, 进一步, 还有

$$|T_n(x)-T(x)|=\frac{-x^{n+1}\ln x}{(1-x)(1+|\ln(-\ln x)|)}.$$

记函数列

$$u_n(x)=\begin{cases}0, & x=0,1\\ \dfrac{-x^{n+1}\ln x}{(1-x)(1+|\ln(-\ln x)|)}, & x\in(0,1)\end{cases}$$

明显 $\{u_n(x)\}$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数列, 且收敛于 0 . 与此同时, 对任意的 $x\in[0,1]$, 明显 $\{u_n(x)\}$ 关于 n 单调递减, 由 Dini 定理可知 $\{u_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0 , 自然在 $(0,1)$ 上也一致收敛于 0 , 对应 $\{T_n(x)\}$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛于 $T(x)$, 也就是 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\dfrac{\ln x}{1+|\ln(-\ln x)|}$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛于 $T(x)$.

九、 设 $I(k,a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x$.

1. 证明: 对固定的 $k\in[0,+\infty)$, 积分 $I(k,a)$ 关于 a 在 $|a|\geqslant\delta$ $(\delta>0)$ 上一致收敛. 对固定的 $a\neq0$, 积分 $I(k,a)$ 关于 k 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.
2. 计算积分 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 的值.

证明: (1) 当 k 固定时, 记 $f(x)=\sin(ax)$, 对 $\forall A>0$, 有 $\left|\displaystyle\int_0^A\sin(ax)\mathrm{d}x\right|=\left|\dfrac{1-\cos(Aa)}{a}\right|\leqslant\dfrac{2}{\delta}$ 关于 a 一致有界.

记 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-kx}}{x}$ 关于 x 单调递减, 且关于 a 一致有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-kx}}{x}=0$. 由 Dirichlet 判别法可知, $I(k,a)$ 关于 a 在 $|a|\geqslant\delta>0$ 上一致收敛.

当 a 固定时, 记 $f(x)=\sin(ax)$, 对 $\forall A>0$, 有

$$\left|\int_0^A \sin(ax)\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1-\cos(Aa)}{a}\right|\leqslant\frac{2}{a}\text{关于}k\text{ 一致有界.}$$

记 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-kx}}{x}$ 关于 x 单调递减, 且 $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{-kx}}{x}\right|\leqslant\dfrac{1}{x}\to 0$ 关于 k 一致收敛于 0. 由 Dirichlet 判别法可知, $I(k,a_0)$ 关于 k 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 得证!

(2)【法 1】Feynman 积分法: 在 (1) 中已经证明了关于参变量的积分 $I(k)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$. 在 $k\in[0,+\infty)$ 上一致收敛. 而被积函数

$$f(x,k)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-kx}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续, 于是 $I(k)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续. 由于当 $k\geqslant\delta>0$ 时, 有

$$\left|\frac{\partial f(x,k)}{\partial k}\right|=\left|-\mathrm{e}^{-kx}\sin x\right|\leqslant \mathrm{e}^{-\delta x},$$

且 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\delta x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法知道, 积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial f(x,k)}{\partial k}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\sin x\,\mathrm{d}x$$

在 $k\in[\delta,+\infty)$ 上一致收敛. 于是

$$\begin{aligned}&I'(k)=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\sin x\,\mathrm{d}x\xlongequal{\text{两次分部积分}}-\frac{1}{1+k^2},0<k<+\infty,\\&I(k)=-\arctan k+c.\end{aligned}$$

由于

$$|I(k)|=\left|\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{k},$$

故 $\lim\limits_{k\to+\infty}I(k)=0$, 且

$$\begin{aligned}&c=\lim_{k\to+\infty}c=\lim_{k\to+\infty}(I(k)+\arctan k)=\lim_{k\to+\infty}I(k)+\frac{\pi}{2}=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},\\&I(k)=-\arctan k+\frac{\pi}{2},\\&\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=I(0)=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

由此得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\frac{t}{\beta}}\frac{\mathrm{d}t}{\beta}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}, & \beta>0\\ 0, & \beta=0\\ \displaystyle-\int_0^{+\infty}\frac{\sin|\beta|x}{x}\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}, & \beta<0\end{cases}$$

【法 2】凑成二重积分交换次序积分. 令 $t=\dfrac{1}{x}$, $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$, 并且注意到

$$\frac{1}{t}=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ty}\,\mathrm{d}y,(y>0)$$

则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-yt}\sin t\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y.$$

注意到结论：

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-yt} \sin t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{y^2+1},$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-yt} \sin t \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2+1} \,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}.$$

【法 3】应用 Lobachevsky 积分公式. Lobachevsky 积分公式：若 $f(x)$ 在 $0 \leqslant x < +\infty$ 范围内满足：$f(x+\pi) = f(x) = f(\pi - x)$, 则成立

$$I = \int_0^{+\infty} f(x) \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \mathrm{d}x.$$

那么显然有 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

下面来证明 Lobachevsky 积分公式：证明：先给出几个需要用到的简单结论：

$$\sin(x - n\pi) = \sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin x. \tag{10.1}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}. \tag{10.2}$$

我们可以把 $[0, \pi)$ 的积分区间均分成无穷多个长度为 $\frac{\pi}{2}$ 的区间来, 且注意到 $f(x)$ 为周期为 π 的偶函数

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} f(x) \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cdots + \cdots \right) f(x) \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \\
&= \left[\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} + \cdots \right) + \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} + \cdots \right) \right] f(x) \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{n\pi + \frac{\pi}{2}} f(x) \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi + \frac{\pi}{2}}^{n\pi} f(x) \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t + n\pi) \sin(t + n\pi)}{t + n\pi} \mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(-t + n\pi) \sin(-t + n\pi)}{-t + n\pi} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) \sin x \cdot (-1)^n \cdot 2x}{(x - n\pi)(x + n\pi)} \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x. \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2} \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x \frac{1}{x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x \cdot \left(\frac{1}{\sin x} \right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

【法 4】Fourier 正弦展开. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$, 令 $\varepsilon = \frac{\pi}{k}$, 对区间 $[0, n\pi]$ 进行分割成 kn 个长度为 ε 的小区间, 由 Riemann 积分的定义：

$$\int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \sum_{i=1}^{kn} \frac{\sin i\varepsilon}{i\varepsilon} \varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0+} \sum_{i=1}^{kn} \frac{\sin i\varepsilon}{i}$$

注意到 Fourier 正弦展开 $\displaystyle\frac{\pi - \varepsilon}{2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin i\varepsilon}{i}$, 所以

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0+} \sum_{i=1}^{kn} \frac{\sin i\varepsilon}{i} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{kn} \frac{\sin i\varepsilon}{i} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\pi - \varepsilon}{2} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

【法 5】Fourier 变换. 令 $f(t)=\begin{cases}1,|t|<1\\0,|t|\geqslant 1\end{cases}$, 对 $f(t)$ 作 Fourier 变换：令

$$F(u)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ut}\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ut}\mathrm{d}t=2\frac{\sin u}{u}.$$

则 $f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(u)]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}2\frac{\sin u}{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ut}\mathrm{d}u$, 取 $t=0$, 则

$$1=f(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u.$$

即 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}$.

【法 6】Laplace 变换, 令 $f(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}\mathrm{d}x, t>0$, 对 $f(t)$ 做 Laplace 变换：

$$\mathscr{L}\{f(t)\}(s)=F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

代入 $f(t)$:

$$F(s)=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{x}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+s^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2s}.$$

则 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\dfrac{\pi}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}\right]=\dfrac{\pi}{2}$, 即 $f(1)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2}$.

【法 7】利用 Riemann 引理

$$\begin{aligned}\sin\frac{2n+1}{2}x&=\sin\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k+1}{2}x-\sin\frac{2k-1}{2}x\right)\\&=\sin\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2kx}{2}=\sin\frac{x}{2}\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2kx}{2}\right).\end{aligned}$$

当 $x\neq 2k\pi$ 时, 有 $\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}=1+2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2kx}{2}$, 两边同时积分可知,

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2kx}{2}\right)\mathrm{d}x=\pi.$$

令 $g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}-x}{2x\sin\frac{x}{2}}, 0<x\leqslant\pi$, 由 L'Hôpital 法则可知, $\displaystyle\lim_{x\to 0+}g(x)=0$, 补充 $g(0)=0$, 所以 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, 由 Riemann 引理可知, 若 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上可积或绝对可积, 则 $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\pi}f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=0$.

令 $f(x)=g(x), \lambda=n+\dfrac{1}{2}$, 则

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\mathrm{d}x\\=&\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\mathrm{d}x-\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=0\end{aligned}$$

由前面得到的 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{2kx}{2}\right)\mathrm{d}x=\pi$ 可知,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, 令 $\left(n+\frac{1}{2}\right)x=v$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v=\frac{\pi}{2}.$$

所以 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v=\frac{\pi}{2}$.

十、 计算:

1. $\oint_C\frac{y}{x^2+4y^2}\mathrm{d}x-\frac{x}{x^2+4y^2}\mathrm{d}y$, 其中 C 是圆周 $x^2+y^2=1$, 取逆时针方向.

解: 记作: $P=\frac{y}{x^2+4y^2}, Q=-\frac{x}{x^2+4y^2}$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+4y^2}\right)=\frac{x^2+4y^2-y\cdot 8y}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{x^2-4y^2}{(x^2+4y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+4y^2}\right)=\frac{-\left(x^2+4y^2\right)+x\cdot 2x}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{x^2-4y^2}{(x^2+4y^2)^2}$$

所以 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-4y^2}{(x^2+4y^2)^2}$. 补线 $C_\varepsilon: x^2+4y^2=\varepsilon^2, \varepsilon>0$ 充分小, 取顺时针, 由 Green 公式可知,

$$\begin{aligned}
I&=\oint_C\frac{y}{x^2+4y^2}\mathrm{d}x-\frac{x}{x^2+4y^2}\mathrm{d}y\\
&=\oint_{C+C_\varepsilon}\frac{y}{x^2+4y^2}\mathrm{d}x-\frac{x}{x^2+4y^2}\mathrm{d}y-\oint_{C_\varepsilon}\frac{y}{x^2+4y^2}\mathrm{d}x-\frac{x}{x^2+4y^2}\mathrm{d}y\\
&=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\oint_{C_\varepsilon}\frac{y}{x^2+4y^2}\mathrm{d}x-\frac{x}{x^2+4y^2}\mathrm{d}y\\
&=-\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{C_\varepsilon}y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{C_\varepsilon^-}y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_{C_\varepsilon}}(-1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{-2}{\varepsilon^2}\cdot\pi\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon}{2}=-\pi.
\end{aligned}$$

2. $\iint_S(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是圆锥 $x^2+y^2=z^2\ (0\leqslant z\leqslant 2)$ 的外侧.

解: 曲面 S 符合题意的法向量 $\boldsymbol{n}=\{x,y,-z\}$. 从而根据关系 $\cos\alpha\mathrm{d}S=\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \cos\beta\mathrm{d}S=\mathrm{d}z\mathrm{d}x, \cos\gamma\mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 从而得到

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{x}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{y}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

从而原积分可化为

$$\iint_S\left[(y-z)\left(-\frac{x}{z}\right)+(z-x)\left(-\frac{y}{z}\right)+(x-y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_S(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_{D_{xy}}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由对称性可知上述二重积分的值为零.

3. 已知 C 为球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 从 z 轴正向看为逆时针方向, 求曲线积分 $\oint_C y^3\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}y+x^3\mathrm{d}z$.

解: 记所求曲线积分为 I, 再记 C 所围的平面区域为 $S: x+y+z=0, x^2+y^2+z^2\leqslant 4$, 显然 S 正侧的单位法向量为 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, 由 Stokes 公式可知

$$I=\iint_S\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ y^3&z^3&x^3\end{vmatrix}\mathrm{d}S=-\sqrt{3}\iint_S\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}S$$

作正交变换 $(u,v,w)^{\mathrm{T}}=T(x,y,z)^{\mathrm{T}}$, 其中 T 是第一行元素均为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 的正交矩阵, 那么 $u=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)$, 且

$$u^2+v^2+w^2=(u,v,w)(u,v,w)^{\mathrm{T}}=(x,y,z)T^{\mathrm{T}}T(x,y,z)^{\mathrm{T}}=(x,y,z)(x,y,z)^{\mathrm{T}}=x^2+y^2+z^2.$$

因此上述正交变换将 S 对应为 $S':u=0,u^2+v^2+w^2\leqslant 4$, 也就是 $u=0,v^2+w^2\leqslant 4$, 那么

$$I=-\sqrt{3}\iint_{S'}\left(u^2+v^2+w^2\right)\mathrm{d}S=-\sqrt{3}\iint_{v^2+w^2\leqslant 4}\left(v^2+w^2\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

再利用极坐标变换 $v=r\cos\theta,w=r\sin\theta$, 有

$$I=-\sqrt{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\cdot r\mathrm{d}r=-8\sqrt{3}\pi$$

中国人民大学 2025 年数学分析试卷

一、 求最小的实数 a, 使得对任意的 $x>0$, 都有 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+a}>\mathrm{e}$.

解: 要证明: $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+a}>\mathrm{e}$, $(x>0)$, 只需证明:

$$a>\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x,\ (x>0).$$

令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则当 $x>0$ 时, t 的范围也为: $t>0$, 那么等价于证明:

$$a>\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t},\ (t>0).$$

令 $f(t)=\dfrac{1}{\ln(1+t)}-\dfrac{1}{t}$, $(t>0)$, 则 $f'(t)=\dfrac{(1+t)\ln^2(1+t)-t^2}{t^2(1+t)\ln^2(1+t)}$.
令 $g(t)=(1+t)\ln^2(1+t)-t^2$, $(t>0)$, 则

$$\begin{aligned} g'(t)&=-2t+\ln^2(1+t)+2\ln(1+t)\\ &=-2(t+1)+\ln^2(1+t)+2\ln(1+t)+2,\ (t>0). \end{aligned}$$

令 $h(u)=-2u+\ln^2 u+2\ln u+2$, $(u>1)$, 则

$$h'(u)=2\cdot\frac{-u+\ln u+1}{u},\ (u>1).$$

令 $H(u)=-u+\ln u+1$, $(u>1)$, 则 $H'(u)=\dfrac{-u+1}{u}$, $(u>1)$.
显然 $H'(u)<0$, $(u>1)$, 所以 $H(u)$ 在 $u>1$ 上严格单调递减, 且 $H(1)=-1+\ln 1+1=0$, 所以 $H(u)<H(1)=0$ 恒成立.
又 $h'(u)<0$ 在 $u>1$ 上恒成立, 所以 $h(u)$ 在 $u>1$ 上严格单调递减且 $h(1)=-2+\ln^2 1+2\ln 1+2=0$, 所以 $h(u)<h(1)=0$ 恒成立. 所以 $g'(t)<0$ 在 $t>0$ 上恒成立, $g(t)$ 在 $t>0$ 处严格单调递减且

$$g(0)=(1+0)\ln^2(1+0)-0^2=0,$$

$g(t)<g(0)=0$ 恒成立. 所以 $f'(t)<0$ 在 $t>0$ 上恒成立, $f(t)$ 在 $t>0$ 上严格单调递减, 且

$$\lim_{t\to0+}f(t)=\lim_{t\to0+}\left(\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to0+}\frac{t-\ln(1+t)}{t\ln(1+t)}=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{2}t^2}{t^2}=\frac{1}{2}.$$

所以 $f(t)<\lim\limits_{t\to0+}f(t)=\dfrac{1}{2}$ 恒成立, 那么 a 的最小值为 $a_{\min}=\dfrac{1}{2}$.

二、 已知 x_0,y_0,z_0 为三个给定的实数, 对正整数 $n\geqslant1$, 令

$$x_n=\frac{y_{n-1}+z_{n-1}}{2},\quad y_n=\frac{x_{n-1}+z_{n-1}}{2},\quad z_n=\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}.$$

证明: 序列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 均收敛, 并计算它们的极限.

证明: 记作

$$\begin{cases} x_{n+1}=\dfrac{y_n+z_n}{2} & (11.1)\\ y_{n+1}=\dfrac{z_n+x_n}{2} & (11.2)\\ z_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2} & (11.3) \end{cases}$$

将式式(11.1), 式(11.2), 式(11.3)两边分别相加可得

$$\begin{aligned} x_{n+1}+y_{n+1}+z_{n+1} &= \frac{y_n+z_n}{2}+\frac{z_n+x_n}{2}+\frac{x_n+y_n}{2} \\ &= \frac{y_n+z_n+z_n+x_n+x_n+y_n}{2} = x_n+y_n+z_n \end{aligned}$$

即 $x_{n+1}+y_{n+1}+z_{n+1}=x_n+y_n+z_n$, 顺次取 $n=1,2,3,\cdots$ 可得

$$\begin{cases} x_2+y_2+z_2=x_1+y_1+z_1 \\ x_3+y_3+z_3=x_2+y_2+z_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n+z_n=x_{n-1}+y_{n-1}+z_{n-1} \\ x_{n+1}+y_{n+1}+z_{n+1}=x_n+y_n+z_n \end{cases} \tag{11.4}$$

所以 $x_{n+1}+y_{n+1}+z_{n+1}=x_1+y_1+z_1$.

由式(11.1)− 式(11.2)可得 $x_{n+1}-y_{n+1}=\dfrac{y_n+z_n}{2}-\dfrac{z_n+x_n}{2}=-\dfrac{x_n-y_n}{2}$. 如此递推:

$$\begin{aligned} x_{n+1}-y_{n+1} &= \left(-\frac{1}{2}\right)^1(x_n-y_n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2(x_{n-1}-y_{n-1}) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3(x_{n-2}-y_{n-2})=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x_1-y_1). \end{aligned} \tag{11.5}$$

由式(11.2)− 式(11.3)可得 $y_{n+1}-z_{n+1}=\dfrac{z_n+x_n}{2}-\dfrac{x_n+y_n}{2}=-\dfrac{1}{2}(y_n-z_n)$. 如此递推, 得

$$y_{n+1}-z_{n+1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^1(y_n-z_n)=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(y_1-z_1). \tag{11.6}$$

由式(11.5)可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-y_{n+1})=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n(x_1-y_1)=0$.

由式(11.6)可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_{n+1}-z_{n+1})=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n(y_1-z_1)=0$.

又由式(11.4)可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}+y_{n+1}+z_{n+1})=x_1+y_1+z_1$ 为有限值, 而

$$x_n=\frac{1}{3}[(x_n+y_n+z_n)+2(x_n-y_n)+(y_n-z_n)]. \tag{11.7}$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}x_n &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}[(x_n+y_n+z_n)+2(x_n-y_n)+(y_n-z_n)] \\ &= \frac{1}{3}(x_1+y_1+z_1+2\cdot 0+0)=\frac{x_1+y_1+z_1}{3}. \end{aligned}$$

又由式(11.6)可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-y_{n+1})=0$, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$, 那么

$$\lim_{n\to+\infty}y_n=\frac{x_1+y_1+z_1}{3}.$$

再由式(11.7)可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_{n+1}-z_{n+1})=0$, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}z_n$, 那么

$$\lim_{n\to+\infty}z_n=\frac{x_1+y_1+z_1}{3}.$$

综上所述, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=\dfrac{x_1+y_1+z_1}{3}$.

三、 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 且 $f(0)=0, f(1)=2$. 证明: 存在 $\xi,\eta\in(0,1),\xi\neq\eta$, 满足 $[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=9$.

证明: 令 $F(x)=f(x)+ax+b$, 接下去要取出符合条件的 a,b . 我们需要

$$F(0)=b, F(1)=2+a+b\Rightarrow F(0)F(1)<0$$

从而利用零点存在定理可知存在 x_0 , 使得 $F(x_0)=0$, 即 $f(x_0)=-ax_0-b$. 对函数 $x+f(x)$ 分别在区间

$[0,x_0]$ 和 $[x_0,1]$ 上利用 Lagrange 中值定理, 可知存在 $\xi\in(0,x_0)$, $\eta\in(x_0,1)$, 使得

$$1+f'(\xi)=\frac{(1-a)x_0-b}{x_0},1+f'(\eta)=\frac{(1-a)x_0-3-b}{x_0-1},$$

取 $b=1-a,3+b=0$, 则 $a=4,b=-3$. 此时 $F(0)F(1)<0$, 且

$$\left(1+f'(\xi)\right)\left(1+f'(\eta)\right)=\frac{3-3x_0}{x_0}\cdot\frac{3x_0}{1-x_0}=9$$

四、 设 n 为正整数, 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt[n]{x^n+(1-x)^n}\mathrm{d}x$.

解: 为了方便, 记 $I_n=\int_0^1\sqrt[n]{x^n+(1-x)^n}\mathrm{d}x$, 由于被积函数关于区间中点 $x=\frac{1}{2}$ 对称, 因此

$$I_n=2\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt[n]{x^n+(1-x)^n}\mathrm{d}x.$$

一方面, 显然有

$$I_n\geqslant 2\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt[n]{(1-x)^n}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}.$$

另一方面, 注意到 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 时, 有 $x^n\leqslant(1-x)^n$, 因此

$$I_n\leqslant 2\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt[n]{2(1-x)^n}\mathrm{d}x=2\sqrt[n]{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\sqrt[n]{2}\to\frac{3}{4}(n\to\infty).$$

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\frac{3}{4}$.

五、 求三元函数 $f(x_1,x_2,x_3)=\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3}\left(\mathrm{e}^{x_i}-x_j\right)^2$ 的最小值, 其中 x_1,x_2,x_3 均为实数.

证明: 由 $g(t)=t^2$ 的下凸性, 利用 Jensen 不等式得到

$$\frac{1}{9}f\left(x_1,x_2,x_3\right)\geqslant\frac{1}{81}\left[\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\mathrm{e}^{x_i}-x_j\right)\right]^2$$

利用 $\mathrm{e}^x\geqslant 1+x$, 化简得到

$$\begin{aligned}\left[\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\mathrm{e}^{x_i}-x_j\right)\right]^2&=\left(3\mathrm{e}^{x_1}+3\mathrm{e}^{x_2}+3\mathrm{e}^{x_3}-3x_1-3x_2-3x_3\right)^2\\&=9\left[\left(\mathrm{e}^{x_1}-x_1\right)+\left(\mathrm{e}^{x_2}-x_2\right)+\left(\mathrm{e}^{x_3}-x_3\right)\right]^2\\&\geqslant 9\times(1+1+1)^2=81\end{aligned}$$

故

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)\geqslant\frac{1}{9}\left[\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\mathrm{e}^{x_i}-x_j\right)\right]^2\geqslant 9.$$

等号成立当且仅当 $x_1=x_2=x_3=0$.

六、 已知定义在 $[0,3]$ 上的非负连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^3\frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x=1$, 证明: $\int_0^3\frac{f(x)}{2+f^2(x)}\mathrm{d}x\leqslant 1$.

解: 对 $g(t)=\frac{t}{2+t^2}$ 求导, $g'(t)=\frac{2+t^2-2t^2}{(2+t^2)^2}=\frac{2-t^2}{(2+t^2)^2}$. 令 $g'(t)=0$, 解得 $t=\pm\sqrt{2}$, 因为 $t=f(x)\geqslant 0$, 所以当 $0\leqslant t<\sqrt{2}$ 时, $g'(t)>0$, $g(t)$ 单调递增; 当 $t>\sqrt{2}$ 时, $g'(t)<0$, $g(t)$ 单调递减, $g(t)$ 在 $t=\sqrt{2}$ 处取得极大值 $g(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

下证 $\frac{t}{2+t^2} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t}+\frac{1}{6}$. 通分得到:

$$
\begin{aligned}
& \frac{t}{2+t^2}-\frac{1}{2(1+t)}-\frac{1}{6} \\
= & \frac{6 t(1+t)-3\left(2+t^2\right)-\left(2+t^2\right)(1+t)}{6(1+t)\left(2+t^2\right)} \\
= & \frac{6 t+6 t^2-6-3 t^2-\left(2+2 t+t^2+t^3\right)}{6(1+t)\left(2+t^2\right)} \\
= & \frac{6 t+6 t^2-6-3 t^2-2-2 t-t^2-t^3}{6(1+t)\left(2+t^2\right)} \\
= & \frac{-t^3+2 t^2+4 t-8}{6(1+t)\left(2+t^2\right)}=\frac{-t^2(t-2)+4(t-2)}{6(1+t)\left(2+t^2\right)} \\
= & \frac{(t-2)\left(4-t^2\right)}{6(1+t)\left(2+t^2\right)}=\frac{-(t-2)^2(t+2)}{6(1+t)\left(2+t^2\right)} .
\end{aligned}
$$

又因为 $t \geqslant 0$, 所以 $\frac{-(t-2)^2(t+2)}{6(1+t)\left(2+t^2\right)} \leqslant 0$, 即 $\frac{t}{2+t^2} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t}+\frac{1}{6}$ 对 $t \geqslant 0$ 成立.

由于 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上是非负连续函数, 故将 $\frac{f(x)}{2+f^2(x)} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+f(x)}+\frac{1}{6}$ 两边在 $[0,3]$ 上积分, 可得

$$
\int_0^3 \frac{f(x)}{2+f^2(x)} \mathrm{d} x \leqslant \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{1}{1+f(x)} \mathrm{d} x+\frac{1}{6} \int_0^3 1 \mathrm{~d} x .
$$

已知 $\int_0^3 \frac{1}{1+f(x)} \mathrm{d} x=1, \int_0^3 1 \mathrm{~d} x=3$, 则:

$$
\int_0^3 \frac{f(x)}{2+f^2(x)} \mathrm{d} x \leqslant \frac{1}{2} \times 1+\frac{1}{6} \times 3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 .
$$

综上, $\int_0^3 \frac{f(x)}{2+f^2(x)} \mathrm{d} x \leqslant 1$ 得证.

七、 设 D 是两条直线 $y=x, y=4 x$ 和两条双曲线 $x y=1, x y=4$ 在第一象限围成的区域, 边界 ∂D 的方向为逆时针方向, $F(u)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的可导函数 $F^{\prime}(u)=f(u)$, 且 $f(u)$ 在 $\mathbb{R}$ 中连续, 证明:

$$
\int_{\partial D} \frac{F(x y)}{y} \mathrm{d} y=\ln 2 \int_1^4 f(u) \mathrm{d} u .
$$

证明: 由 Green 公式知 $\int_{\partial D} \frac{F(x y)}{y} \mathrm{d} y=\iint_D f(x y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y$, 令 $\left\{\begin{array}{l}u=x y \\ v=\frac{y}{x}\end{array}\right.$, 则此变换将区域 D 变为: $D_{u v}=\{(u, v): 1 \leqslant u \leqslant 4,1 \leqslant v \leqslant 4\}$, 变换后的 Jacobi 行列式为 $J=\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=\frac{1}{2 v}$, 于是

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial D} \frac{F(x y)}{y} \mathrm{d} y & =\iint_D f(x y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y=\iint_{D_{u v}} \frac{f(u)}{2 v} \mathrm{d} u \mathrm{d} v \\
& =\int_1^4 f(u) \mathrm{d} u \int_1^4 \frac{1}{2 v} \mathrm{d} v=\ln 2 \cdot \int_1^4 f(u) \mathrm{d} u .
\end{aligned}
$$

八、 设 Σ 为上半椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1, z \geqslant 0$. 对 Σ 上任意一点 (x, y, z), 记 $\rho(x, y, z)$ 为原点到 Σ 在点 (x, y, z) 处的切平面的距离, 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{z}{\rho(x, y, z)} \mathrm{d} S$.

解: $\Sigma: \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$, 而法向量 $\boldsymbol{n}=\{x, y, 2 z\}$, 过点 $P(x, y, z)$ 的切平面为 $x(X-x)+y(Y-y)+2 z(Z-z)=0$. 注意到 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$, 可化为: $\frac{x X}{2}+\frac{y Y}{2}+z Z=1$. 原点 $O(0,0,0)$ 到此平面的距离

为：$\rho(x,y,z)=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. 代入 $z^2=1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)$, 则有 $\mathrm{d}S=\dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 且

$$\rho(x,y,z)=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

又因为 $z=\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}$, $D:x^2+y^2\leqslant 2$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S&=\iint_D\frac{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}}{\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}}\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D\frac{4-x^2-y^2}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\iint_D\left(4-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\left(4-r^2\right)\cdot r\mathrm{d}r=\frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

九、 已知对任意的正整数 n, $f_n(x)$ 均为 $[a,b]$ 上的单调函数, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛于连续函数 $f(x)$. 证明: $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

证明: 由于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 所以一致连续, 于是对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任意的 $x',x''\in[a,b]$, 只要 $\left|x'-x''\right|<\delta$, 就有

$$\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|<\varepsilon.$$

现将 $[a,b]$ 平均分割为 $k=\left[\frac{b-a}{\delta}\right]+1$ 个子区间, 记分割点为

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{k-1}<x_k=b$$

那么对任意的 $i=1,2,\cdots,k$, 当 $x\in[x_{i-1},x_i]$ 时, 由 $|x-x_i|\leqslant|x_i-x_{i-1}|<\delta$ 可知

$$|f(x)-f(x_i)|<\varepsilon.$$

根据 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_i)=f(x_i)\,(i=1,2,\cdots,k)$ 可知存在公共的 $N_0>0$, 当 $n>N_0$ 时, 有

$$|f_n(x_i)-f(x_i)|<\varepsilon, i=1,2,\cdots,k.$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x_i)-f_n(x_{i-1})|=|f(x_i)-f(x_{i-1})|<\varepsilon$, 由保号性, 存在 $N_i>0$, 使得 $n>N_i$ 时, 有

$$|f_n(x_i)-f_n(x_{i-1})|<\varepsilon.$$

而每个 $f_n(x)$ 都为 $[a,b]$ 上的单调函数, 所以当 $n>N_i$ 时, 对任意的 $x\in[x_{i-1},x_i]$, 有

$$|f_n(x)-f_n(x_i)|\leqslant|f_n(x_i)-f_n(x_{i-1})|<\varepsilon.$$

记 $N=\max\{N_0,N_1,\cdots,N_k\}$, 则 $n>N$ 时, 对任意的 $x\in[a,b]$, 不妨设 $x\in[x_{i-1},x_i]$, 有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant|f_n(x)-f_n(x_i)|+|f_n(x_i)-f(x_i)|+|f(x_i)-f(x)|<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon.$$

即 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 这就是 Dini 定理.

十、 对正整数 n, 判断反常积分 $\int_0^{+\infty}x\sin(x^n)\mathrm{d}x$ 是否收敛以及是否绝对收敛, 并说明理由.

证明: 令 $t=x^n$, 则 $x=t^{\frac{1}{n}}$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}t$, 所以

(1) 当 $n=1,2$ 时 $\frac{2}{n}-1\geqslant 0$, 有

$$\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi}t^{\frac{2}{n}-1}\sin t\mathrm{d}t\geqslant\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi}\sin t\mathrm{d}t=2.$$

再由 Cauchy 收敛准则可知, 常积分 $\int_1^{+\infty}x\sin\left(x^n\right)\mathrm{d}x$ 发散. 而积分 $\int_0^1 x\sin\left(x^n\right)\mathrm{d}x$ 是正常积分, 必收敛.

也可以直接计算积分便可得到积分发散.

(2) 当 $n \geqslant 3$ 时, 由 Dirichlet 判别法可知, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1-\frac{2}{n}}}\mathrm{d}t$ 收敛. 但是 $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t^{1-\frac{2}{n}}}\right| \mathrm{d}t \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{1-\frac{2}{n}}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{t^{1-\frac{2}{n}}}\mathrm{d}t$. 这是发散的, 而 $\int_0^1 \frac{\sin t}{t^{1-\frac{2}{n}}}\mathrm{d}t$ 是正常 Riemann 积分. 故当 $n \geqslant 3$ 时, $\int_0^{+\infty} x\sin\left(x^n\right)\mathrm{d}x$ 条件收敛.

武汉大学 2025 年数学分析试卷

一、 1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{\pi}{2^2}\cos\dfrac{\pi}{2^3}\cdots\cos\dfrac{\pi}{2^n}$.

解: 利用三角函数公式, 有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right)\cdots\cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\\
=&\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right)\cdots\cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}\\
=&\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right)\cdots 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)}{2^2\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}\\
=&\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right)\cdots\sin\left(\frac{\pi}{2^{n-2}}\right)}{2^2\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}\\
=&\cdots=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right)}{2^{n-2}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right)}{2^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}\\
=&\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}\frac{\pi}{2^n}}=\frac{2}{\pi}.
\end{aligned}
$$

2. 已知 $\sin(xy)+2y^2=1$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解: 【法 1】令 $F(x,y)=\sin(xy)+2y^2-1$, 则

$$F_x'(x,y)=y\cos(xy),\quad F_y'(x,y)=x\cos(xy)+4y.$$

由隐函数定理可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}=-\frac{y\cos(xy)}{x\cos(xy)+4y}.$$

【法 2】对方程 $\sin(xy)+2y^2=1$ 两边的 x 求导可得

$$(y+xy')\cos(xy)+4yy'=0.$$

整理得

$$y'=-\frac{y\cos(xy)}{x\cos(xy)+4y}.$$

3. $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x)^n\cos x\mathrm{d}x$, 求 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}I_n$.

解: 【法 1】令 $t=\sin x$, 则由分部积分法, 得

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin^n x\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\mathrm{d}x(\sin x)=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}t^n\mathrm{d}t.$$

$$I_n=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}.$$

所以 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}I_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$. 令 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$, 则

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},\ S(0)=0.$$

由 Newton-Leibniz 公式可知,

$$S(x)=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}x(1-t)$$
$$=[-\ln(1-t)]\big|_0^x=-\ln(1-x).$$

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} I_n=S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\ln\left(2+\sqrt{2}\right).$

【法 2】交换积分和级数的次序可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin^n x\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\sum_{n=0}^{\infty}(\sin^n x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1-\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1-\sin x}\mathrm{d}(\sin x)=\ln\left(2+\sqrt{2}\right).$$

二、 1. 已知 D 是由 $x=0, y=\frac{\pi}{2}, x=y^2$ 所围的区域, 求 $\iint_D \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解: 将二重积分化为二次积分, 得

$$I=\iint_D \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{y^2}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin y}{y}\cdot y^2\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sin y\mathrm{d}y=-\left[(y\cos y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos y\mathrm{d}y\right]$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos y\mathrm{d}y=\sin y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

2. Σ 是 $y=\sqrt{x}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 绕 x 轴旋转形成的曲面, 法向量方向与 x 轴正方向成钝角, 求第二型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} 2(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解: 由于 $\Sigma: x=y^2+z^2, y^2+z^2\leqslant 1$, 记 $\Sigma_1: x=1, y^2+z^2\leqslant 1$, 方向取 x 轴正向, 则 $\Sigma+\Sigma_1$ 围成闭区域

$$V: 0\leqslant x\leqslant 1, y^2+z^2\leqslant x$$

易知 $\iint_{\Sigma_1} 2(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{y^2+z^2\leqslant 1} 2(1+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\pi$, 因此结合高斯公式可知

$$I=\iint_{\Sigma+\Sigma_1} 2(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\pi=\iiint_V (2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2\pi$$

而由对称性可知 $\iiint_V y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$, 于是

$$I=\iiint_V 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2\pi=\int_0^1\mathrm{d}x\iint_{y^2+z^2\leqslant x}2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2\pi=\int_0^1 2\pi x\mathrm{d}x-2\pi=-\pi$$

3. 已知 $\varphi(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+tx)}{x(1+x)}\mathrm{d}x$, 求 $\varphi(1)$.

解: 【法 1】记函数 $f(x,t)=\frac{\ln(1+tx)}{x(1+x)}$, 显然 $f(x,t)$ 在 $(0,+\infty)\times[0,1]$ 上连续, 且

$$|f(x,t)|\leqslant\frac{\ln(1+x)}{x(1+x)}, \forall t\in[0,1]$$

利用比较判别法的极限形式易知 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x$ 收敛, 因此 $\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[0,1]$ 一致收敛, 对应 $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 另外, 明显 $f(x,t)$ 关于 t 存在连续的偏导数, 且任取 $a\in(0,1)$, 有

$$|f_t(x,t)|=\frac{1}{(1+x)(1+tx)}\leqslant\frac{1}{(1+x)(1+ax)}, \forall x\in(0,+\infty), \forall t\in[a,1]$$

其中反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)(1+ax)}\mathrm{d}x$ 收敛, 因此 $\int_0^{+\infty} f_t(x,t)\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[a,1]$ 一致收敛, 那么 $\varphi(t)$ 在 $[a,1]$ 上可导, 且当 $t\in[a,1)$ 时, 有

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=\int_0^{+\infty} f_t(x,t)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{t}{(t+tx)(1+tx)}\mathrm{d}x\\&=\frac{t}{1-t}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t+tx}-\frac{1}{1+tx}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{1-t}\ln\frac{t+tx}{1+tx}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{\ln t}{1-t}\end{aligned}$$

由 a 的任意性可知 $\varphi'(t)=-\frac{\ln t}{1-t}, t\in(0,1)$. 而已知 $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\varphi(0)=0$, 因此

$$\varphi(1)=\varphi(1)-\varphi(0)=\lim_{\beta\to1^-}\varphi(\beta)-\lim_{\alpha\to0^+}\varphi(\alpha)=\lim_{\substack{\alpha\to0^+\\ \beta\to1^-}}\int_\alpha^\beta\varphi'(t)\mathrm{d}t=-\lim_{\substack{\alpha\to0^+\\ \beta\to1^-}}\int_\alpha^\beta\frac{\ln t}{1-t}\mathrm{d}t$$

而对任意的 $[\alpha,\beta]\subseteq(0,1)$, 明显 $\sum_{n=0}^\infty t^n\ln t$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛于 $\frac{\ln t}{1-t}$, 因此由逐项积分定理可知

$$\varphi(1)=-\lim_{\substack{\alpha\to0^+\\ \beta\to1^-}}\int_\alpha^\beta\left(\sum_{n=0}^\infty t^n\ln t\right)\mathrm{d}t=-\lim_{\substack{\alpha\to0^+\\ \beta\to1^-}}\sum_{n=0}^\infty\int_\alpha^\beta t^n\ln t\mathrm{d}t$$

利用分部积分易知 $\int_0^1 t^n\ln t\mathrm{d}t=-\frac{1}{(n+1)^2}$, 而对任意的 $\alpha,\beta\in(0,1)$, 有

$$\left|\int_\alpha^\beta t^n\ln t\mathrm{d}t\right|\leqslant-\int_0^1 t^n\ln t\mathrm{d}t=\frac{1}{(n+1)^2}$$

其中 $\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(n+1)^2}$ 收敛, 因此 $\sum_{n=0}^\infty\int_\alpha^\beta t^n\ln t\mathrm{d}t$ 关于 $\alpha,\beta\in(0,1)$ 一致收敛, 那么利用逐项取极限定理可得

$$\varphi(1)=-\sum_{n=0}^\infty\lim_{\substack{\alpha\to0^+\\ \beta\to1^-}}\int_\alpha^\beta t^n\ln t\mathrm{d}t=-\sum_{n=0}^\infty\int_0^1 t^n\ln t\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

【法 2】对任意闭区间 $[a,b]\subset(0,+\infty)$, 有 $a\leqslant t\leqslant b$, 0 点不是瑕点. 注意到 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}=0$, 所以 $\exists C>0$, 使得 $\ln(1+x)\leqslant C\sqrt{x},(x\geqslant0)$, 因此,

$$\left|\frac{\ln(1+tx)}{x(1+x)}\right|\leqslant\frac{C\sqrt{tx}}{x(1+x)}=\frac{C\sqrt{t}}{\sqrt{x}(1+x)}\leqslant\frac{C\sqrt{b}}{\sqrt{x}(1+x)}$$

而 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$ 收敛. 由 Weierstrass 判别法, 积分 $\varphi(t)$ 在 $t\in[a,b]$ 上一致收敛, 从而在 $t>0$ 上内闭一致收敛. 其余解法同解法一.

三、 1. 已知 $p,q>0$, 且 $\frac1p+\frac1q=1$, 求证: 对任意正数 x_1,x_2, 有 $x_1x_2\leqslant\frac1p x_1^p+\frac1q x_2^q$.

证明: 因为 $f(x)=-\ln x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的下凸函数, 由加权的 Jensen 不等式知

$$-\ln\left(\frac1p x^p+\frac1q y^q\right)\leqslant-\left(\frac1p\ln(x^p)+\frac1q\ln(y^q)\right).$$

于是,

$$\ln\left(\frac1p x^p+\frac1q y^q\right)\geqslant(\ln x+\ln y)=\ln(xy).$$

结合 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增函数, 所以 $\frac1p x^p+\frac1q y^q\geqslant xy$.

2. $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可微, 且 $f(x)>0$, $M=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|<+\infty$. 证明:

$$(f'(x))^2\leqslant2Mf(x),\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

证明: 首先若 $M=0$, 则 $f''(x)=0$, $f'(x)$ 为常值函数, $f(x)$ 为一次函数, 再结合 $f(x)>0$ 可知 $f(x)$ 为常值函数, 此时结论显然成立. 下面考虑 $M>0$ 的情况：若存在 $x_0\in(-\infty,+\infty)$, 满足 $\left(f'(x_0)\right)^2>$

$2Mf(x_0)$, 构造二次函数

$$g(h)=\frac{1}{2}Mh^2+f'(x_0)h+f(x_0), h\in(-\infty,+\infty).$$

则有判别式 $\Delta=\left(f'(x_0)\right)^2-2Mf(x_0)>0$, 因此存在 $h_0\in(-\infty,+\infty)$, 使得

$$g(h_0)=\frac{1}{2}Mh_0^2+f'(x_0)h_0+f(x_0)<0.$$

而根据 Taylor 定理, 存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$, 使得

$$f(x_0+h_0)=f(x_0)+f'(x_0)h_0+\frac{1}{2}f''(\xi)h_0^2\leqslant g(h_0)<0.$$

这与 $f(x)>0$ 相矛盾. 因此

$$\left(f'(x)\right)^2\leqslant 2Mf(x), x\in(-\infty,+\infty).$$

3. 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 并且满足对于 $i=0,1,2$, 有 $\displaystyle\int_a^b x^i f(x)\mathrm{d}x=0$. 求证: 存在三个不同的数 $x_1,x_2,x_3\in(a,b)$, 使得 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$.

证明: 若 $b>a$, 利用积分中值定理可知, 存在 $x_1\in(a,b)$, 使得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(x_1)(b-a)=0$, 所以 $f(x_1)=0$, 即

$$\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x=-\int_{x_1}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若函数仅有一个零点, 不妨设 $a<x<x_1$ 时, $f(x)>0$； $x_1<x<b$ 时, $f(x)<0$, 则有

$$\begin{aligned}\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x&=\int_a^{x_1} xf(x)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^b xf(x)\mathrm{d}x\\&<\int_a^{x_1} x_1f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^b x_1f(x)\mathrm{d}x=x_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

与题设矛盾, 故至少存在两个零点 $x_2,x_1,x_2\neq x_1$, 使得 $f(x_2)=0$.

若函数 $f(x)$ 仅有 x_1,x_2 两个零点, 不妨设: $x\in[a,x_1)$ 时, $f(x)>0$; $x\in(x_1,x_2)$ 时, $f(x)<0$; $x\in(x_2,b]$ 时, $f(x)>0$, 则

$$(x-x_1)(x_2-x)f(x)\leqslant 0,$$

从而 $\displaystyle\int_a^b(x-x_1)(x_2-x)f(x)\mathrm{d}x<0$. 但是根据题设有

$$\int_a^b(x-x_1)(x_2-x)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b[-x^2-x_1x_2+(x_1+x_2)x]f(x)\mathrm{d}x=0.$$

产生矛盾, 所以原函数至少存在三个不同的零点.

4. α 是正数, 判断函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^{\alpha}\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是否一致收敛.

解: 记 $u_n(x)=x^{\alpha}\mathrm{e}^{-nx}$, 有

$$u_n'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-nx}-nx^{\alpha}\mathrm{e}^{-nx}=(\alpha-nx)x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-nx}.$$

由此可知 $u_n(x)$ 在 $\left(0,\frac{\alpha}{n}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{\alpha}{n},+\infty\right)$ 上单调递减, 进而

$$0<u_n(x)\leqslant u_n\left(\frac{\alpha}{n}\right)=\frac{\alpha^{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha}}{n^{\alpha}}.$$

当 $\alpha>1$ 时, 级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha}}{n^{\alpha}}$ 收敛, 因此 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^{\alpha}\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛. 而当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时, 记

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}u_k(x)=x^{\alpha}\frac{1-\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}.$$

显然 $\{S_n(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$ 上收敛于 $S(x)=\dfrac{x^\alpha}{1-\mathrm{e}^{-x}}$. 注意到对任意的正整数 n, 利用等价无穷小替换, 有

$$\lim_{x\to 0^+} S_n(x)=\lim_{x\to 0^+} x^\alpha\cdot\frac{(n+1)x}{x}=0.$$

若 $\{S_n(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛于 $S(x)$, 则应有

$$\lim_{x\to 0^+} S(x)=\lim_{x\to 0^+}\lim_{n\to\infty} S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 0^+} S_n(x)=0.$$

而实际上利用等价无穷小替换可知

$$\lim_{x\to 0^+} S(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^\alpha}{x}=\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1}\neq 0.$$

因此 $\{S_n(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛于 $S(x)$, 即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时或者考虑部分和余项

$$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)=x^\alpha\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$$

要判断一致收敛性, 需要研究 $\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|R_n(x)|$ 是否趋于零. 当 $0<\alpha<1$ 时, $x^\alpha\dfrac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\to+\infty$, 而当 $\alpha=1$ 时, $x\dfrac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\to 1$, 因此余项上确界不趋于零.

5. 已知 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2<1$ 上三阶连续可导, 并且 $f(0,0)=0$, 求证: 存在二阶连续可微函数 $g_1(x,y), g_2(x,y)$, 使得 $f(x,y)=xg_1(x,y)+yg_2(x,y)$.

证明: 由于 f 在 $x^2+y^2<1$ 上三阶连续可导且 $f(0,0)=0$, 由带积分余项的 Taylor 公式可得:

$$f(x,y)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(tx,ty)\mathrm{d}t=\int_0^1\left[xf_x(tx,ty)+yf_y(tx,ty)\right]\mathrm{d}t$$

令

$$g_1(x,y)=\int_0^1 f_x(tx,ty)\mathrm{d}t,\quad g_2(x,y)=\int_0^1 f_y(tx,ty)\mathrm{d}t$$

则显然有

$$f(x,y)=xg_1(x,y)+yg_2(x,y)$$

现在证明 g_1,g_2 是二阶连续可微的. 由于 f 三阶连续可导, 故 f_x 和 f_y 是二阶连续可导的. 考虑 g_1 :

$$g_1(x,y)=\int_0^1 f_x(tx,ty)\mathrm{d}t$$

这是一个含参变量积分 (参数为 x,y), 被积函数关于 x,y 是二阶连续可导的 (因为 f_x 是二阶连续可导), 且积分区间有限, 因此 g_1 关于 x,y 是二阶连续可导的（可以通过在积分号下求导来验证）. 同理, g_2 也是二阶连续可导的.

因此, 我们构造出了满足要求的 g_1 和 g_2.

6. 求 (a,b) 的两个区域, 使得 $f_{a,b}(x,y)=ay^2+bx$ 在约束条件 $x^2+y^2=1$ 下分别有两个和四个临界点.

解: 构造 Lagrange 函数 $L(x,y,\lambda)=ay^2+bx+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$, 考虑方程组

$$\begin{cases} L_x=b+2\lambda x=0\\ L_y=2ay+2\lambda y=0\\ L_\lambda=x^2+y^2-1=0\end{cases}\tag{12.1}$$

对于第二个方程, 有 $y=0$ 或 $\lambda=-a$. 若 $y=0$, 代入到第三个方程可知 $x=\pm1$, 即 $(\pm1,0)$ 为方程组式(12.1)关于 (x,y) 的两个解. 若 $\lambda=-a$, 将其代入到第一个方程, 有 $b-2ax=0$, 若要求 $a\neq 0$, 则

$x = \dfrac{b}{2a}$, 同时根据第三个方程, 有 $|x| = \left|\dfrac{b}{2a}\right| \leqslant 1$, 也就是 $|b| \leqslant 2|a|$. 为此, 可以取

$$D_1 = \{(a,b) \mid a > 0, b > 2a\}$$
$$D_2 = \{(a,b) \mid a > 0, 0 < b < 2a\}$$

在 D_1 上, 方程组式(12.1)关于 (x,y) 仅有两个解 $(\pm 1, 0)$,
在 D_2 上, 方程组式(12.1)关于 (x,y) 有四个解, 分别为 $(\pm 1, 0)$ 和 $\left(\dfrac{b}{2a}, \pm\sqrt{1-\dfrac{b^2}{4a^2}}\right)$.

西安交通大学 2025 年数学分析试卷

一、 1. 设 $x_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=$ ____.

解: 计算可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n}{n}}\\&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n=1.\end{aligned}$$

2. 设 $f(x)=x^2\mathrm{e}^x$, 则 $f^{(10)}(0)=$ ____.

解: 【法 1】利用 Leibniz 求导公式:

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)=(x^2\mathrm{e}^x)^{(n)}&=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^2)^{(k)}(\mathrm{e}^x)^{(n-k)}\\&=C_n^0x^2(\mathrm{e}^x)^{(n)}+C_n^12x(\mathrm{e}^x)^{(n-1)}+C_n^22(\mathrm{e}^x)^{(n-2)}\\&=C_n^0x^2\mathrm{e}^x+2C_n^1x\mathrm{e}^x+2C_n^2\mathrm{e}^x.\end{aligned}$$

令 $x=0,n=10$ 可得 $f^{(10)}(0)=2C_{10}^2=2\cdot\dfrac{10!}{8!\cdot 2!}=2\times 45=90.$

【法 2】因为 $\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, 所以 $f(x)=x^2\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}}{n!}$. 利用幂级数的系数唯一性可知,

$$f^{(10)}(0)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!}\right)^{(10)}\Bigg|_{x=0}=\left(\frac{x^{10}}{8!}\right)^{(10)}\Bigg|_{x=0}=\frac{10!}{8!}=90.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^{x^2}+1}{2^x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ____.

解: 【法 1】取对数后使用 L'Hôpital 法则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^{x^2}+1}{2^x+1}\right)^{\frac{1}{x}}&=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{2^{x^2}+1}{2^x+1}\right)\right\}\\&=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(2^{x^2}+1\right)-\ln\left(2^x+1\right)}{x}\right\}\\&=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2^{x^2}+1}\cdot 2^{x^2}(\ln 2)\cdot 2x-\frac{1}{2^x+1}\cdot 2^x\cdot\ln 2\right)\right\}\\&=\exp\left(0-\frac{1}{2}\cdot 2^0\cdot\ln 2\right)=\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

【法 2】取对数后使用 Lagrange 中值定理.

$$\frac{\ln\left(2^{x^2}+1\right)-\ln\left(2^x+1\right)}{2^{x^2}-2^x}=\frac{1}{\xi+1},\quad \xi\text{介于}2^x\text{与}2^{x^2}\text{之间},$$

代入原极限可得

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\left(\frac{2^{x^2}+1}{2^x+1}\right)^{\frac{1}{x}} &= \exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(2^{x^2}+1\right)-\ln\left(2^x+1\right)}{x}\right\} \\
&= \exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(2^{x^2}+1\right)-\ln\left(2^x+1\right)}{2^{x^2}-2^x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{2^{x^2}-2^x}{x}\right\} \\
&= \exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{1}{\xi+1}\left[\lim_{x\to0}\frac{2^{x^2}-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}\right]\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to0}\frac{x^2\ln2}{x}-\lim_{x\to0}\frac{x\ln2}{x}\right]\right\} = \exp\left\{\frac{-\ln2}{2}\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

【法 3】利用重要极限的结论.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\left(\frac{2^{x^2}+1}{2^x+1}\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to0}\left(\frac{2^{x^2}+1-1+1}{2^x+1}\right)^{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to0}\left(\frac{2^{x^2}-2^x}{2^x+1}+1\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{2^{x^2}-2^x}{x\left(2^x+1\right)}\right\} \\
&= \exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{2^{x^2}-2^x}{2x}\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{2^{x^2}-1}{2x}-\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{2x}\right\} \\
&= \exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{x^2\ln2}{2x}-\lim_{x\to0}\frac{x\ln2}{2x}\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x =$ ____.

解: 令 $u=\frac{\pi}{2}-x$, 则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$, 所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^0\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right)\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2}-u\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos u)\mathrm{d}u.$$

利用二倍角公式 $\sin(2x)=2\sin x\cos x$, 可得

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x\cos x)\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln(2\sin x\cos x)-\ln2)\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(2x))\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln2\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(2x))\mathrm{d}x-\frac{\pi\ln2}{4}.
\end{aligned}$$

令 $v=2x$, 则 $\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}v$, 所以

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin v)\frac{1}{2}\mathrm{d}v-\frac{\pi\ln2}{4} \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\ln(\sin v)\mathrm{d}v-\frac{\pi\ln2}{4} \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin v)\mathrm{d}v+\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin v)\mathrm{d}v-\frac{\pi\ln2}{4}.
\end{aligned}$$

再令 $w = v - \frac{\pi}{2}$, 则 $\mathrm{d}w = \mathrm{d}v$, 所以

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin v)\mathrm{d}v + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos w)\mathrm{d}w - \frac{\pi\ln 2}{4} \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin v)\mathrm{d}v + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin w)\mathrm{d}w - \frac{\pi\ln 2}{4} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin v)\mathrm{d}v - \frac{\pi\ln 2}{4}.\end{aligned}$$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin v)\mathrm{d}v - \frac{\pi\ln 2}{4}$. 即 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\mathrm{d}x = -\frac{\pi\ln 2}{2}$.

5. 函数 $f(x,y) = x^3 - x^2 - xy + y^2$ 的极值点为____.

解: 令 $\begin{cases} f'_x(x,y) = 3x^2 - 2x - y = 0 \\ f'_y(x,y) = -x + 2y = 0 \end{cases}$, 由第 2 个方程得 $x = 2y$,

将其代入第 1 个方程可得 $(12y-5)y = 0$, 解得驻点坐标为 $(0,0)$ 和 $\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{12}\right)$, 再求二阶偏导数:

$$\begin{cases} A = f''_{xx}(x,y) = 6x - 2 \\ B = f''_{xy}(x,y) = -1 \\ C = f''_{yy}(x,y) = 2 \end{cases}$$

所以

$$B^2 - AC = (-1)^2 - (6x-2)\cdot 2 = -12x + 5$$

当 $B^2 - AC = -12x + 5 < 0$ 时, 即 $x > \frac{5}{12}$ 时, 函数有极值. 所以只有当 $x = \frac{5}{6}$ 时, 函数才取极值点.

6. 已知

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

则 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) =$ ____.

解: 利用偏导数定义可知,

$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0, \\ f'_y(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = 0. \end{aligned}$$

当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时, 有

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= y\left[1\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + x\cdot\frac{2x\cdot(x^2+y^2)-(x^2-y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\right] \\ &= y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right], \\ f'_y(x,y) &= x\left[1\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + y\cdot\frac{-2y\cdot(x^2+y^2)-(x^2-y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\right] \\ &= x\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]. \end{aligned}$$

再利用偏导数定义可知,

$$\begin{aligned} f''_{xy}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{-y^2}{y^2}\right) = -1 \\ f''_{yx}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = 1 \end{aligned}$$

所以 $f''_{xy}(0,0)+f''_{yx}(0,0)=-1+1=0$.

7. Laplace 算子 $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 在极坐标变换 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $(0\leqslant\theta<2\pi)$ 下的表达式为 ____.

解: 由题意可以计算:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial r}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\\
\frac{\partial f}{\partial \theta}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=-\frac{\partial f}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial y}r\cos\theta\\
\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}&=\cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)+\sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\\
&=\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}&=\left(-r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}-r\sin\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)\right.\\
&\quad\left.+r\cos\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\right)\\
&=-r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}+r^2\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r}$.

8. $(\partial\mathbb{Q}^2)^\circ=$ ____.

解: $(\partial\mathbb{Q}^2)^\circ=\mathbb{R}^2$. 这是由于有理数在实数中稠密, 所以 $\overline{\mathbb{Q}^2}=\mathbb{R}^2$.

因为任何开集都包含无理点, 因此 $\mathbb{Q}^2$ 的内部是空集, 即 $\left(\mathbb{Q}^2\right)^\circ=\varnothing$.

所以 $\partial\mathbb{Q}^2=\overline{\mathbb{Q}^2}\backslash\left(\mathbb{Q}^2\right)^\circ=\mathbb{R}^2\backslash\varnothing=\mathbb{R}^2$.

最后, 因为 $\mathbb{R}^2$ 是开集, 从而 $\mathbb{R}^2$ 的内部是它自己, 即 $\left(\mathbb{R}^2\right)^\circ=\mathbb{R}^2$. 所以 $\left(\partial\mathbb{Q}^2\right)^\circ=\left(\mathbb{R}^2\right)^\circ=\mathbb{R}^2$.

9. $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}(x^2\sin y+x\ln(1+y^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ____.

解: 利用奇偶性可知,

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}\left(x^2\sin y+x\ln(1+y^2)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}x^2\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}x\ln(1+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

10. 设 C 为正向心脏线 $r=1+\cos\theta$, 积分 $\displaystyle\oint_C(x+y^2)\mathrm{d}x+(y+x^2)\mathrm{d}y=$ ____.

解: 心脏线 $r=1+\cos\theta$ 为封闭曲线, 令

$$P(x,y)=x+y^2,\quad Q(x,y)=y+x^2,$$

则由 Green 公式可知,

$$\begin{aligned}
I&=\oint_C\left(x+y^2\right)\mathrm{d}x+\left(y+x^2\right)\mathrm{d}y\\
&=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$, 则

$$\begin{aligned}
I&=2\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint)D_{\rho\theta}=4\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^{1+\cos\theta}r\cos\theta r\mathrm{d}r\\
&=\frac{4}{3}\int_0^\pi\cos\theta(1+\cos\theta)^3\mathrm{d}\theta=\frac{5\pi}{2}.
\end{aligned}$$

二、 1. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 证明: $f(x)=O(x)\ (x\to+\infty)$.

证明: 由于 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 所以对于 $\varepsilon=1$, 存在 $\delta>0$, 对任意的 $x',x''\in[0,+\infty)$, 当 $\left|x'-x''\right|\leqslant\delta$ 时, 有 $\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|\leqslant 1$. 而 $f(x)$ 在 $[0,\delta]$ 上连续, 从而有界, 不妨设正数 M 满足

$|f(x)| \leqslant M, x \in [0,\delta]$, 对任意的 $x > \delta$, 取 $n_x = \left[\frac{x}{\delta}\right]$, 那么 $x - n_x\delta \in [0,\delta)$, 因此

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n_x-1} |f(x-k\delta) - f(x-(k+1)\delta)| + |f(x-n_x\delta)| \leqslant n_x + M \leqslant \frac{x}{\delta} + M.$$

从而

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{\delta} + \frac{M}{x} \to \frac{1}{\delta}(x \to +\infty).$$

这意味着 $f(x) = O(x)(x \to +\infty)$.

2. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-1,1)$ 上收敛, 且 $a_n \geqslant 0\ (\forall n \geqslant 0)$. 又设

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S \in \mathbb{R}.$$

证明: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛于 S.

证明: 令 $s_N = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n$. 由于 $a_n \geq 0$, 序列 $\{s_N\}$ 是单调递增的. 对于任意 $x \in [0,1)$, 有:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \geqslant \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \quad (\text{因为} a_n \geqslant 0.)$$

令 $x \to 1^-$, 得:

$$S = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \geqslant \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n = s_N$$

所以对任意 N, 有 $s_N \leqslant S$. 因此 $\{s_N\}$ 是单调递增且有上界 (S), 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛. 记其和为 L, 则 $L \leqslant S$.

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得:

$$L - s_N < \varepsilon$$

又因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = 1$ 处左连续（由 Abel 定理）, 且 $a_n \geqslant 0$, 所以对任意 $x \in [0,1)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$$

但已知 $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S$, 所以 $S \leqslant L$. 结合 $L \leqslant S$, 得 $L = S$.

3. 设 $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}\ (\forall n \geqslant 1)$, 证明: $\{x_n\}$ 收敛.

证明: 不难发现:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x_n &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \left(2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \left(\frac{2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}}{(n+1) - n}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{\xi}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0, \quad \xi \in (n, n+1).
\end{aligned}$$

所以 $x_{n+1}-x_n<0,(\forall n\in(n,n+1))$, 所以 $\{x_n\}$ 单调递减, 且

$$\begin{aligned} x_n &= 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k}}\mathrm{d}x-2\sqrt{n}>\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x-2\sqrt{n} \\ &= \int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x-2\sqrt{n}=2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}-1>-1 \end{aligned}$$

所以 $\{x_n\}$ 有下界, 由单调有界收敛准则可知,$\{x_n\}$ 收敛.

4. 设 $\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,\ a>0$. 证明:

(1). $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a),\ a>0$.

(2). $\ln\Gamma(a)$ 是下凸函数.

证明: 【法 1】(1) 注意到事实 $\int_0^{+\infty}x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 在 $a>0$ 时收敛、连续, 且有各阶连续导数, 根据分部积分公式, 有

$$\Gamma(a+1)=\int_0^{+\infty}x^a\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x^a\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-x}\right)=-x^a\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+a\int_0^{+\infty}x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=a\Gamma(a)$$

(2) 记 $f(a)=\ln\Gamma(a)$, 则有 $f'(a)=\dfrac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$, 那么

$$f''(a)=\frac{\Gamma(a)\Gamma''(a)-[\Gamma'(a)]^2}{\Gamma^2(a)}$$

其中

$$\begin{aligned} \left[\Gamma'(a)\right]^2 &= \left(\int_0^{+\infty}x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x\right)^2 \\ \Gamma(a)\Gamma''(a) &= \left(\int_0^{+\infty}x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{+\infty}x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\ln^2x\mathrm{d}x\right) \end{aligned}$$

而对任意的 $u>0$, 利用 Schwarz 不等式可知

$$\left(\int_0^u x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^u x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\int_0^u x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\ln^2x\mathrm{d}x$$

那么令 $u\to+\infty$, 有 $\left[\Gamma'(a)\right]^2\leqslant\Gamma(a)\Gamma''(a)$, 对应 $f''(a)\geqslant0$, 因此 $f(a)$ 是凸函数.

【法 2】(1) 注意到

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty}x^\alpha\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x^\alpha\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x}) \\ &= -\left[x^\alpha\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}(x^\alpha)\right],(\forall\alpha>0) \\ &= \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cdot\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x=\alpha\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\alpha\Gamma(\alpha) \end{aligned}$$

即证出 $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha),\alpha>0$.

(2)【法 1】因为 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,\alpha>0$, 所以

$$\ln(\Gamma(\alpha))=\ln\left(\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right),\alpha>0$$

又因为 $\Gamma'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x$, 所以

$$(\ln(\Gamma(\alpha)))'=\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}=\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x},$$

继续求二阶导数：

$$(\ln(\Gamma(\alpha)))''=\left(\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)'=\frac{\Gamma''(\alpha)\Gamma(\alpha)-\Gamma'(\alpha)\Gamma'(\alpha)}{(\Gamma(\alpha))^2}.$$

又因为 $\Gamma''(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^2\mathrm{d}x$, 所以

$$(\ln(\Gamma(\alpha)))''=\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^2\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x-\left(\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x\right)^2}{\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right)^2}$$

令 $f(x)=\dfrac{x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(\alpha)}$, 因为

$$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}x=\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{\Gamma(\alpha)}=\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}=1.$$

所以 $f(x)=\dfrac{x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(\alpha)}$ 可以看作是一个概率密度函数, 又注意到

$$E[(\ln x)^2]=\int_0^{+\infty}(\ln x)^2\frac{x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}x=\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^2\mathrm{d}x}{\Gamma(\alpha)},$$

$$[E(\ln x)]^2=\left(\int_0^{+\infty}(\ln x)\frac{x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}x\right)^2=\frac{\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x\right)^2}{(\Gamma(\alpha))^2},$$

则

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(\ln x)&=E[(\ln x)^2]-[E(\ln x)]^2\\&=\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^2\mathrm{d}x}{\Gamma(\alpha)}-\frac{\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x\right)^2}{(\Gamma(\alpha))^2}\\&=\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^2\mathrm{d}x-\left(\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x\right)^2}{(\Gamma(\alpha))^2}\\&=\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^2\mathrm{d}x-\left(\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x\right)^2}{\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right)^2}.\end{aligned}$$

由于方差总是非负的, 所以 $(\ln(\Gamma(\alpha)))''\geqslant 0$. 所以 $\ln(\Gamma(\alpha))$ 是下凸函数.

【法 2】设 $0 \leqslant p, q \leqslant 1, p+q=1, a, b>0$. 所以, 我们可以利用无穷积分的 Hölder 不等式可知,

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{p}(a) \Gamma^{q}(b) & =\left(\int_{0}^{+\infty} x^{a-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{~d} x\right)^{p}\left(\int_{0}^{+\infty} x^{b-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{~d} x\right)^{q} \\
& \geqslant \int_{0}^{+\infty}\left(x^{a-1} \mathrm{e}^{-x}\right)^{p}\left(x^{b-1} \mathrm{e}^{-x}\right)^{q} \mathrm{~d} x=\int_{0}^{+\infty} x^{p a-p} \mathrm{e}^{-p x} x^{q b-q} \mathrm{e}^{-q x} \mathrm{~d} x \\
& =\int_{0}^{+\infty} x^{p a-p+q b-q} \mathrm{e}^{-p x-q x} \mathrm{~d} x=\int_{0}^{+\infty} x^{p a+q b-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{~d} x \\
& =\Gamma(p a+q b)
\end{aligned}
$$

两边取对数可得 $\ln(\Gamma^{p}(a) \Gamma^{q}(b)) \geqslant \ln(\Gamma(p a+q b))$, 自然

$$
p \ln (\Gamma(a))+q \ln (\Gamma(b)) \geqslant \ln (\Gamma(p a+q b)) .
$$

若记作 $g(x)=\ln (\Gamma(x))$, 则 $p \cdot g(a)+q \cdot g(b) \geqslant g(p a+q b)$, 则由下凸函数的定义可知：$\ln (\Gamma(\alpha))$ 是下凸函数.

5. 设 E 是 $\mathbb{R}^{n}$ 中的开集, 函数 $\boldsymbol{f}: E \rightarrow \mathbb{R}^{m}$ 与 $\boldsymbol{g}: E \rightarrow \mathbb{R}^{m}$ 均可微. 设 $h(\boldsymbol{x})=\langle\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\rangle$ 为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 与 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 的内积, 证明: $h(\boldsymbol{x})$ 在 E 上可微, 且对任意的 $\boldsymbol{x} \in E$, 有

$$
h^{\prime}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{g}^{\prime}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}^{\prime}(\boldsymbol{x}) .
$$

证明: 因为 $h(\boldsymbol{x})=\langle\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\rangle$ 为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 与 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 的内积, 所以 $h(\boldsymbol{x})=\langle\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\rangle=\sum_{i=1}^{m} f_{i}(\boldsymbol{x}) g_{i}(\boldsymbol{x})$. 其中 $f_{i}(\boldsymbol{x})$ 和 $g_{i}(\boldsymbol{x})$ 分别是 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 的第 i 个分量, 由于 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ 都可微, 所以每个分量 $f_{i}(\boldsymbol{x})$ 和 $g_{i}(\boldsymbol{x})$ 也是可微的, 两个可微函数的乘积也是可微的, 所以 $h(\boldsymbol{x})$ 作为这些可微函数的和, 它也是可微的, 所以 $h(\boldsymbol{x})$ 在 E 上可微, 又因为

$$
\frac{\partial h}{\partial x_{j}}=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}} g_{i}+f_{i} \frac{\partial g_{i}}{\partial x_{j}}\right) .
$$

梯度可写成:$\nabla h(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{m}(\nabla f_{i}(\boldsymbol{x}) g_{i}(\boldsymbol{x})+f_{i}(\boldsymbol{x}) \nabla g_{i}(\boldsymbol{x}))$. 也可使用 Jacobi 矩阵表示为 $\nabla h(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$. 其中 $\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 分别是 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 的 Jacobi 矩阵. 这里的记号 $\boldsymbol{f}^{\prime}(\boldsymbol{x})$ 就是 $\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

6. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{2}$ 为非空的连通开集, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, 且

$$
f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\pi r^{2}} \int_{B_{r}(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{y}) \mathrm{d} \boldsymbol{y}, \forall \overline{B_{r}(\boldsymbol{x})} \subset \Omega .
$$

这里 $B_{r}(\boldsymbol{x})$ 表示以 $\boldsymbol{x}$ 为中心, 半径为 r 的开圆盘. 证明: 若 f 在 Ω 上有最大值, 则 f 为常值函数.

证明: 【法 1】给定 $\Omega \subset \mathbb{R}^{2}$ 为非空的连通开集, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, 对 $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega$ 和足够小的 $r>0$, 这是为使得 $\forall \overline{B_{r}(\boldsymbol{x})} \subset \Omega$, 有

$$
f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\pi r^{2}} \int_{B_{r}(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{y}) \mathrm{d} \boldsymbol{y} .
$$

假设 f 在 Ω 上取得最大值为 M, 即存在某点 $\boldsymbol{x}_{0} \in \Omega$, 使得 $f(\boldsymbol{x}_{0})=M$, 且对于所有的 $\boldsymbol{x} \in \Omega$, 有 $f(\boldsymbol{x}) \leqslant M$. 再考虑最大值点的邻域：由于 Ω 是开集, 对于 $\boldsymbol{x}_{0}$, 存在 $r>0$, 使得 $\overline{B_{r}(\boldsymbol{x}_{0})} \subset \Omega$, 根据 f 的定义, 我们有

$$
M=f(\boldsymbol{x}_{0})=\frac{1}{\pi r^{2}} \int_{B_{r}(\boldsymbol{x}_{0})} f(\boldsymbol{y}) \mathrm{d} \boldsymbol{y} .
$$

由于 $f(\boldsymbol{y}) \leqslant M$ 对所有 $\boldsymbol{y} \in B_{r}(\boldsymbol{x}_{0})$ 成立, 可得

$$
M=\frac{1}{\pi r^{2}} \int_{B_{r}(\boldsymbol{x}_{0})} f(\boldsymbol{y}) \mathrm{d} \boldsymbol{y} \leqslant M .
$$

这意味着等式成立, 即对于所有的 $\boldsymbol{y} \in B_{r}(\boldsymbol{x}_{0})$, 有 $f(\boldsymbol{y})=M$. 由于 Ω 是连通的, 且 f 是连续的, 我们可以利用连通性和连续性的性质来扩展这个结果. 如果 Ω 中存在另一个点 $\boldsymbol{x}_{1}$, 使得 $f(\boldsymbol{x}_{1})<M$, 那么根据连续性可知, f 在 $\boldsymbol{x}_{0}$ 和 $\boldsymbol{x}_{1}$ 之间的路径上不能突然从 M 跳到小于 M 的值. 这与 f 在 $B_{r}(\boldsymbol{x}_{0})$ 中恒等于

M 矛盾！所以 f 必须在 Ω 上恒等于 M, 得证！

【法 2】第一步：证明 f 是调和函数

已知 f 连续, 且对任意以点 $P(x_0, y_0)$ 为中心、半径 r 的圆盘 $B_r(P) \subset \Omega$, 有：

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B_r(P)} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \tag{13.1}$$

目标：证明 $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$

令 $x = x_0 + \rho \cos\theta, y = y_0 + \rho \sin\theta$, 其中 $0 \leqslant \rho \leqslant r, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. 面积元素 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta$. 则重积分变为：

$$\iint_{B_r(P)} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \int_0^r f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta) \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta$$

代入(13.1)式：

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^r f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta) \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \tag{13.2}$$

定义函数：

$$\phi(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta) \mathrm{d}\theta$$

即 f 在圆周 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ 上的平均值. 则(13.2)式可写为：

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r 2\pi \phi(\rho) \rho \mathrm{d}\rho = \frac{2}{r^2} \int_0^r \phi(\rho) \rho \mathrm{d}\rho \tag{13.3}$$

将(13.3)式两边乘以 r^2 ：

$$r^2 f(x_0, y_0) = 2 \int_0^r \phi(\rho) \rho \mathrm{d}\rho$$

两边对 r 求导

$$2r f(x_0, y_0) = 2\phi(r) r$$

即：

$$\phi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) \mathrm{d}\theta = f(x_0, y_0) \tag{13.4}$$

这说明 f 在任意圆周上的平均值都等于中心点的函数值. 现在利用(13.4)式来证明 $\Delta f(x_0, y_0) = 0$. 考虑函数：

$$F(r) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{x^2+y^2=r^2} f(x_0 + x, y_0 + y) \mathrm{d}s$$

其中 $\mathrm{d}s$ 是弧长元素. 由于圆周参数方程为 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 故 $\mathrm{d}s = r\mathrm{d}\theta$, 所以：

$$F(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) \cdot r\mathrm{d}\theta = \phi(r) = f(x_0, y_0)$$

因此 $F(r)$ 是常数, 故其导数为零：

$$F'(r) = 0$$

另一方面, 可以计算 $F'(r)$

$$F'(r) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{x^2+y^2=r^2} \frac{\partial f}{\partial n} \mathrm{d}s$$

其中 $\dfrac{\partial f}{\partial n}$ 是外法向导数. 又由 Green 公式, 有：

$$\oint_{x^2+y^2=r^2} \frac{\partial f}{\partial n} \mathrm{d}s = \iint_{x^2+y^2 \leqslant r^2} \Delta f \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

因此：

$$F'(r) = \frac{1}{2\pi r} \iint_{x^2+y^2 \leqslant r^2} \Delta f \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 0$$

即：

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant r^2} \Delta f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

由于该积分对任意小的 $r > 0$ 都为零, 由积分中值定理, 必有：

$$\Delta f\,(x_0, y_0) = 0$$

因此 f 是调和函数.

第二步：极大值原理

设 $M = \max\limits_{(x,y)\in\Omega} f(x, y)$, 且存在点 $P\,(x_0, y_0) \in \Omega$ 使得 $f\,(x_0, y_0) = M$. 定义集合：

$$U = \{(x, y) \in \Omega : f(x, y) = M\}.$$

于是 U 非空（包含 $P\,(x_0, y_0)$ ）, U 是闭集（因为 f 连续）, 注意到对任意 $Q\,(x_1, y_1) \in U$, 取 $r > 0$ 使得闭圆盘 $\overline{B_r(Q)} \subset \Omega$. 由均值性质：

$$M = f\,(x_1, y_1) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B_r(Q)} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由于 $f(x, y) \leqslant M$ 处处成立, 上式成立当且仅当在 $B_r(Q)$ 上几乎处处 $f(x, y) = M$. 由连续性, 在整个 $B_r(Q)$ 上 $f(x, y) \equiv M$, 故 $B_r(Q) \subset U$, 因此 U 是开集. 由于 Ω 连通, 故 $U = \Omega$, 即 $f(x, y) \equiv M$ 在 Ω 上成立.

这里用到了拓扑空间的一个基本结论：

设 X 是一个拓扑空间, 那么以下两个命题等价

1. X 是连通的（不能分解为两个非空不相交开集的并）
2. X 中既开又闭的子集只有 $\varnothing$ 和 X 本身.

华东师范大学 2025 年数学分析试卷

一、 填空题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{2}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{n}\right)}=$ ________.

解: 【法 1】记作所求极限为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$, 考虑 Stolz 定理:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln a_n}{n}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln a_n-\ln a_{n-1}}{n-(n-1)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{2}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{n-2}{n-1}\right)\cdot\left(1+\frac{n-1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{2}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{n-2}{n-1}\right)}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n-1}{n}\right)=2.
\end{aligned}$$

【法 2】由 Wallis 公式: $\frac{\pi}{2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}$ 可知, 当 $n\to+\infty$ 时, 有等价无穷大: $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, 则

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{2}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{n}\right)}&=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot n}}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n-1)!!}{n!}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!!\cdot(2n-1)!!}{n!\cdot(2n)!!}}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!!}{n!}}\cdot\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n\cdot n!}{n!}}\cdot\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}}\\
&=2\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}}=2\cdot1=2.
\end{aligned}$$

引理 14.1 (Wallis 公式)

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{k\to+\infty}\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2\frac{1}{2k+1}.$$

证明: 【法 1】令 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$, 利用分部积分法可知,

$$\begin{aligned}
I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\mathrm{d}x(-\cos x)\\
&=\left[(-\cos x)\sin^{n-1}x\right]\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)(\sin^{n-1}x)\mathrm{d}x\\
&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot\cos^2 x\mathrm{d}x\\
&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x\\
&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\mathrm{d}x-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\\
&=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n
\end{aligned}$$

所以 $I_n+(n-1)I_n=(n-1)I_{n-2}=nI_n$, 所以 $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$.

利用递推法可知,$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & n=0\\ 1, & n=1\\ \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n=2k+1,k\in\mathbb{N}_+\\ \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n=2k\end{cases}$

又注意到 $0\leqslant\sin^{2k+1}x\leqslant\sin^{2k}x\leqslant\sin^{2k-1}x\leqslant 1,\left(x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$. 对上述不等式的两边同时从 0 到 $\dfrac{\pi}{2}$ 取定积分可得:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k+1}x\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k}x\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k-1}x\mathrm{d}x.$$

所以 $I_{2k+1}<I_{2k}<I_{2k-1}$, 所以

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}<\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$$

所以 $\dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\cdot\dfrac{(2k)!!}{(2k-1)!!}<\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\cdot\dfrac{(2k)!!}{(2k-1)!!}$, 那么

$$\frac{1}{2k+1}\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2<\frac{\pi}{2}<\frac{1}{2k}\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2.$$

由夹逼准则可知, $\lim\limits_{k\to+\infty}\left[\dfrac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2\dfrac{1}{2k+1}=\dfrac{\pi}{2}$.

【法 2】对于有限次代数方程 $b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n=0,b_n\neq 0$.

假如有 n 个不同的根 $k_1,k_2,k_3,\cdots,k_n$, 那么左边的多项式就可以表示为 k 线性因子乘积, 也就是说:

$$b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n=b_0\left(1-\frac{x}{k_1}\right)\left(1-\frac{x}{k_2}\right)\left(1-\frac{x}{k_3}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{k_n}\right)$$

比较这个恒等式两边 x 的同次幂的系数, 就可以得到根和系数的关系. 特别是偶数次方程 $a_0-a_1x^2+a_2x^4+\cdots+(-1)^na_nx^{2n}=0$ 有 $2n$ 个不相同的根: $\alpha_1,-\alpha_1,\alpha_2,-\alpha_2,\cdots,\alpha_n,-\alpha_n$, 则有

$$a_0-a_1x^2+a_2x^4+\cdots+(-1)^na_nx^{2n}=a_0\left(1-\frac{x^2}{\alpha_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\alpha_3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\alpha_n^2}\right)$$

我们比较二次项系数, 有 $a_1=a_0\left(\dfrac{1}{\alpha_1^2}+\dfrac{1}{\alpha_2^2}+\cdots+\dfrac{1}{\alpha_n^2}\right)$. 根据幂级数展开式, 在 $x\neq 0$ 时, 有 $\dfrac{\sin x}{x}=$

$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}+\cdots$. 对于无穷多项方程

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}+\cdots=0. \tag{14.1}$$

由于式(14.1)的根为：$\pm\pi,\pm2\pi,\pm3\pi,\pm4\pi,\pm5\pi,\pm6\pi,\cdots$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x}&=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}+\cdots\\&=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{(n\pi)^2}\right)\cdots\\&=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{(n\pi)^2}\right)\end{aligned}$$

所以 $\frac{\sin x}{x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{(n\pi)^2}\right)$, 即

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right). \tag{14.2}$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{n^2}$ 绝对收敛, 所以式(14.2)的无穷乘积是绝对收敛的. 那么

$$\frac{\pi x}{\sin(\pi x)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n^2-x^2}\right). \tag{14.3}$$

在式(14.2)中令 $x=\frac{1}{2}$, 可得

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^2n^2}{2^2n^2-1}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^2}{1\cdot3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot5}\cdot\frac{6^2}{5\cdot7}\cdots\frac{[2(n-1)]^2}{(2n-3)(2n-1)}\cdot\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^2}{1\cdot3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot5}\cdot\frac{6^2}{5\cdot7}\cdots\frac{[2(n-1)]^2}{(2n-3)(2n-1)}\cdot\frac{(2n)^2}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}\\&=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2(n-1)\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)\cdot(2n-1)}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}\\&=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}.\end{aligned}$$

所以 $\lim_{k\to+\infty}\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2\frac{1}{2k+1}=\frac{\pi}{2}$, 至此得证！

2. $\int_0^{\pi}\frac{x\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=$ __________.

解： 【方法二】作变换：$u=\pi-x$, 则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$, 所以

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{x\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x&=-\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-u)\sin^2(\pi-u)}{1+\cos^2(\pi-u)}\mathrm{d}u\\&=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin^2 u}{1+\cos^2 u}\mathrm{d}u-\int_0^{\pi}\frac{u\sin^2 u}{1+\cos^2 u}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi}\frac{x\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+2\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\tan^2 x}{\tan^2 x+2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令 $u=\tan\left(\frac{x}{2}\right), x=2\arctan u$, 则 $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u, \tan x=\frac{2u}{1-u^2}$, 则

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\tan^2 x}{\tan^2 x+2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\left(\frac{2u}{1-u^2}\right)^2}{\left(\frac{2u}{1-u^2}\right)^2+2}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u\\
&= 4\pi\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{[4u^2+2(1-u^2)^2](1+u^2)}\mathrm{d}u\\
&= 4\pi\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{2(1+u^4)(1+u^2)}\mathrm{d}u=2\pi\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{(1+u^4)(1+u^2)}\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{aligned}
\frac{u^2}{(1+u^4)(1+u^2)} &= \frac{Au^2+B}{1+u^4}+\frac{C}{1+u^2}=\frac{(Au^2+B)(1+u^2)+C(1+u^4)}{(1+u^4)(1+u^2)}\\
&= \frac{(A+C)u^4+(B+A)u^2+(B+C)}{(1+u^4)(1+u^2)}
\end{aligned}
$$

对比系数可得

$$
\begin{cases}
A+C=0\\
B+A=1\\
B+C=0
\end{cases}
$$

解得 $C=-\frac{1}{2}, A=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{2}$. 所以 $\frac{u^2}{(1+u^4)(1+u^2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{u^2+1}{1+u^4}-\frac{1}{1+u^2}\right)$, 那么

$$
\begin{aligned}
I &= 2\pi\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{(1+u^4)(1+u^2)}\mathrm{d}u=2\pi\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{u^2+1}{1+u^4}-\frac{1}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u\\
&= \pi\int_0^{+\infty}\frac{u^2+1}{1+u^4}\mathrm{d}u-\pi\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u=\pi\int_0^{+\infty}\frac{u^2+1}{1+u^4}\mathrm{d}u-\frac{\pi^2}{2}\\
&= \pi\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{u^2}}{\frac{1}{u^2}+u^2}\mathrm{d}u-\frac{\pi^2}{2}=\pi\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(u-\frac{1}{u}\right)^2+2}\mathrm{d}\left(u-\frac{1}{u}\right)-\frac{\pi^2}{2}\\
&= \pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{v^2+2}\mathrm{d}v-\frac{\pi^2}{2}=\pi\cdot\frac{\pi}{\sqrt{2}}-\frac{\pi^2}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\pi^2.
\end{aligned}
$$

【方法二】考虑积分:

$$
J=\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx
$$

由于被积函数是偶函数（$\sin^2 x$ 和 $\cos^2 x$ 都是偶函数）, 且周期为 π , 我们可以将积分区间扩展为 $[0,2\pi]$ 并除以 2:

$$
J=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx
$$

现在, 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, 则 $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}, \cos x=\frac{z+z^{-1}}{2}, \sin x=\frac{z-z^{-1}}{2i}$. 于是:

$$
\sin^2 x=\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2=-\frac{1}{4}\left(z-z^{-1}\right)^2=-\frac{1}{4}\left(z^2-2+z^{-2}\right)
$$

$$
\cos^2 x=\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(z+z^{-1}\right)^2=\frac{1}{4}\left(z^2+2+z^{-2}\right)
$$

所以:

$$
1+\cos^2 x=1+\frac{1}{4}\left(z^2+2+z^{-2}\right)=\frac{1}{4}\left(4+z^2+2+z^{-2}\right)=\frac{1}{4}\left(z^2+6+z^{-2}\right)
$$

因此, 被积函数:

$$
\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}=\frac{-\frac{1}{4}\left(z^2-2+z^{-2}\right)}{\frac{1}{4}\left(z^2+6+z^{-2}\right)}=-\frac{z^2-2+z^{-2}}{z^2+6+z^{-2}}
$$

所以：

$$J=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\left(-\frac{z^4-2z^2+1}{z^4+6z^2+1}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}=-\frac{1}{2\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{z^4-2z^2+1}{z\left(z^4+6z^2+1\right)}\mathrm{d}z$$

分解因式

$$z^4+6z^2+1=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$$

其中

$$z_1=\mathrm{i}(\sqrt{2}-1),\quad z_2=-\mathrm{i}(\sqrt{2}-1),\quad z_3=\mathrm{i}(\sqrt{2}+1),\quad z_4=-\mathrm{i}(\sqrt{2}+1)$$

单位圆内的极点：只有 z_1 和 z_2（因为 $|\sqrt{2}-1|<1, |\sqrt{2}+1|>1$）. 从而 $F(z)=\dfrac{z^4-2z^2+1}{z(z^4+6z^2+1)}$ 还有 $z=0$ 是一阶极点. 根据留数定理 (见复变函数与积分变换-包革军)

$$\oint_{|z|=1}\frac{z^4-2z^2+1}{z\left(z^4+6z^2+1\right)}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left(\operatorname{Res}[F(z),0]+\operatorname{Res}[F(z),z_1]+\operatorname{Res}[F(z),z_2]\right)=2\pi\mathrm{i}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

对于本题的积分可化成 $\dfrac{\pi}{2}J=\dfrac{\pi^2(\sqrt{2}-1)}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{a}{x}\right)^{x^2}=$ ____________.

解: 【法 1】利用重要极限的性质可知,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\cos\left(\frac{a}{x}\right)\right)^{x^2}&=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\cos\left(\frac{a}{x}\right)-1\right)^{x^2}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\cos\left(\frac{a}{x}\right)-1\right)^{\frac{1}{\cos\left(\frac{a}{x}\right)-1}\cdot\left(\cos\left(\frac{a}{x}\right)-1\right)\cdot x^2}\\&=\mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2\right)\cdot x^2}=\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}.\end{aligned}$$

【法 2】先算对数极限, 令 $u=\dfrac{1}{x}$, 则 $u\to 0$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x^2\ln\left(\cos\left(\frac{a}{x}\right)\right)&=\lim_{x\to\infty}x^2\left(\cos\left(\frac{a}{x}\right)-1\right)=\lim_{u\to0}\frac{\cos(au)-1}{u^2}\\&=-\lim_{u\to0}\frac{1-\cos(au)}{u^2}=-\lim_{u\to0}\frac{\frac{1}{2}(au)^2}{u^2}=-\frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\left(\dfrac{a}{x}\right)\right)^{x^2}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\left(\cos\left(\frac{a}{x}\right)\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}$.

【法 3】利用 $\cos x$(在 $x=0$ 处) 的 Taylor 展开公式可知,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\cos\left(\frac{a}{x}\right)\right)^{x^2}&=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)^{x^2}\\&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2}a^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}\end{aligned}$$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n}$ 是 ____________ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的 Fourier 级数.

解: 注意到周期为 2π 的周期函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数为：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right).$$

其中

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x, & (n=0,1,2,\cdots)\\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x, & (n=1,2,\cdots)\end{cases}$$

特别地, 如果 $f(x)$ 是奇函数, 则有 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$, 其中

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x,(n=1,2,\cdots).$$

对比 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n}$, 则 $b_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, 那么

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^{n-1}}{n}&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x=-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}(\cos(nx))\\
&=-\frac{2}{n\pi}\left[(f(x)\cos(nx))|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos(nx)\mathrm{d}(f(x))\right]\\
&=-\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n\cdot f(\pi)-f(0)-\int_0^{\pi} f'(x)\cos(nx)\mathrm{d}x\right]\\
&=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{2}{\pi}f(\pi)+\frac{2}{n\pi}f(0)+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} f'(x)\cos(nx)\mathrm{d}x\\
&=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{2}{\pi}f(\pi)+\frac{2}{n\pi}f(0)+\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi} f'(x)\mathrm{d}(\sin(nx))\\
&=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{2}{\pi}f(\pi)+\frac{2}{n\pi}f(0)-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi} f''(x)\sin(nx)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

所以 $\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[1-\frac{2}{\pi}f(\pi)\right]=\frac{2}{n\pi}f(0)-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi} f''(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$. 若 $f''(x)\equiv 0,(x\in(-\pi,\pi))$, 则 $\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[1-\frac{2}{\pi}f(\pi)\right]=\frac{2}{n\pi}f(0)$. 再设 $f(x)=Ax$, 则 $f(\pi)=A\pi$, $f(0)=0$, 所以 $\frac{(-1)^{n-1}}{n}(1-2A)=0$ 那么 $A=\frac{1}{2}$, 所以 $f(x)=\frac{x}{2}$, 满足题意!

5. 求和函数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!2^n}x^n=$ __________.

解: 令 $S(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}t^n$, 则

$$\begin{aligned}
S(t)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{(n-1)!}t^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n\\
&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}t^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n\\
&=t^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}+t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n\\
&=t^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n+t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n=(t^2+t+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n\\
&=(t^2+t+1)\mathrm{e}^t
\end{aligned}$$

令 $t=\frac{x}{2}$, 则 $S\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)\cdot\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.

注意到和函数:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!\cdot 2^n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!\cdot 2^n}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\cdot 2^n}x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!\cdot 2^n}x^n+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=S_1(x)+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$$

而 $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!\cdot 2^n}\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!\cdot 2^n}\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!\cdot 2^n}=\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, 且

$$S_1(x)=x\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n!\cdot 2^n}\right)'=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^{n-1}}{n!\cdot 2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n!\cdot 2^n}$$
$$=x\left(\frac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)'=x\cdot\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{4}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)=\frac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\frac{x^2}{4}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$$

所以

$$S(x)=S_1(x)+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=\frac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\frac{x^2}{4}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+1\right)\cdot\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

6. 由柱面坐标表示的曲面 $z=z(r,\theta)$, 其上任意一条光滑曲线的弧长微分 $\mathrm{d}s$ 满足 $\mathrm{d}s^2=$ ______$\mathrm{d}r^2+$ ______$r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta+$ ______$\mathrm{d}\theta^2$.

解: 微分几何曲线论中的曲线第一基本公式:

$$\mathrm{d}s^2=E\mathrm{d}r^2+2F\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta+G\mathrm{d}\theta^2$$

令 $u=(r,\theta,z(r,\theta))$, 则 $\frac{\partial u}{\partial r}=\left(1,0,\frac{\partial z}{\partial r}\right),\frac{\partial u}{\partial \theta}=\left(0,1,\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)$, 其中

$$E=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}=\left(1,0,\frac{\partial z}{\partial r}\right)\cdot\left(1,0,\frac{\partial z}{\partial r}\right)=1+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2$$
$$F=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}=\left(1,0,\frac{\partial z}{\partial r}\right)\cdot\left(0,1,\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)=\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$
$$G=\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}=\left(0,1,\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)\cdot\left(0,1,\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)=1+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

所以 $\mathrm{d}s^2=\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2\right]\mathrm{d}r^2+\left(2\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta+\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2\right]\mathrm{d}\theta^2$.

7. 求第二型曲面积分 $\iint_S\frac{a^2x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=$ __________, 其中 S 为 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 取上侧.

解: 【法 1】首先 Σ 满足 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 所以

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{a^2x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a^3}\iint_{\Sigma}a^2x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

补面: $\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant a^2\\ z=0\end{cases}$, 取上侧, 且 Σ^- 表示取下侧, 由 Gauss 公式可知,

$$I_1=\iint a_{\Sigma^-+\Sigma_1}a^2x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+0\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,z\leqslant 0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(a^2x\right)+\frac{\partial}{\partial y}(0)+\frac{\partial}{\partial z}\left((z+a)^2\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,z\leqslant 0}\left(2z+a^2+2a\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=2\iint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,z\leqslant 0}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(a^2+2a\right)\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2z\leqslant 0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

球坐标变换：$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$，则 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$, 那么

$$\begin{aligned}
\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2, z\leqslant 0} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\theta\cdot\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\mathrm{d}r = 2\pi\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}(\sin\theta)\cdot\frac{1}{4}a^4 \\
&= 2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cdot\frac{1}{4}a^4 = -2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}a^4 = -\frac{\pi}{4}a^4.
\end{aligned}$$

且 $\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2, z\leqslant 0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{4}{3}\pi a^3\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi a^3$, 所以

$$\begin{aligned}
I_1 &= 2\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2, z\leqslant 0} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(a^2+2a\right)\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2, z\leqslant 0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= 2\cdot\left(-\frac{\pi}{4}a^4\right) + \left(a^2+2a\right)\cdot\frac{2}{3}\pi a^3 = \frac{5}{6}\pi a^4 + \frac{2}{3}\pi a^5
\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}
I_2 &= \iint_{\Sigma_1} a^2x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1} a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= a^2\iiint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a^2\cdot\pi\cdot a^2 = \pi a^4.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma^-} a^2x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 0\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{\Sigma^-+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1}\left(a^2x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 0\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) \\
&= I_1 - I_2 = \frac{5}{6}\pi a^4 + \frac{2}{3}\pi a^5 - \pi a^4 = -\frac{1}{6}\pi a^4 + \frac{2}{3}\pi a^5
\end{aligned}$$

所以 $\iint_{\Sigma} a^2x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 0\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{6}\pi a^4 - \frac{2}{3}\pi a^5$, 那么

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{a^3}\iint_{\Sigma} a^2x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{6}\pi a^4 - \frac{2}{3}\pi a^5\right) \\
&= \frac{1}{6}\pi a - \frac{2}{3}\pi a^2
\end{aligned}$$

【法 2】利用三合一投影法.

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\Sigma}\frac{a^2x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\iint_{\Sigma} a^2x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+a)^2\mathrm{d}arf\left(x^2\right)}{a^3} \\
&= \frac{1}{a^3}\iint_{D_{xy}}\left(a^2x\cdot\left(-z_x'\right) + \left(-\sqrt{a^2-x^2-y^2}+a\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

其中 $D_{xy} = \left\{(x,y) : x^2+y^2\leqslant a^2\right\}$,

$$z_x' = -\frac{1}{2}\left(a^2-x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x) = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

所以

$$I = \frac{1}{a^3}\iint_{D_{xy}}\left(\left(a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)^2 - \frac{a^2x^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, 则 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$. 所以

$$I = \frac{1}{a^3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\left[\left(a-\sqrt{a^2-r^2}\right)^2 - \frac{a^2r^2\cos^2\theta}{\sqrt{a^2-r^2}}\right]\cdot r\mathrm{d}r$$
$$= -\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{r^3\mathrm{d}r}{\sqrt{a^2-r^2}} + \frac{1}{a^3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\left(a-\sqrt{a^2-r^2}\right)^2 r\mathrm{d}r$$

令 $u = r^2$, 则 $\mathrm{d}u = 2r\mathrm{d}r$, 所以

$$I = -\frac{1}{2a}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{a^2}\frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u}} + \frac{1}{2a^3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a^2}\left(a-\sqrt{a^2-u}\right)^2\mathrm{d}u$$
$$= -\frac{\pi}{2a}\int_0^{a^2}\frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u}} + \frac{\pi}{a^3}\int_0^{a^2}\left(a-\sqrt{a^2-u}\right)^2\mathrm{d}u$$
$$= -\frac{\pi}{2a}\left[-\frac{2}{3}\sqrt{a^2-u}\left(2a^2+u\right)\right]\Bigg|_0^{a^2} + \frac{\pi}{a^3}\left[\frac{-3a^4+12a^2u+8a\left(a^2-u\right)^{\frac{3}{2}}-3u^2}{6}\right]\Bigg|_0^{a^2}$$
$$= -\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{4a^3}{3} + \frac{\pi}{a^3}\cdot\left(\frac{3a^4}{2}-\frac{4}{3}a^4\right) = -\frac{2\pi a^2}{3} + \frac{1}{6}\pi a.$$

二、 简答题

1. 解答如下问题:

(1). $f(x)$ 为定义在 (a,b) 上的函数, 若对任意的 $x_0 \in (a,b)$, 有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 任取 $\{a_n\} \subset (a,b)$ 为 Cauchy 列, 那么是否有 $\{f(a_n)\}$ 为 Cauchy 列?

(2). $f(x)$ 为定义在 (a,b) 上的函数, 若对 (a,b) 中任意的 Cauchy 列 $\{a_n\}$, $\{f(a_n)\}$ 也是 Cauchy 列, 证明: $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

解: (1) 不一定. 例如 $f(x) = |\operatorname{sgn}(x)|, x \in (-1,1)$, 显然对任意的 $x_0 \in (-1,1)$, 有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$. 取

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数;} \\ \dfrac{1}{n}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases} \qquad (n = 1,2,\cdots).$$

显然 $\{a_n\}$ 为 $(-1,1)$ 上的 Cauchy 列, 但

$$f(a_n) = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数;} \\ 1, & n \text{ 为偶数.} \end{cases} \qquad (n = 1,2,\cdots).$$

却不是 Cauchy 列.

(2) 反证法. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上不一致连续, 那么存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对任意的 $\delta > 0$, 总存在 $x', x'' \in (a,b)$, 虽满足 $\left|x'-x''\right| < \delta$, 但

$$\left|f\left(x'\right) - f\left(x''\right)\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

现在依次取 $\delta_n = \dfrac{1}{n}(n = 1,2,\cdots)$, 则存在 $x_n, y_n \in (a,b)$, 满足 $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$, 但是

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0. \tag{14.4}$$

由于 $\{x_n\} \subset (a,b)$ 为有界数列, 那么存在收敛子列, 为了方便, 不妨就设 $\{x_n\}$ 收敛, 此时

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(x_n - (x_n - y_n)) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

即 $\{y_n\}$ 也收敛, 且与 $\{x_n\}$ 极限相同. 现在作数列 $\{a_n\}$ 为

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n, \cdots.$$

则 $\{a_n\}$ 为收敛数列, 从而也是 (a,b) 上的 Cauchy 数列, 而式(22.2)说明

$$|f(a_{2n-1}) - f(a_{2n})| \geqslant \varepsilon_0 (n = 1,2,\cdots)$$

即 $\{f(a_n)\}$ 不是 Cauchy 数列, 这与已知矛盾. 所以 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微.

(1). $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

(2). 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|h|<\delta$ 时, 有 $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon$ 对任意的 $x\in[a,b]$ 成立.

讨论 (i) 能否推 (ii)? (ii) 能否推 (i)?

解: (必要性) 已知 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 进而一致连续, 那么对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对任意的 $x',x''\in[a,b]$, 当 $|x'-x''|<\delta$ 时, 有

$$\left|f'\left(x'\right)-f'\left(x''\right)\right|<\varepsilon.$$

特别地, 当 $0<|h|<\delta$ 时, 对任意的 $x\in[a,b]$, 根据 Lagrange 中值定理, 存在介于 x 和 $x+h$ 之间的 ξ_x, 满足

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'\left(\xi_x\right).$$

同时 $|\xi_x-x|\leqslant|h|<\delta$, 进而

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|=\left|f'\left(\xi_x\right)-f'(x)\right|<\varepsilon$$

(充分性) 已知对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|h|<\delta$ 时, 有

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon$$

对任意的 $x\in[a,b]$ 成立. 特别地, 任取 $x_0\in[a,b]$, 当 $0<|h|<\delta$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|f'\left(x_0+h\right)-f'\left(x_0\right)\right| &\leqslant\left|f'\left(x_0+h\right)-\frac{f\left(x_0+h+(-h)\right)-f\left(x_0+h\right)}{-h}\right|+\left|\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}-f'\left(x_0\right)\right|\\ &<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明 $f'(x)$ 在 x_0 处连续, 那么 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

3. 设 $\{f_n(x)\}$ 为 $[a,b]$ 上连续的函数列, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛.

(1). 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(a)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(b)$ 收敛.

(2). 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证明:

引理 14.2

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 x_0 的某空心邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内一致收敛, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}u_n(x)=c_n$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛, 且

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0}u_n(x)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n$$

证明: 对 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0, N\in\mathbb{N}_+$, 对 $\forall p\in\mathbb{N}_+$, 有

$$\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|<\varepsilon$$

令 $x\to x_0$, 就有 $\left|c_{n+1}+c_{n+2}+\cdots+c_{n+p}\right|<\varepsilon$, 进而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=c$. 由 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的一致收敛性与 $c=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 的收敛性可知, 对 $\forall\varepsilon>0,\exists n\in\mathbb{N}_+$, 使得 $\left|S(x)-\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$, $\left|c-\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\right|<\frac{\varepsilon}{3}$. 固定 n, 当

$x \to x_0$ 时, 有 $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) \to \sum\limits_{k=1}^{n} c_k$, 故 $\exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta$ 时 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\right| < \frac{\varepsilon}{3}$, 进而利用 “三段法” 以及三角不等式可知,

$$\begin{aligned}|S(x)-c| &= \left|S(x)-\sum_{k=1}^{n} u_k(x)+\sum_{k=1}^{n} u_k(x)-\sum_{k=1}^{n} c_k+\sum_{k=1}^{n} c_k-c\right| \\ &\leqslant \left|S(x)-\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right|+\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)-\sum_{k=1}^{n} c_k\right|+\left|\sum_{k=1}^{n} c_k-c\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛至 c, 得证!

【法 1】(1)(2) 由题意可知,

$$\lim_{x\to a^+} f_n(x) = f_n(a), \qquad \lim_{x\to b^-} f_n(x) = f_n(b).$$

由引理14.2可知, 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $x = a$ 和 $x = b$ 处收敛. 记

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), x \in (a, a+\delta),$$

由前面可知, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时, 有

$$\left|S(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

$\exists N_2 > 0$, 当 $n > N_2$ 时, 有

$$\left|S(a) - \sum_{k=1}^{n} f_k(a)\right| < \varepsilon.$$

取 $N = \max N_1, N_2$, 当 $n > N$ 时, 对 $\forall x \in [a, a+\delta)$ 时, 有

$$\left|S(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon,$$

这里 $S(b)$ 的情形是类似的. 所以函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上一致收敛, 得证!

【法 2】(1) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由条件可知: $\exists N \in \mathbb{N}_+, n > N, \forall p \in \mathbb{N}_+$ 时,

$$\left|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)\right| < \varepsilon, (\forall x \in (a, b)).$$

令 $x \to a^+$, 可得 $\left|f_{n+1}(a) + f_{n+2}(a) + \cdots + f_{n+p}(a)\right| \leqslant \varepsilon$. 由级数的 Cauchy 收敛原理可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ 收敛; 同理可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(b)$ 收敛.

(2) 由 (1) 可知, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, n > N, \forall p \in \mathbb{N}_+$ 时, 有

$$\left|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)\right| \leqslant \varepsilon, (\forall x \in (a, b)).$$

由此可见, 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上一致收敛.

4. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数, 且在任意有限区间上可积, 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$ 收敛, 证明: $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos 2\pi t x \mathrm{d}t$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

证明: 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t$ 收敛, 所以对任意的 $\varepsilon>0$. 存在 $M>0$. 满足

$$2\int_{-\infty}^{-M}|f(t)|\mathrm{d}t+2\int_{M}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<\varepsilon$$

而对任意的 $y',y''\in\mathbb{R}$. 根据 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi\in\mathbb{R}$. 满足

$$\left|\cos y'-\cos y''\right|=\left|-(\sin\xi)\left(y'-y''\right)\right|\leqslant\left|y'-y''\right|.$$

特别地, 当 $t\in[-M,M]$ 时, 对任意的 $x',x''\in\mathbb{R}$. 有

$$\left|\cos\left(2\pi tx'\right)-\cos\left(2\pi tx''\right)\right|\leqslant\left|2\pi tx'-2\pi tx''\right|\leqslant 2\pi M\left|x'-x''\right|$$

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2\pi M\int_{-M}^{M}|f(t)|\mathrm{d}t+1}>0$. 当 $\left|x'-x''\right|<\delta$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|F\left(x'\right)-F\left(x''\right)\right|&\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\left|\cos\left(2\pi tx'\right)-\cos\left(2\pi tx''\right)\right|\mathrm{d}t\\&\leqslant 2\int_{-\infty}^{-M}|f(t)|\mathrm{d}t+2\int_{M}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t+2\pi M\left|x'-x''\right|\int_{-M}^{M}|f(t)|\mathrm{d}t<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

5. 解答如下问题:

(1). 对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 若对任意子列 $\{a_{n_k}\}$, 均有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{n_k}$ 收敛, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否绝对收敛?

(2). 对于任意正整数 i,j, 均有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{i+nj}$ 收敛, 是否有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛?

解: (1) 是的. 记数列 $a_n^+=\dfrac{|a_n|+a_n}{2},a_n^-=\dfrac{|a_n|-a_n}{2}$, 明显当 $a_n\geqslant 0$ 时, 有 $a_n^+=a_n,a_n^-=0$, 当 $a_n\leqslant 0$ 时, 有 $a_n^+=0,a_n^-=-a_n$. 由于对任意子列 $\{a_{n_k}\}$, 均有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{n_k}$ 收敛, 特别地, 设 $\{a_{n_k}\}$ 为 $\{a_n\}$ 中所有非负项组成的子列, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{n_k}$, 同理可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 也收敛, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^++a_n^-\right)$ 收敛, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.

(2) 不一定. 例如数列 $a_n=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{k}, & n=k!,k=1,2,\cdots;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$ 显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$ 发散, 但对任意的正整数i,j, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{i+nj}$ 均收敛, 这是因为当 $j\nmid i$ 时, $j\nmid i+nj$, 因此当 $k\geqslant j$ 时, 有 $i+nj\neq k!$, 也就是说 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{i+nj}$ 中至多只有有限个非零项, 因此收敛. 而当 $j\mid i$ 时, 只需说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{nj}$ 收敛. 由于当 $k\geqslant j$ 时, 有 $j\mid k!$, 因此存在某个正整数 N, 满足 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}a_{nj}=\sum\limits_{k=j}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}$, 由此可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{nj}$ 收敛.

三、 设 V,U 分别是 $\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n$ 上的开集, 定义向量函数

$$f:V\to U,(x_1,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}\mapsto\left(f_1(x_1,\cdots,x_m),\cdots,f_n(x_1,\cdots,x_m)\right)^{\mathrm{T}}.$$

称 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 可微, 如果存在 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 满足当 $\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}$ 时

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}+o(\|\boldsymbol{h}\|).$$

其中 $\boldsymbol{h}=(h_1,\cdots,h_m)^{\mathrm{T}}$, $o(\|\boldsymbol{h}\|)$ 为各元素均为 $\|\boldsymbol{h}\|$ 高阶无穷小的 m 维向量. 此外, 定义 Jacobi 阵为 $D_{\boldsymbol{x}_0}^f=\left.\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{n\times m}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}$.

1. 证明: 若 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微, 则 $D_{\boldsymbol{x}_0}^f=\boldsymbol{A}$.

2. 进一步, 若 g 在 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 处可微, 则 $g\circ f$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微, 且有 $\boldsymbol{A}=D^g_{f(\boldsymbol{x}_0)}D^f_{\boldsymbol{x}_0}$.
3. 利用反函数定理证明秩定理.

证明:

引理 14.3

令 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$. 若 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点是可微的, 那么 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点的所有方向导数存在, 并且有

$$f'(\boldsymbol{x}_0;\ \boldsymbol{u})=D^f_{\boldsymbol{x}_0}\cdot\boldsymbol{u}$$

证明: 令 $\boldsymbol{B}=D^f_{\boldsymbol{x}_0}$. 在可微性的定义中置 $\boldsymbol{h}=t\boldsymbol{u}$. 其中 $t\neq 0$. 那么由假设当 $t\to 0$ 时,

$$\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{B}\cdot t\boldsymbol{u}}{\|t\boldsymbol{u}\|}\to\mathbf{0}$$

若 t 通过正值趋于 0 , 那么用 $\|\boldsymbol{u}\|$ 乘上式, 可以推出当 $t\to 0$

$$\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{u}\to\mathbf{0}$$

若 t 通过负值趋于 0 , 则用 $-\|\boldsymbol{u}\|$ 乘上式可以得出同样的结论. 因而 $f'(\boldsymbol{x}_0;\ \boldsymbol{u})=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{u}$.

引理 14.4

令 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$. 如果 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点是可微的, 那么

$$D^f_{\boldsymbol{x}_0}=[D_1f(\boldsymbol{x}_0),D_2f(\boldsymbol{x}_0),\cdots,D_mf(\boldsymbol{x}_0)]$$

即若 $Df(\boldsymbol{x}_0)$ 存在, 则它是一个从 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点的各偏导数为元素构成的行向量.

证明: 由假设, $Df(\boldsymbol{x}_0)$ 存在并且是一个 $1\times m$ 矩阵. 令

$$Df(\boldsymbol{x}_0)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\cdots\lambda_m\end{bmatrix}$$

由此 (应用引理14.4) 可知

$$D_jf(\boldsymbol{x}_0)=f'\left(\boldsymbol{x}_0;\ \boldsymbol{e}_j\right)=Df(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{e}_j=\lambda_j$$

(1) 因此, 本题只要证明

$$Df(\boldsymbol{x}_0)=\begin{bmatrix}Df_1(\boldsymbol{x}_0)\\ \vdots\\ Df_n(\boldsymbol{x}_0)\end{bmatrix}$$

即 $Df(\boldsymbol{x}_0)$ 是一个矩阵, 其第 i 行第 j 列的元素为 $D_jf_i(\boldsymbol{x}_0)$.
令 $\boldsymbol{B}$ 是一个任意的 $n\times m$ 矩阵. 考虑函数

$$F(\boldsymbol{h})=\frac{f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)-B\cdot\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|}$$

(对于某个 ε) 它对 $0<|\boldsymbol{h}|<\varepsilon$ 有定义. 于是 $F(\boldsymbol{h})$ 是 $n\times 1$ 阶的列矩阵, 它的第 i 个元素满足等式

$$F_i(\boldsymbol{h})=\frac{f_i(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f_i(\boldsymbol{x}_0)-(\boldsymbol{B}\text{ 的第}i\text{行})\cdot\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|}.$$

令 $\boldsymbol{h}$ 趋于 $\mathbf{0}$. 那么当且仅当它的每个元素趋于 0 时矩阵 $F(\boldsymbol{h})$ 趋于 $\mathbf{0}$. 因此若 B 是一个使 $F(\boldsymbol{h})\to\mathbf{0}$ 的矩阵, 那么 B 的第 i 行就是一个使得 $F_i(\boldsymbol{h})\to 0$ 的行矩阵. 而且反过来也成立.
(2) 我们将问题描述的更加严谨, 令 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n, g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$. 我们去证, 如果 f 在 a 点是可微的并且 g 在 $\boldsymbol{b}$ 点是可微的. 那么复合函数 $g\circ f$ 在 $\boldsymbol{a}$ 点是可微的. 而且有

$$D(g\circ f)(\boldsymbol{a})=Dg(\boldsymbol{b})\cdot Df(\boldsymbol{a})$$

为了方便, 令 $\boldsymbol{x}$ 表示 $\mathbb{R}^m$ 中的一般点, 而 $\boldsymbol{y}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的一般点. 由假设, g 在 b 的一个邻域中有定义. 选取 ε 使得 $g(y)$ 对 $|y-b|<\varepsilon$ 有定义. 类似地, 由于 f 在 a 点的一个邻域内有定义并且在 a 点连续, 因而可以选取 δ 使得 $f(\boldsymbol{x})$ 对 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta$ 有定义并且满足条件 $|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{b}|<\delta$. 那么复合函数 $(g\circ f)(\boldsymbol{x})=g(f(\boldsymbol{x}))$

对 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta$ 有定义.

第一步. 始终令 $\Delta(h)$ 表示函数

$$\Delta(\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a}),$$

这个函数对 $|\boldsymbol{h}|<\delta$ 有定义. 首先证明 $|\Delta(\boldsymbol{h})|/|\boldsymbol{h}|$ 对在 $\mathbf{0}$ 点的某个去心邻域中的 $\boldsymbol{h}$ 是有界的.

为此引进一个如下定义的函数 $F(\boldsymbol{h})$：

$$\begin{cases} F(\boldsymbol{h})=\dfrac{[\Delta(\boldsymbol{h})-Df(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h}]}{|\boldsymbol{h}|}, & 0<|\boldsymbol{h}|<\delta \\ F(\mathbf{0})=\mathbf{0} \end{cases}$$

因为 f 在 $\boldsymbol{a}$ 点是可微的, 所以 F 在 0 点是连续的. 而且等式

$$\Delta(\boldsymbol{h})=Df(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h}+|\boldsymbol{h}|F(\boldsymbol{h}) \tag{14.5}$$

对于 $0<|h|<\delta$ 成立；并且对 $h=0$ 也平凡地成立. 三角形不等式蕴涵着

$$|\Delta(\boldsymbol{h})|\leqslant m|Df(\boldsymbol{a})||\boldsymbol{h}|+|\boldsymbol{h}||F(\boldsymbol{h})|.$$

由于 $|F(h)|$ 对于 0 点的一个邻域中的 h 是有界的, 实际上当 h 趋于 0 时它趋于 0 , 因此 $|\Delta(\boldsymbol{h})|/|\boldsymbol{h}|$ 在 $\mathbf{0}$ 点的一个去心邻域中是有界的.

第二步. 对于函数 g 重复第一步中的构造过程. 定义函数 $G(k)$ 如下：

$$\begin{cases} G(\boldsymbol{k})=\dfrac{g(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{k})-g(\boldsymbol{b})-Dg(\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}, & 0<|\boldsymbol{k}|<\varepsilon \\ G(\mathbf{0})=\mathbf{0} \end{cases}$$

因为 g 在 $\boldsymbol{b}$ 点是可微的, 因而函数 G 在 $\mathbf{0}$ 点是连续的. 而且对于 $|\boldsymbol{k}|<\varepsilon, G$ 满足下列等式

$$g(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{k})-g(\boldsymbol{b})=Dg(\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{k}+|\boldsymbol{k}|G(\boldsymbol{k}) \tag{14.6}$$

第三步. 完成定理的证明. 令 $\boldsymbol{h}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中满足 $|\boldsymbol{h}|<\delta$ 的任何点. 那么 $|\Delta(\boldsymbol{h})|<\varepsilon$. 因而可以用 $\Delta(\boldsymbol{h})$ 代替公式 $(**)$ 中的 $\boldsymbol{k}$. 经此代换之后, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{k}$ 变成

$$\boldsymbol{b}+\Delta(\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{a})+\Delta(\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})$$

因而公式(14.6)变成下列形式

$$g(f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}))-g(f(\boldsymbol{a}))=Dg(\boldsymbol{b})\cdot\Delta(\boldsymbol{h})+|\Delta\boldsymbol{h}|G(\Delta(\boldsymbol{h}))$$

现在利用式(14.5)将此式写成下列形式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|\boldsymbol{h}|}[g(f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}))-g(f(\boldsymbol{a}))-Dg(\boldsymbol{b})\cdot Df(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h}]\\ =&Dg(\boldsymbol{b})\cdot F(\boldsymbol{h})+\frac{1}{|\boldsymbol{h}|}|\Delta(\boldsymbol{h})|G(\Delta(\boldsymbol{h}))\end{aligned}$$

这个等式对于 $0<|\boldsymbol{h}|<\delta$ 成立. 为了证明 $g\circ f$ 在 $\boldsymbol{a}$ 点可微并且导数是 $Dg(\boldsymbol{b}).\,Df(\boldsymbol{a})$. 只需证明当 $\boldsymbol{h}$ 趋于 $\mathbf{0}$ 时这个等式的右边趋于 $\mathbf{0}$ 即可.

矩阵 $Dg(b)$ 为常数矩阵, 而当 $h\to0$ 时 $F(h)\to0$(因为 F 在 0 点是连续的并且在该点的值为零), 当 $\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}$ 时因子 $G(\Delta(\boldsymbol{h}))$ 也趋于零, 因为它是两个函数 G 与 Δ 的复合, 而且两者都在 0 点连续并且取值为零. 最后, 由第一步, $|\Delta(h)|/|h|$ 在 0 点的一个去心邻域内有界. 于是定理成立.

(3) 参见《数学分析》卓里奇 Morse 理论前面的内容.

吉林大学 2025 年数学分析试卷

一、 计算题.

1. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(mx)}{\sin((2n+1)x)}$, 其中 m,n 为正整数.

解:

$$\lim_{n\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin(2n+1)x}=\frac{m}{2n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{\cos mx}{\cos(2n+1)x}=\frac{(-1)^{m-1}m}{2n+1}.$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan n\right)^n$.

解: 利用归结原则与 L'Hôpital 法则, 有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan n\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{2}{\pi}+\ln\arctan\frac{1}{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to0+}\frac{\ln\frac{2}{\pi}+\ln\arctan\frac{1}{x}}{x}\\&=\lim_{x\to0+}\frac{1}{\arctan\frac{1}{x}}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0+}\frac{-1}{(1+x^2)\arctan\frac{1}{x}}\\&=-\frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan n\right)^n=\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}}$$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\frac14-x}+\sqrt[3]{\frac18+x^2}-\mathrm{e}^{2x}}{\sin x}$.

解: 根据 Taylor 展开可知

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac14-x}&=\frac12(1-4x)^{\frac12}=\frac12(1-2x+o(x))(x\to0);\\\sqrt[3]{\frac18+x^2}&=\frac12\left(1+8x^2\right)^{\frac13}=\frac12(1+o(x))(x\to0);\\\mathrm{e}^{2x}&=1+2x+o(x)(x\to0).\end{aligned}$$

因此

$$\sqrt{\frac14-x}+\sqrt[3]{\frac18+x^2}-\mathrm{e}^{2x}=-3x+o(x)(x\to0).$$

再结合 $\sin x\sim x(x\to0)$ 便有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\frac14-x}+\sqrt[3]{\frac18+x^2}-\mathrm{e}^{2x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{-3x+o(x)}{x}=-3.$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$.

解: 由定积分定义可知所求极限值为

$$\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n^2}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}n\displaystyle\int_0^1x^n\arctan x\mathrm{d}x$.

解: 利用分部积分公式, 有

$$n\int_0^1x^n\arctan x\mathrm{d}x=\frac{n}{n+1}\int_0^1\arctan x\mathrm{d}\left(x^{n+1}\right)=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{n}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x^2}\mathrm{d}x\tag{15.1}$$

其中

$$0<\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n+2}\to 0(n\to\infty)$$

因此式(15.1)关于 $n\to\infty$ 取极限可得

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n \arctan x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

6. 设 $u=\dfrac{x+z}{y+z}$, 其中 z 为由方程 $z\mathrm{e}^z=x\mathrm{e}^x+y\mathrm{e}^y$ 所确定的 x,y 的函数, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解: 记函数 $F(x,y,z)=x\mathrm{e}^x+y\mathrm{e}^y-z\mathrm{e}^z$, 有

$$F_x=(x+1)\mathrm{e}^x, F_y=(y+1)\mathrm{e}^y, F_z=-(z+1)\mathrm{e}^z$$

因此

$$z_x=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{x+1}{z+1}\mathrm{e}^{x-z}, z_y=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{y+1}{z+1}\mathrm{e}^{y-z}$$

那么

$$u_x=\frac{(1+z_x)(y+z)-(x+z)z_x}{(y+z)^2}=\frac{1}{y+z}+\frac{y-x}{(y+z)^2}z_x=\frac{1}{y+z}+\frac{(y-x)(x+1)}{(y+z)^2(z+1)}\mathrm{e}^{x-z};$$

$$u_y=\frac{z_y(y+z)-(x+z)\left(1+z_y\right)}{(y+z)^2}=-\frac{x+z}{(y+z)^2}+\frac{y-x}{(y+z)^2}z_y=-\frac{x+z}{(y+z)^2}+\frac{(y-x)(y+1)}{(y+z)^2(z+1)}\mathrm{e}^{y-z}.$$

7. 计算重积分 $\displaystyle\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 D 是 $x^2+y^2=z^2$ 与 $z=1$ 所围的区域.

解: 计算可知所求积分为

$$\int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2\leqslant z^2} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z r^2\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}.$$

8. 计算第二型曲面积分

$$I=\iint_\Sigma xy^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2x^3y\mathrm{d}z\mathrm{d}y+3z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中曲面 Σ 是锥面 $z^2=x^2+y^2$ 在 $z=0$ 和 $z=2$ 之间的部分, 方向取外侧.

解: 令 $\Sigma_1=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant 4, z=2\right\}$, 记 Ω 为 Σ 与 Σ_1 所围的区域, 利用对称性与 Gauss 公式计算可知

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1} &= \iiint_\Omega \left(y^3+2x^3+6z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=6\int_0^2\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=6\pi\int_0^2 z^3\mathrm{d}z=24\pi\\
\iint_{\Sigma_1} &= 12\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=48\pi.
\end{aligned}$$

故

$$\iint_\Sigma xy^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2x^3y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=24\pi-48\pi=-24\pi.$$

二、 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-1)x^n$ 的和函数.

解: 易知 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$, 下求 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$, 由幂级数性质计算可知当 $x \in (-1,1)$ 时, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x\left[\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right]' = \frac{x}{(1-x)^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x\left[\sum_{n=1}^{\infty} n x^n\right]' = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2-1\right) x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} - \frac{x}{1-x} = \frac{3x^2-x^3}{(1-x)^3}.$$

三、 讨论当 $p>0$ 为何值时, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$ 绝对收敛, 条件收敛, 发散.

解: 由于 $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} = 0(p>0)$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right)}{\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{\ln(1+x)}{x}\right| = 1$$

而 $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right| = \frac{1}{n^p}$, 由正项级数的比较原则可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right)\right|$ 在 $p>1$ 时收敛, 在 $0<p\leqslant 1$ 时发散. 当 $0<p\leqslant 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 为莱布尼茨交错级数, 显然条件收敛. 另外, 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n^p} - \ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right)}{\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right]^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

同时 $\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right]^2 = \frac{1}{n^{2p}}$, 于是再次由正项级数的比较原则可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n^p} - \ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right)\right]$$

在 $2p>1$ 即 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时收敛并且绝对收敛, 在 $2p\leqslant 1$ 即 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时发散. 再结合

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} - \left[\frac{(-1)^{n-1}}{n^p} - \ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right)\right]$$

可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right)$ 在 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时条件收敛, 在 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时发散.
综上可知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right)$$

在 $p>1$ 时绝对收敛, 在 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时条件收敛, 在 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时发散.

四、 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 证明: $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界, 并且最大值和最小值至少有一个能取到.

证明: 为了方便, 记 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$. 那么存在 $M_0>0$, 当 $x>M_0$ 时, 有 $|f(x)-A|<1$, 进而

$$|f(x)| < |A|+1, \quad x \in (M_0,+\infty).$$

另外, 由于 $f(x)$ 在 $[0,M_0]$ 上连续, 进而有界, 也就是存在 $G>0$, 满足

$$|f(x)| < G, \quad x \in [0,M_0].$$

特别地, 取 $G_0=\max\{|A|+1,G\}$, 对任意的 $x\in[0,+\infty)$, 有 $|f(x)|<G_0$, 即 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界. 下面说明 $f(x)$ 至少能取到最大值或最小值:

(i) 当 $f(x)\equiv A$ 时, 显然 $f(x)$ 在每个点处都取得最大值与最小值, 此时结论显然成立.

(ii) 当 $f(x)$ 为非常值函数时, 一定存在 $x_0\in[0,+\infty)$, 使得 $f(x_0)\neq A$.

若 $f(x_0)>A$, 利用保号性可知存在 $M>0$, 使得 $x\in(M,+\infty)$ 时, 有 $f(x)<f(x_0)$, 这也意味着 $x_0\in[0,M]$. 由于 $f(x)$ 在 $[0,M]$ 连续, 所以存在最大值, 设为 $f(\xi)$, 其中 $\xi\in[0,M]$, 于是

$$f(\xi)\geqslant f(x),\quad x\in[0,M]. \tag{15.2}$$

特别地, 也有 $f(\xi)\geqslant f(x_0)$, 从而

$$f(\xi)\geqslant f(x_0)>f(x),\quad x\in(M,+\infty). \tag{15.3}$$

由式(15.2) 式与式(15.3) 式可知, 对任意的 $x\in[0,+\infty)$, 均有 $f(\xi)\geqslant f(x)$, 这说明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 存在最大值.

同理, 若 $f(x_0)<A$, 则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 能取到最小值.

五、 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, $f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明: 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$, $\xi\neq\eta$, 使得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

证明: 构造函数

$$F(x)=f(x)-(1-x)$$

显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $F(0)=-1<0, F(1)=1>0$, 由连续函数的介值性定理可知存在 $c\in(0,1)$, 使得 $F(c)=0$, 即 $f(c)=1-c$. 而根据 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi\in(0,c),\eta\in(c,1)$ 满足

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c}=\frac{1-c}{c},\ f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{c}{1-c}.$$

于是 $f'(\xi)f'(\eta)=\dfrac{1-c}{c}\cdot\dfrac{c}{1-c}=1$.

六、 设函数 $f(\alpha,\beta)=\displaystyle\oint_\Gamma\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{\alpha x^2+\beta y^2}$, $\alpha,\beta>0$, 其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2=1$, 取逆时针方向.

1. 求 $f(\alpha,\beta)$ 的表达式.
2. 讨论广义重积分

$$\iint_D f(\alpha,\beta)^p\mathrm{d}a\mathrm{d}\beta$$

的敛散性, 其中 $p\in(-\infty,+\infty)$, 区域 $D=\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\mid\alpha^2+\beta^2\leqslant1,\alpha,\beta\geqslant0\}$.

解: (1) 取路径 $L_1:\alpha x^2+\beta y^2=\varepsilon^2$, 记

$$P(x,y)=\frac{-y}{\alpha x^2+\beta y^2},\ Q(x,y)=\frac{x}{\alpha x^2+\beta y^2}$$

有 $P_y=\dfrac{\beta y^2-\alpha x^2}{(\alpha x^2+\beta y^2)^2}=Q_x$. 记 L_1 所围区域为 D, 由 Green 公式可知

$$\begin{aligned}F(\alpha,\beta)&=\left(\oint_{L\cup L_1}-\oint_{L_1}\right)\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{\alpha x^2+\beta y^2}\\&=\frac{2}{\varepsilon^2}\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2\pi}{\varepsilon^2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{ab}}=\frac{2\pi}{\sqrt{ab}}.\end{aligned}$$

(2) 由 (1) 可知

$$\iint_D F^p\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta=(2\pi)^p\iint_D(\alpha\beta)^{-\frac{p}{2}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta.$$

令 $\alpha=r\sin\theta,\beta=r\cos\theta$, 则上述广义二重积分改写为

$$(2\pi)^p\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}\theta}{(\sin2\theta)^{\frac{p}{2}}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{p-1}}$$

故当 $p-1<1$ 时, 即 $p<2$ 时原广义积分收敛. 当 $p\geqslant2$ 时原广义积分发散.

七、 证明:

1. $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续当且仅当 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, 并且极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在.

2. 如果 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上可导, 并且极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2/3} f'(x)$ 存在, 则 $f(x)+\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,1]$ 上一致连续.

证明: (1)(必要性) 已知 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续, 显然 $f(x)$ 在 (a,b) 上也连续. 同时对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$限制$\delta<b-a)$, 当 $x',x''\in(a,b)$ 且 $\left|x'-x''\right|<\delta$ 时, 有

$$\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|<\varepsilon. \tag{15.4}$$

特别地, 当 $x',x''\in(a,a+\delta)$ 时, 也有式(15.4)成立, 这说明 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在. 同理可知 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在.

(充分性) 已知 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, 并且极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在, 定义

$$f(a)=\lim_{x\to a^+} f(x),\ f(b)=\lim_{x\to b^-} f(x).$$

则 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 由 Cantor 定理可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续, 特别地, 在 (a,b) 上也一致连续.

(2) 首先注意到 $\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,1]$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 同 (1) 可知 $\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,1]$ 上一致连续. 另外, 为 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上可导, 并且极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{12}{3}} f'(x)$ 存在, 由局部有界性, 存在 $M>0$ 及 $\delta'\in(0,1)$, 使得

$$\left|x^{\frac{2}{3}} f'(x)\right|\leqslant M, x\in\left(0,\delta'\right]$$

而 $f(x)$ 与 $x^{\frac{1}{3}}$ 均在 $\left(0,\delta'\right]$ 可导, 于是对任意的 $x,y\in\left(0,\delta'\right], x\neq y$, 由 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi\in\left(0,\delta'\right)$, 使得

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{3}\xi^{-\frac{2}{3}}}\right|=3\left|\xi^{\frac{2}{3}} f'(\xi)\right|\leqslant 3M$$

即对任意的 $x,y\in\left(0,\delta'\right], x\neq y$, 有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 3M\left|x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right|$$

而上式显然对 $x=y$ 也成立. 注意到 $x^{\frac{1}{3}}$ 在 $\left[0,\delta'\right]$ 上连续, 进而一致连续, 所以 $x^{\frac{1}{3}}$ 在 $\left(0,\delta'\right]$ 上也一致连续, 再结合上述不等式可知 $f(x)$ 在 $\left(0,\delta'\right]$ 上一致连续, 又因为 $f(x)$ 在 $\left[\delta',1\right]$ 上连续, 从而一致连续, 故函数 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上一致连续. 那么 $f(x)+\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,1]$ 上一致连续.

华南理工大学 2025 年数学分析试卷

一、 (12 分) 已知数列 $x_0=a>0, x_n=\arctan x_{n-1}\ (n=1,2,\cdots)$. 证明:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n}{3}}x_n=1$.

解:

1. 因为 $x_0=a>0, x_n=\arctan(x_{n-1}), (n=1,2,\cdots)$, 所以
$$0<x_n=\arctan(x_{n-1})<x_{n-1}$$
可知数列 $\{x_n\}$ 单调递减且趋于零, 由单调有界原则可知, 数列 $\{x_n\}$ 收敛. 对等式 $x_n=\arctan(x_{n-1})$ 两边取极限
$$\lim_{n\to+\infty} x_n=\lim_{n\to+\infty}\arctan(x_{n-1})=\arctan\left(\lim_{n\to+\infty} x_{n-1}\right).$$
令 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=A$, 所以 $A=\arctan A$, 解得 $A=0$, 即 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$.
2. 利用 Stolz 定理求极限
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n\cdot x_n^2&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{x_{n-1}^2}}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n^2x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2-x_n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n-1}^2x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2-(\arctan(x_{n-1}))^2}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n-1}^4}{[x_{n-1}-\arctan(x_{n-1})][x_{n-1}+\arctan(x_{n-1})]}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n-1}^4}{\frac{1}{3}x_{n-1}^3\cdot 2x_{n-1}}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$
所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{2n}{3}}\cdot x_n=\sqrt{\frac{2}{3}}\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}x_n=\sqrt{\frac{2}{3}}\times\sqrt{\frac{3}{2}}=1.$

二、 (12 分) 证明函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\ln x, & x>0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

证明: 显然 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续. 利用 Cantor 定理可知：$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上一致连续, 又因为当 $x\geqslant 1$ 时, 有 $f(x)=\sqrt{x}\ln x$, 所以
$$f'(x)=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}.$$
在区间 $[1,+\infty)$ 上, 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}=0$. 所以 $f'(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上有界, 进而 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.
综上所述,$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

三、 (12 分) 证明不等式 $\frac{1}{\sin^2 x}\leqslant\frac{1}{x^2}+1-\frac{4}{\pi^2}\left(0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

证明: 记函数 $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, 有
$$f'(x)=-\frac{2\cos x}{\sin^3 x}+\frac{2}{x^3}=\frac{2\left(\sin^3 x-x^3\cos x\right)}{x^3\sin^3 x}.$$
下面证明当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时, 有 $\sin^3 x-x^3\cos x>0$, 这也等价于
$$\sin x\cos^{-\frac{1}{3}}x>x. \tag{16.1}$$

为此, 构造函数 $g(x)=\sin x\cos^{-\frac{1}{3}}x-x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, 则

$$g'(x)=\cos x\cos^{-\frac{1}{3}}x+\frac{1}{3}\sin x\cos^{-\frac{4}{3}}x\sin x-1=\cos^{\frac{2}{3}}x+\frac{1}{3}\sin^2 x\cos^{-\frac{4}{3}}x-1.$$

进而

$$g''(x)=-\frac{2}{3}\cos^{-\frac{1}{3}}x\sin x+\frac{2}{3}\sin x\cos x\cos^{-\frac{4}{3}}x+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\sin^2 x\cos^{-\frac{7}{3}}x\sin x=\frac{4}{9}\sin^3 x\cos^{-\frac{7}{3}}x>0, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

所以 $g'(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上严格递增, 同时 $g'(0)=0$, 从而 $g'(x)>0, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 即 $g(x)$ 也在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上严格递增, 再结合 $g(0)=0$ 可知 $g(x)>0, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 也就是式(16.1)成立, 对应 $f'(x)>0, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 因此 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上严格递增, 那么 $f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{4}{\pi^2}$, 也就是

$$\frac{1}{\sin^2 x}\leqslant\frac{1}{x^2}+1-\frac{4}{\pi^2}\left(0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

四、 (14 分) 设 $f(x,y)=\begin{cases} g(x,y)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0); \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$ 证明:

1. 若 $g(0,0)=0$, $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微且 $\mathrm{d}g(0,0)=0$. 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 且 $\mathrm{d}f(0,0)=0$.
2. 若 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处有偏导数且 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 则 $\mathrm{d}f(0,0)=0$.

证明: (1) 根据已知, 有 $g(0,0)=g_x(0,0)=g_y(0,0)=0$, 且

$$g(x,y)=g(0,0)+g_x(0,0)x+g_y(0,0)y+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)(x,y)\to(0,0).$$

进而

$$f(x,y)=g(x,y)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\quad((x,y)\to(0,0)).$$

那么

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{o(x)}{x}=0.$$

同理也有 $f_y(0,0)=0$, 并且

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\to0, (x,y)\to(0,0).$$

这说明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 且 $\mathrm{d}f(0,0)=0$.

(2) 由于 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 所以极限

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{g(x,0)}{x}\sin\frac{1}{|x|}.$$

存在, 且极限值为 $f_x(0,0)$. 而已知

$$g_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x,0)-g(0,0)}{x}.$$

存在, 则 $\lim\limits_{x\to0}g(x,0)=g(0,0)$, 若 $g(0,0)\neq0$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x,0)}{x}=\infty$, 那么极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x,0)}{x}\sin\dfrac{1}{|x|}$ 不存在, 矛盾. 因此 $g(0,0)=0$, 也就是 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x,0)}{x}$ 存在, 再结合 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x,0)}{x}\sin\dfrac{1}{|x|}$ 也存在可知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x,0)}{x}=0$, 那么 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x,0)}{x}\sin\dfrac{1}{|x|}=0$, 即 $f_x(0,0)=0$, 同理可知 $f_y(0,0)=0$, 即 $\mathrm{d}f(0,0)=0$.

五、 (12 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, $f(0)=1$. 证明:

1. 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(1)=(1+\xi)f'(\xi)\ln 2+1$.

   证明: 构造函数

$$g(x)=f(x)\ln 2+[1-f(1)]\ln(1+x).$$

显然 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 并且结合 $f(0)=1$ 可知 $g(0)=g(1)=\ln 2$, 那么根据 Rolle

中值定理, 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $g'(\xi)=0$, 也就是

$$f'(\xi)\ln 2+\frac{1-f(1)}{1+\xi}=0.$$

化简可得 $f(1)=(1+\xi)f'(\xi)\ln 2+1$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} f(n(\sqrt{1+x}-1))=\ln(1+x), x\in(0,1)$.

六、 (12 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, 证明: 存在折线函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x.$$

证明: 对每个正整数 n. 对将 $[0,1]$ 平均分割为 n 等分, 记为分割

$$T_n=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}.$$

现在依次用线段连接点 $(x_{i-1},f(x_{i-1}))$ 与 $(x_i,f(x_i))$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 得到的连续函数记为 $f_n(x)$. 设 M_i,m_i 分别为 $f(x)$ 在 $\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$ 上的上确界与下确界, 则对任意的 $x\in\Delta_i$. 有 $m_i\leqslant f(x), f_n(x)\leqslant M_i$. 从而

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant \omega_i^f, x\in\Delta_i$$

进而有

$$\left|\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1|f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n\int_{\Delta_i}|f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{i=1}^n\omega_i^f\Delta x_i.$$

明显 $\|T_n\|=\dfrac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n\omega_i^f\Delta x_i=0$. 那么

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|=0$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

七、 (12 分) 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n+1}$ 的收敛域与和函数 $S(x)$.

解: 明显 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[4n-1]{\dfrac{1}{4n+1}}=1$, 因此幂级数的收敛半径为 1 , 而当 $x=\pm1$ 时, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n+1}$ 均发散, 因此幂级数的收敛域为 $(-1,1)$. 记

$$f(x)=x^2S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}, x\in(-1,1).$$

通过逐项微分可得

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\frac{x^4}{1-x^4}=\frac{1}{1-x^4}-1=\frac{1}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2(1-x^2)}-1.$$

因此

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-x, x\in(-1,1).$$

那么

$$S(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{1}{2x^2}\arctan x+\dfrac{1}{4x^2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1}{x}, & x\in(-1,0)\cup(0,1)\end{cases}$$

八、 (12 分) 计算曲面积分 $F(t)=\displaystyle\iint_{x+y+z=t} f(x,y,z)\mathrm{d}s$, 其中

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & x^2+y^2+z^2\leqslant 1;\\ 0, & x^2+y^2+z^2>1.\end{cases}$$

解: 显然当 $|t|>\sqrt{3}$ 时, 有 $f(x,y,z)=0$, 那么 $F(t)=0$. 当 $|t|\leqslant\sqrt{3}$ 时, 有

$$F(t)=\iint_S\left(1-x^2-y^2-z^2\right)\mathrm{d}S$$

其中 S 是平面 $x+y+z=t$ 位于球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 的部分. 作正交变换

$$(u,v,w)^{\mathrm{T}}=T(x,y,z)^{\mathrm{T}}$$

其中 T 是第一行元素均为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 的正交矩阵, 那么 $u=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)$, 且

$$u^2+v^2+w^2=(u,v,w)(u,v,w)^{\mathrm{T}}=(x,y,z)T^{\mathrm{T}}T(x,y,z)^{\mathrm{T}}=(x,y,z)(x,y,z)^{\mathrm{T}}=x^2+y^2+z^2.$$

因此上述正交变换将 S 对应为 $S':u=\frac{t}{\sqrt{3}},u^2+v^2+w^2\leqslant 1$, 也就是

$$S':u=\frac{t}{\sqrt{3}},v^2+w^2\leqslant 1-\frac{t^2}{3}$$

自然 $\sqrt{1+u_v^2+u_w^2}=1$, 同时 $x^2+y^2+z^2=u^2+v^2+w^2=\frac{t^2}{3}+v^2+w^2$, 那么

$$\begin{aligned}F(t)&=\iint_{S'}\left(1-u^2-v^2-w^2\right)\mathrm{d}S=\iint_{v^2+w^2\leqslant 1-\frac{t^2}{3}}\left(1-\frac{t^2}{3}-v^2-w^2\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\&=\pi\left(1-\frac{t^2}{3}\right)^2-\iint_{v^2+w^2\leqslant 1-\frac{t^2}{3}}\left(v^2+w^2\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\&=\pi\left(1-\frac{t^2}{3}\right)^2-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}}r^2\cdot r\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{t^2}{3}\right)^2\end{aligned}$$

九、 (12 分) 设 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 有意义 (有限数或 $+\infty$ 或 $-\infty$). 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证明: 记 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$, 当 $a=+\infty$ 时, 存在 $M>0$, 当 $x>M$ 时, 有 $f(x)>1$. 进而任取 $A>M$, 有

$$\int_A^{A+1}f(x)\mathrm{d}x>\int_A^{A+1}1\mathrm{d}x=1$$

由 Cauchy 准则可知 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散, 这与已知矛盾.

当 $a>0$ 是有限数时, 存在 $M>0$, 当 $x>M$ 时, 有 $f(x)>\frac{a}{2}$, 进而任取 $A>M$, 有

$$\int_A^{A+1}f(x)\mathrm{d}x>\int_A^{A+1}\frac{a}{2}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}>0$$

由 Cauchy 准则可知 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散, 这与已知矛盾.

而若 $a=-\infty$ 或 $a<0$ 为有限数时, 由上可知 $\int_0^{+\infty}(-f(x))\mathrm{d}x$ 发散, 那么 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也发散, 这依旧与已知矛盾.

综上, 当 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时, 必有 $a=0$.

十、 (12 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k$, 试证:

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=[f(0)-k]\ln\frac{b}{a}\quad(a>0,b>0).$$

证明: 当 $a=b>0$ 时, 结论显然成立, 下面考虑 $a\neq b$ 的情况, 不失一般性, 可设 $0<a<b$. 对任意的

$0<m<M$, 通过换元 $ax=u, bx=v$, 可得

$$\begin{aligned}\int_m^M \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x &= \int_m^M \frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x - \int_m^M \frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x = \int_{am}^{aM}\frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u - \int_{bm}^{bM}\frac{f(v)}{v}\mathrm{d}v \\ &= \int_{am}^{bm}\frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u - \int_{aM}^{bM}\frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{16.2}$$

显然函数 $\frac{1}{u}$ 在 $[am,bm]$ 与 $[aM,bM]$ 上均不变号, 由积分第一中值定理, 存在 $\xi\in[am,bm], \eta\in[aM,bM]$, 使得

$$\int_{am}^{bm}\frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u = f(\xi)\int_{am}^{bm}\frac{1}{u}\mathrm{d}u = f(\xi)\ln\frac{b}{a}$$

$$\int_{aM}^{bM}\frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u = f(\eta)\int_{aM}^{bM}\frac{1}{u}\mathrm{d}u = f(\eta)\ln\frac{b}{a}.$$

两式分别关于 $m\to 0^+$ 及 $M\to+\infty$, 取极限, 结合 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k$, 有

$$\lim_{m\to 0^+}\int_{am}^{bm}\frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u = f(0)\ln\frac{b}{a}, \qquad \lim_{M\to+\infty}\int_{aM}^{bM}\frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u = k\ln\frac{b}{a}.$$

因此式(16.2)关于 $m\to 0^+$ 及 $M\to+\infty$ 取极限便有 $\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = [f(0)-k]\ln\frac{b}{a}$.

十一、 (13 分) 设 $u=x+y, v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, 试用新变量 u,v 变换等式

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \tag{16.3}$$

(假设所有出现的二阶偏导数都连续)

解: 首先注意到 $u_x=u_y=1, v_x=-\frac{1}{x^2}, v_y=-\frac{1}{y^2}$, 因此

$$z_x = z_u - \frac{1}{x^2}z_v;$$

$$z_y = z_u - \frac{1}{y^2}z_v.$$

进而

$$\begin{aligned} z_{xx} &= \left(z_{uu}-\frac{1}{x^2}z_{uv}\right) - \frac{1}{x^2}\left(z_{vu}-\frac{1}{x^2}z_{vv}\right) + \frac{2}{x^3}z_v = z_{uu} - \frac{2}{x^2}z_{uv} + \frac{1}{x^4}z_{vv} + \frac{2}{x^3}z_v; \\ z_{xy} &= \left(z_{uu}-\frac{1}{y^2}z_{uv}\right) - \frac{1}{x^2}\left(z_{vu}-\frac{1}{y^2}z_{vv}\right) = z_{uu} - \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)z_{uv} + \frac{1}{x^2y^2}z_{vv}; \\ z_{yy} &= \left(z_{uu}-\frac{1}{y^2}z_{uv}\right) - \frac{1}{y^2}\left(z_{vu}-\frac{1}{y^2}z_{vv}\right) + \frac{2}{y^3}z_v = z_{uu} - \frac{2}{y^2}z_{uv} + \frac{1}{y^4}z_{vv} + \frac{2}{y^3}z_v. \end{aligned}$$

由此可知

$$x^2z_{xx} - \left(x^2+y^2\right)z_{xy} + y^2z_{yy} = \left(\frac{x^4+y^4}{x^2y^2}-2\right)z_{uv} + 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)z_v. \tag{16.4}$$

而 $u=x+y, v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{u}{xy}$, 也就是 $xy=\frac{u}{v}$, 那么

$$\begin{aligned} x^4+y^4 &= \left(x^2+y^2\right)^2 - 2x^2y^2 = \left[(x+y)^2-2xy\right]^2 - 2x^2y^2 \\ &= \left(u^2-\frac{2u}{v}\right)^2 - \frac{2u^2}{v^2} = u^4 - \frac{4u^3}{v} + \frac{2u^2}{v^2}. \end{aligned}$$

进而 $\frac{x^4+y^4}{x^2y^2} = u^2v^2-4uv+2$, 将此代入到式(16.4), 方程式(16.3)等价于 $\left(u^2v^2-4uv\right)z_{uv}+2vz_v=0$, 也就是

$$\left(u^2v-4u\right)z_{uv} + 2z_v = 0.$$

十二、 (15 分) 设函数列 $f_n(x)=nx\mathrm{e}^{-n^2x^2}, x\in[0,1], n=1,2,\cdots$. 证明:

1. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上收敛于 $f(x)\equiv 0$.
2. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上是否一致收敛于 $f(x)\equiv 0$? 判断并给出理由.
3. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上积分平均收敛于 $f(x)\equiv 0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0$.

证明: (1) 显然 $f_n(0)=0$, 而当 $x\in(0,1]$ 时, 根据不等式 $\mathrm{e}^t>t(t>0)$ 可知

$$0<f_n(x)=\frac{nx}{\mathrm{e}^{n^2x^2}}<\frac{nx}{n^2x^2}=\frac{1}{nx}\to 0(n\to\infty)$$

即 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上收敛于 $f(x)\equiv 0$.

(2) 取 $x_n=\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$, 明显 $\{x_n\}\subseteq[0,1]$, 但是

$$\lim_{n\to\infty}|f_n(x_n)-f(x_n)|=\lim_{n\to\infty}f_n(x_n)=\mathrm{e}^{-1}\neq 0.$$

因此 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛于 $f(x)\equiv 0$.

(3) 明显

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx\mathrm{e}^{-n^2x^2}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\mathrm{e}^{-n^2x^2}\bigg|_1^0=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-n^2}}{2n}=0.$$

华中科技大学 2025 年数学分析试卷

一、 计算题. 每题 10 分, 共 40 分.

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x^2)^3-\cos^2 x}{\tan x^2}$.

解: 利用等价无穷小替换以及极限运算法则可知,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{(1+x^2)^3-\cos^2 x}{\tan(x^2)}&=\lim_{x\to0}\frac{(1+x^2)^3-1+1-\cos^2 x}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(1+x^2)^3-1}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{2}{x^2}\cdot\lim_{x\to0}(1+\cos x)=3+1=4.\end{aligned}$$

2. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^{2024}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解: 注意到对 $\forall n\in[1,+\infty)$, 均有 $\dfrac{\sin x}{1+x^{2024}}>0$, 所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin x}{1+x^{2024}}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin x\mathrm{d}x=1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\sim\frac{\pi^2}{2n^2}.$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi^2}{2n^2}$ 收敛, 所以由比较判别法可知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\dfrac{\sin x}{1+x^{2024}}\mathrm{d}x$ 收敛.

3. 设 $\beta>0,\alpha>1$ 为常数, 计算无穷积分 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+\beta x^{\alpha}}$.

解: 令 $u=\beta x^{\alpha}$, $x=\dfrac{1}{\beta^{\frac{1}{\alpha}}}u^{\frac{1}{\alpha}}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\beta^{\frac{1}{\alpha}}}\dfrac{1}{\alpha}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{d}u$,

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{\beta^{\frac{1}{\alpha}}}\cdot\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\frac{1}{\alpha}}}{1+u}\mathrm{d}u=\frac{1}{\beta^{\frac{1}{\alpha}}}\cdot\frac{1}{\alpha}B\left(\frac{1}{\alpha},1-\frac{1}{\alpha}\right)\\&=\frac{1}{\beta^{\frac{1}{\alpha}}}\cdot\frac{1}{\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1-\frac{1}{\alpha}\right)}=\frac{\pi}{\alpha\beta^{\frac{1}{\alpha}}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}\end{aligned}$$

其中运用了 Beta 函数定义: $B(P,Q)=\int_0^{+\infty}\dfrac{y^{P-1}}{(1+y)^{P+Q}}\mathrm{d}y$ 以及余元公式 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}$, $(0<s<1)$.

4. 设 $\alpha>0$, 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)^{\alpha}-x^{\alpha}-\dfrac{x+1}{x+\mathrm{e}^{\sin x}}\right]$.

解: 利用 Lagrange 中值定理可知,

$$\lim_{x\to+\infty}[(x+1)^{\alpha}-x^{\alpha}]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^{\alpha}-x^{\alpha}}{(x+1)-x}=\alpha\lim_{x\to+\infty}\xi^{\alpha-1}.$$

其中 ξ 介于 x 与 $x+1$ 之间, 所以

当 $\alpha\in(0,1)$ 时,

$$\lim_{x\to+\infty}\xi^{\alpha-1}=0;$$

当 $\alpha=1$ 时,

$$\lim_{x\to+\infty}\xi^{\alpha-1}=1;$$

当 $\alpha\in(1,+\infty)$ 时,

$$\lim_{x\to+\infty}\xi^{\alpha-1}=+\infty,$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}[(x+1)^{\alpha}-x^{\alpha}]=\begin{cases}0, & \alpha\in(0,1)\\ 1, & \alpha=1\\ +\infty, & \alpha\in(1,+\infty)\end{cases}$$

且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x+\mathrm{e}^{\sin x}}=1,$$

所以综上所述,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+1)^{\alpha}-x^{\alpha}-\frac{x+1}{x+\mathrm{e}^{\sin x}}\right]=\begin{cases}-1, & \alpha\in(0,1)\\ 0, & \alpha=1\\ +\infty, & \alpha\in(1,+\infty)\end{cases}$$

二、 解答题. 每题 15 分, 共 60 分.

5. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n^2}{n^3+k^3+k^2}$.

解: 显然对任意的正整数 n, 有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^3+k^3+k^2}<\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^3+k^3}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}.$$

其中 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}$ 可看作函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^3}$ 在 $[0,1]$ 上 n 等距分割下的积分和, 因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}=\int_0^1\frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x.$$

由于 $1+x^3=(1+x)\left(x^2-x+1\right)$, 所以可设 $\dfrac{1}{1+x^3}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$, 通分后有

$$A\left(x^2-x+1\right)+(Bx+C)(1+x)=1.$$

解得 $A=\dfrac{1}{3}, B=-\dfrac{1}{3}, C=\dfrac{2}{3}$, 于是

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x&=\int_0^1\left[\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3\left(x^2-x+1\right)}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln(x+1)\Big|_0^1-\frac{1}{6}\int_0^1\frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{6}\int_0^1\frac{\mathrm{d}\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\\&=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)\Big|_0^1+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^1=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

另外, 对任意的正整数 n, 还有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^3+k^3+k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^3+k^3+n^2}.$$

其中

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^3+k^3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^3+k^3+n^2}\right|=\sum_{k=1}^{n}\frac{n^4}{\left(n^3+k^3\right)\left(n^3+k^3+n^2\right)}<\sum_{k=1}^{n}\frac{n^4}{n^6}=\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty).$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^3+k^3+n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^3+k^3}=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

综合 (1) 式与 (2) 式, 由迫敛性可知 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^3+k^3+k^2}=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

6. 求极限 $\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}$.

解: 直接 Taylor 展开,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}&=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-1-x}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)}-\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{x^2}{24}+o(x^2)\right)}\\
&=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-1-x}{\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)^{1/2}-\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{x^2}{24}+o(x^2)\right)}\\
&=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)}=-3.
\end{aligned}
$$

7. 求积分

$$
I=\oint_C (x+y)^2\,dx-\left(x^2+y^2\right)dy.
$$

其中 C 是从点 $A(1,1)$ 到点 $B(2,5)$ 再到点 $C(3,2)$ 最后到点 $A(1,1)$ 的三角形边界.

解: 令 $\begin{cases}P(x,y)=(x+y)^2\\ Q(x,y)=-(x^2+y^2)\end{cases}$, 所以 $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2(x+y)$, $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=-2x$.

由于曲线是封闭的且分段光滑, 所以由 Green 公式可知,

$$
\begin{aligned}
I&=\oint_C (x+y)^2dx-\left(x^2+y^2\right)dy=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\\
&=-\iint_D(-2x-2(x+y))dxdy=2\iint_D(2x+y)dxdy
\end{aligned}
$$

显然 $x=2$ 与直线 $CA: y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 的交点为: $D\left(2,\frac{3}{2}\right)$. 记 D_1 为三角形 ABD 区域; D_2 为三角形 BCD 区域, 所以

$$
\begin{aligned}
I&=2\iint_{D_1}(2x+y)dxdy+2\iint_{D_2}(2x+y)dxdy\\
&=2\int_1^2dx\int_{\frac{1+x}{2}}^{4x-3}(2x+y)dy+2\int_2^3dx\int_{\frac{1+x}{2}}^{11-3x}(2x+y)dy\\
&=\frac{7}{4}\int_1^2\left(17x^2-22x+5\right)dx-\frac{7}{4}\int_2^3\left(3x^2+14x-69\right)dx\\
&=\frac{7}{4}\times\frac{35}{3}-\frac{7}{4}\times(-15)=\frac{140}{3}
\end{aligned}
$$

8. 设 a,b,c 为正常数, S 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧, 计算第二类曲面积分

$$
I=\iint_S\frac{x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}.
$$

解: 为了方便, 记 $r=\sqrt{ax^2+by^2+cz^2}$, $P=\frac{x}{r^3}$, $Q=\frac{y}{r^3}$, $R=\frac{z}{r^3}$, 则 $I=\iint_S P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$. 注意到 P,Q,R 在不包含原点的区域上存在连续偏导数, 且

$$
P_x=\frac{r^3-x\cdot3r^2\cdot\frac{ax}{r}}{r^6}=\frac{r^2-3ax^2}{r^5}.
$$

同理可知 $Q_y=\frac{r^2-3by^2}{r^5}$, $R_z=\frac{r^2-3cz^2}{r^5}$, 于是

$$
P_x+Q_y+R_z=\frac{3r^2-3\left(ax^2+by^2+cz^2\right)}{r^5}=0
$$

在 V 中挖掉一个小椭球 $V_1: ax^2+by^2+cz^2\leqslant\varepsilon^2(\varepsilon>0)$, 且记 V_1 的表面为 $S_1: ax^2+by^2+cz^2=\varepsilon^2$,

取内侧, 那么 $S+S_1$ 即为立体 $V-V_1$ 的表面, 方向为外侧, 由高斯公式可知

$$\iint_{S+S_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{V-V_1} \left(P_x + Q_y + R_z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

这说明

$$I = -\iint_{S_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{-S_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $-S_1$ 表示 S_1 取外侧. 而在 S_1 上 $r=\sqrt{ax^2+by^2+cz^2}=\varepsilon$ 为常数, 因此 $P=\dfrac{x}{\varepsilon^3}, Q=\dfrac{y}{\varepsilon^3}, R=\dfrac{z}{\varepsilon^3}$, 于是

$$I = \frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{-S_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

再次根据高斯公式, 有

$$I = \frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{V_1}(1+1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{4\pi\varepsilon^3}{3\sqrt{abc}} = \frac{4\pi}{\sqrt{abc}}$$

三、 证明题. 前两题各 10 分, 后两题各 15 分.

9. 用 $\varepsilon - N$ 语言证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}}=0$.

证明: 因为 $(2n)! > n!$, 所以 $\sqrt[n]{(2n)!} > \sqrt[n]{n!}$, 所以

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}} < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}, (\forall n \in \mathbb{N}_+).$$

先利用数学归纳法证明: $\dfrac{n}{3} < \sqrt[n]{n!}, (\forall n \in \mathbb{N}_+)$. 当 $n=1$ 时, 显然 $\dfrac{1}{3}<1$, 故结论成立! 假设 $n=k$ 时, 结论也成立, 所以 $\dfrac{k}{3} < \sqrt[k]{k!}$, 即 $\left(\dfrac{k}{3}\right)^k < k!$. 则当 $n=k+1$ 时, 有

$$\begin{aligned}(k+1)! &= k!(k+1) > \left(\frac{k}{3}\right)^k\cdot(k+1)\\ &= 3\cdot\frac{\left(\frac{k}{3}\right)^k}{\left(\frac{k+1}{3}\right)^k}\left(\frac{k+1}{3}\right)^k\left(\frac{k+1}{3}\right) = 3\cdot\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\left(\frac{k+1}{3}\right)^k\left(\frac{k+1}{3}\right)\\ &> \left(\frac{k+1}{3}\right)^k\left(\frac{k+1}{3}\right).\end{aligned}$$

这里因为 $3\cdot\left(\dfrac{k}{k+1}\right)^k > 1, (\forall k \in \mathbb{N}_+)$, 我们不妨来证明: 令 $f(k) = k\ln\left(\dfrac{k}{k+1}\right)+\ln 3$, 则

$$\begin{aligned}f'(k) &= \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)+\frac{1}{k+1}\\ f''(k) &= \frac{1}{\frac{k}{k+1}}\cdot\frac{1\cdot(k+1)-k\cdot 1}{(k+1)^2}+\frac{-1}{(k+1)^2}\\ &= \frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) > 0\end{aligned}$$

又因为 $f'(1) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}-\ln 2 < 0$, 且

$$\lim_{k\to+\infty} f'(k) = \lim_{k\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)+\frac{1}{k+1}\right) = 0$$

所以 $f'(k)<0$ 在 $\forall k\in\mathbb{N}_+$ 上恒成立. 这表明 $f(k)=k\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)+\ln 3$ 在 $k\geqslant 1$ 上单调递减, 且

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}f(k)&=\lim_{k\to+\infty}\left(k\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)+\ln 3\right)\\&=\lim_{k\to+\infty}\left(k\ln\left(1-\frac{1}{k+1}\right)+\ln 3\right)=\lim_{k\to+\infty}\left(k\cdot\left(-\frac{1}{k+1}\right)+\ln 3\right)\\&=\ln 3-1=\ln\left(\frac{3}{\mathrm{e}}\right)>0\end{aligned}$$

以及 $f(1)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln 3=\ln\left(\frac{3}{2}\right)>0$. 所以

$$f(k)=k\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)+\ln 3>0$$

所以 $\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)^k>\ln\left(\frac{1}{3}\right)$, 即 $\left(\frac{k}{k+1}\right)^k>\frac{1}{3}$,

$$3\cdot\left(\frac{k}{k+1}\right)^k>1,(\forall k\in\mathbb{N}_+)$$

于是, 由数学归纳法可知, $\frac{n}{3}<\sqrt[n]{n!},(\forall n\in\mathbb{N}_+)$, 所以

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}}<\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\frac{1}{\frac{n}{3}}=\frac{3}{n},(\forall n\in\mathbb{N}_+)$$

于是对任意的 $\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}}\right|<\left|\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right|<\left|\frac{3}{n}\right|<\varepsilon.$$

即证出 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}}=0$.

10. 设

$$x_1=1,\quad x_2=\sqrt{\frac{1}{2}+1},\quad x_3=\sqrt{\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{1}{2}+1}},\quad x_4=\sqrt{\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{1}{2}+1}}},$$

$$\cdots,\quad x_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{n+1}+x_n},\cdots.$$

证明数列 $\{x_n\}$ 收敛并求出极限值.

证明: 由于 $1\leqslant x_1\leqslant 2$, 设 $1\leqslant x_k\leqslant 2$, 则

$$1<\frac{1}{k+1}+x_k<2+2=4$$

开根号可得 $1<x_{k+1}<2$. 于是对任意的正整数 n, 均有 $1\leqslant x_n\leqslant 2$, 因此 $\{x_n\}$ 存在有限的上极限与下极限, 设它们分别为 M,m, 那么 $1\leqslant m\leqslant M\leqslant 2$. 对等式 $x_{n+1}^2=\frac{1}{n+1}+x_n$ 关于 $n\to\infty$ 取上极限, 有

$$M^2=\left(\varlimsup_{n\to\infty}x_{n+1}\right)^2=\varlimsup_{n\to\infty}x_{n+1}^2=\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\varlimsup_{n\to\infty}x_n=M$$

结合 $M\geqslant 1$ 可解得 $M=1$. 同理可得 $m=1$, 即 $M=m=1$, 因此 $\{x_n\}$ 收敛, 其极限值为 1.

11. 设函数 $f(x)\in C(0,+\infty)$, 满足 $x=f(x)5^{f(x)}$. 证明:

(1). $f(x)$ 单调递增.

(2). $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

(3). $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\ln x}=\frac{1}{\ln 5}$.

证明: (1) 首先根据 $x=f(x)5^{f(x)}$ 可知 $f(x)>0,x\in(0,+\infty)$. 其次, 由于 $g(x)=x\cdot 5^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上

严格递增, 对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 设 $x_1 < x_2$, 则有 $f(x_1)5^{f(x_1)} < f(x_2)5^{f(x_2)}$, 也就是 $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$, 那么 $f(x_1) < f(x_2)$, 这说明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格递增.

(2) 因为对任意的 $x > 0$, 有 $x < \mathrm{e}^x$, 因此

$$x = f(x)5^{f(x)} < \mathrm{e}^{f(x)}5^{f(x)} = \mathrm{e}^{(1+\ln 5)f(x)}.$$

那么 $f(x) > \dfrac{\ln x}{1+\ln 5}$, 而 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{1+\ln 5} = +\infty$, 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(3) 首先由 (2) 可知存在 $M > 1$, 当 $x > M$ 时, 有 $f(x) > 1$, 那么 $x = f(x)5^{f(x)} > 5^{f(x)}$, 进而 $f(x) < \dfrac{\ln x}{\ln 5}$, 于是

$$0 < \frac{\ln f(x)}{\ln x} < \frac{\ln\ln x - \ln\ln 5}{\ln x} \to 0 \quad (x \to +\infty).$$

这说明 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln f(x)}{\ln x} = 0$. 而根据 $x = f(x)5^{f(x)}$ 还知 $\ln x = \ln f(x) + f(x)\ln 5$, 那么

$$\frac{f(x)}{\ln x} = \frac{1}{\ln 5}\left(1 - \frac{\ln f(x)}{\ln x}\right).$$

取极限可得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\ln x} = \frac{1}{\ln 5}\left(1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x}\right) = \frac{1}{\ln 5}.$$

12. 对常数 $a > 0$, 记平面区域 $D: x^2 + y^2 \leqslant a^2$ 的边界为 ∂D. 设二元函数 $f(x, y)$ 在 D 上有连续偏导数, 且 $f(x, y) = 0, (x, y) \in \partial D$. 证明:

$$\left|\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{\pi a^2}{3} \max_{(x,y)\in D} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

证明: 由 Green 公式可知

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

分别取 $P = y \cdot f(x, y), Q = 0$ 和 $P = 0, Q = x \cdot f(x, y)$, 可得

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\oint_L yf(x, y)\mathrm{d}x - \iint_D y\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L xf(x, y)\mathrm{d}y - \iint_D x\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

上两式相加可得

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\oint_L xf(x, y)\mathrm{d}y - yf(x, y)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\iint_D \left(y\frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又 $f(x, y) = 0, (x, y) \in \partial D$, 故

$$\oint_L xf(x, y)\mathrm{d}y - yf(x, y)\mathrm{d}x = 0$$

所以 $\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\dfrac{1}{2}\iint_D \left(y\dfrac{\partial f}{\partial y} + x\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 由 Cauchy 不等式可知, $y\dfrac{\partial f}{\partial y} + x\dfrac{\partial f}{\partial x} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \cdots}$

所以

$$\begin{aligned}\left|-\frac{1}{2}\iint_D \left(y\frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| &\leqslant \frac{1}{2}\iint_D \left|y\frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial f}{\partial x}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\leqslant \frac{1}{2}\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\leqslant \frac{1}{2}\max_{(x,y)\in D}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2} \cdot \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \sqrt{r^2}\cdot r\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\mathrm{d}r = 2\pi\cdot\frac{1}{3}r^3\Big|_0^a = 2\pi\cdot\frac{1}{3}a^3.\end{aligned}$$

那么 $\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \dfrac{\pi a^3}{3}\max\limits_{(x,y)\in D}\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$.

兰州大学 2025 年数学分析试卷

一、 解答如下问题.

1. $\{x_n\}$ 的任意子列都有收敛到 0 的子列, 则 $\{x_n\}$ 是否收敛? 为什么?

解: 结论：数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且收敛于 0 , 理由：假设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \neq 0$, 则 $\exists\varepsilon_0 > 0$ 及 $\{n_k\}, n_k \to +\infty$, 使得 $\left|x_{n_k} - 0\right| \geqslant \varepsilon_0$. 但按假设, $\{x_{n_k}\}$ 中必定能选出收敛于 0 的子列 $\{x_{n_k}{'}\}$, 结合起来即

$$0 = \lim_{k\to+\infty} \left|x'_{n_k} - 0\right| \geqslant \varepsilon_0 > 0$$

矛盾, 故假设不成立, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 是否收敛? 为什么?

解: 例如

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} \\ + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \underbrace{\frac{1}{k\sqrt[3]{k}} - \cdots - \frac{1}{k\sqrt[3]{k}}}_{k\text{个}} + \cdots\end{aligned} \tag{18.1}$$

将上述级数符号相同的相邻项加括号, 可得

$$1 - 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k}} + \cdots \tag{18.2}$$

再将上述级数相邻的两项依次加括号, 可知

$$(1-1) + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right) + \cdots = 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots$$

收敛, 所以级数式(18.2)收敛, 那么级数式(18.1)收敛. 另外, 显然有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3\cdot 2} - \frac{1}{2^3\cdot 2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^3\cdot 3} - \frac{1}{3^3\cdot 3} - \frac{1}{3^3\cdot 3} \\ + \cdots + \frac{1}{k} - \underbrace{\frac{1}{k^3\cdot k} - \cdots - \frac{1}{k^3\cdot k}}_{k\text{个}} + \cdots\end{aligned}$$

注意到此级数的第 $2 + 3 + \cdots + (n+1) = \dfrac{n^2+3n}{2} \overset{\text{def}}{=} m$ 个部分和为

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} a_k^3 = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}\right).$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty} S_m = +\infty$, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 发散.

二、 求极限.

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(2k-1)^4}{n^3(n^2+k)}$.

解: 对任意的正整数 n, 有

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)^4}{n^3(n^2+k)} < \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)^4}{n^5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{n}\right)^4.$$

其中 $\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{n}\right)^4$ 可看作函数 $f(x)=x^4$ 在 $[0,2]$ 上 n 等距分割下的积分和 (取区间中点), 因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)^4}{n^5}=\frac{1}{2}\int_0^2 x^4\mathrm{d}x=\frac{16}{5}.$$

另外, 注意到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)^4}{n^3(n^2+k)}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)^4}{n^3(n^2+n)}=\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)^4}{n^5}.$$

上式右端取极限可得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)^4}{n^3(n^2+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)^4}{n^5}=\frac{16}{5}.$$

由迫敛性可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)^4}{n^3(n^2+k)}=\frac{16}{5}$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{-x^2}$.

解:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{-x^2}&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)\ln\left(\frac{\tan x-x}{x}+1\right)}\\&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)\cdot\frac{\tan x-x}{x}}=\mathrm{e}^0=1.\end{aligned}$$

三、 设 f 在 $[0,1]$ 上单调递增, $f(0)>0,\ f(1)<1$. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=\xi^2$.

证明: 【法 1】令 $F(x)=f(x)-x^2$, 其中 $x\in[0,1]$, 因为 $f(0)>0,\ f(1)<1$, 所以 $\begin{cases}F(1)=f(1)-1<1-1=0\\F(0)=f(0)-0>0\end{cases}$.

因为 f 在 $[0,1]$ 上连续单增, 所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 又 $F(1)F(0)<0$. 所以由零点定理可知,$\exists\xi\in(0,1)$, 使 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=\xi^2$, 得证!

【法 2】作数集 $E=\left\{x\in(0,1)\mid f(x)\geqslant x^2\right\}$, 且记 $\xi=\sup E$, 则

(i) 对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $t:\xi-\varepsilon<t\leqslant\xi$, 使得 $f(t)\geqslant t^2$, 令 $\varepsilon\to 0$, 即 $t\to\xi^-$, 可知,$f(\xi^-)\geqslant\xi^2$;

(ii) 对 $\forall x\in(0,1):x>\xi$, 可知 $f(x)<\xi^2$. 令 $x\to\xi^+$, 则 $f(\xi^+)\leqslant\xi^2$.

综合 (i)、(ii) 可得 $f(\xi^+)\leqslant f(\xi^-)$, 注意到 f 在 $[0,1]$ 上单增, 有 $f(\xi^+)=f(\xi^-)=f(\xi)=\xi^2$.

四、 $f(x),g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, $\left|f'(x)+f(x)g(x)\right|\leqslant|f(x)|$. 证明: $f(x)\equiv 0$.

证明: 令 $h(x)=f^2(x)\mathrm{e}^{2\int_0^x(g(t)-1)\mathrm{d}t}$, $h(x)\geqslant 0$, 则

$$\begin{aligned}h'(x)&=2f(x)f'(x)\mathrm{e}^{2\int_0^x(g(t)-1)\mathrm{d}t}+f^2(x)\mathrm{e}^{2\int_0^x(g(t)-1)\mathrm{d}t}2(g(x)-1)\\&=2\left(f(x)f'(x)+f^2(x)g(x)-f^2(x)\right)\mathrm{e}^{2\int_0^x(g(t)-1)\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

由 $\left|f'(x)+f(x)g(x)\right|\leqslant|f(x)|$ 得

$$\left|f(x)f'(x)+f^2(x)g(x)\right|\leqslant f^2(x)$$

故 $f(x)f'(x)+f^2(x)g(x)\leqslant\left|f(x)f'(x)+f^2(x)g(x)\right|\leqslant f^2(x)$. 那么

$$\begin{aligned}h'(x)&=2\left(f(x)f'(x)+f^2(x)g(x)-f^2(x)\right)\mathrm{e}^{2\int_0^x(g(t)-1)\mathrm{d}t}\\&\leqslant 2\left(\left|f(x)f'(x)+f^2(x)g(x)\right|-f^2(x)\right)\mathrm{e}^{2\int_0^x(g(t)-1)\mathrm{d}t}\\&\leqslant 2\left(f^2(x)-f^2(x)\right)\mathrm{e}^{2\int_0^x(g(t)-1)\mathrm{d}t}=0\end{aligned}$$

所以 $h'(x) \leqslant 0$, 那么 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减, 且 $h(0)=0$. 因此, 有 $h(x)\equiv 0$, 且 $f(0)=0$, 即 $f(x)\equiv 0$.

五、 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, $f(x)$ 是周期函数, $f(x^2)$ 也是周期函数, 证明: $f(x)$ 为常值函数.

证明: 【法 1】反证法. 若 $f(x)$ 不是常值函数, 则存在 $c\in(-\infty,+\infty)$, 满足 $f(c)\neq f(0)$. 设 $f(x)$ 以正数 T 为周期, 考虑数列 $x_n=\sqrt{nT+c}, y_n=\sqrt{nT}, n>\max\left\{-\frac{c}{T},0\right\}$, 明显

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{x\to\infty}\frac{c}{\sqrt{nT+c}+\sqrt{nT}}=0.$$

但是

$$\lim_{n\to\infty}\left|f\left(x_n^2\right)-f\left(y_n^2\right)\right|=\lim_{n\to\infty}|f(nT+c)-f(nT)|=|f(c)-f(0)|>0.$$

这说明 $f\left(x^2\right)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续. 而实际上 $f\left(x^2\right)$ 作为周期函数其在 $(-\infty,+\infty)$ 上是一致连续的, 因此矛盾, 所以 $f(x)$ 为常值函数. 关于 $f\left(x^2\right)$ 的一致连续性, 证明如下:

记 $g(x)=f\left(x^2\right)$ 是以正数 S 为周期的连续函数, 那么 $g(x)$ 在 $[0,2S]$ 连续, 进而一致连续, 所以对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta\in(0,S)$, 使得对任意的 $x_1,x_2\in[0,2S]$, 当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有

$$\left|g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)\right|<\varepsilon. \tag{18.3}$$

任取 $x',x''\in\mathbb{R}$, 不妨设 $x'\leqslant x''$, 当 $\left|x'-x''\right|=x''-x'<\delta$ 时, 由带余除法知, 存在整数 n, 使得 $x'-nS\in[0,S)$, 那么

$$0\leqslant x'-nS\leqslant x''-nS<x'-nS+\delta<S+\delta<2S$$

即 $x'-nS, x''-nS\in[0,2S]$, 且 $\left|\left(x'-nS\right)-\left(x''-nS\right)\right|=\left|x'-x''\right|<\delta$, 于是结合式(18.3)可知

$$\left|g\left(x'\right)-g\left(x''\right)\right|=\left|g\left(x'-nS\right)-g\left(x''-nS\right)\right|<\varepsilon.$$

这说明 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

【法 2】反证法. 设 $f(x)$ 的最小正周期为 T; $f\left(x^2\right)$ 的最小正周期为 S, 故 $f\left((x+S)^2\right)=f\left(x^2\right)$, 进而 $f\left(x^2+S^2+2Sx\right)=f\left(x^2\right)$. 所以存在 n_x, 使得 $S^2+2Sx=n_xT$, 显然 $\left\{S^2+2Sx\right\}_{x\in\mathbb{R}}$ 是不可数集, $\{n_xT\}$ 是至多可数集, 因此矛盾, 所以 $f(x)$ 是常值函数.

六、 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续.

1. 证明: $\displaystyle\int_{-1}^{1}f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x\right)^2$.

2. 若 $f(x)$ 单调递增, $f(0)=0$, 证明: $\displaystyle\int_{-1}^{1}f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 2f(0)f(-1)$.

证明: (1) 由 Schwarz 不等式可知, 对任意的正数 a, 有

$$\int_{-1}^{1}f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_{-1}^{1}a^2\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_{-1}^{1}af(x)\right)^2$$

则 $2a^2\displaystyle\int_{-1}^{1}f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant a^2\left(\int_{-1}^{1}f(x)\right)^2$, 即 $\displaystyle\int_{-1}^{1}f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}f(x)\right)^2$.

(2) 因为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 单调递增, 所以 $\begin{cases} x\in[-1,0], f(x)\leqslant f(0)\\ x\in[0,1], f(x)\geqslant f(0)\end{cases}$, 则

$$\int_{-1}^{1}f^2(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}f^2(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}f^2(x)\mathrm{d}x$$

对于 $\displaystyle\int_{-1}^{0}f^2(x)\mathrm{d}x$,

因为 $f(x)\leqslant f(0)=0$, 所以 $f^2(x)\geqslant f(0)f(x)$. 那么 $\displaystyle\int_{-1}^{0}f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{-1}^{0}f(0)f(x)\mathrm{d}x=f(0)\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x$.

对于 $\displaystyle\int_{0}^{1}f^2(x)\mathrm{d}x$,

因为 $f(x)\geqslant f(0)=0$, 所以 $f^2(x)\geqslant f(0)f(x)$. 那么 $\displaystyle\int_{0}^{1}f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{0}^{1}f(0)f(x)\mathrm{d}x=f(0)\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$,

两式相加可得：

$$\int_{-1}^{0} f^2(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant f(0)\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x+f(0)\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$

即 $\int_{-1}^{1} f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant f(0)\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=2f(0)f(\xi)=2f(0)f(-1)$, 得证！

七、 求 $\frac{x^2}{3}+y^2+\frac{z^2}{2}=1$ 与 $2x+y+z=0$ 相交所得椭圆的面积.

解: 记函数 $f(x,y,z)=r^2$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 构造 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\left(\frac{x^2}{3}+y^2+\frac{z^2}{2}-1\right)+\mu(2x+y+z)$$

考虑方程组

$$\begin{cases} L_x=2x+\frac{2}{3}\lambda x+2\mu=0 & (18.4)\\ L_y=2y+2\lambda y+\mu=0 & (18.5)\\ L_z=2z+\lambda z+\mu=0 & (18.6)\\ L_\lambda=\frac{x^2}{3}+y^2+\frac{z^2}{2}-1=0 & (18.7)\\ L_\mu=2x+y+z=0 & (18.8)\end{cases}$$

将式(18.4), 式(18.5), 式(18.6)分别乘以 x,y,z 后相加, 并结合式(18.7), 式(18.8)可知 $2r^2+2\lambda=0$, 即

$$\lambda=-r^2. \tag{18.9}$$

将其代入到式(18.4)可得

$$\left(r^2-3\right)x=3\mu$$

若 $r^2=3$, 则 $\mu=0,\lambda=-3$, 由式(18.5), 式(18.6)可知 $y=z=0$, 结合式(18.8)可知 $x=0$, 这与式(18.7)矛盾. 所以 $r^2\neq 3$, 进而

$$x=\frac{3\mu}{r^2-3}.$$

同理, 将式(18.9)分别代入式(18.5), 式(18.6)可得

$$y=\frac{\mu}{2\left(r^2-1\right)},\quad z=\frac{\mu}{r^2-2}.$$

进而根据式(18.8)就有

$$\frac{6\mu}{r^2-3}+\frac{\mu}{2\left(r^2-1\right)}+\frac{\mu}{r^2-2}=0.$$

由于 $\mu\neq 0$, 上式消去 μ 可得

$$15\left(r^2\right)^2-49r^2+36=0.$$

由此解出来的两个根 r_1^2,r_2^2 即为 f 在两个稳定点处的函数值. 由于 f 在有界闭区域

$$D=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{x^2}{3}+y^2+\frac{z^2}{2}=1\,,2x+y+z=0\right\}$$

上连续, 从而一定存在最大值与最小值. 于是上述得到 r_1^2,r_2^2 为 f 的最大值与最小值, 即椭圆的长、短半轴为 r_1,r_2. 由韦达定理可知 $r_1^2r_2^2=\frac{36}{15}=\frac{12}{5}$, 所以椭圆的面积为 $S=\pi r_1r_2=2\pi\sqrt{\frac{3}{5}}$.

八、 $\Sigma: z=x^2+y^2\ (0\leqslant z\leqslant 1)$, 方向取上侧, 求 $\iint_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2+z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+x^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解: 【法 1】补面 $\Sigma_1 : z = 1, x^2 + y^2 \leqslant 1$ 取互侧, 由 Gauss 公式:

$$
\begin{aligned}
I &= \left(\iint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1}\right)(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(z^3+x^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -\iiint_{\substack{z\leqslant x^2+y^2, 0\leqslant z\leqslant 1\\ x^2+y^2\leqslant 1}} \left(1+2y+3z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{1}\left(1+x^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -I_1 + I_2
\end{aligned}
$$

利用柱坐标变换: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \text{ , 所以} \\ z = z \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \iiint_{z\leqslant x^2+y^2, 0\leqslant z\leqslant 1}\left(1+2y+3z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}}\left(1+2r\sin\theta+3z^2\right)r\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\frac{z}{6}\left(9z^2+4\sqrt{z}\sin\theta+3\right)\mathrm{d}\theta = \int_0^1 \pi\left(3z^3+z\right)\mathrm{d}z = \frac{5\pi}{4}
\end{aligned}
$$

利用极坐标变换: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$, 所以

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(1+x^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(1+r^3\cos^3\theta\right)r\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^3\theta}{5}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\theta = \pi
\end{aligned}
$$

那么 $I = -I_1 + I_2 = -\dfrac{5\pi}{4} + \pi = -\dfrac{\pi}{4}$.

【法 2】利用三合一投影法, 令 $z = x^2 + y^2$, 则 $z'_x = 2x, z'_y = 2y$.

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(z^3+x^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\left[(x+y)\cdot(-2x) + \left(y^2+\left(x^2+y^2\right)^2\right)(-2y) + \left(x^2+y^2\right)^3 + x^3\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

利用极坐标变换: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$, 所以

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\left[(x+y)\cdot(-2x) + \left(y^2+\left(x^2+y^2\right)^2\right)(-2y) + \left(x^2+y^2\right)^3 + x^3\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left[\begin{array}{l}(r\cos\theta+r\sin\theta)\cdot(-2r\cos\theta) \\ +\left((r\sin\theta)^2+\left(r^2\right)^2\right)(-2r\sin\theta)+\left(\left(r^2\right)^3+(r\cos\theta)^3\right)\end{array}\right]r\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{-\cos^2\theta}{2} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{2} - \frac{2\sin^3\theta}{5} - \frac{2\sin\theta}{7} + \frac{1}{8} + \frac{\cos^3\theta}{5}\right)\mathrm{d}\theta = -\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

九、 求 $I(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - x^2\cos^2\theta)\mathrm{d}t, x \in (-1, 1)$.

解: 由于 $\ln(1 - x^2\cos^2\theta)$ 关于 (x, θ) 在 $(-1, 1) \times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续且存在连续的偏导数, 因此 $I(x)$ 在 $(-1, 1)$

上可导, 同时当 $x \in (0,1)$ 时, 有

$$\begin{aligned} I'(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2x\cos^2\theta}{1-x^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-x^2\cos^2\theta)-1}{1-x^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi}{x} - \frac{2}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta - x^2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{x} - \frac{2}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\tan\theta)}{\tan^2\theta + (1-x^2)} \\ &= \frac{\pi}{x} - \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\frac{\tan\theta}{\sqrt{1-x^2}}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

积分可得

$$\begin{aligned} I(x) &= \pi\ln x - \int \frac{\pi}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \pi\ln x - \int \frac{\pi}{x^2\sqrt{x^{-2}-1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\ln x + \int \frac{\pi}{\sqrt{x^{-2}-1}}\,\mathrm{d}(x^{-1}) = \pi\ln x + \pi\ln(x^{-1} + \sqrt{x^{-2}-1}) + C \\ &= \pi\ln(1+\sqrt{1-x^2}) + C. \end{aligned}$$

根据连续性可知上式最终的结果对于 $x=0$ 也成立, 那么

$$I(0) = \pi\ln 2 + C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 1\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

解得 $C = -\pi\ln 2$, 也就是说

$$I(x) = \pi\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}, \quad x \in [0,1).$$

注意上式左右两端均是关于 x 的偶函数, 因此上式对于 $x \in (-1,0)$ 也成立.

十、 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上连续, 对任意的 $x \in [0,1]$, $\{f_n(x)\}$ 单调, $\{f_n(x)\}$ 点态收敛于连续函数. 证明: $\{f_n(x)\}$ 一致收敛.

证明: 根据已知, 对任意的 $x_0 \in [0,1]$, 数列 $\{|f_n(x_0) - f(x_0)|\}$ 均单调递减趋于零, 所以对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N = N(x_0) > 0$, 满足

$$|f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

而 $|f_N(x) - f(x)|$ 是连续函数, 根据保号性, 存在 $\delta = \delta(x_0) > 0$, 当 $x \in U(x_0;\ \delta) \cap [0,1]$ 时, 仍有

$$|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

再结合 $\{|f_n(x) - f(x)|\}$ 关于 n 单调递减, 于是当 $n > N$ 时, 对任意的 $x \in U(x_0,\delta) \cap [0,1]$, 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

上述得到的所有开区间 $H = \{U(x_0;\ \delta) \mid x_0 \in [0,1]\}$ 为闭区间 $[0,1]$ 的一个 (无穷) 开覆盖, 根据有限覆盖定理, 存在有限个点 $x_1,\cdots,x_k \in [0,1]$, 与之对应的还有 $N_1,N_2,\cdots,N_k > 0$ 及 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_k > 0$, 满足 $U(x_i;\ \delta_i)\,(i=1,2,\cdots,k)$ 覆盖 $[0,1]$. 当 $n > N_i$ 时, 对任意的 $x \in U(x_i,\delta_i) \cap [0,1]$, 都有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 现在取 $N_0 = \max\{N_1,N_2,\cdots,N_k\}$, 当 $n > N_0$ 时, 对任意的 $x \in [0,1]$, 存在 $1 \leqslant j \leqslant k$, 满足 $x \in U\left(x_j,\delta_j\right)$, 于是

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

这说明在 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

天津大学 2025 年数学分析试卷

一、 证明: $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\pi x}{x}\mathrm{d}x<0.$

证明: 【法 1】首先根据 Dirichlet 判别法易知无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\pi x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛, 根据归结原则, 有

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\pi x}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\text{其中}a_n=\int_n^{n+1}\frac{\sin\pi x}{x}\mathrm{d}x.$$

而 $\sin\pi x$ 在 $[n,n+1]$ 上不变号, 根据积分第一中值定理, 存在 $\xi_n\in(n,n+1)$, 使得

$$a_n=\frac{1}{\xi_n}\int_n^{n+1}\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi\xi_n}\cos\pi x\Big|_{n+1}^{n}=\frac{2(-1)^n}{\pi\xi_n}$$

注意到 $\xi_n<n+1<\xi_{n+1}$, 因此 $\{\xi_n\}$ 严格递增趋于 $+\infty$, 特别地, 也有

$$a_{2n-1}+a_{2n}=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\xi_{2n-1}}-\frac{1}{\xi_{2n}}\right)<0,n=1,2,\cdots$$

那么

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\pi x}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})<0.$$

【法 2】令 $u=\pi x$, 则 $\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\mathrm{d}u$, 所以

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{\sin(\pi x)}{x}\mathrm{d}x&=\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin u}{\frac{u}{\pi}}\cdot\frac{1}{\pi}\mathrm{d}u=\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u-\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

要证明 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(\pi x)}{x}\mathrm{d}x<0$, 只需证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u<\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u.$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u,(u=(n-1)\pi+t)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin[(n-1)\pi+t]}{(n-1)\pi+t}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{(-1)^{n-1}\sin t}{(n-1)\pi+t}\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{(n-1)\pi+t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

记作：$u_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{(n-1)\pi+t}\mathrm{d}t$, 则 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n.$

利用积分中值定理可知,$\exists\xi\in[0,\pi]$, 使得

$$u_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{(n-1)\pi+t}\mathrm{d}t=\frac{\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t}{(n-1)\pi+\xi}=\frac{2}{(n-1)\pi+\xi}$$

所以 $u_{n+1}=\frac{2}{n\pi+\xi}$, 那么必有 $u_n\geqslant u_{n+1}>0,(n\geqslant 2,n\in\mathbb{N}_+)$, 且

$$0<u_n\leqslant u_{n+1}=\frac{2}{n\pi+\xi}<\frac{2}{n\pi}.$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n\pi}=0$, 由夹逼准则可知, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$. 由 Leibniz 判别法

可知, 交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛. 又因为交错级数的和不会大于其第一项,

所以 $(-1)^{1-1}u_1 > \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$. 又因为

$$(-1)^{1-1}u_1 = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{(1-1)\pi + t}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$$

所以 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u < \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$, 即证出 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x}\mathrm{d}x < 0$.

【法 3】令 $t = \pi x$, 则 $\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\mathrm{d}t$, 所以

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x}\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{\frac{t}{\pi}} \cdot \frac{1}{\pi}\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

要证明 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x}\mathrm{d}x < 0$, 只需证明 $A = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t < 0$. 根据 $\sin t$ 的最小正周期为 2π 以及 t 的逐渐增大, 其中 $\frac{\sin t}{t}$ 的零点为 $t = k\pi, (k = 1, 2, 3, \cdots)$, 所以不难得知:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\pi}^{2n\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \leqslant A = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \leqslant \lim_{n\to+\infty}\int_{\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

所以我们只需要证明: $B = \lim_{n\to+\infty}\int_{\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t < 0$, 记

$$\begin{aligned}
B &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t + \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \\ + \cdots + \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t + \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \end{pmatrix} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t + \cdots + \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \\ + \left(\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t + \cdots + \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right) \end{pmatrix} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right) \\
&< \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \sin t\,\mathrm{d}t}{2k\pi} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin t\,\mathrm{d}t}{(2k+1)\pi}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\int_{\pi}^{2\pi} \sin t\,\mathrm{d}t}{2k\pi} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\int_{2\pi}^{3\pi} \sin t\,\mathrm{d}t}{(2k+1)\pi}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{-2}{2k\pi} + \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(2k+1)\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right)
\end{aligned}$$

因为对任意的 $k = 1, 2, 3, \cdots, n$, 均有 $\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k} < 0$ 严格成立. 所以 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right) < 0$, 自然 $B = \frac{2}{\pi}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right) < 0$. 所以 $A = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \leqslant \lim_{n\to+\infty}\int_{\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t < 0$, 得证!

【法 4】令 $u = \pi x$, 则 $\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\mathrm{d}u$, 所以

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x}\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u - \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$$

利用公式 $\int_0^{x} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = Si(x)$ 可知: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - Si(\pi)$. 注意到一个比较精准的近似公式:

$Si(x) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x}, (x > 1)$. 所以 $Si(\pi) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\cos \pi}{\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi}$, 那么

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - Si(\pi) \approx \frac{1}{\pi} > 0$$

即证出 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x} \mathrm{d}x > 0$, 得证!

二、 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数, 且每一个点处极限都存在. 证明: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

证明: 【法 1】任取 $x \in [a,b]$, 由于 $\lim_{t \to x} f(t)$ 存在, 同时 $f(x)$ 是一个有限数. 根据局部有界性可知, 存在相应的 $M_x > 0, \delta_x > 0$, 当 $t \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \cap [a,b]$ 时, 有 $|f(t)| \leqslant M_x$. 现在作开区间集

$$H = \{(x - \delta_x, x + \delta_x) \mid x \in [a,b]\}$$

显然 H 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 由有限覆盖定理可知存在 H 中的有限个开区间 $\left(x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}\right) (i = 1, 2, \cdots, n)$, 它们也覆盖了 $[a,b]$. 与此对应的还有正数 $M_{x_i} (i = 1, 2, \cdots, n)$, 取

$$M = \max\left\{M_{x_1}, M_{x_2}, \cdots, M_{x_n}\right\}$$

则对任意的 $x \in [a,b]$, 均存在 $k (1 \leqslant k \leqslant n)$, 使得 $x \in \left(x_k - \delta_{x_k}, x_k + \delta_{x_k}\right)$, 于是

$$|f(x)| \leqslant M_{x_k} \leqslant M$$

即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上也有界.

【法 2】(反证法) 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界, 那么对于 $\forall x \in [a,b]$, 对 $\forall M > 0$, 使得 $f(x) > M$, 则取 $M_1 = 2, \forall x_1 \in [a,b]$, 使得 $f(x_1) > M_1$; 取 $M_2 = \max\left\{2^2, f(x_1)\right\}, \forall x_2 \in [a,b]$, 使得 $f(x_2) > M_2$; 取 $M_3 = \max\left\{2^3, f(x_2)\right\}, \forall x_3 \in [a,b]$, 使得 $f(x_3) > M_3$; $\cdots$; 取 $M_n = \max\left\{2^n, f(x_{n-1})\right\}, \forall x_n \in [a,b]$, 使得 $f(x_n) > M_n$; $\cdots$. 于是我们可以得到闭区间 $[a,b]$ 上的数列 $\{x_n\}$, 显然该数列是有界的. 根据致密性定理可知, 它必定有一个收敛子列 $\left\{x_{n_k}\right\}$. 故不妨可设 $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = x_0$, 可知必定有 $x_0 \in [a,b]$, 但对于数列 $\{f(x_n)\}$, 我们知道它是一个无穷大量, 所以它是没有收敛子列的, 于是

$$\lim_{k \to +\infty} f\left(x_{n_k}\right) \neq f(x_0)$$

这与函数 $f(x)$ 在 x_0 点有极限是矛盾的, 由 Heine 定理可知矛盾! 所以假设不成立, 即证出函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界.

三、 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有连续可微, 且 $\int_0^{\pi} f(x) \mathrm{d}x = 0$. 证明:

$$\int_0^{\pi} f^2(x) \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi} [f'(x)]^2 \mathrm{d}x.$$

证明:

引理 19.1

Percival 恒等式

设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的可微函数, 且 a_n, b_n 是函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数, 则

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \mathrm{d}x = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

将 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上作 Fourier 级数展开可得

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

对 $f(x)$ 作偶延拓, 则可以展开为余弦级数: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$, 其中

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \mathrm{d}x = 0, b_n = 0$$

此时易知：$f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-na_n)\cdot\sin(nx)$, 根据 Percival 恒等式可知,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$$

又因为 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos(nx)+(-na_n)\sin(nx))$ 且 $f'(x)$ 为奇函数, 所以 $nb_n=0, n=1,2,3,\cdots$. 再根据 Percival 恒等式可知

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-na_n)^2$$

所以 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-na_n)^2$. 注意到 $0\leqslant {a_n}^2\leqslant(-na_n)^2$. 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{a_n}^2\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2{a_n}^2$. 从而 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$. 从而 $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$. 又因为 $[f(x)]^2,\left[f'(x)\right]^2$ 均为闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数. 所以 $\int_0^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\pi}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$, 得证!

四、 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(0)=0,\ f(1)=3,\ \min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$. 证明: 存在 $c\in(0,1)$, 使得 $f''(c)\geqslant 18$.

证明: 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 因此存在 $x_0\in[0,1]$, 满足

$$f\left(x_0\right)=\min_{x\in[0,1]}f(x)=-1.$$

显然 $x_0\neq 0,1$, 因此 x_0 也是 $f(x)$ 的极小值点, 对应有 $f'\left(x_0\right)=0$. 而根据 Taylor 定理, 存在 $\xi\in\left(0,x_0\right),\eta\in\left(x_0,1\right)$, 使得

$$0=f(0)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(-x_0\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2=-1+\frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2,$$
$$3=f(1)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(1-x_0\right)+\frac{1}{2}f''(\eta)\left(1-x_0\right)^2=-1+\frac{1}{2}f''(\eta)\left(1-x_0\right)^2.$$

也就是

$$f''(\xi)=\frac{2}{x_0^2},\ f''(\eta)=\frac{8}{\left(1-x_0\right)^2}$$

当 $x_0\leqslant\frac{1}{3}$ 时, 有 $f''(\xi)\geqslant 18$, 当 $x_0\geqslant\frac{1}{3}$ 时, 有 $f''(\eta)\geqslant 18$. 因此总存在 $c\in(0,1)$, 使得 $f''(c)\geqslant 18$.

五、 设 $x,y>0$, 证明: $\frac{1}{4}(x^2+y^2)\leqslant \mathrm{e}^{x+2y-2}$.

证明: 记 $x+2y=t, t>0$, 显然 $x^2+y^2\leq(x+2y)^2=t^2$, 因此只需证明 $\frac{t^2}{4}\leqslant \mathrm{e}^{t-2}$, 这等价于

$$\frac{t^2}{\mathrm{e}^t}\leqslant\frac{4}{\mathrm{e}^2}, t>0.$$

构造函数 $g(t)=\frac{t^2}{\mathrm{e}^t}, t\in(0,+\infty)$, 显然

$$g'(t)=\frac{t(2-t)}{\mathrm{e}^t}.$$

由此可知 $g(t)$ 在 $(0,2]$ 上单调递增, 在 $[2,+\infty)$ 上单调递减, 于是 $g(t)\leqslant g(2)=\frac{4}{\mathrm{e}^2}$.

六、 设 $a_n,b_n\to 0\ (n\to\infty)$, 且 $b_1>b_2>b_3>\cdots$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$.

证明: 根据已知, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}-a_n}{b_{n-1}-b_n}=A$, 那么对任意的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $k>N$ 时, 有

$$\left|\frac{a_{k-1}-a_k}{b_{k-1}-b_k}-A\right|<\varepsilon.$$

进而结合 $\{b_n\}$ 严格递减可知

$$(A-\varepsilon)(b_{k-1}-b_k)<a_{k-1}-a_k<(A+\varepsilon)(b_{k-1}-b_k)\,,k>N.$$

当 $m>n>N$ 时, 上式关于 $k=n+1,n+2,\cdots,m$ 求和可得

$$(A-\varepsilon)(b_n-b_m)<a_n-a_m<(A+\varepsilon)(b_n-b_m)\,.$$

这意味着 $\left|\dfrac{a_n-a_m}{b_n-b_m}-A\right|<\varepsilon$, 特别地, 让 $m\to\infty$, 结合 $\lim\limits_{m\to\infty}a_m=\lim\limits_{m\to\infty}b_m=0$ 可知

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-A\right|\leqslant\varepsilon,n>N.$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=A$.

七、 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的可导函数, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A$ (A 为有限数或 $+\infty$), 证明: $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续的充要条件是 A 为有限数.

证明: 当 A 为有限实数时, 由题意可知, $\lim\limits_{s\to+\infty}\left|f'(x)\right|=A$. 由极限定义可知: $\forall\varepsilon>0,\exists M>0$, 当 $x>M$ 时, 有 $\left|f'(x)-A\right|<\varepsilon$. 即 $\left|f'(x)\right|<|A|+\varepsilon$, 在 $[M,+\infty)$ 上, 由 Lagrange 中值定理可知, 对 $\forall x_1,x_2\in[M,+\infty)$, 存在 ξ 介于 x_1 与 x_2 之间可得

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|f'(\xi)\right||x_1-x_2|<(|A|+\varepsilon)|x_1-x_2|$$

满足 Lipchitz 条件, 所以 $f(x)$ 在 $[M,+\infty)$ 上一致连续, 又由 Cantor 定理可知, $f(x)$ 在 $[0,M]$ 上一致连续, 所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续. 当 $A=+\infty$ 时, 则对 $\forall G>0,\exists M>0$, 当 $x>M$ 时, $f'(x)>G$. 取 $\varepsilon_0=1$, 对 $\forall\delta>0$, 令 $x_1,x_2\in[M,+\infty)$ 且 $|x_2-x_1|=\dfrac{\delta}{2}$. 由 Lagrange 中值定理可知: 存在 ξ 介于 x_1 与 x_2 之间可得

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|f'(\xi)\right||x_1-x_2|>G\cdot\frac{\delta}{2}.$$

只要 G 足够大, 就有 $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon_0=1$. 这与 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续是矛盾的! 所以 A 必须是有限实数.

八、 设 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$, 定义范数 $N(\boldsymbol{x}):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 若满足

1. $N(\boldsymbol{x})\geqslant0$, 且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时, 有 $N(\boldsymbol{x})=0$.
2. $N(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\leqslant N(\boldsymbol{x})+N(\boldsymbol{y}),\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3$.
3. $N(k\boldsymbol{x})=|k|N(\boldsymbol{x}),\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3,k\in\mathbb{R}$.

上述空间被称为欧氏空间. 内积定义的范数 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$.

1. 证明: $N(\boldsymbol{x})$ 在 $B=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\mid\|\boldsymbol{x}\|\leqslant1\right\}$ 上有界.
2. $N(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续.
3. 对任意的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$, 记 $r=\|\boldsymbol{x}\|$, 存在 $a,b\in\mathbb{R}$, 使得 $ar\leqslant N(\boldsymbol{x})\leqslant br$.

解: (1) 对 $\forall x\in B=\left\{x\in\mathbb{R}^3\mid\|x\|\leqslant1\right\}$, 有 $\|x\|\leqslant1$. 我们将 x 写成 $x=\|x\|\cdot\dfrac{x}{\|x\|}$, 其中 $\dfrac{x}{\|x\|}$ 是单位向量, 即 $\left\|\dfrac{x}{\|x\|}\right\|=1$. 由于 $N(x)$ 满足范数三个性质, 利用性质 (3) 可得

$$N(kx)=|k|N(x),\left(\forall x\in\mathbb{R}^3,k\in\mathbb{R}\right)$$

所以 $N(x)=N\left(\|x\|\cdot\dfrac{x}{\|x\|}\right)=\|x\|N\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)$, 由于 $\dfrac{x}{\|x\|}$ 是单位向量, 且 $N(x)$ 在单位球 B 上有界, 设 M_1 是 $N(x)$ 在 B 上的上界. 即对 $\forall y\in B$, 我们有 $N(y)\leqslant M_1$, 因此, 对于 $x\in B$, 我们有

$$N(x)=\|x\|N\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\leqslant\|x\|M_1\leqslant M_1$$

这就证明了 $N(x)$ 在 $B=\left\{x\in\mathbb{R}^3\mid\|x\|\leqslant1\right\}$ 上有界.

(2) 要证明 $N(x)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续, 我们需要证明对 $\forall x_0\in\mathbb{R}^3$ 和 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得当 $\|x-x_0\|<\delta$ 时, 有 $|N(x)-N(x_0)|<\varepsilon$. 由于 $N(x)$ 满足范数三个性质, 利用性质 (2) 可得

$$N(x+y)\leqslant N(x)+N(y),\left(\forall x,y\in\mathbb{R}^3\right)$$

那么对 $\forall x, x_0 \in \mathbb{R}^3$, 我们有

$$\begin{aligned}|N(x)-N(x_0)| &= |N(x-x_0+x_0)-N(x_0)| \\ &\leqslant |N(x-x_0)+N(x_0)-N(x_0)| = |N(x-x_0)|. \\ &= N(x-x_0)\end{aligned}$$

由于 $N(x)$ 在单位球 B 上有界, 所以可以找到一个常数 M_2, 使得对 $\forall x \in \mathbb{R}^3$, 均有 $N(x) \leqslant M_2\|x\|$ 成立, 因此对 $\|x-x_0\|<\delta$, 有

$$|N(x)-N(x_0)| \leqslant M_2\|x-x_0\| < M_2\delta$$

选择 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M_2}$, 我们得到 $|N(x)-N(x_0)|<M_2\delta=M_2\cdot\dfrac{\varepsilon}{M_2}=\varepsilon$. 由连续性定义以及 x_0 的任意性可知,$N(x)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续.

(3) 由于 $N(x)$ 在单位球 B 上有界, 所以, 我们可以找到最小的上界 M 和最大的下界 m, 对于 $\forall x \in \mathbb{R}^3$, 有 $N(x)=\|x\|N\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)$, 由于 $\dfrac{x}{\|x\|}\in B$, 所以可得 $m \leqslant N\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \leqslant M$. 因此, 对于 $x \neq 0$.

$$m\|x\| \leqslant N(x) \leqslant M\|x\|$$

我们可以取 $a=m, b=M$, 又因为 $x=0$ 时, $N(0)=0$, 这个不等式显然成立. 即证出对 $\forall x \in \mathbb{R}^3$, 存在 $a, b \in \mathbb{R}$, 使得 $ar \leqslant N(x) \leqslant br$.

九、 已知 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}$ 上二阶连续可微, 记 H 为 f 在 (x,y) 处的 Hesse 矩阵.

1. 在点 (a,b) 处, 已知 $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$, 且 H 在 (a,b) 处正定, 证明：(a,b) 为 f 的严格极小值点.
2. 若 H 在 $\mathbb{R}^2$ 上处处正定, 则 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上至多有一个极值点.

证明: (1) 为了方便, 对任意的 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 记

$$X=(x-a,y-b)^T, \rho=\|X\|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}.$$

当 $(x,y)\neq(a,b)$ 时, 有 $\|X\|=\rho>0$, 再记 $Y=\dfrac{X}{\|X\|}$, 那么 $\|Y\|=1$, 同时根据 Taylor 定理, 有

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(a,b) &= f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+\frac{1}{2}X^TH(a,b)X+o\left(\rho^2\right) \\ &= \frac{1}{2}X^TH(a,b)X+o\left(\rho^2\right)=\left[\frac{1}{2}Y^TH(a,b)Y+o(1)\right]\rho^2.\end{aligned}$$

若记 $Y=(u,v)^T$, 由于 $H(a,b)$ 正定, 所以 $Y^TH(a,b)Y$ 作为关于 u,v 的二元连续函数在条件 $Y^TY=u^2+v^2=1$ 下恒正且存在最小值, 设最小值为 $m(m>0)$, 那么当 ρ 充分小时, 有 $\dfrac{1}{2}Y^TH(a,b)Y+o(1)\geqslant\dfrac{1}{4}m$, 也就是

$$f(x,y)-f(a,b)\geqslant\frac{1}{4}m\rho^2>0.$$

这说明在 (a,b) 的某个空心邻域内, 有 $f(x,y)>f(a,b)$, 即 (a,b) 为 f 的严格极小值点.

(2) 反证法. 设 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2) 为 f 的两个不同的极小值点, 根据 Hesse 矩阵正定, 它们也是严格极小值点. 构造函数

$$g(t)=f\left(x_1+t\left(x_2-x_1\right), y_1+t\left(y_2-y_1\right)\right), t\in[0,1].$$

不失一般性, 设 $f\left(x_1,y_1\right)\leqslant f\left(x_2,y_2\right)$, 即 $g(0)\leqslant g(1)$. 显然 $g(t)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且

$$g''(t)=\left(x_2-x_1\right)^2f_{xx}+2\left(x_2-x_1\right)\left(y_2-y_1\right)f_{xy}+\left(y_2-y_1\right)^2f_{yy}=X^THX>0$$

其中 $X=\left(x_2-x_1,y_2-y_1\right)^T\neq\mathbf{0}$, 那么 $g(t)$ 是 $[0,1]$ 上的严格凸函数, 那么对任意的 $t\in(0,1)$, 均有

$$g(t)<\max\{g(0),g(1)\}=g(1).$$

特别地, 在点 (x_2,y_2) 的任意邻域 U 内, 总存在某个 $t_0\in(0,1)$, 满足 $\left(x_1+t_0\left(x_2-x_1\right), y_1+t_0\left(y_2-y_1\right)\right)\in U$, 且

$$f\left(x_1+t_0\left(x_2-x_1\right), y_1+t_0\left(y_2-y_1\right)\right)=g\left(t_0\right)<g(1)=f\left(x_2,y_2\right).$$

这与 (x_2,y_2) 为 f 的严格极小值点相矛盾. 因此 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上至多有一个极值点.

十、 设 B 为单位球, f 在 B 上有定义, $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$, $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$. 在 B 上有 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$.

1. 求证: $\displaystyle\int_B \nabla f\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x=0$.
2. 求证: $\displaystyle\int_B v_1\mathrm{d}x=0$.

证明: (1) 由题意可知, 根据 Gauss 公式可知,

$$\int_B \nabla f\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x=\int_{\partial B} f(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S$$

其中 ∂B 是区域 B 的边界, $\boldsymbol{n}$ 是边界上的外法向量, $\mathrm{d}S$ 是边界上的面积元素. 由于 $\boldsymbol{v}$ 在 B 上为零, 即 $\boldsymbol{v}=0$, 我们可以将 $\boldsymbol{v}$ 替换为零, 则

$$\int_B \nabla f\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x=\int_{\partial B} f(0\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S=0, \text{即证出}\int_B \nabla f\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x=0.$$

(2) 由于 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$, 根据散度定理可知, $\displaystyle\int_B \nabla\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x=\int_{\partial B}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$. 由于 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$, 左边积分为零, 所以 $\displaystyle\int_{\partial B}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0$. 对于单位球 B, 其边界 ∂B 是一个球面, 且 $\boldsymbol{v}$ 在 B 上为零, 这意味着 $\boldsymbol{v}$ 在边界上也为零, 因此, 右边的积分也为零, 所以 $0=\displaystyle\int_{\partial B}0\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$. 考虑 $\boldsymbol{v}_1$ 的积分, 由于 $\boldsymbol{v}$ 是无散的, 我们可以将 $\boldsymbol{v}_1$ 视作 $\boldsymbol{v}$ 的一个分量. 由于 $\boldsymbol{v}$ 在 B 上为零, $\boldsymbol{v}_1$ 也在 B 上为零, 因此 $\boldsymbol{v}_1$ 在 B 上的积分也为. 即 $\displaystyle\int_B \boldsymbol{v}_1\mathrm{d}x=0$, 得证!

同济大学 2025 年数学分析试卷

一、 (10 分) 设 α,β 为正实数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha+\sqrt{-1}\beta}{n}\right)^n=\mathrm{e}^{\alpha}(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\beta).$$

注: 若数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 分别收敛于 a,b, 则称复数列 $\{a_n+\sqrt{-1}b_n\}$ 收敛于 $a+\sqrt{-1}b$, 记作

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+\sqrt{-1}b_n)=a+\sqrt{-1}b.$$

解: 【法 1】利用 Euler 公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}=\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta$. 计算可知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left\{1+\frac{\alpha+\sqrt{-1}\beta}{n}\right)^n&=\exp\left\{\lim_{n\to+\infty}n\ln\left(1+\frac{\alpha+\sqrt{-1}\beta}{n}\right)\right\}\\&=\exp\left\{\lim_{n\to+\infty}n\cdot\frac{\alpha+\sqrt{-1}\beta}{n}\right\}=\mathrm{e}^{\alpha+\sqrt{-1}\beta}=\mathrm{e}^{\alpha}(\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta)\end{aligned}$$

注意到

$$\ln\left(1+\frac{\alpha+\mathrm{i}\beta}{n}\right)=\frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{n+\alpha}{n}\right)^2+\left(\frac{\beta}{n}\right)^2\right]+\mathrm{i}\arctan\left(\frac{\beta}{n+\alpha}\right)$$

当 $n\to+\infty$ 时, 有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{n+\alpha}{n}\right)^2+\left(\frac{\beta}{n}\right)^2\right]=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\arctan\left(\frac{\beta}{n+\alpha}\right)=0$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln\left(1+\frac{\alpha+\mathrm{i}\beta}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\alpha+\mathrm{i}\beta+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\alpha+\mathrm{i}\beta$.

【法 2】由 $\cos\beta=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\beta^{2n}}{(2n)!},\sin\beta=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\beta^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 可知,

$$\begin{aligned}\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta&=\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\beta^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\beta^{2n+1}}{(2n+1)!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\beta)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\beta)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\beta)^n}{n!}\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{i}^{2n}=\left(\mathrm{i}^2\right)^n=(-1)^n$. 则 $\mathrm{i}^{2n+1}=(-1)^n\mathrm{i}$. 或者利用 Euler 公式:

$$\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\beta)^n}{n!}$$

Cauchy 乘积：对于实数和复数, Cauchy 乘积定义为如下的离散卷积形式：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n$$

这里的 $c_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k},(n=0,1,2,\cdots)$.

二项式定理：$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$. 所以可得：

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\alpha}(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\beta)^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{(\mathrm{i}\beta)^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\alpha^k(\mathrm{i}\beta)^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\alpha^k(\mathrm{i}\beta)^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\mathrm{i}\beta)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

利用二项式定理可知,

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{\alpha+\mathrm{i}\beta}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot 1^{n-k}\cdot\left(\frac{\alpha+\mathrm{i}\beta}{n}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(\alpha+\mathrm{i}\beta)^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}(\alpha+\mathrm{i}\beta)^k\frac{1}{n^k}C_n^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}(\alpha+\mathrm{i}\beta)^k\frac{1}{n^k}\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha+\mathrm{i}\beta)^k}{k!}\cdot\frac{n!(n-k+1)\cdots(n-1)n}{n^k(n-k)!\cdot(n-k+1)\cdots(n-1)n} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha+\mathrm{i}\beta)^k}{k!}\cdot\frac{(n-(k-1))(n-(k-2))\cdots(n-1)n}{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha+\mathrm{i}\beta)^k}{k!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha+\mathrm{i}\beta)^k}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

利用绝对值不等式可知,

$$\begin{aligned}
&\left|\left(1+\frac{\alpha+\mathrm{i}\beta}{n}\right)^n-\mathrm{e}^{\alpha}(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)\right| \\
=&\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha+\mathrm{i}\beta)^k}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\mathrm{i}\beta)^n}{n!}\right| \\
=&\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha+\mathrm{i}\beta)^k}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha+\mathrm{i}\beta)^k}{k!}-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(\alpha+\mathrm{i}\beta)^k}{k!}\right| \\
=&\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha+\mathrm{i}\beta)^k}{k!}\cdot\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)-1\right]-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(\alpha+\mathrm{i}\beta)^k}{k!}\right| \\
\leqslant&\left\{\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha+\mathrm{i}\beta)^k}{k!}\cdot\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)-1\right]\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(\alpha+\mathrm{i}\beta)^k\ |}{k!}\right|\right\} \\
\leqslant&\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{|\alpha+\mathrm{i}\beta|^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{|\alpha+\mathrm{i}\beta|^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right),\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|\alpha+\mathrm{i}\beta|^k}{k!}\right\}
\end{aligned}$$

令 $\rho = |\alpha + \mathrm{i}\beta| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. 所以

$$\begin{aligned}
&\left|\left(1+\frac{\alpha+\mathrm{i}\beta}{n}\right)^n - \mathrm{e}^{\alpha}(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)\right| \\
\leqslant & \sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!} \\
= & \sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
= & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
= & \mathrm{e}^{\rho} - \sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
= & \mathrm{e}^{\rho} - \sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}\frac{(n-1)(n-2)(n-(k-1))}{n^{k-1}} \\
= & \mathrm{e}^{\rho} - \sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{n^k}\frac{n(n-1)(n-2)(n-(k-1))}{k!} \\
= & \mathrm{e}^{\rho} - \sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{n^k}\frac{n(n-1)(n-2)(n-(k-1))\cdot(n-k)!}{k!\cdot(n-k)!} = \mathrm{e}^{\rho} - \sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{n^k}\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \\
= & \mathrm{e}^{\rho} - \sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{n^k}C_n^k = \mathrm{e}^{\rho} - \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\rho}{n}\right)^k C_n^k = \mathrm{e}^{\rho} - \left(1+\frac{\rho}{n}\right)^n \to 0, (n\to+\infty)
\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\left(1+\dfrac{\alpha+\mathrm{i}\beta}{n}\right)^n - \mathrm{e}^{\alpha}(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)\right| = 0$. 综上所述,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha+\sqrt{-1}\beta}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\alpha}(\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta)$$

二、 (10 分) 证明: 存在 $f(x)\in C^1(\mathbb{R})$, 满足 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上恒为 0, 在 $(2,+\infty)$ 上恒为 1.

证明: 设函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x\in(-\infty,1); \\ ax^3+bx^2+cx+d, & x\in[1,2]; \\ 1, & x\in(2,+\infty). \end{cases}$$

为使得 $f(x)\in C^1(\mathbb{R})$, 应当有

$$f(1)=f(1-0), f(2)=f(2+0), f'_+(1)=f'(1-0), f'_-(2)=f'(2+0).$$

也就是

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 8a+4b+2c+d=1 \\ 3a+2b+c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases}$$

解得 $a=-2, b=9, c=-12, d=5$, 即

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x\in(-\infty,1) \\ -2x^3+9x^2-12x+5, & x\in[1,2] \\ 1, & x\in(2,+\infty) \end{cases}$$

根据导数极限定理容易验证 $f(x)\in C^1(\mathbb{R})$.

三、 (15 分) 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可微, 证明: 对任意的 $a,b\in\mathbb{R}, t\in(0,1)$, 存在 $\xi\in\mathbb{R}$, 满足

$$f((1-t)a+tb)=(1-t)f(a)+tf(b)-\frac{f''(\xi)}{2}t(1-t)(b-a)^2. \tag{20.1}$$

证明: 当 $a=b$ 时, 显然式(20.1)对任意的 $\xi\in\mathbb{R}$ 均成立. 当 $a\neq b$ 时, 记常数

$$k=\frac{f((1-t)a+tb)-(1-t)f(a)-tf(b)}{t(1-t)(b-a)^2}. \tag{20.2}$$

并构造函数

$$F(x)=f((1-x)a+xb)-(1-x)f(a)-xf(b)-kx(1-x)(b-a)^2.$$

显然函数 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $F(0)=F(1)=0$, 根据式(20.2)还有 $F(t)=0$. 利用 Rolle 中值定理, 分别存在 $\eta_1\in(0,t), \eta_2\in(t,1)$, 满足 $F'(\eta_1)=F'(\eta_2)=0$, 再次利用 Rolle 中值定理, 还存在 $\eta\in(\eta_1,\eta_2)$, 满足 $F''(\eta)=0$, 即

$$(b-a)^2f''((1-\eta)a+\eta b)+2k(b-a)^2=0.$$

记 $\xi=(1-\eta)a+\eta b$, 由上式可知 $k=-\frac{1}{2}f''(\xi)$, 将此代入到式(20.2), 有

$$\frac{f((1-t)a+tb)-(1-t)f(a)-tf(b)}{t(1-t)(b-a)^2}=-\frac{1}{2}f''(\xi).$$

化简可得式(20.1)成立.

四、 (15 分) 设 α 为正实数, 讨论 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}}{x^\alpha}$ 的敛散性及极限.

解: 易知 $f(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x^\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\right]&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}-\frac{1}{2}\right]\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{x^\alpha}(\mathrm{e}^{-x^2}-1)=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}x^{2-\alpha}.\end{aligned}$$

当 $\alpha>2$ 时, 原极限不存在; 当 $\alpha=2$ 时, 原极限 $=-\frac{1}{2}$; 当 $\alpha<2$ 时, 原极限 $=0$. 下面只需要证明: $f(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$.

记 $g(t,x)=\mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)$. 易知 $g(t,x)=\mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)$ 连续, 且关于 x 存在连续偏导数. 由 Weierstrass 判别法可知 $\int_0^{+\infty}g(t,x)\mathrm{d}t, \int_0^{+\infty}g'_x(t,x)\mathrm{d}t$ 关于 $x\in\mathbb{R}$ 上一致收敛, 所以 $f(x)$ 可以积分号下取微分, 则

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)\right)\mathrm{d}t\\&=-2\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\sin(2xt)\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-t^2}\right)\mid\lambda\\&=\left[\left(\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\Big|_{t=0}^{t=+\infty}\right)-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}(\sin(2xt))\right]\\&=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)\cdot2x\mathrm{d}t=-2x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)\mathrm{d}t\\&=-2xf(x)\end{aligned}$$

所以 $f'(x)=-2xf(x)$. 解得 $f(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}+C$. 而

$$f(0)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

所以 $C=0$. 所以 $f(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$. 即

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

至此, 该命题得证!

五、 (15 分) 设 $u_n(x)\in R[0,1]$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和函数列一致有界. 令 $v_n(x)=\int_0^1 u_n(x)\sqrt{x+t}\mathrm{d}t$.

1. 证明: $v_n(x)\in C^1(0,1)$.
2. 证明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)\in C^0(0,1)$.

证明: 注意到

$$v_n(x)=u_n(x)\int_0^1\sqrt{x+t}\mathrm{d}t=u_n(x)\frac{2(x+1)\sqrt{x+1}-2x\sqrt{x}}{3}.$$

这里 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2(x+1)\sqrt{x+1}-2x\sqrt{x}}{3}\right)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\in C[0,1]$.

所以 $\frac{2(x+1)\sqrt{x+1}-2x\sqrt{x}}{3}\in C^1[0,1]$, 又因为 $u_n(x)$ 连续可微, 故

$$v_n(x)=u_n(x)\frac{2(x+1)\sqrt{x+1}-2x\sqrt{x}}{3}$$

也连续可微, 故 $v_n(x)\in C^1[0,1]$, 得证!

由 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 部分和函数列一致有界, 这意味着对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+$, 使得, 对 $\forall m,n>N$, 有 $\left|\sum_{k=m}^{n}u_k(x)\right|<\varepsilon$. 对于 $v_n(x)$, 有

$$v_n(x)=\int_0^1 u_n(x)\sqrt{x+t}\mathrm{d}t.$$

由于 $u_n(x)$ 连续可微, 所以 $v_n(x)\in C^1[0,1]$. 现在需要证明: $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 一致收敛.

由于 $u_n(x)$ 的部分和一致有界, 我们可以找到一个常数 M, 使得对于所有的 n 和 $x\in[0,1]$, 均有 $|u_n(x)|\leqslant M$. 因此, 对于 $v_n(x)$, 有

$$|v_n(x)|=\left|\int_0^1 u_n(x)\sqrt{x+t}\mathrm{d}t\right|\leqslant M\int_0^1\sqrt{x+t}\mathrm{d}t.$$

由于 $\int_0^1\sqrt{x+t}\mathrm{d}t$ 在 $[0,1]$ 上是连续的, 我们可以找到一个常数 K, 使得 $\int_0^1\sqrt{x+t}\mathrm{d}t\leqslant K$, 对于 $\forall x\in[0,1]$ 均成立, 因此 $|v_n(x)|\leqslant MK$. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和一致有界, 我们可以推出 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 也一致收敛. 因为一致收敛的连续函数序列的和仍然是连续的, 所以 $S(x)$ 是连续的, 即 $S(x)\in C^0[0,1]$, 得证!

六、 (15 分) 设 $f,g\in C^0\left(\mathbb{R}^2\right)$. 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, 有

$$f(x,y)=g(x,y)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

证明：若 f 在 $(0,0)$ 处可微, 求 $\mathrm{d}f(0,0)$. 并分析 g 在 $(0,0)$ 的可微性.

解: 利用偏导数定义可知,

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{g(x,0)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2}}-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{g(x,0)\sin\frac{1}{|x|}-f(0,0)}{x}.$$

要使得偏导数 $f_x'(0,0)$ 存在, 则 $g(0,0)=f(0,0)=0$, 此时

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{0}{x}=0.$$

同理, 由此可知

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{g(0,y)\sin\frac{1}{\sqrt{y^2}}}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{g(0,y)\sin\frac{1}{|y|}}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0.$$

利用可微定义可知,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{g(x,y)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{0}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

因要满足 f 在 $(0,0)$ 处可微, 且 $\mathrm{d}f(0,0)=0$. 而此时要求 $\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ 时, $g(x,y)$ 是比 $\sqrt{x^2+y^2}$ 更高阶的无穷小, 故

$$g_x'(0,0)=0=g_y'(0,0)\Rightarrow \mathrm{d}g(0,0)=0.$$

所以 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 是可微的.

七、(15 分) 判断 $\displaystyle\iint_{x+y\geqslant 1}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的敛散性.

解: 【法 1】由余面积公式可知,

$$\begin{aligned}\iint_{x+y\geqslant 1}\frac{|\sin x\sin y|}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^3}\mathrm{d}t\int_{x+y=t}|\sin x\sin y|\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^3}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty}|\sin x\cdot\sin(t-x)|\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}x=+\infty\end{aligned}$$

所以 $I=\displaystyle\iint_{x+y\geqslant 1}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是发散的.

注 若 $z=f(x,y)$. 则余面积公式:

$$\iint_D g(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b\left(\int_L g(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{f_x'}\right)\mathrm{d}z=\int_a^b\left(\int_L g(x,y)\frac{\mathrm{d}x}{f_y'}\right)\mathrm{d}z.$$

【法 2】不妨断言该二重反常积分是发散的, 则

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\iint_{1\leqslant x+y\leqslant 2n\pi,-2n\pi\leqslant x-y\leqslant 2n\pi}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\lim_{n\to+\infty}\iint_{1\leqslant x+y\leqslant 2n\pi-\frac{\pi}{4},-2n^4\pi\leqslant x-y\leqslant 2n^4\pi}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\iiint_{2n\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x+y\leqslant 2n\pi,-2n^4\pi\leqslant x-y\leqslant 2n^4\pi}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\lim_{n\to+\infty}\int_{\substack{1\leqslant x+y\leqslant 2n\pi,-2n\pi\leqslant x-y\leqslant 2n\pi\backslash\\(1\leqslant x+y\leqslant 2n\pi-\frac{\pi}{4},-2n^4\pi\leqslant x-y\leqslant 2n^4\pi)}}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.\end{aligned}$$

另一方面, 令 $u=x+y,v=x-y$. 则 $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\dfrac{1}{2}$. 结合积化和差公式可知

$$\begin{aligned}&\iint_{2n\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x+y\leqslant 2n\pi,-2n^4\pi\leqslant x-y\leqslant 2n^4\pi}\frac{\sin x\sin y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\frac{1}{4}\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\mathrm{d}u\int_{-2n^4\pi}^{2n^4\pi}\frac{\cos v-\cos u}{u^3}\mathrm{d}v\\=&-n^4\pi\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{\cos u}{u^3}\mathrm{d}u\leq-\frac{n^4\pi}{\sqrt{2}}\int_{2n\pi-\frac{\pi}{4}}^{2n\pi}\frac{1}{u^3}\mathrm{d}u=-\frac{n\pi}{32\sqrt{2}\pi^3}\end{aligned}$$

所以原反常二重积分等于 $-\infty$, 故发散.

【法 3】令 $x = y = u, x - y = v$, 则

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{x+y\geqslant 1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^3} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{4} \iint_{v\geqslant 1} \frac{\cos v - \cos u}{u^3} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \lim_{\substack{A\to+\infty \\ n\to+\infty}} \frac{1}{4} \int_1^A \mathrm{d}u \int_{-n\pi}^{n\pi} \frac{\cos v - \cos u}{u^3} \mathrm{d}v \\
&= -\frac{1}{4} \lim_{\substack{A\to+\infty \\ n\to+\infty}} 2n\pi \int_1^A \frac{\cos u}{u^3} \mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

极限不存在, 故 $I = \iint_{x+y\geqslant 1} \dfrac{\sin x \sin y}{(x+y)^3} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是发散的!

八、 (10 分) 曲线 L 是 $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ 与 $x^2 + y^2 = 2z$ 的交线, 且从 z 轴正向看去坐标原点为逆时针方向. 计算

$$
I = \int_L |\sqrt{3}y - x|\mathrm{d}x + 3y\mathrm{d}y - 2z\mathrm{d}z.
$$

解: 容易发现 $L : x^2 + y^2 = 4, z = 2$, 从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时针方向. 由于 L 关于 z 轴对称, 且在对称点处函数 $|\sqrt{3}y - x|$ 取值相等, 而 $\mathrm{d}x$ 符号相反, 因此

$$
\int_L |\sqrt{3}y - x|\mathrm{d}x = 0
$$

另外, 由于 L 关于 xz 坐标平面对称, 在对称点处函数 y 取值互为相反数, 而 $\mathrm{d}y$ 符号相同, 因此

$$
\int_L y\mathrm{d}y = 0
$$

最后由于 L 满足 $z = 2$, 那么 $\mathrm{d}z = 0$, 自然

$$
\int_L 2z\mathrm{d}z = 0
$$

即有 $I = 0$.

九、 (25 分) 设 $f(x)$ 是在 x_0 局部有定义的实函数, 如果 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域上可以展开为收敛于 $f(x)$ 的关于 $(x - x_0)$ 的幂级数, 则称 $f(x)$ 在 x_0 点解析. 若 $f(x)$ 在开区间 I 上点点解析, 则称 $f(x)$ 在 I 上解析.

1. 若 f, g 都为区间 I 上的实解析函数, 且 $E = \{x \in I \mid f(x) = g(x)\}$ 在 I 上有聚点, 证明: $f = g$.
2. 设 f, g 为 $\mathbb{R}$ 上的实解析函数, $w(f, g) = \det \begin{pmatrix} f & g \\ f' & g' \end{pmatrix}$ 为 Wronski 行列式, 证明: $w(f, g) = 0$ 当且仅当 f, g 线性相关.
3. 若 $f(x), g(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, (2) 中结论是否成立? 说明理由.

证明: (1) 考虑 $h = f - g$ 的情况：因为 f, g 都为区间 I 上的实解析函数, 所以 $h = f - g$ 在 I 上解析, 所以 $h = f - g$ 在 $x_0 \in I$ 处可以展开为 Taylor 级数：$h(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. 由

$$
h(x_0) = \left. \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right|_{x_0} = 0
$$

可以得到 $a_0 = 0$. 分类讨论如下：

情况 1：若 $a_1 = a_2 = \cdots = 0$. 则此时 $h = f - g \equiv 0$. 满足题意.

情况 2：若 $a_1 = a_2 = \cdots a_{m-1} = 0, a_m \neq 0$. 此时

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \\
&= a_m (x - x_0)^m + a_{m+1} (x - x_0)^{m+1} + \cdots \\
&= (x - x_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} (x - x_0)^k = (x - x_0)^m l(x)
\end{aligned}
$$

其中 $l(x)$ 在 I 上解析, 且 $l(x_0) = a_m \neq 0$. 即存在 $\varepsilon_0 > 0$. 使得当 $|x - x_0| < \varepsilon_0$ 时, 由 $l(x) \neq 0$. 即 $h(x) \neq 0$.

这就说明了 $x=x_0$ 外还有其他的零点, 这与 E 有聚点矛盾!
(2)(必要性) 若 f,g 为 $\mathbb{R}$ 上的实解析函数, 且 f,g 线性相关. 所以, 考虑 $f=ag$. 其中 $0\neq a\in\mathbb{R}$. 即

$$W(f,g)=\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ag & g \\ ag' & g' \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} g & g \\ g' & g' \end{vmatrix}=0$$

(充分性) 若 f,g 为 $\mathbb{R}$ 上的实解析函数, 且 $W(f,g)=0$.

$$W(f,g)=\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}=fg'-f'g=0$$

不妨设 g 不恒为零, 否则 f,g 线性相关, 则取 g 的一个非零区间 I. 考虑:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-f'g}{g^2}=0$$

此时存在 $a\in\mathbb{R}$. 满足: $f(x)=ag(x)$ 对任意的 $x\in I$ 成立. 由 (1) 可知, 它对任意的 $x\in R$ 也成立, 故 f,g 线性相关.
(3) 当 $f,g\in C^{\infty}(\mathbb{R})$ 时, 则结论不正确, 可取

$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, x>0 \\ 0, x\leqslant 0 \end{cases}, g(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, x<0 \\ 0, x\geqslant 0 \end{cases}$$

则当 $x<0$ 时, 有 $W(f,g)=\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & g \\ 0 & g' \end{vmatrix}=0$. 当 $x>0$ 时, 有 $W(f,g)=\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f & 0 \\ f' & 0 \end{vmatrix}=0$. 但是 f,g 线性无关, 得证!
注 本题是是实解析函数零点的孤立性, 反例是经典的例子!

十、(20 分) 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 为单连通区域 Ω 上的 C^1 函数, 且 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 Ω 上成立. 证明: 曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关, 其中 L 为 Ω 中的分段光滑曲线.

证明: 因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. 则对包含在 Ω 上分段光滑的闭区间 L. 设其包围的图形是 D_0. 则由 Green 公式可知,

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint_{D_0}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

设 A,B 为 Ω 内任意两点, L_1,L_2 是 Ω 中从 A 到 B 的两条任意路径, 则 $C=L_1+(-L_2)$ 就是 Ω 上的一条闭曲线, 所以

$$\begin{aligned} 0&=\int P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y \\ &=\int_{L_1}^{L} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y-\int_{L_2} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y \end{aligned}$$

所以 $\int_{L_1} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{L_2} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$. 所以曲线积分与路径无关.
下面说明存在单连通区域 Ω 上的可微函数 $h(x,y)$. 使得

$$\mathrm{d}(h(x,y))=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

这里的积分沿从 (x_0,y_0) 到 (x,y) 的任意路径, 考虑:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta h}{\Delta x}&=\frac{h(x+\Delta x,y)-h(x,y)}{\Delta x} \\ &=\frac{1}{\Delta x}\int_{(x,y)}(x+\Delta x,y)P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \\ &=\frac{1}{\Delta x}\int_{(x)}((x+\Delta x)P(t,y))\mathrm{d}t=P(\xi,\eta) \end{aligned}$$

其中 ξ 介于 x 与 $x+\Delta x$ 之间, 所以

$$h_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P(\xi,\eta)=P(x,y)$$

类似可得 $h_y(x,y)=Q(x,y)$. 所以, 在单连通区域 Ω 内, 成立:

$$\mathrm{d}h(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

进而 $P_y(x,y)=h_{xy}(x,y)=h_{yx}(x,y)=Q_x(x,y)$. 得证!

注 这就是 Green 公式的与路径无关的证明, 参考教材证明即可!

中山大学 2025 年数学分析试卷

一、1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{k}{n}}=$____.

解: 当 $k=1,2,\cdots,n$ 时, 有

$$\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)}{n+\frac{n}{n}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)}{n+\frac{k}{n}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)}{n+\frac{1}{n}}$$
$$=\frac{n}{n+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right).$$

一方面,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)$$
$$=\int_0^1\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}.$$

另一方面,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)=\frac{2}{\pi}.$$

由夹逼准则可知, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)}{n+\frac{k}{n}}=\dfrac{2}{\pi}$.

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=2$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f\left(\frac{2}{n}\right)}{f(0)}\right)^n=$____.

解:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)}{f(0)}\right)^n=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)}{f(0)}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{f(0)}+1\right)}$$
$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}n\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{f(0)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}-0}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}f'(\xi)}=\mathrm{e}^{f'(0)}$$

其中 ξ 介于 0 与 $\dfrac{2}{n}$ 之间, 最后一步运用了 Lagrange 中值定理.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^n}=$____.

解: 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{x}{1-x},x\in(-1,1)$, 则 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$. 所以 $\dfrac{1}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$, 所以 $\dfrac{x}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 继续求导

$$\frac{1+x}{(1-x)^3}=\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n.$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$, 所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+n\right)x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \\ &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x}{(1-x)^3}.\end{aligned}$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(n+1)}{2^n} = \left[\dfrac{2x}{(1-x)^3}\right]\Bigg|_{x=\frac{1}{2}} = 8.$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n\sqrt{n}+n^{3n}}$ 的收敛域为____.

解: 令 $u_n(x) = \dfrac{1}{3^n\sqrt{n+1}x^{3n}}$, 则

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{3^{n+1}\sqrt{n+2}x^{3n+3}}}{\frac{1}{3^n\sqrt{n+1}x^{3n}}}\right| = \frac{1}{3}\left|\frac{1}{x^3}\right| < 1.$$

解得 $x > \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ 或 $x < -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$, 再考虑端点处的奇数敛散性:

(i) 当 $x = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ 时, 有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n\sqrt{n+1}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{3n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{3n}}{\sqrt{n+1}}$. 由 Leibniz 判别法可知, 易知交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{3n}}{\sqrt{n+1}}$ 收敛.

(ii) 当 $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ 时, 有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n\sqrt{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{3n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, 发散. 综上所述, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n\sqrt{n+1}x^{3n}}$ 的收敛域为: $\left\{x\,\middle|\, x \leqslant -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \text{ 或 } x > \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right\}$.

5. $f(s,t) = \mathrm{e}^{2st}\sin(s^2+t)$, 则 $\dfrac{\partial f}{\partial s} =$____.

解: 因为 $f(s,t) = \mathrm{e}^{2st}\sin\left(s^2+t\right)$, 所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} &= 2t\mathrm{e}^{2st}\sin\left(s^2+t\right) + \mathrm{e}^{2st}\cos\left(s^2+t\right)\cdot 2s \\ &= 2\mathrm{e}^{2st}\left(t\sin\left(s^2+t\right) + s\cos\left(s^2+t\right)\right).\end{aligned}$$

6. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, 则 $\operatorname{div}(\nabla f) =$____.

解: 梯度 ∇f 是一个向量, 在三维空间 $\nabla f = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$.

由题意可知, $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, 所以 $\dfrac{\partial}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$ 所以 $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$, 散度 div 作用于向量场, 对于向量场 $\boldsymbol{A} = \left(A_x, A_y, A_z\right)$,

有 $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$, 所以 $\operatorname{div}(\nabla f) = \dfrac{\partial(2x)}{\partial x} + \dfrac{\partial(2y)}{\partial y} + \dfrac{\partial(2z)}{\partial z} = 2+2+2 = 6.$

7. 设 $f(x) = \begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0.\end{cases}$ 则 $f^{(2025)}(0) =$____.

解: 当 $x \neq 0$, 有 $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$, 则 $f'(x) = \dfrac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$, 而

所以 $f'(x) = \begin{cases}\dfrac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0\end{cases}$.

当 $x \neq 0$, 有 $f'(x) = \dfrac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$, 所以 $f''(x) = \left(-\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{4}{x^6}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$, 那么 $f''(x) = \begin{cases}\left(-\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{4}{x^6}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0\end{cases}$,

由数学归纳法得：

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases} P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$

所以 $f^{(n)}(0)=0$, 所以 $f^{(2025)}(0)=0$.

8. $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 4} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$____.

解: 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$, 所以

$$\begin{aligned} I&=\iiint_{x^2+y^2\leqslant 4} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 e^{-r^2}r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^2 e^{-r^2}r\mathrm{d}r\\ &=2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]\Bigg|_0^2=2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\left(e^{-4}-1\right)=\pi\left(1-\frac{1}{e^4}\right).\end{aligned}$$

9. 曲线积分 $I=\oint_\Gamma(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z=$ ____, 其中 Γ 为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{b}=1,(a>0,b>0)$ 的交线, 从 x 轴正向看 Γ 为逆时针方向.

解: 记作 $\Sigma: z=b-\dfrac{b}{a}x,(x,y)\in D:x^2+y^2\leqslant a^2$, 取上侧, 如图所示：由 Stokes 可知,

$$\begin{aligned} I&=\oint_\Gamma(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z\\ &=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}=\iint_\Sigma -2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2\mathrm{d}z\mathrm{d}x-2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=-2\iint_\Sigma \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Sigma\left[-2\left(-z_x\right)-2\left(-z_y\right)-2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=-2\frac{a+b}{a}\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\frac{a+b}{a}\cdot\pi a^2=-2\pi a(a+b).\end{aligned}$$

10. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\sqrt{2}x)}{x}\mathrm{d}x=$____.

解:

$$\begin{aligned} I&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\sqrt{2}x)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}x}\mathrm{d}(\sqrt{2}x)\\ &=\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

二、 (15 分) 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 其中 $x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\ln n$.

证明: 首先对任意的正整数 n, 由于 $\dfrac{1}{x}$ 在 $[n,n+1]$ 上严格递减, 因此

$$\frac{1}{n+1}<\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}.$$

于是

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}<0.$$

即 $\{x_n\}$ 单调递减, 同时

$$x_n>\sum_{k=1}^n\ln\frac{k+1}{k}-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>0.$$

即 $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 所以 $\{x_n\}$ 收敛.

三、 (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, 且 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[2f(x)+f'(x)]=0$, 证明:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0.$

解: 由 L'Hôpital 法则可知

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^{2x}}{e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{[2f(x)+f'(x)]\,e^{2x}}{2e^{2x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left[2f(x)+f'(x)\right]=0.$$

四、 (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 且 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\mathrm{d}x$. 证明: 存在 $\eta\in(0,1)$, 使得 $2f(\eta)+\eta f'(\eta)=0$.

证明: 设 $g(x)=x^2f(x)$, 则 $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$, 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 根据积分中值定理可知, 伊 $c\in(0,1)$ 寅使得

$$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\mathrm{d}x=2\cdot\frac{1}{2}c^2f(c)=c^2f(c).$$

而 $g(c)=c^2f(c), g(1)=f(1)=c^2f(c)$, 所以 $g(c)=g(1)=c^2f(c)$.

又因为 $g(x)$ 在 $[c,1]$ 上连续, 在 $(c,1)$ 上可导, 所以根据 Rolle 定理可知, 存在一点 $\eta\in(c,1)$, 使得 $g'(\eta)=2\eta f(\eta)+\eta^2f'(\eta)=0$, 得证!

五、 (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上无穷次可导, 且 $f(0)=f(2\pi)$, $\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明:

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{2\pi}[f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

证明: 可以证明 $a_0=a_0'=0$, 同时 $a_n'=nb_n, b_n'=-na_n, n=1,2,\cdots$, 其中 a_n,b_n 及 a_n',b_n' 分别为 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的 Fourier 系数. 根据 Percival 等式, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\mathrm{d}x;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n')^2+(b_n')^2\right]=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x.$$

而显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\left(a_n^2+b_n^2\right)$, 因此 $\int_0^{2\pi} f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{2\pi}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$.

六、 (20 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上连续, 证明: $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上一致连续的充要条件是存在 $[0,1]$ 上的连续函数 $g(x)$, 当 $x\in[0,1)$ 时, 有 $g(x)=f(x)$.

证明: 若 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上一致连续, 结合 Cauchy 准则可知 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ 存在. 记 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1^-)$, 可定义 $g(x)=\begin{cases}f(x),x\in[0,1)\\ f(1^-),x=1\end{cases}$, 即 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 所以存在 $[0,1]$ 上的连续函数 $g(x)$, 当 $x\in[0,1)$ 时, 有 $g(x)=f(x)$. 若 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 由康托定理可知,$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致连续, 而当 $x\in[0,1)$ 时, 有 $g(x)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上一致连续, 得证!

七、 (20 分) 解答如下问题:

1. (10 分) 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微, 且 $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|\leqslant1, \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\leqslant1$ 对任意的 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 成立. 证明: 对任意的 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, 有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|^2\leqslant2(x_1-x_2)^2+2(y_1-y_2)^2.$$

2. (10 分) 已知函数列 $\{f_n(x,y)\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微, 对任意的 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 及正整数 n, 有

$$\left|\frac{\partial f_n(x,y)}{\partial x}\right|\leqslant1,\quad\left|\frac{\partial f_n(x,y)}{\partial y}\right|\leqslant1.$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x,y)=f(x,y)$. 证明: 在 $\mathbb{R}^2$ 的任意有界闭集中, $\{f_n(x,y)\}$ 一致收敛于 $f(x,y)$.

证明：(1) 运用微分中值定理可得

$$\begin{aligned}|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| &= |f(x_2,y_2)-f(x_1,y_2)+f(x_1,y_2)-f(x_1,y_1)| \\ &\leqslant |f(x_2,y_2)-f(x_1,y_2)|+|f(x_1,y_2)-f(x_1,y_1)| \\ &= |f_x(\xi_1,y_2)|\cdot|x_2-x_1|+\left|f_y(x_1,\xi_2)\right|\cdot|y_2-y_1| \leqslant |x_2-x_1|+|y_2-y_1|\end{aligned}$$

其中 ξ_1 介于 x_1 与 x_2 之间；ξ_2 介于 y_1 与 y_2 之间, 再由基本不等式可知, $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| \leqslant |x_2-x_1|+|y_2-y_1| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, 即对 $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$, 有 $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|^2 \leqslant 2(x_1-x_2)^2+2(y_1-y_2)^2$.

(2)Arzelà-Ascoli 定理指出, 在度量空间中, 一个函数族在有界闭集上一致收敛的充分必要条件是该函数族是等度连续且逐点收敛的.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y)=f(x,y)$, 所以函数列 $\{f_n(x,y)\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上逐项收敛, 接下来, 只需要证明等度连续性：对于 $\mathbb{R}^2$ 中的任意有界闭集 D, 由于 D 是有界闭集, 所以 D 是紧集, 又对于 $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$, 由 (1) 可知,

$$\begin{aligned}|f_n(x_1,y_1)-f_n(x_2,y_2)| &= |f_n(x_2,y_2)-f_n(x_1,y_2)+f_n(x_1,y_2)-f_n(x_1,y_1)| \\ &\leqslant |f_n(x_2,y_2)-f_n(x_1,y_2)|+|f_n(x_1,y_2)-f_n(x_1,y_1)| \leqslant |x_2-x_1|+|y_2-y_1|.\end{aligned}$$

对 $\forall\epsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, 当 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}<\delta$ 时, 有 $|x_2-x_1|<\delta, |y_2-y_1|<\delta$, 则 $|f_n(x_1,y_1)-f_n(x_2,y_2)|<\varepsilon$. 所以函数列 $\{f_n(x,y)\}$
在 D 上等度连续. , 再根据 Arzelà-Ascoli 定理可知, 在 $\mathbb{R}^2$ 的任意有界闭集中, 函数列 $\{f_n(x,y)\}$ 一致收敛于 $f(x,y)$.

中南大学 2025 年数学分析试卷

一、 1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{\sin^4 x}$.

解: 首先注意到分母 $\sin^4 x \sim x^4\left(x\to 0^+\right)$, 同时对于分子, 有

$$\begin{aligned}\sin(\tan x) &= \tan x-\frac{1}{6}\tan^3 x+o\left(\tan^4 x\right)\\&=\left(x+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^4\right)\right)-\frac{1}{6}\left(x+o\left(x^2\right)\right)^3+o\left(x^4\right)\\&=x+\frac{1}{6}x^3+o\left(x^4\right)\left(x\to 0^+\right);\\\tan(\sin x) &= \sin x+\frac{1}{3}\sin^3 x+o\left(\sin^4 x\right)\\&=\left(x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^4\right)\right)+\frac{1}{3}\left(x+o\left(x^2\right)\right)^3+o\left(x^4\right)\\&=x+\frac{1}{6}x^3+o\left(x^4\right)\left(x\to 0^+\right).\end{aligned}$$

两者相减可得 $\sin(\tan x)-\tan(\sin x)=o\left(x^4\right)\left(x\to 0^+\right)$, 因此

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{\sin^4 x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{o\left(x^4\right)}{x^4}=0.$$

2. $\displaystyle\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

解: 显然

$$\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\int_0^2\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)}{\mathrm{e}^{2x}+1}=\arctan\left(\mathrm{e}^x\right)\Big|_0^2=\arctan\left(\mathrm{e}^2\right)-\frac{\pi}{4}.$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^{1-n}$.

解:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{1-n} &= \lim_{n\to+\infty}\left[1+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)(1-n)}\\&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)(1-n)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}+1\right)}=\mathrm{e}\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int_0^1\frac{\cos x\cos(\sin x)}{\sin(\sin x)+\cos(\sin x)}\mathrm{d}x$.

解: 记所求定积分为 I, 作换元 $t=\sin x$, 有

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1\frac{\cos(\sin x)}{\sin(\sin x)+\cos(\sin x)}\mathrm{d}(\sin x)=\int_0^{\sin 1}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\sin 1}\frac{(\sin t+\cos t)+(\cos t-\sin t)}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}(t+\ln|\sin t+\cos t|)\Big|_0^{\sin 1}\\&=\frac{1}{2}\sin 1+\frac{1}{2}\ln(\sin(\sin 1)+\cos(\sin 1))\end{aligned}$$

二、 (15 分) 确定如下级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{3^{n+2}}x^{2n}$ 的收敛域, 并计算在收敛域内的和函数.

解: 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{2n+1}{3^{n+2}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

因此幂级数的收敛半径为 $\sqrt{3}$, 而当 $x=\pm\sqrt{3}$ 时, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{3^{n+2}}(\pm\sqrt{3})^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{9}.$$

发散, 因此幂级数的收敛域为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$. 设幂级数的和函数为 $f(x)$, 则

$$f(x)=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}x^{2n}=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^{2n}.$$

考虑幂级数 $g(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}t^{2n+1}=\dfrac{t}{1-t^2}, t\in(-1,1)$, 根据逐项求导可得

$$g'(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)t^{2n}=\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}, t\in(-1,1).$$

特别地, 也有

$$f(x)=\frac{1}{9}g'\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{9}\cdot\frac{1+\frac{x^2}{3}}{\left(1-\frac{x^2}{3}\right)^2}=\frac{3+x^2}{3\,(3-x^2)^2}, x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3}).$$

三、 (15 分) 证明: 函数 $y=\dfrac{x}{1+x^4}$ 在实数域 $\mathbb{R}$ 上有界且一致连续.

证明: 由于 $f(x)$ 关于实数轴是奇函数, 只考虑 $x\geqslant 0$ 部分.

$$f'(x)=\frac{1+x^4-x\cdot 4x^3}{(1+x^4)^2}=\frac{1-3x^4}{(1+x^4)^2}$$

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}},+\infty\right)$ 上单调递减, 且

$$f\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)=\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}{1+\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)^4}>0,\ f(0)=0,\ f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^4}=0$$

故 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^4}\leqslant\dfrac{\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}{1+\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)^4}$, 所以易知 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^4}$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界. $\delta_n=\dfrac{\varepsilon}{M}>0$, 对任何 $x',x''\in[0,+\infty)$, 只要 $|x'-x''|<\delta$, 则

$$|f(x')-f(x'')|=|f'(\xi)||x'-x''|\leqslant M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

其中 ξ 介于 x' 与 x'' 之间, 所以易知 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^4}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

四、 (15 分) 计算曲线 $x=\mathrm{e}^t\cos t, y=\mathrm{e}^t\sin t$ 在 $t\in[0,\pi]$ 的长度.

解: 利用参数方程的求弧长公式:

$$\begin{aligned}L_{\text{弧长}}&=\int_0^{\pi}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\pi}\sqrt{(\mathrm{e}^t\cos t-\mathrm{e}^t\sin t)^2+(\mathrm{e}^t\sin t+\mathrm{e}^t\cos t)^2}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\pi}\sqrt{\mathrm{e}^{2t}\left[(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2\right]}\mathrm{d}t\\&=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\,(\mathrm{e}^{\pi}-1)\end{aligned}$$

五、 (15 分) 求由方程 $x^2+2xy+2y^2=1$ 所确定的隐函数的极值.

解: 方程两边求导可知, $2x+2\left(y+xy'\right)+4yy'=0$, 解得 $y'(x)=-\dfrac{x+y}{x+2y}$, 令 $y'(x)=0$, 可得 $x+y=0$, 即 $y=-x$, 所以 $x^2+2x(-x)+2(-x)^2=1$, 所以 $x^2=1$, 解得 $x=-1$ 或 $x=1$. 对 $y'(x)=-\dfrac{x+y}{x+2y}$ 两边继续求导

$$y''(x)=-\frac{(1+y')(x+2y)-(x+y)(1+2y')}{(x+2y)^2}$$

当 $x=-1$ 时, $y'(-1)=0, y(-1)=1$, 所以 $y''(-1)=-1<0$, 所以 $y(x)$ 在 $x=-1$ 处取极大值, 即为 $y(-1)=1$, 当 $x=1$ 时, $y'(1)=0, y(1)=-1$, 所以 $y''(1)=1>0$, 所以 $y(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值, 即为 $y(1)=-1$.

六、 (15 分) 证明: 若函数 $u=f(x,y)$ 满足 Laplace 方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$, 则函数 $v=f(x-\sqrt{3}y,\sqrt{3}x+y)$ 也满足 Laplace 方程.

证明: 利用链式求导法则可知,

$$\begin{aligned}
v'_x&=f'_1\cdot 1+f'_2\cdot\sqrt{3}=f'_1+\sqrt{3}f'_2\\
v'_y&=f'_1\cdot(-\sqrt{3})+f'_2\cdot 1=-\sqrt{3}f'_1+f'_2
\end{aligned}$$

进一步, 有

$$\begin{aligned}
v''_{xx}&=f''_{11}\cdot 1+f''_{12}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\left(f''_{21}\cdot 1+f''_{22}\cdot\sqrt{3}\right)\\
&=f''_{11}+\sqrt{3}f''_{12}+\sqrt{3}f''_{21}+3f''_{22}\\
v''_{yy}&=-\sqrt{3}\left(f''_{11}\cdot(-\sqrt{3})+f''_{12}\cdot 1\right)+f''_{21}\cdot(-\sqrt{3})+f''_{22}\cdot 1\\
&=3f''_{11}-\sqrt{3}f''_{12}-\sqrt{3}f''_{21}+f''_{22}
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
v''_{xx}+v''_{yy}&=f''_{11}+\sqrt{3}f''_{12}+\sqrt{3}f''_{21}+3f''_{22}+3f''_{11}-\sqrt{3}f''_{12}-\sqrt{3}f''_{21}+f''_{22}\\
&=4f''_{11}+4f''_{22}=4\left(f''_{11}+f''_{22}\right)=4\left(u''_{xx}+u''_{yy}\right)=0
\end{aligned}$$

表明函数 $v=f(x-\sqrt{3}y,\sqrt{3}x+y)$ 也满足 Laplace 方程, 得证!

七、 (15 分) 设 $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ 满足以下条件 (*): 存在 $L>0, \alpha\in(0,1)$, 使得对任意的 $x,y\in(0,1)$, 始终有 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|^\alpha$.

1. (6 分) 证明: f 在 $(0,1)$ 上连续.
2. (6 分) 证明: f 在 $(0,1)$ 上一致连续.
3. (3 分) 如果函数 f 满足条件 (*), 则称其为 C^α 函数, 请举出一个例子, 满足对于 $0<\beta<\alpha$, 该函数是 C^β 函数, 但它不是 C^α 函数.

证明: (1) 任取 $x_0\in(0,1)$, 对任意的 $x\in(0,1)$, 由于

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant L|x-x_0|^\alpha\to 0\,(x\to x_0).$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 这说明 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 再结合 x_0 的任意性可知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续.

(2) 对任意的 $\varepsilon>0$, 记 $\delta=\left(\dfrac{\varepsilon}{L}\right)^{\frac{1}{\alpha}}>0$, 那么对任意的 $x,y\in(0,1)$, 当 $|x-y|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|^\alpha<L\delta^\alpha=\varepsilon.$$

这说明 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上一致连续.

(3) 任取 $0<\beta<\alpha<1$, 考虑函数 $f(x)=x^\beta$, 对任意的 $x,y\in(0,1)$, 我们证明:

$$|f(x)-f(y)|=\left|x^\beta-y^\beta\right|\leqslant|x-y|^\beta. \tag{22.1}$$

这里不妨设 $0<y\leqslant x<1$, 那么上述不等式等价于

$$x^\beta-y^\beta\leqslant(x-y)^\beta. \tag{22.2}$$

为此, 可构造函数 $g(x)=(x-y)^{\beta}-x^{\beta}+y^{\beta}, x\in[y,1)$, 由于

$$g'(x)=\beta\left[(x-y)^{\beta-1}-x^{\beta-1}\right]>0, x\in(y,1)$$

因此 $g(x)$ 在 $[y,1)$ 上严格递增, 同时 $g(y)=0$, 因此当 $x\in[y,1)$ 时, 有 $g(x)\geqslant 0$, 也就是式(22.2)成立, 那么式(22.1)也成立, 这说明 $f(x)$ 为 C^{β} 函数. 而若 $f(x)$ 也是 C^{α} 函数, 即存在 $L>0$, 对任意的 $x,y\in(0,1)$, 有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|^{\alpha}$$

特别地, 取 $x_n=\dfrac{1}{2n}, y_n=\dfrac{1}{4n}(n=1,2,\cdots)$, 有 $|f(x_n)-f(y_n)|\leqslant L|x_n-y_n|^{\alpha}$, 即

$$\frac{1}{(2n)^{\beta}}-\frac{1}{(4n)^{\beta}}\leqslant\frac{L}{(4n)^{\alpha}}$$

那么 $\dfrac{1}{2^{\beta}}-\dfrac{1}{4^{\beta}}\leqslant\dfrac{L}{4^{\alpha}n^{\alpha-\beta}}$, 令 $n\to\infty$ 可得 $\dfrac{1}{2^{\beta}}-\dfrac{1}{4^{\beta}}\leqslant 0$, 这显然是矛盾的. 因此 $f(x)$ 不是 C^{α} 函数.

八、 (20 分) 解答如下问题:

1. (10 分) 计算 $f(x)=\dfrac{2x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开式.

2. (10 分) 设 $|x|<1$, 计算 $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1-2x\cos\theta+x^2)\mathrm{d}\theta$.

解: (1) 注意到 $1-2x\cos\theta+x^2=\left(1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(1-x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)$, 因此

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{2x\sin\theta}{\left(1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(1-x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)}=-\mathrm{i}\left(\frac{1}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}-\frac{1}{1-x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}\right)\\&=-\mathrm{i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}-\sum_{n=0}^{\infty}x^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin n\theta\end{aligned}$$

其中 $|x|<1$.

(2) 当 $|x|<1$ 时, 由于 $\dfrac{2x\sin\varphi}{1-2x\cos\varphi+x^2}=2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin n\varphi, \varphi\in[0,\pi]$, 同时 $|x^n\sin n\varphi|\leqslant|x|^n$, 而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|x|^n$ 收敛, 因此 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin n\varphi$ 关于 $\varphi\in[0,\pi]$ 一致收敛, 进而任取 $\theta\in[0,\pi]$, 有

$$\int_0^{\theta}\frac{2x\sin\varphi}{1-2x\cos\varphi+x^2}\mathrm{d}\varphi=2\int_0^{\theta}\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin n\varphi\right)\mathrm{d}\varphi=2\sum_{n=1}^{\infty}x^n\int_0^{\theta}\sin n\varphi\mathrm{d}\varphi$$

也就是

$$\ln\left(1-2x\cos\theta+x^2\right)-\ln\left(1-2x+x^2\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\theta}{n}x^n=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\cos n\theta$$

而其中 $-\ln\left(1-2x+x^2\right)=-2\ln(1-x)=2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, 因此上式说明

$$\ln\left(1-2x\cos\theta+x^2\right)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\cos n\theta$$

容易发现 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\cos n\theta$ 关于 $\theta\in[0,\pi]$ 依旧一致收敛, 那么

$$\int_0^{\pi}\ln\left(1-2x\cos\theta+x^2\right)\mathrm{d}\theta=-2\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\cos n\theta\right)\mathrm{d}\theta=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\int_0^{\pi}\cos n\theta\mathrm{d}\theta=0$$

注 对于 (2), 也可以通过如下方式求函数的幂级数展开式:

$$\begin{aligned}\ln\left(1-2x\cos\theta+x^2\right)&=\ln\left[\left(1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(1-x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\right]=\ln\left(1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)+\ln\left(1-x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}}{n}=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cos n\theta}{n}\end{aligned}$$

重庆大学 2025 年数学分析试卷

一、 (20 分) 计算函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\frac{1}{\mathrm{e}}-\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\right]$.

解: 作换元 $x=\frac{1}{t}$, 结合 L'Hôpital 法则与等价无穷小替换, 有

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{1}{\mathrm{e}}-\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\right] &= \lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{\mathrm{e}}-\left(\frac{1/t}{1+1/t}\right)^{\frac{1}{t}}}{t} = \lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{\mathrm{e}}-(1+t)^{-\frac{1}{t}}}{t}\\
&= \lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{\mathrm{e}}-\mathrm{e}^{-\frac{\ln(1+t)}{t}}}{t} = \lim_{t\to0+}\mathrm{e}^{-\frac{\ln(1+t)}{t}}\cdot\frac{\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)}{t^2}\\
&= \mathrm{e}^{-1}\lim_{t\to0+}\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2} = \mathrm{e}^{-1}\lim_{t\to0+}\frac{1-\ln(1+t)-1}{2t}\\
&= \mathrm{e}^{-1}\lim_{t\to0+}\frac{-t}{2t} = -\frac{1}{2\mathrm{e}}.
\end{aligned}
$$

二、 (20 分) 设 S 为 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑封闭曲面, 取外侧, 考虑第二类曲面积分

$$
I=\iint_S \left(x^3+y^{2025}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(2y^3+y+z^{2024}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(3z^3-4z-1929x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
$$

1. 试确定曲面 S 的方程, 使得积分 I 的值最小, 并求出这个最小值.
2. 将第 (1) 中得到的曲面 S 在第一卦限的部分记作 S_1, 求 S_1 的切平面, 使得该切平面与三个坐标轴围成的几何体的体积最小.

解: 令

$$
P=x^3+y^{2025}, Q=2y^3+y+z^{2024}, R=3z^3-4z-1929x,
$$

则 $\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2, \frac{\partial Q}{\partial y}=6y^2+1, \frac{\partial R}{\partial z}=9z^2-4$, 利用 Gauss 公式可知,

$$
\begin{aligned}
I &= \oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&= 3\iiint_\Omega\left(x^2+2y^2+3z^2-1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

其中 Ω 为 S 围成的立体区域.

(1) 若积分 I 的值最小, 则曲面围成的立体区域为:

$$
\Omega=\left\{(x,y,z): x^2+2y^2+3z^2-1\leqslant 0\right\}
$$

令 $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=\frac{1}{\sqrt{2}}r\sin\theta\sin\varphi, z=\frac{1}{\sqrt{3}}r\cos\theta$, 则

$$
\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{6}}r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi
$$

且积分区域变为：$0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, 所以

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{3}{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \left(r^2-1\right) r^2 \sin\theta \mathrm{d}r \\
&= \frac{3}{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^1 \left(r^2-1\right) r^2 \mathrm{d}r \\
&= \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{6}\pi}{15}.
\end{aligned}
$$

(2) 由 (1) 可知得到的曲面 S_1 为：$x^2+2y^2+3z^2=1, x, y, z>0$. 令

$$
F(x, y, z)=x^2+2y^2+3z^2-1, \left\{\begin{array}{l}
F_x'(x, y, z)=2x \\
F_y'(x, y, z)=4y \\
F_z'(x, y, z)=6z
\end{array}\right.
$$

所以曲面 S_1 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程为：

$$
x_0\left(x-x_0\right)+2y_0\left(y-y_0\right)+3z_0\left(z-z_0\right)=0
$$

化简为：$x_0x+2y_0y+3z_0z-{x_0}^2-2{y_0}^2-3{z_0}^2=0$.
又因为 (x_0, y_0, z_0) 满足 $x^2+2y^2+3z^2=1, x, y, z>0$,
所以 ${x_0}^2+2{y_0}^2+3{z_0}^2=1$, 所以 $x_0x+2y_0y+3z_0z=1$.
该切平面与三个坐标轴的截距分别为：$\frac{1}{x_0}, \frac{1}{2y_0}, \frac{1}{3z_0}$, 所以围成四面体体积为：

$$
V=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{2y_0} \cdot \frac{1}{3z_0}\right)=\frac{1}{36} \frac{1}{x_0y_0z_0}.
$$

当 $x_0=y_0=z_0$ 时, 使得该切平面与三个坐标平面围成的几何体的体积最小.
代入 ${x_0}^2+2{y_0}^2+3{z_0}^2=1$ 可得：$x_0=y_0=z_0=\sqrt{\frac{1}{6}}$. 所以切平面为：$x+2y+3z=\sqrt{6}$.

三、 (20 分) 解答如下问题:

1. 已知数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $|x_{n+1}-x_n|<r|x_n-x_{n-1}|, n=2,3,\cdots$. 其中 $0<r<1$ 为某个常数, 证明: 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛.
2. 如果将第 (1) 小题中的常数 r 换成 1, 是否仍有 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛? 证明你的结论.

证明: (1) 根据已知, 对任意的正整数 $n>m$, 有

$$
\begin{aligned}
|x_n-x_m| &\leqslant |x_n-x_{n-1}|+|x_{n-1}-x_{n-2}|+\cdots+|x_{m+1}-x_m| \\
&< \left(1+r+\cdots+r^{n-m-1}\right)|x_{m+1}-x_m| \\
&< \frac{1-r^{n-m}}{1-r} \cdot r^{m-1}|x_2-x_1| < \frac{r^{m-1}}{1-r}|x_2-x_1| \rightarrow 0(m \rightarrow \infty)
\end{aligned}
$$

所以对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 使得 $m>N$ 时, 有 $\frac{r^{m-1}}{1-r}|x_2-x_1|<\varepsilon$, 进而当 $n>m>N$ 时, 就有

$$
|x_n-x_m|<\frac{r^{m-1}}{1-r}|x_2-x_1|<\varepsilon.
$$

由 Cauchy 准则便知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

(2) $\{x_n\}$ 不一定收敛, 例如 $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, 明显

$$
|x_{n+1}-x_n|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}=|x_n-x_{n-1}|, n=2,3,\cdots.
$$

但是 $\{x_n\}$ 却是发散的.

四、 (10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续的一阶导函数.

1. 证明: 对任意的 $x \in [0,1]$, 有

$$
|f(x)| \leqslant \int_0^1 |f(t)| \mathrm{d}t+\int_0^1 |f'(t)| \mathrm{d}t.
$$

2. 证明不等式:

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t.$$

证明: 由积分第一中值定理, 存在 $\xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 使得 $|f(\xi)| = 2\int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)|\mathrm{d}t$, 那么

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|f(\xi) + \int_\xi^{\frac{1}{2}} f'(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant |f(\xi)| + \int_\xi^{\frac{1}{2}} \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t \leqslant 2\int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)|\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{2}} \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t$$

同理可证

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant 2\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(t)|\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t$$

上述两式相加除以 2 可得 $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^1 \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t$.

五、 (15 分) 判断下列命题的正误, 正确的需给出证明, 错误的要举出反例.

1. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x_n}{n}$ 也收敛.
2. 若连续函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上逐点收敛于连续函数 $f(x)$, 则 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$.
3. 若函数 $f(x), g(x)$ 都在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且 $g(x)$ 以 x 轴为水平渐近线, 则函数 $f(x)g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

证明: (1) 错误, 反例: $x_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$, 但是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ 发散.

(2) 错误, 反例: $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^3}$. 显然对任意的 $x \in [0,1]$, 均有

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{1+n^2x^3} = 0$$

根据逐点收敛定义可知, $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上逐点收敛于连续函数 $f(x)=0$. 但是当 $x_n = \frac{1}{n}$ 时, $\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f(x)\right| = \frac{1}{2} \neq 0$, 故不一致收敛.

(3) 正确, 因为 $g(x)$ 以 x 轴为水平渐近线, 所以对 $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$, 使得当 $x > M$ 时, 有 $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2\|f(x)\|}$, 其中 $\|f(x)\|$ 是 $f(x)$ 在 $[0,M]$ 上的一致连续的界限. 由于函数 $f(x)$ 都在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 它在 $[0,M]$ 上也是一致连续的. 故对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 使得对 $\forall x, y \in [0,M]$, 只要 $|x-y| < \delta_1$, 就有 $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 对于 $x, y > M$, 由于 $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2\|f(x)\|}$ 和 $|g(y)| < \frac{\varepsilon}{2\|f(x)\|}$, 有

$$\begin{aligned}
&|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \\
\leqslant\ &|f(x)||g(x)-g(y)| + |g(y)||f(x)-f(y)| \\
<\ &\|f(x)\|\frac{\varepsilon}{2\|f(x)\|} + \frac{\varepsilon}{2\|f(x)\|}\|f(x)\| = \varepsilon
\end{aligned}$$

所以, 对于任意的 $x \leqslant M$ 和 $y > M$ 或者 $x > M$ 和 $y \leqslant M$ 考, 我们就可以通过选择足够小的 δ, 使得 $|f(x)g(x) - f(y)g(y)| < \varepsilon$. 因此, 函数 $f(x)g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 得证!

六、 (20 分) 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中由光滑简单封闭曲线 C 所围成的闭区域, 二元函数 f 和 g 在 D 上具有连续的二阶偏导数, 记 $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

1. 证明等式:

$$\iint_D (g\Delta f)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_C g\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}s - \iint_D [\mathrm{grad}(f)\cdot \mathrm{grad}(g)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 n 为曲线 C 的外法单位向量, $\frac{\partial f}{\partial n}$ 表示 f 沿 n 方向的方向导数, 向量 $\mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\mathrm{grad}(g) =$

$\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}\right)$.

2. 证明: 若 f 在曲线 C 上满足 $f \equiv 0$, 则

$$\iint_D \left(|f|^2 + |\Delta f|^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 2 \iint_D |\operatorname{grad}(f)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明: (1) 根据两类曲面积分的联系及 Green 公式, 有

$$\begin{aligned}\int_C g\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s &= \int_C \left[g\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, x}) + g\frac{\partial f}{\partial y}\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, y})\right]\mathrm{d}s = \int_C g\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y - g\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x \\ &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(g\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (g\Delta f)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D [\operatorname{grad}(f)\cdot\operatorname{grad}(g)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

(2) 由于 f 在曲线 C 上满足 $f \equiv 0$, 那么 $\displaystyle\int_C f\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}s = 0$, 再结合 (1), 取 $g = f$ 可知

$$\iint_D (f\Delta f)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_C f\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s - \iint_D |\operatorname{grad}(f)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_D |\operatorname{grad}(f)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

而由平均值不等式可知 $|f|^2 + |\Delta f|^2 \geqslant -2f\Delta f$, 进而

$$\iint_D \left(|f|^2 + |\Delta f|^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant -2\iint_D (f\Delta f)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_D |\operatorname{grad}(f)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

七、 (25 分) 解答如下问题:

1. 证明: 含参变量 y 的广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.
2. 证明: 在 $(0, +\infty)$ 上, 含参变量 y 的广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x$ 不一致收敛, 但内闭一致收敛.
3. 利用第 (1) 和第 (2) 小题中的结论计算 Dirichlet 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.
4. 利用第 (3) 小题中的结论证明: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin(x+y)}{x(x+y)}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{8}$.

证明: 【法 1】(1) 显然 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛, 自然关于 $y \in [0, +\infty)$ 也一致收敛. 另外, 对任意的 $y \in [0, +\infty)$, 函数 e^{-xy} 关于 $x \in [0, +\infty)$ 单调递减, 同时 $0 < \mathrm{e}^{-xy} \leqslant 1$, 由 Abel 判别法可知 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

(2) 若 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $A > 0$, 当 $A'' > A' > A$ 时, 对任意的 $y \in (0, +\infty)$, 有 $\left|\displaystyle\int_{A'}^{A''} \mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$, 特别地, 令 $y \to 0^+$ 可得 $\left|\displaystyle\int_{A'}^{A''}\sin x\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$, 由 Cauchy 准则可知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$ 收敛, 这显然矛盾的. 因此 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛. 但对任意的 $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$, 有

$$|\mathrm{e}^{-xy}\sin x| \leqslant \mathrm{e}^{-ax}, \forall x \in [0, +\infty), \forall y \in [a, b].$$

其中 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$ 收敛, 所以 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x$ 在 $[a, b]$ 一致收敛, 也就是在 $(0, +\infty)$ 上内闭一致收敛.

(3) 记 $f(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 由 (1) 可知 $f(y)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 由 (2) 可知 $f(y)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 且

$$f'(y) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^{-xy}}{y^2+1}(-y\sin x - \cos x)\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{y^2+1}$$

积分可得 $f(y) = -\arctan y + C, y \in (0, +\infty)$, 其中 C 为常数. 另外, 注意到 $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leqslant 1, x \in (0, +\infty)$, 因此

$$|f(y)| \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x = \frac{1}{y} \to 0(y \to +\infty)$$

那么 $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y)=0$, 同时 $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y)=\lim\limits_{y\to+\infty}(-\arctan y+C)=C-\dfrac{\pi}{2}$, 因此 $C=\dfrac{\pi}{2}$, 即

$$f(y)=\frac{\pi}{2}-\arctan y,\ y\in(0,+\infty)$$

特别地, 也有 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=f(0)=\lim_{y\to0^+}f(y)=\frac{\pi}{2}$.

(4) 记正弦积分函数 $\mathrm{Si}(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, 有 $\mathrm{Si}'(x)=\dfrac{\sin x}{x}, x>0$, 且 $\mathrm{Si}(+\infty)=\dfrac{\pi}{2}$, 那么

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin(x+y)}{x(x+y)}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+y)}{x+y}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{Si}'(x)\,\mathrm{Si}(x+y)\Big|_0^{+\infty}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{Si}'(x)\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Si}(x)\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{\pi}{2}\mathrm{Si}(x)-\frac{1}{2}\mathrm{Si}^2(x)\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

【法 2】(1) 由于 $\displaystyle\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 关于参量 $y\in[0,+\infty)$ 收敛, 函数 $g(x,y)=\mathrm{e}^{-xy}$ 对每个 $y\in[0,+\infty)$ 单调, 且 $\forall y\in[0,+\infty), x\geqslant0$ 都有 $|g(x,y)|=|\mathrm{e}^{-xy}|\leqslant1$, 由 Abel 判别法可知, 含参变量 y 的广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) 显然 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x$ 在 $y=0$ 处并不收敛, 故不一致收敛. 但对任意 $[a,b]\subset(0,+\infty)$, 有 $|\mathrm{e}^{-xy}\sin x|\leqslant\mathrm{e}^{-ax}, y\in[a,b]$. 又 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$ 收敛, 所以由 Weierstrass 判别法可知：积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 内闭一致收敛.

(3) 考虑构造 Feynman 积分法, 不妨记作：$I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, 构造函数

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,\ f(0)=I$$

由一致收敛性质可知,

$$f'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial\left(\mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin t}{t}\right)}{\partial x}\mathrm{d}t=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\sin t\mathrm{d}t=-\frac{1}{1+x^2}$$

由 Newton-Leibniz 公式可知,

$$0-I=f(+\infty)-f(0)=\int_0^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=-\frac{\pi}{2}$$

即 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

(4) 令 $u=x+y$, 则

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\sin(x+y)}{x(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\left[\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u-\int_0^x\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right]\\&=\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

令 $F(x)=\int_0^x \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$, 则 $F'(x)=\frac{\sin x}{x}$, 所以

$$
\begin{aligned}
I &= \left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^{+\infty}F'(x)F(x)\mathrm{d}x\\
&= \left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^{+\infty}F(x)\mathrm{d}(F(x))\\
&= \left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right)^2-\left[\frac{1}{2}(F(x))^2\Big|_0^{+\infty}\right]
\end{aligned}
$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$. 且 $F(0)=\int_0^0\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u=0$, 所以

$$
\begin{aligned}
I &= \left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right)^2-\frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right)^2\\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^3}{8}.
\end{aligned}
$$

八、 (20 分) 设 $f(x)$ 为 $[-\pi,\pi]$ 上的实值 Riemann 可积函数. 给定区间 $I\subset[-\pi,\pi]$, I 上的特征函数定义为

$$
\chi_I(x)=\begin{cases}1, & x\in I;\\ 0, & x\notin I.\end{cases}
$$

如果 $I_1,I_2,\cdots,I_N$ 为 $[-\pi,\pi]$ 中两两不交的子空间, $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 均为常数, 且 $\bigcup\limits_{k=1}^{N}I_k=[-\pi,\pi]$, 那么我们称有限线性组合

$$
a_1\chi_{I_1}+a_2\chi_{I_2}+\cdots+a_N\chi_{I_N}
$$

为 $[-\pi,\pi]$ 上的阶梯函数.

1. 证明: 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $[-\pi,\pi]$ 上的阶梯函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 使得

$$
\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x),\quad x\in[-\pi,\pi].
$$

并且

$$
\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(x)-f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon,\quad \int_{-\pi}^{\pi}|\psi(x)-f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.
$$

2. 利用 (1) 中的结论证明

$$
\lim_{p\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(px)\mathrm{d}x=\lim_{p\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(px)\mathrm{d}x=0.
$$

3. 将 $f(x)$ 延拓为 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期的周期函数, 延拓之后的函数仍记为 $f(x)$. 证明: $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和 $S_n(x)$ 可写成

$$
S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t,\quad n=1,2,\cdots.
$$

4. 在第 (3) 小题的条件下, 再假设 $x_0\in(-\pi,\pi)$ 为 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的唯一间断点, 且 $f(x)$ 在 x_0 处的两个单侧极限和两个单侧导数 (应该是导数的单侧极限) 都存在. 证明: $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x_0 点收敛于 $\frac{A+B}{2}$, 其中 A,B 分别为 $f(x)$ 在 x_0 点的左极限与右极限.

证明: (1)【法 1】由于 $f(x)$ 为闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上的实值 Riemann 可积函数. 所以 $\exists T$, 使得 $\sum\limits_T w_i{}^f\Delta x_i=S(T)-s(T)<\varepsilon$, 由于

$$
s(T)\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x\leqslant S(T)
$$

所以

$$
\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x-s(T)<\varepsilon, S(T)-\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x<\varepsilon. \tag{23.1}
$$

所以只需要取阶梯函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为：

$$\varphi(x)=m_i,\psi(x)=M_i,x_i\in(x_{i-1},x_i),i=1,2,3,\cdots,n$$

就有 $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\mathrm{d}x=s(T),\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\mathrm{d}x=S(T)$, 将其代入 (1) 中可得：

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\mathrm{d}x<\varepsilon,\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

即证出 $\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(x)-f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon,\int_{-\pi}^{\pi}|\psi(x)-f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$

【法 2】换一种叙述方式：因为 $f(x)$ 为 $[-\pi,\pi]$ 上的实值 Riemann 可积函数. 根据 Riemann 积分的定义可知, 对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在一个分割 T, 使得上和 $U(f,T)$ 和下和 $L(f,T)$ 满足：$U(f,T)-L(f,T)<\varepsilon$. 说明我们可以找到一个分割, 使得上和于下和之差可以任意的小. 将 $[-\pi,\pi]$ 分割为 N 个子区间 $I_k=[x_{k-1},x_k]$, 其中 $k=1,2,\cdots,N$. 在每个子区间 I_k 上, 定义

$$\begin{cases}m_k=\inf\{f(x):x\in I_k\}\\ M_k=\sup\{f(x):x\in I_k\}'\end{cases}$$

它们分别是 $f(x)$ 在 I_k 上的下确界和上确界, 然后, 我们定义两个阶梯函数 $\varphi(x),\psi(x)$ 如下：

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{N}m_k\chi_{I_k}(x),\psi(x)=\sum_{k=1}^{N}M_k\chi_{I_k}(x).$$

其中 $\chi_{I_k}(x)$ 是子区间 I_k 的特征函数, 这样, 对于任意的 $x\in[-\pi,\pi]$, 有

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x),x\in[-\pi,\pi].$$

由于 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 分别是 $f(x)$ 在每个子区间的下界和上界, 计算：

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\varphi(x)-f(x))\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{N}\int_{I_k}(m_k-f(x))\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\psi(x)-f(x))\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{N}\int_{I_k}(M_k-f(x))\,\mathrm{d}x$$

由于 $U(f,T)-L(f,T)<\varepsilon$, 我们有 $\sum_{k=1}^{N}(M_k-m_k)\,\Delta x_k<\varepsilon$, 其中 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ 是子区间 I_k 的长度, 这说明 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 与 $f(x)$ 的差的积分之和可以任意的小, 故结论得证！

(2) 对 $\forall[\alpha,\beta]$, 有 $\left|\int_{\alpha}^{\beta}\sin(px)\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{\cos(p\alpha)-\cos(p\beta)}{p}\right|\leqslant\frac{2}{|p|}$ 设在 $[-\pi,\pi]$ 上, 有 $|f(x)|\leqslant M$, 任给 $\varepsilon>0$, 则存在 $[-\pi,\pi]$ 的分割：$-\pi=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=\pi$, 使得

$$S(T,f)-s(T,f)<\frac{\varepsilon}{2}$$

其中 $S(T,f)$ 与 $s(T,f)$ 分别表示 $f(x)$ 关于 T 的大和与小和. 于是当 $p\geqslant\frac{4nM}{\varepsilon}$ 时, 就有

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(px)\mathrm{d}x\right|&=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)+f(x_k)-f(x_k))\sin(px)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x)-f(x_k)|\sin(px)\mathrm{d}x+|f(x_k)|\int_{x_{k-1}}^{x_k}\sin(px)\mathrm{d}x\right)\\&<\frac{2nM}{p}+(S(T,f)-s(T,f))<\frac{2nM}{p}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\end{aligned}$$

即 $\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(px)\mathrm{d}x-0\right|<\varepsilon$, 所以

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(px)\mathrm{d}x=0$$

同理可得 $\lim_{p\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(px)\mathrm{d}x=0$, 得证！
(3) 对于周期为 2π 的函数 $f(x)$, 其 Fourier 级数可以表示为：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))$$

其中 a_k 和 b_k 被定义为：

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x, b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x$$

不妨定义 Dirichlet 核函数：$D_n(t)=\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$, 利用 Dirichlet 核函数表示的 Fourier 级数的部分和为：$S_n(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x_{-}+t\right)D_n(t)\mathrm{d}t$, 代入 Dirichlet 核函数表达式得 $S_n(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t$.
(4)

$$\begin{aligned}
S_n\left(x_0\right)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f\left(x_0+t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{f\left(x_0+t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f\left(x_0+t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f\left(x_0-t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f\left(x_0+t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{f\left(x_0-t\right)+f\left(x_0+t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t\\
&=\left(\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{f\left(x_0-t\right)+f\left(x_0+t\right)-A-B}{2\sin\frac{t}{2}}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t\right)\\
&=\left(\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{A+B}{2\sin\frac{t}{2}}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t\right.
\end{aligned}$$

由 Riemann 引理或由 (2) 可知,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{f\left(x_0-t\right)+f\left(x_0+t\right)-A-B}{2\sin\frac{t}{2}}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t=0$$

所以

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}S_n\left(x_0\right)&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{A+B}{2\sin\frac{t}{2}}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{A+B}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t\\
&=\frac{A+B}{2\pi}\lim_{n\to+\infty}\int_{0}^{\frac{2n+1}{2}\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{A+B}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{A+B}{2}
\end{aligned}$$

即证出 $\lim_{n\to+\infty}S_n\left(x_0\right)=\dfrac{A+B}{2}$.

西北工业大学 2025 年数学分析试卷

一、 (20 分) 用极限的严格数学定义证明:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0.$

证明: 对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\dfrac{1}{\varepsilon}>0$, 当 $|x-0|<\delta$ 时, 有

$$\left|\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-0\right|=\left|\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-0\right|<\frac{1}{x}<\varepsilon.$$

因此, 根据极限的定义可知, $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^n}{n!}=0.$

证明: 【法 1】因为 $a>0,\exists N_0\in\mathbb{N}_+$, 使 $N_0-1<a\leqslant N_0$. 所以, 当 $N_0>a$ 时, 则有

$$0<\frac{a^n}{n!}=\left(\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\cdots\frac{a}{N_0}\right)\cdot\left(\frac{a}{N_0+1}\cdot\frac{a}{N_0+2}\cdots\cdots\frac{a}{n}\right)<\frac{a^{N_0}}{(N_0)!}\cdot\frac{a}{n}.$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 要使 $\dfrac{a^n}{n!}<\dfrac{M}{n}<\varepsilon$, 只需取 $N=\max\left\{N_0,\dfrac{M}{\varepsilon}\right\}$. 因此, 当 $n>N$ 时, 有 $\left|\dfrac{a^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0,(a>0)$.

【法 2】对 a 分类讨论:

(1) 当 $0<a<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!}=0$, 此时 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

(2) 当 $a=1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!}=0$, 此时 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

(3) 当 $a>1$ 时, 取对数可知,

$$\begin{aligned}\ln\frac{a^n}{n!}&=\ln\left(a^n\right)-\ln(n!)=n\ln a-(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n)\\&=(\ln a-\ln 1)+(\ln a-\ln 2)+\cdots+(\ln a-\ln n)\end{aligned}$$

当固定 a 时, 则当 $N\geq[a]+1>2$ 时, 必定有

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{a^n}{n!}\right)&=(\ln a-\ln 1)+(\ln a-\ln 2)+\cdots+(\ln a-\ln n)\\&\leqslant(\ln a-\ln 1)+\cdots+(\ln a-\ln N)+(\ln a-\ln(N+1))+\cdots+(\ln a-\ln n)\\&\leqslant(\ln a-\ln 1)+\cdots+(\ln a-\ln N)+(n-(N+1))(\ln a-\ln(N+1))\\&=(\ln a-\ln 1)+\cdots+(\ln a-\ln N)+(n-(N+1))\ln\left(\frac{a}{N+1}\right)\to-\infty,(n\to+\infty)\end{aligned}$$

此时 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$, 综上所述: 只要 $a>0$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0,(a>0)$.

【法 3】构造 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{x}{n+1}\right|=0$. 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ 的收敛域为 $x\in(-\infty,+\infty)$, 则利用幂级数收敛的必要条件可知, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0,(a>0)$.

【法 4】对任意正整数 $N_0>|a|$, 则当 $n>N_0$ 时, 有

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\frac{|a|^{N_0}}{N_0!}\cdot\frac{|a|}{N_0+1}\cdot\frac{|a|}{N_0+2}\cdots\cdots\frac{|a|}{n}\leqslant\frac{|a|^{N_0}}{N_0!}\frac{|a|}{n}.$$

且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|a|^{N_0}}{N_0!}\dfrac{|a|}{n}=0$, 由夹逼准则可知, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0,(a>0)$.

【法 5】利用 Sterling 公式：$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n, (n \to +\infty)$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{a\mathrm{e}}{n}\right)^n = 0.$$

二、 (20 分) 法如下问题:

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x^x - x^{\sin x}}{x^2}$.

解: 首先由 L'Hôpital 法则可知

$$\lim_{x\to0+} x\ln x = \lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x\to0+}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -\lim_{x\to0+} x = 0.$$

这也意味着 $\lim\limits_{x\to0+} x^x = 1$, 进而结合等价无穷小替换与 Taylor 定理可知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}\frac{x^x - x^{\sin x}}{x^2} &= \lim_{x\to0+} x^x\frac{1 - x^{\sin x - x}}{x^2} = \lim_{x\to0+}\frac{1-\mathrm{e}^{(\sin x - x)\ln x}}{x^2}\\ &= \lim_{x\to0+}\frac{-(\sin x - x)\ln x}{x^2} = \lim_{x\to0+}\frac{\left(\frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)\right)\ln x}{x^2}\\ &= \lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{6}x\ln x + o(x\ln x)\right) = 0.\end{aligned}$$

2. 求级数的和 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(n-1)3^n}$.

解: 考虑幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n-1)}$, 显然幂级数在 $x = 1$ 处收敛, 那么其在 $[0,1]$ 上一致收敛, 设其和函数为 $f(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 同时根据逐项求导可得 $f'(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n-1}, x \in [0,1)$, 进而

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = \frac{1}{1-x}, x \in [0,1).$$

积分可得 $f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)\mathrm{d}t = -\ln(1-x), x \in [0,1)$, 再次积分可得

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = (1-x)\ln(1-x) + x, x \in [0,1).$$

特别地, 也有

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)3^n} = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\ln\frac{2}{3} + \frac{1}{3}.$$

三、 (15 分) 试用确界原理证明有限覆盖定理.

证明: 首先设 H 为闭区间 $[a,b]$ 的一个 (无限) 开覆盖, 构造数集

$$S = \{x \in (a,b] \mid \text{从} H \text{ 中可选出有限个开区间来覆盖}[a,x]\}.$$

由于 H 为 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 所以存在 H 中的开区间 U_a, 使得 $a \in U_a$, 显然 $U_a \cap (a,b) \neq \varnothing$, 任取 $c \in U_a \cap (a,b)$, 那么显然有 $[a,c] \subseteq U_a$, 即 $[a,c]$ 可以被 H 有限覆盖, 于是 $c \in S$, 这说明 S 为非空有界数集, 根据确界原理可知 S 存在上确界, 记 $\xi = \sup S$. 显然 $\xi \in (a,b]$, 所以存在 H 中的开区间 U_ξ, 使得 $\xi \in U_\xi$, 根据上确界的定义, 在 U_ξ 中存在一点 $\eta_1\ (\eta_1 \leqslant \xi)$, 使得 $\eta_1 \in S$, 那么 $[a,\eta_1]$ 可以被 H 有限覆盖, 而 $[\eta_1,\xi] \subseteq U_\xi$, 即 $[\eta_1,\xi]$ 也可以被 H 有限覆盖, 进而 $[a,\xi] = [a,\eta_1] \cup [\eta_1,\xi]$ 依旧可以被 H 有限覆盖, 即 $\xi \in S$. 而若 $\xi < b$, 在 U_ξ 中任取一点 η_2, 使得 $\xi < \eta_2 < b$, 因为 $[a,\xi]$ 与 $[\xi,\eta_2]$ 均可以被 H 有限覆盖, 所以 $[a,\eta_2]$ 也可以被 H 有限覆盖, 即 $\eta_2 \in S$, 这与 $\xi = \sup S$ 矛盾. 所以 $\xi = b$, 也就是说 $[a,b]$ 可以被 H 有限覆盖.

四、 (15 分) 证明: 若 f 是区间 $[a,b]$ 上只有有限个间断点的有界函数, 则 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

证明: 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 可设正数 M 满足 $|f(x)| \leqslant M, x \in [a,b]$. 那么在 $[a,b]$ 的任意子区间上 $f(x)$ 的振幅 ω 满足 $\omega \leqslant 2M$. 设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为 $f(x)$ 的所有间断点与端点 a,b 构成的集合, 且

$x_0<x_1<\cdots<x_n$. 记 $d=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i-x_{i-1}\}$. 对任意的 $\varepsilon>0$. 取 $\delta=\min\left\{\dfrac{d}{3},\dfrac{\varepsilon}{8M(n+1)}\right\}>0$. 考虑 $[a,b]$ 的分割

$$T'=\{x_0,x_0+\delta,x_1-\delta,x_1+\delta,\cdots,x_{n-1}-\delta,x_{n-1}+\delta,x_n-\delta,x_n\}$$

对于可能含有间断点的子区间

$$[x_0,x_0+\delta],[x_1-\delta,x_1+\delta],\cdots,[x_{n-1}-\delta,x_{n-1}+\delta],[x_n-\delta,x_n]$$

由于 f 在每个子区间上的振幅 $\omega_i'\leqslant 2M$. 同时每个子区间的长度 $\Delta x_i'\leqslant 2\delta$. 因此

$$\sum_{i=0}^{n}\omega_i'\Delta x_i'\leqslant(n+1)\cdot 2M\cdot 2\delta\leqslant\frac{4M(n+1)}{8M(n+1)}\varepsilon=\frac{\varepsilon}{2}$$

另外, 由于 f 在剩余的子区间

$$[x_0+\delta,x_1-\delta],[x_1+\delta,x_2-\delta],\cdots,[x_{n-1}+\delta,x_n-\delta]$$

上均连续, 从而在这些子区间上均可积, 那么存在上述各个子区间的分割 $T_1,T_2,\cdots,T_n$. 满足

$$\sum_{T_j}\omega_i''\Delta x_i''<\frac{\varepsilon}{2n},\ j=1,2,\cdots,n.$$

记 $T=T'+T_1+T_2+\cdots+T_n$. 对于 $[a,b]$ 的分割 T. 便有

$$\sum_{T}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n}\omega'\Delta x_i'+\sum_{j=1}^{n}\sum_{T_j}\omega_i''\Delta x_i''<\frac{\varepsilon}{2}+n\cdot\frac{\varepsilon}{2n}=\varepsilon.$$

这就说明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

五、 (15 分) 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}\mathrm{d}x$, 其中 $b>a>0$.

解: 首先注意到 $\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}=\displaystyle\int_a^b\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}y$, 同时对任意的 $M>0$, 有

$$\left|\int_0^M\sin xy\mathrm{d}x\right|=\frac{|1-\cos My|}{y}\leqslant\frac{2}{a},\forall y\in[a,b]$$

而 $\dfrac{1}{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 关于 $y\in[a,b]$ 一致成立. 由 Dirichlet 判别法可知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[a,b]$ 一致收敛, 进而

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\pi}{2}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}(b-a)$$

其中用到 Dirichlet 积分, 即

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{xy}\mathrm{d}(xy)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}$$

六、 (15 分) 设 n 为正整数, $x,y>0$, 用条件极值方法证明 $\dfrac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$.

证明: 当 $n=1$ 时结论显然成立, 下面假设 $n\geqslant 2$: 考虑函数 $f(x,y)=x^n+y^n$ 在条件

$$x+y=a(x,y\geqslant 0,a>0)$$

下的最小值, 构造 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda)=x^n+y^n+\lambda(x+y-a).$$

令

$$\begin{cases}L_x=nx^{n-1}+\lambda=0\\ L_y=ny^{n-1}+\lambda=0\\ L_\lambda=x+y-a=0\end{cases}$$

由此可解得 $x=y=\dfrac{a}{2}$, 同时 $f\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a^n}{2^{n-1}}$. 由于 $f(x,y)$ 在有界闭集 $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant$

$0, x+y=a\}$ 上连续, 从而存在最大值与最小值, 而在两端点 $(a,0)$ 和 $(0,a)$ 处, 有

$$f(a,0)=f(0,a)=a^n>\frac{a^n}{2^{n-1}}.$$

因此 f 在 D 上的最小值在 $\{(x,y)\mid x>0, y>0, x+y=a\}$ 内取到, 那么上述得到的唯一稳定点 $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ 必为 f 的最小值点, 也就是

$$f(x,y)\geqslant\frac{a^n}{2^{n-1}}=2\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

对应有 $\dfrac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$.

七、 (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 证明: 存在 $a,b>0$ 使得 $|f(x)|\leqslant a|x|+b$.

证明: 由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 所以对 $\varepsilon=1$, 存在 $\delta>0$, 使得 $\left|x'-x''\right|\leqslant\delta$ 时, 有 $\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|\leqslant 1$. 固定以上的 δ, 由于 $f(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上连续, 从而有界, 不妨设:

$$|f(x)|\leqslant M, x\in[-\delta,\delta]$$

对任意的 $x>\delta$, 显然存在正整数 n_x, 使得 $x-n_x\delta=x_0\in[0,\delta)$, 此时 $n_x=\dfrac{x-x_0}{\delta}\leqslant\dfrac{|x|}{\delta}$, 于是

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leqslant\sum_{k=0}^{n_x-1}|f(x-k\delta)-f(x-(k+1)\delta)|+|f\left(x-n_x\delta\right)|\\&\leqslant n_x+M\leqslant\frac{|x|}{\delta}+M\end{aligned}$$

同理, 对 $\forall x<-\delta$, 存在正整数 n_x, 使得 $x+n_x\delta=x_0\in(-\delta,0]$, 此时 $n_x=\dfrac{x_0-x}{\delta}\leqslant\dfrac{|x|}{\delta}$, 于是

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leqslant\sum_{k=0}^{n_x-1}|f(x+k\delta)-f(x+(k+1)\delta)|+|f\left(x+n_x\delta\right)|\\&\leqslant n_x+M\leqslant\frac{|x|}{\delta}+M\end{aligned}$$

于是记作：$a=\dfrac{1}{\delta}>0, b=M>0$, 由上式可知, 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有

$$|f(x)|\leqslant a|x|+b$$

八、 (15 分) 计算曲面积分

$$I=\iint_S\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}.$$

其中 S 为曲面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{4}=1$, 取其外侧.

解: 令 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x}&=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}\\\frac{\partial r}{\partial y}&=\frac{y}{r},\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}\end{aligned}$$

记 $P=\dfrac{x}{r^3}, Q=\dfrac{y}{r^3}, R=\dfrac{z}{r^3}$, 所以

$$\begin{aligned}&P_x'+Q_y'+R_z'\\=&\frac{r^3-x\cdot 3r^2\frac{x}{r}}{r^6}+\frac{r^3-y\cdot 3r^2\frac{y}{r}}{r^6}+\frac{r^3-z\cdot 3r^2\frac{z}{r}}{r^6}\\=&\frac{r^3-x^2\cdot 3r}{r^6}+\frac{r^3-y^2\cdot 3r}{r^6}+\frac{r^3-z^2\cdot 3r}{r^6}\\=&\frac{3r^2-3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{r^5}=\frac{3r^2-3r^2}{r^5}=0\end{aligned}$$

补面：$\Sigma_1 : x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$, 其中 $\varepsilon>0$ 且充分小, 取内侧.

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \\
&= 0 - \iint_{\Sigma_1} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \\
&= -\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant\varepsilon^2}(1+1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{3}{\varepsilon^3}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant\varepsilon^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 = 4\pi
\end{aligned}$$

九、(15 分) 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的凸函数且有上界, 证明: $f(x)$ 是常数.

证明: 利用反证法：假设 $f(x)$ 不是常值函数, 则存在 x_0, 有 $f'(x_0)\neq 0$, 利用 Taylor 公式展开可得

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2 \\
&\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)
\end{aligned}$$

当 $x\to+\infty$ 时, 显然 $f(x)\to\infty$, 与题意中有界矛盾！所以假设不成立, 即没有 $f'(x_0)\neq 0$, 又因为 x_0 具有任意性, 所以对任意的 x, 均有 $f'(x)\neq 0$, 所以函数 $f(x)$ 是常值函数.

十、(5 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 非负且严格单调递增, 由积分中值定理, 对任意的正整数 k, 存在 $x_k\in[a,b]$, 使得

$$f^k(x_k)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^k(x)\mathrm{d}x.$$

证明: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = b$.

证明: 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续且严格递增, 所以 $0\leqslant f(x)\leqslant f(b), x\in[a,b]$, 同时对任意的 $\varepsilon>0$ (限制 $\varepsilon<\frac{1}{2}(b-a)$), 当 $x\in[b-\varepsilon,b]$ 时, 有

$$f(b-\varepsilon)\leqslant f(x)\leqslant f(b)$$

从而

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f^k(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f^k(b)\mathrm{d}x = f^k(b)$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f^k(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{b-a}\int_{b-\varepsilon}^b f^k(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{b-a}\int_{b-\varepsilon}^b f^k(b-\varepsilon)\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{b-a}f^k(b-\varepsilon)$$

那么结合已知就有 $\frac{\varepsilon}{b-a}f^k(b-\varepsilon)\leqslant f^k(x_k)\leqslant f^k(b)$, 也就是

$$\sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{b-a}}f(b-\varepsilon)\leqslant f(x_k)\leqslant f(b)$$

而明显 $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{b-a}}f(b-\varepsilon)=f(b-\varepsilon)>f(b-2\varepsilon)$, 所以存在正整数 N, 使得 $k>N$ 时, 有

$$\sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{b-a}}f(b-\varepsilon)>f(b-2\varepsilon)$$

即当 $k>N$ 时, 有 $f(b-2\varepsilon)<f(x_k)\leqslant f(b)$, 再结合 f 的严格递增性可知

$$b-2\varepsilon<x_k\leqslant b$$

这说明 $\{x_k\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=b$.

大连理工大学 2025 年数学分析试卷

一、 简答题. 每题 6 分, 共 60 分.

1. 将 $f(x,y)=\dfrac{\cos x}{\cos y}$ 在 $(0,0)$ 展开为 Maclaurin 多项式到二阶.

解: 由于 $f(x,y)=\cos x\sec y$, 因此 $f_x=-\sin x\sec y$, $f_y=\cos x\sec y\tan y$, 进而

$$f_{xx}=-\cos x\sec y,\ f_{xy}=-\sin x\sec y\tan y,\ f_{yy}=\cos x\sec y\tan^2 y+\cos x\sec^3 y.$$

那么 $f(0,0)=1$, $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, $f_{xx}(0,0)=-1$, $f_{xy}(0,0)=0$, $f_{yy}(0,0)=1$, 对应

$$f(x,y)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+o\left(x^2+y^2\right).$$

2. 设 $\varphi(x)=\displaystyle\int_0^{\cos x}\mathrm{e}^{t^2+xt}\mathrm{d}t$, 求 $\varphi'(0)$.

解: 明显

$$\varphi'(x)=-\mathrm{e}^{\cos^2 x+x\cos x}\sin x-\mathrm{e}^{\sin^2 x+x\sin x}\cos x+\int_{\sin x}^{\cos x}t\mathrm{e}^{t^2+xt}\mathrm{d}t.$$

因此

$$\varphi'(0)=-1+\int_0^1 t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=-1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2}\Big|_0^1=\frac{\mathrm{e}-3}{2}.$$

3. 证明 $\zeta(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续可微.

证明: (1) 对 $\forall x_0>1,\exists p\in(1,x_0)$, 使得

$$0<\frac{1}{n^x}=\frac{1}{n^{x-p}}\cdot\frac{1}{n^p}\leqslant\frac{1}{n^p},\quad(\forall x\geqslant p)$$

又 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}<+\infty$, 从而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $x\geqslant p$ 上一致收敛, 进一步由连续性定理: 函数 $\zeta(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $x\geqslant p$ 上连续, 特别在 x_0 点处是连续的, 由于 x_0 的任意性, 所以 $\zeta(x)$ 在 $x>1$ 上连续, 得证!

(2) 由 (1) 可知, $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)'=\dfrac{-\ln n}{n^x}\in C(1,+\infty)$, 对 $\forall x_0>1,\exists p\in(1,x_0)$ 使得 $0\leqslant\dfrac{\ln n}{n^x}\leqslant\dfrac{\ln n}{n^p}$, $(\forall x\geqslant p)$, 又因为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$ 收敛, 从而 $-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$ 在 $x\geqslant p$ 上一致收敛, 进一步由逐项求导与连续性定理可知,

$$\zeta'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x}\right)'=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x},(\forall x\geqslant p).$$

且 $\zeta'(x)$ 在 $x\geqslant p$ 上连续, 特别地 $\zeta(x)$ 在 x_0 点可导且 $\zeta'(x)$ 在 x_0 连续, 由 x_0 的任意性可知,$\zeta(x)$ 在 $x>1$ 上连续可微.

4. 证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{n}-1)$ 条件收敛.

证明: 首先注意到

$$\left|(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{n}-1)\right|=\mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}-1\sim\frac{\ln n}{n}(n\to\infty)$$

而明显 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ 发散, 所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{n}-1)\right|$ 也发散. 另外, 记 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}-1$, 有

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}<0,x>\mathrm{e}.$$

这说明 $f(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调递减, 对应数列 $\{\sqrt[n]{n}-1\}_{n\geqslant 3}$ 单调递减且收敛到零. 由莱布尼茨判别法可

知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{n}-1)$ 收敛, 并且是条件收敛.

5. (1). 数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_{n+p}-a_n|\leqslant\frac{p}{n}$, 且对一切 $n,p\in\mathbb{N}_+$ 成立, 问数列 $\{a_n\}$ 是否收敛?

(2). 当 $|a_{n+p}-a_n|\leqslant\frac{p}{n^2}$ 时, 上述结论又如何?

解:

(1). 一方面, 取 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, 所以有

$$
\begin{aligned}
|a_{n+p}-a_n| &= \left|\sum_{k=1}^{n+p}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k}\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{n}\\
&= \frac{n+p-(n+1)+1}{n}=\frac{p}{n}.
\end{aligned}
$$

此时对一切 $n,p\in\mathbb{N}_+$, 满足 $|a_{n+p}-a_n|\leqslant\frac{p}{n}$, 但是取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, 对任意的正整数 N, 令 $m=2n,(n>N)$, 则

$$
|a_{2n}-a_n|=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}>\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}=\frac{2n-(n+1)+1}{2n}=\frac{1}{2}=\varepsilon.
$$

这说明存在 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, 无论 N 取多大, 都能找到 $m=2n,n>N$, 使得 $|a_m-a_n|\geqslant\varepsilon$, 所以数列数列 $\{a_n\}$ 不是基本列, 并不收敛.

另一方面, 取 $a_n=C,(C$ 为常数), 满足对一切 $n,p\in\mathbb{N}_+$ 成立:

$$
|a_{n+p}-a_n|=0\leqslant\frac{p}{n},
$$

且常数列是基本列, 所以数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(2). 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1>\frac{1}{\varepsilon}$, 则对 $\forall m,n$, 使得 $m>n>N$. 在条件中令 $p=1$, 可知 $|a_{n+1}-a_n|\leqslant\frac{1}{n^2}$, 类似地, 依次类推可得

$$
\begin{aligned}
|a_m-a_n| &= |(a_m-a_{m-1})+(a_{m-1}-a_{m-2})+\cdots+(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)|\\
&\leqslant |a_m-a_{m-1}|+|a_{m-1}-a_{m-2}|+\cdots+|a_{n+2}-a_{n+1}|+|a_{n+1}-a_n|\\
&\leqslant \frac{1}{(m-1)^2}+\frac{1}{(m-p-1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}\\
&\leqslant \frac{1}{(m-1)(m-2)}+\frac{1}{(m-2)(m-3)}+\cdots+\frac{1}{(n+1)n}+\frac{1}{n(n-1)}\\
&= \frac{1}{m-2}-\frac{1}{m-1}+\frac{1}{m-3}-\frac{1}{m-2}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\\
&= \frac{1}{n-1}-\frac{1}{m-1}<\frac{1}{n-1}\leqslant\frac{1}{N}<\varepsilon
\end{aligned}
$$

由基本列定义可知, 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

6. 当 $x\in(0,\pi)$ 时, 证明: $4(1-\cos x)<x(x+\sin x)$.

证明: 令 $g(x)=4(1-\cos x)-x(x+\sin x)$, 则

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= 3\sin x-2x-x\cos x\\
g''(x) &= 3\cos x-2-\cos x+x\sin x=2\cos x-2+x\sin x\\
g'''(x) &= -2\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x-\sin x\\
g^{(4)}(x) &= \cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0,(x\in(0,\pi))
\end{aligned}
$$

所以 $g'''(x)$ 在 $x\in(0,\pi)$ 单调递减, 且 $g'''(0)=0,g'''(\pi)=-\pi$, 所以 $g'''(x)\leqslant g'''(0)=0$, 从而可知 $g''(x)$ 在 $x\in(0,\pi)$ 单调递减, 且 $g''(0)=0,g''(\pi)=-4,g''(x)\leqslant g''(0)=0$, 所以 $g'(x)$ 在 $x\in(0,\pi)$ 单

调递减, 且 $g'(0)=0, g'(\pi)=-\pi<0$, 所以 $g(x)\leqslant g(0)=0$, 所以 $g(x)$ 在 $x\in(0,\pi)$ 单调递减. 即证出 $4(1-\cos x)<x(x+\sin x)$, 其中 $x\in(0,\pi)$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$ 的充要条件是对任意的 $\varepsilon\geqslant 0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-A|\leqslant\varepsilon$ 是否正确?

解: 正确, 这就是极限的定义.

8. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, $f(a)=f(b)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=2025f(\xi)$.

证明: 构造函数 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{-2025x}$, 显然 $F(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可微, 同时由 $f(a)=f(b)=0$ 可知 $F(a)=F(b)=0$, 根据 Rolle 中值定理, 存在 $\xi\in(a,b)$, 满足

$$F'(\xi)=\left[f'(\xi)-2025f(\xi)\right]\mathrm{e}^{-2025\xi}=0.$$

化简可得 $f'(\xi)=2025f(\xi)$.

9. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 以 $T>0$ 为周期, $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$, $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$. 证明: 广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证明: 记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 有

$$F(x+T)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t=F(x)+\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=F(x).$$

因此 $F(x)$ 也以 T 为周期, 再结合 $F(x)$ 连续可知 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界, 不妨设正数 M 满足 $|F(x)|\leqslant M$, 那么对任意的 $A>0$, 有

$$\left|\int_0^A f(x)\mathrm{d}x\right|=|F(A)-F(0)|\leqslant 2M.$$

而 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, 由 Dirichlet 判别法可知 $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

10. 证明: $x\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续.

证明: 取数列 $x_n=2n\pi+\dfrac{1}{n}$, $y_n=2n\pi(n=1,2,\cdots)$, 显然

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

但是

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}=2\pi\neq 0.$$

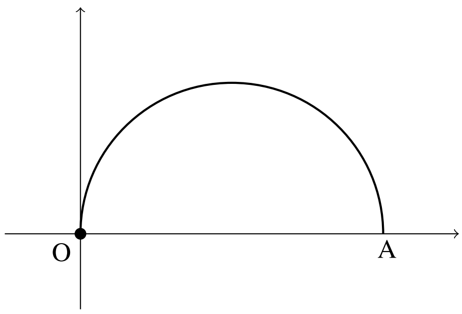
因此 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续.

二、 计算题. 每题 10 分, 共 30 分.

1. Γ: $y=\sqrt{2x-x^2}$, 从 $(0,0)$ 到 $(2,0)$. 求第二型曲线积分

$$\int_\Gamma(\mathrm{e}^x\sin y-4y)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y+4x)\,\mathrm{d}y.$$

解: 补线段：$\boldsymbol{AO}$, 与曲线 Γ 构成封闭曲线, 如图所示：



记所求曲线积分为 I, 且 $P=\mathrm{e}^x\sin y-4y$, $Q=\mathrm{e}^x\cos y+4x$, 再记 $(2,0)$ 到 $(0,0)$ 的直线段为 Γ_1, 由于

Γ_1 满足 $y=0$, 因此 $\int_{\Gamma_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$, 那么

$$I=\int_{\Gamma} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{\Gamma+\Gamma_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

记 $\Gamma+\Gamma_1$ 所围区域为 D, 显然 D 是面积为 $\frac{1}{2}\pi$ 的半圆, 利用 Green 公式, 有

$$I=-\iint_D \left(Q_x-P_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D 8\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-4\pi$$

2. $V=\left\{(x,y,z)\mid \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 3\right\}$, 求 $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\sin(z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解: 注意到 V 也可以表示为 $0\leqslant z\leqslant 3, x^2+y^2\leqslant z^2$, 记所求重积分为 I, 则

$$I=\int_0^3 \mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant z^2} \sqrt{x^2+y^2}\sin\left(z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作柱坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$, 有

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^3\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z r\sin\left(z^2\right)\cdot r\mathrm{d}r\\
&=\frac{2\pi}{3}\int_0^3 z^3\sin\left(z^2\right)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3}\int_0^9 t\sin t\mathrm{d}t\ \left(t=z^2\right)\\
&=\frac{\pi}{3}(\sin t-t\cos t)\Big|_0^9=\frac{\pi}{3}(\sin 9-9\cos 9).
\end{aligned}$$

3. 求 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-3x}}{x}\sin x\mathrm{d}x$.

解: 【法 1】令 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-xy}\sin x$, 则 $f\in C([0,+\infty\times[1,3]))$. 由于 $\left|\int_0^A\sin x\mathrm{d}x\right|=|\cos A-1|\leqslant 2$, 所以积分 $\int_0^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$ 一致有界, 又对 $\forall y\in[1,3]$, 有 e^{-xy} 是关于 x 的单调函数, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-xy}=0$. 由 Dirichlet 判别法可知 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[1,3]$ 上一致收敛, 故

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-3x}}{x}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\int_1^3\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y\right)\sin x\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^3\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}y=\int_1^3\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x\\
&=\int_1^3\left[\left.\frac{\mathrm{e}^{-xy}(y\sin x+\cos x)}{1+y^2}\right|_0^{+\infty}\right]\mathrm{d}y=\int_1^3\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y\\
&=\arctan 3-\arctan 1=\arctan\left(\frac{3-1}{1+3\times 1}\right)=\arctan\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

注 $\arctan A-\arctan B=\arctan\left(\frac{A-B}{1+AB}\right), (AB>-1)$.

【法 2】设 $f(t)$ 的 Laplace 变换为 $F(s)=L[f(t)]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t$, 对 $\frac{f(t)}{t}$ 的 Laplace 变换有 $L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{+\infty}F(u)\mathrm{d}u$,

根据 Laplace 变换的线性性质 $L[af(t)+bg(t)]=aL[f(t)]+bL[g(t)]$ 及 $L\left[\mathrm{e}^{-at}\sin(bt)\right]=\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$, 对 $\left(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t}\right)\sin t$ 进行 Laplace 变换:

$$\begin{aligned}
L\left[\left(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t}\right)\sin t\right]&=L\left[\mathrm{e}^{-t}\sin t\right]-L\left[\mathrm{e}^{-3t}\sin t\right]\\
&=\frac{1}{(s+1)^2+1}-\frac{1}{(s+3)^2+1}=\frac{1}{s^2+2s+2}-\frac{1}{s^2+6s+10}
\end{aligned}$$

对 $\dfrac{\left(e^{-t}-e^{-3t}\right)\sin t}{t}$ 进行 Laplace 变换并取 $s=0$, 可知,

$$
\begin{aligned}
L\left[\frac{\left(e^{-t}-e^{-3t}\right)\sin t}{t}\right] &= \int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{u^2+2u+2}-\frac{1}{u^2+6u+10}\right)du \\
&= \frac{1}{2}(\pi-2\arctan(s+1))-\frac{1}{2}(\pi-2\arctan(s+3)) \\
&= \arctan(s+3)-\arctan(s+1)=\arctan\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

所以 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-3x}}{x}\sin x\,dx=\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$.

【法 3】构造含参变量积分 $I(a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-3x}}{x}\sin x\,dx$, 则

$$
\begin{aligned}
I'(a) &= \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{e^{-ax}-e^{-3x}}{x}\sin x\right)dx=\int_0^{+\infty}\left((-x)e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\right)dx \\
&= -\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin x\,dx=-\frac{1}{1+a^2}.
\end{aligned}
$$

所以 $I(3)-I(a)=\displaystyle\int_a^3 I'(u)du=\int_a^3\left(-\frac{1}{1+u^2}\right)du=-\int_a^3\frac{1}{1+u^2}du=-(\arctan 3-\arctan a)=\arctan a-\arctan 3$.

取 $a=1$, 且 $I(3)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-3x}-e^{-3x}}{x}\sin x\,dx=0$, 所以

$$
I(1)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-3x}}{x}\sin x\,dx=\arctan 3-\arctan 1=\arctan\left(\frac{1}{2}\right)
$$

三、 证明题. 每题 12 分, 共 60 分.

1. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续且有界, 证明: $f_n(x)=\dfrac{n}{1-e^{-n}}\displaystyle\int_0^1 f(x+t)e^{-nt}dt$ 一致收敛于 $f(x)$.

证明: 由于 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续且有界, 因此可设正数 M 满足 $|f(x)|\leqslant M$, 同时对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对任意的 $x',x''\in\mathbb{R}$, 只要 $|x'-x''|\leqslant\delta$, 便有

$$
|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.
$$

对于上述 δ, 明显 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-n\delta}-e^{-n}}{1-e^{-n}}=0$, 因此存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有

$$
\frac{e^{-n\delta}-e^{-n}}{1-e^{-n}}<\frac{\varepsilon}{2M}.
$$

注意到 $\dfrac{n}{1-e^{-n}}\displaystyle\int_0^1 e^{-nt}dt=\left.\frac{e^{-nt}}{1-e^{-n}}\right|_1^0=1$, 那么

$$
\frac{n}{1-e^{-n}}\int_0^1 f(x)e^{-nt}dt=f(x).
$$

因此当 $n>N$ 时, 对任意的 $x\in\mathbb{R}$, 有

$$
\begin{aligned}
|f_n(x)-f(x)| &\leqslant \frac{n}{1-e^{-n}}\int_0^1|f(x+t)-f(x)|e^{-nt}dt \\
&< \frac{n}{1-e^{-n}}\int_0^\delta \varepsilon e^{-nt}dt+\frac{n}{1-e^{-n}}\int_\delta^1 2Me^{-nt}dt \\
&< \varepsilon\cdot\frac{n}{1-e^{-n}}\int_0^1 e^{-nt}dt+2M\cdot\frac{e^{-n\delta}-e^{-n}}{1-e^{-n}} \\
&< \varepsilon+2M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

这就说明 $f_n(x)=\dfrac{n}{1-e^{-n}}\displaystyle\int_0^1 f(x+t)e^{-nt}dt$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 $f(x)$.

2. $\{a_n\}$ 单调递减且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 记 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in (-1,1)$, 证明: $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)f(x) = 0$.

证明: 由于 $\{a_n\}$ 单调递减且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 因此存在正数 M, 满足 $0 \leqslant a_n \leqslant M(n = 1,2,\cdots)$. 进而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M} = 1.$$

那么幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径大于等于 1 , 进而 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 有定义. 同时对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 有 $a_n < \varepsilon$. 而 $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(1-x^{N+1}\right) = 0$, 因此存在 $\delta \in (0,1)$, 当 $x \in (1-\delta, 1)$ 时, 有 $1 - x^{N+1} < \dfrac{\varepsilon}{M}$, 进而

$$\begin{aligned}
0 \leqslant (1-x)f(x) &= (1-x)\sum_{n=0}^{N} a_n x^n + (1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n \\
&< (1-x)\sum_{n=0}^{N} M x^n + (1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon x^n \\
&< M\left(1-x^{N+1}\right) + \varepsilon(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n < M\cdot\frac{\varepsilon}{M} + \varepsilon = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

这就说明 $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)f(x) = 0$.

3. 证明在 $(0,0)$ 的邻域内方程 $x - \cos(x^2 y) + \mathrm{e}^{x+y^2} = 0$ 决定连续可微函数 $x = x(y)$, 并证明在 $y = 0$ 处取得极大值.

证明: 记函数 $F(x,y) = x - \cos\left(x^2 y\right) + \mathrm{e}^{x+y^2}$, 显然 F 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微, 且

$$F_x = 1 + 2xy\sin\left(x^2 y\right) + \mathrm{e}^{x+y^2}, F_y = x^2\sin\left(x^2 y\right) + 2y\mathrm{e}^{x+y^2}.$$

因此 $F(0,0) = 0, F_x(0,0) = 2 \neq 0$. 根据隐函数定理, 方程 $F(x,y) = 0$ 在 $(0,0)$ 的某邻域内决定了可微函数 $x = x(y)$, 满足 $x(0) = 0$, 同时

$$x'(y) = -\frac{F_y(x,y)}{F_x(x,y)} = -\frac{x^2\sin\left(x^2 y\right) + 2y\mathrm{e}^{x+y^2}}{1 + 2xy\sin\left(x^2 y\right) + \mathrm{e}^{x+y^2}}. \tag{25.1}$$

特别地, 也有 $x'(0) = 0$, 根据 Taylor 定理, 有

$$x = x(0) + x'(0)y + o(y) = o(y)(y \to 0).$$

进而

$$1 + 2xy\sin\left(x^2 y\right) + \mathrm{e}^{x+y^2} = 2 + o(1)(y \to 0);$$

$$x^2\sin\left(x^2 y\right) + 2y\mathrm{e}^{x+y^2} = o\left(y^2\right)\sin\left(o\left(y^3\right)\right) + 2y\mathrm{e}^{o(y)} = 2y + o(y)(y \to 0).$$

将此代入到式(25.1), 有 $x'(y) = -y + o(y)$, 即当 y 充分小时, $x'(y)$ 与 $-y$ 符号相同, 也就是说 $x(y)$ 在 $y < 0$ 单调递增, 在 $y > 0$ 单调递减, 自然在 $y = 0$ 处取得极大值.

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续非负, 且对任意的 $x,y \geqslant 0$, 有 $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在且有限.

证明: 首先根据已知, 对任意的正整数 n, 有

$$f(n) \leqslant f(1) + f(n-1) \leqslant \cdots \leqslant n.f(1)$$

那么对任意的 $x \in [1,+\infty)$, 记 $n_x = [x]$, 有

$$f(x) = f\left(n_x + (x - n_x)\right) \leqslant f\left(n_x\right) + f\left(x - n_x\right) \leqslant n_x f(1) + f\left(x - n_x\right).$$

那么

$$0 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{n_x f(1)}{x} + \frac{f\left(x - n_x\right)}{x} \leqslant f(1) + f\left(x - n_x\right), x \geqslant 1.$$

而 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 从而有界, 设正数 M 为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的一个上界. 对任意的 $x \in [1,+\infty)$, 有

$x-n_x \in [0,1]$, 那么 $f(1)+f(x-n_x) \leqslant f(1)+M$, 这说明 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界. 那么若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 不存在, 则存在两个单调递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{x_n\},\{y_n\}\subset[1,+\infty)$, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)}{x_n}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)}{y_n}$ 均收敛, 但两个极限不相等, 不妨设两者极限分别为 α,β, 且 $\alpha>\beta$. 那么对任意的 $\varepsilon>0$, 存在某个正整数 N, 满足 $\dfrac{f(y_N)}{y_N}<\beta+\varepsilon$. 对任意的正整数 n, 当 $x_n>y_N$ 时, 根据带余除法, 可设 $x_n=k_ny_N+l_n$, 其中 $k_n=\left[\dfrac{x_n}{y_N}\right], l_n=x_n-\left[\dfrac{x_n}{y_N}\right]y_N$, 那么

$$f(x_n)=f(k_ny_N+l_n)\leqslant k_nf(y_N)+f(l_n).$$

进而

$$\frac{f(x_n)}{x_n}\leqslant\frac{k_n}{x_n}f(y_N)+\frac{f(l_n)}{x_n}.$$

容易发现 $\dfrac{x_n}{y_N}-1<k_n\leqslant\dfrac{x_n}{y_N}$, 那么

$$\frac{1}{y_N}-\frac{1}{x_n}<\frac{k_n}{x_n}\leqslant\frac{1}{y_N}.$$

取极限可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k_n}{x_n}=\dfrac{1}{y_N}$. 另外, 注意到 $l_n\in[0,y_N]$, 而 $f(x)$ 在 $[0,y_N]$ 上有界, 也就是 $\{f(l_n)\}$ 有界, 因此式(25.1)关于 $n\to\infty$ 取极限可得

$$\alpha\leqslant\frac{f(y_N)}{y_N}<\beta+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知 $\alpha\leqslant\beta$, 这与 $\alpha>\beta$ 矛盾. 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在且有限.

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增, 记 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\ (x\geqslant 0)$. 证明: $F(x)$ 在 $x=0$ 处存在右导数, 并求 $F'_+(0)$.

证明: 由于 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增, 根据单调有界定理可知 $f(0+0)$ 存在, 同时对任意的 $x>0$, 当 $t\in(0,x]$ 时, 有 $f(0+0)<f(t)\leqslant f(x)$, 积分可得 $xf(0+0)\leqslant\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant xf(x)$, 进而

$$f(0+0)\leqslant\frac{F(x)}{x}\leqslant f(x).$$

这里令 $x\to0^+$, 由迫敛性可知

$$\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)}{x}=f(0+0).$$

即 $F(x)$ 在 $x=0$ 处存在右导数, 且 $F'_+(0)=f(0+0)$.

电子科技大学 2025 年数学分析试卷

一、 填空题. 每题 5 分, 共 30 分.

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right] =$ ____________.

解: 【法 1】由 Heine 定理以及 Taylor 展开公式可知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right] &= \lim_{x\to+\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - \mathrm{e}\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left[\left(\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2x}+\frac{11\mathrm{e}}{24x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-\mathrm{e}\right] = -\frac{\mathrm{e}}{2}\end{aligned}$$

【法 2】先利用 Heine 定理后令 $u=\dfrac{1}{x}$, 再由等价无穷小替换可知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right] &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-\mathrm{e}}{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to0^+}\frac{(1+u)^{\frac{1}{u}}-\mathrm{e}}{u}\\ &= \lim_{u\to0^+}\frac{\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{u}\ln(1+u)-1}-1\right)}{u} = \mathrm{e}\lim_{u\to0^+}\frac{\ln(1+u)-u}{u^2} = \mathrm{e}\lim_{u\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}u^2}{u^2} = -\frac{\mathrm{e}}{2}\end{aligned}$$

【法 3】先利用 Heine 定理后令 $u=\dfrac{1}{x}$, 再由 L'Hôpital 法则可知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right] &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-\mathrm{e}}{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to0^+}\frac{(1+u)^{\frac{1}{u}}-\mathrm{e}}{u}\\ &= \lim_{u\to0^+}\frac{\frac{(1+u)^{\frac{1}{u}-1}(u-(1+u)\ln(1+u))}{u^2}}{1} = \lim_{u\to0^+}\frac{(1+u)^{\frac{1}{u}}}{1+u}\cdot\lim_{u\to0^+}\frac{u-(1+u)\ln(1+u)}{u^2}\\ &= \mathrm{e}\cdot\lim_{u\to0^+}\frac{1-\ln(1+u)-1}{2u} = -\frac{\mathrm{e}}{2}\lim_{u\to0^+}\frac{\ln(1+u)}{u} = -\frac{\mathrm{e}}{2}\end{aligned}$$

2. 已知 $z=x\ln\dfrac{x}{y}$, 求 $\mathrm{d}^2z\big|_{(1,1)} =$ ____________.

解: 因为 $z=x\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$, 所以 $\mathrm{d}z=z'_x\mathrm{d}x+z'_y\mathrm{d}y$, 且 $\mathrm{d}^2z=\mathrm{d}(\mathrm{d}z)$, 所以 $\mathrm{d}^2z=\mathrm{d}(\mathrm{d}z)=\mathrm{d}\left(z'_x\mathrm{d}x+z'_y\mathrm{d}y\right)=$ $\dfrac{\partial\left(z'_x\mathrm{d}x+z'_y\mathrm{d}y\right)}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial\left(z'_x\mathrm{d}x+z'_y\mathrm{d}y\right)}{\partial y}\mathrm{d}y$. 其中

$$\frac{\partial\left(z'_x\mathrm{d}x+z'_y\mathrm{d}y\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left(z'_x\mathrm{d}x\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(z'_y\mathrm{d}y\right)}{\partial x}=z''_{xx}\mathrm{d}x+z''_{yx}\mathrm{d}y$$

.

$$\frac{\partial\left(z'_x\mathrm{d}x+z'_y\mathrm{d}y\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(z'_x\mathrm{d}x\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(z'_y\mathrm{d}y\right)}{\partial y}=z''_{xy}\mathrm{d}x+z''_{yy}\mathrm{d}y$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2z &= \left(z''_{xx}\mathrm{d}x+z''_{yx}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x+\left(z''_{xy}\mathrm{d}x+z''_{yy}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}y\\ &= z''_{xx}(\mathrm{d}x)^2+z''_{yx}\mathrm{d}y\mathrm{d}x+z''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+z''_{yy}(\mathrm{d}y)^2\\ &= z''_{xx}(\mathrm{d}x)^2+2z''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+z''_{yy}(\mathrm{d}y)^2\end{aligned}$$

那么 $z'_x=\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)+x\dfrac{1}{\frac{x}{y}}\dfrac{1}{y}=1+\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$, $z'_y=x\cdot\dfrac{1}{\frac{x}{y}}\cdot\dfrac{-x}{y^2}=-\dfrac{x}{y}$, 继续求导

$$z''_{xx}=\frac{1}{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{x}, z''_{xy}=\frac{1}{\frac{x}{y}}\cdot\frac{-x}{y^2}=\frac{-1}{y}, z''_{yy}=\frac{x}{y^2}.$$

所以 $z''_{xx}(1,1)=1, z''_{xy}(1,1)=-1, z''_{yy}(1,1)=1$, 那么

$$d^2z(1,1)=(dx)^2-2dxdy+(dy)^2.$$

3. 计算 $\oint_L(xy+yz+zx)ds=$ ___________, 其中 L 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+y+z=0$ 的交线.

解: 【法 1】注意到

$$\frac{1}{2}\left[(x+y+z)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]=xy+yz+zx.$$

所以 $\oint_L(xy+yz+zx)ds=\frac{1}{2}\oint_L\left[(x+y+z)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]ds$.

$$=\frac{1}{2}\oint_L\left(0-a^2\right)ds=-\frac{a^2}{2}\oint_L ds=\frac{a^2}{2}\cdot 2\pi a=-\pi a^3$$

【法 2】将描述 L 的方程组消去 z 可得 $x^2+y^2+xy=\frac{a^2}{2}$, 由正交变换

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}X-\frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Y \end{cases} \text{将其转换为}3X^2+Y^2=a^2\text{, 再令}\begin{cases} X=\frac{a}{\sqrt{3}}\cos t \\ Y=a\sin t \end{cases}.$$

于是由 $z=-x-y$ 及其变换式可得曲线 L 的参数方程为:

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\cos t-a\sin t\right) \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\cos t+a\sin t\right), 0\leqslant t\leqslant 2\pi \\ z=-\frac{\sqrt{6}}{3}a\cos t \end{cases}$$

又因为 $ds=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt=a dt$,

$$\begin{aligned} xy&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\cos t-a\sin t\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\cos t+a\sin t\right) \\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\cos t-a\sin t\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\cos t+a\sin t\right)=\frac{1}{6}a^2\cos^2 t-\frac{1}{2}a^2\sin^2 t \\ yz&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\cos t+a\sin t\right)\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}a\cos t\right)=-\frac{1}{3}a^2\cos^2 t-\frac{\sqrt{3}}{3}a^2\sin t\cos t \\ zx&=\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}a\cos t\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\cos t-a\sin t\right)\right)=-\frac{1}{3}a^2\cos^2 t+\frac{\sqrt{3}}{3}a^2\cos t\sin t \end{aligned}$$

于是由对弧长的曲线积分的参数方程直接计算法可得:

$$\begin{aligned} &\oint_L(xy+yz+zx)ds \\ &=a\int_0^{2\pi}(\frac{1}{6}a^2\cos^2 t-\frac{1}{2}a^2\sin^2 t-\frac{1}{3}a^2\cos^2 t-\frac{\sqrt{3}}{3}a^2\sin t\cos t-\frac{1}{3}a^2\cos^2 t+\frac{\sqrt{3}}{3}a^2\cos t\sin t)dt \\ &=-\frac{1}{2}a^3\int_0^{2\pi}\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)dt=-\pi a^3 \end{aligned}$$

4. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^2 x^n$ 的收敛域为 ___________.

解: 【法 1】记作 $a_n = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^2$, 因为

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^2}\right|.$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}\right)^2 = 1$$

则收敛半径 $R=\frac{1}{L}=1$, 所以收敛区间为 $(-1,1)$, 再考虑端点处的敛散性：当 $x=\pm 1$ 时, 由于通项的极限不为零, 所以幂级数的收敛域为 $x\in(-1,1)$.

【法 2】记作 $a_n = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^2$, 因为

$$L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\ln n+\gamma)^2}$$

$$= \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\ln(\ln n+\gamma)} = \mathrm{e}^0 = 1$$

所以收敛半径 $R=\frac{1}{L}=1$, 那么收敛区间为 $(-1,1)$, 再考虑端点处的敛散性：当 $x=\pm 1$ 时, 由于通项的极限不为零, 所以幂级数的收敛域为 $x\in(-1,1)$.

5. 已知 $f(x)=x(\pi-x), x\in[0,\pi]$, 展开为余弦级数为 __________.

解: 对 $f(x)$ 作偶函数周期延拓, 则 $f(x)$ 的傅里叶系数为：

$$b_n = 0, n=1,2,3,\cdots$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi-x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi-x)\cos(nx)\mathrm{d}x = 2\int_0^\pi x\cos(nx)\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(nx)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^\pi x\cos(nx)\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\mathrm{d}\left(\frac{1}{n}\sin(nx)\right) \\
&= 2\int_0^\pi x\cos(nx)\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\left[x^2\left(\frac{1}{n}\sin(nx)\right)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi\left(\frac{1}{n}\sin(nx)\right)\mathrm{d}\left(x^2\right)\right] \\
&= 2\int_0^\pi x\cos(nx)\mathrm{d}x + \frac{4}{n\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^\pi x\mathrm{d}\left(\frac{1}{n}\sin(nx)\right) - \frac{4}{n\pi}\int_0^\pi x\mathrm{d}\left(\frac{1}{n}\cos(nx)\right) \\
&= 2\left[\frac{x}{n}\sin(nx)\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nx)\mathrm{d}x\right] - \frac{4}{n\pi}\left[\frac{x}{n}\cos(nx)\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi\cos(nx)\mathrm{d}x\right] \\
&= -\frac{2}{n}\int_0^\pi \sin(nx)\mathrm{d}x - \frac{4}{n\pi}\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{4}{n\pi}\frac{1}{n}\int_0^\pi\cos(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{n}\left[\frac{1}{n}\cos(nx)\Big|_0^\pi\right] - \frac{4(-1)^n}{n^2} + \frac{4}{n^2\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_0^\pi\right] \\
&= \frac{2}{n^2}[(-1)^n-1] - \frac{4(-1)^n}{n^2} = -\frac{2}{n^2}[(-1)^n+1]
\end{aligned}$$

所以 $f(x)=x(\pi-x)$ 在 $[0,\pi]$ 的余弦级数为

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^\infty a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^\infty\frac{2[(-1)^n+1]}{n^2}\cos(nx).$$

6. 已知 $b>a>0$, 计算 $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x =$ __________.

解: 【法 1】(转化为二重积分) 因为

$$\int_a^b x^y \mathrm{d}y = \left[\frac{x^y}{\ln x}\right]\Bigg|_{y=a}^{y=b} = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$$

所以 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$, 显然函数 $f(x,y) = x^y$ 在 $[0,1]\times[a,b]$ 连续. 所以两个积分号可以交换次序 (Fubini 定理), 所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\int_a^b x^y \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \left(\left[\frac{x^{1+y}}{1+y}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=1}\right)\mathrm{d}y = \int_a^b \frac{1}{y+1}\mathrm{d}y = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)\end{aligned}$$

【法 2】(积分号下求导) 考虑含参数 y 的积分, 不妨记 $I(y) = \displaystyle\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$. 其中 $f(x,y) = \dfrac{x^y - x^a}{\ln x}, (a \leqslant y \leqslant b)$, 所求积分是 $I(y)$ 在 $y = b$ 处的值, 注意到被积函数当 $x = 0$ 和 $x = 1$ 时没有定义, 而 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x,y) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^y - x^a}{\ln x} = 0$ 以及

$$\lim_{x\to 1^-} f(x,y) = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^y - x^a}{\ln x} = \lim_{x\to 1^-}\frac{yx^{y-1} - ax^{a-1}}{\frac{1}{x}} = y - a$$

因此, 补充定义 $f(0,y) = 0$ 和 $f(1,y) = y - a$, 易知 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[a,b]$ 上连续, 进而 $f_y(x,y) = x^y, (x,y)\in[0,1]\times[a,b] = D$ 也是 D 上的连续函数. 因此,
根据含参变量积分的可微性有

$$I'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 f_y(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^y\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{y+1}$$

等式两端在 $[a,b]$ 上积分, 注意到 $I(a) = 0$, 所以

$$I(b) = \int_a^b I'(y)\mathrm{d}y + I(a) = \int_a^b \frac{1}{y+1}\mathrm{d}y = [\ln(1+y)]|_{y=a}^{y=b} = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

【法 3】(Froullani 积分公式) 令 $t = -\ln x$, 则 $x = \mathrm{e}^{-t}$, 则

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_{+\infty}^0 \frac{\left(\mathrm{e}^{-t}\right)^b - \left(\mathrm{e}^{-t}\right)^a}{t}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(a+1)t} - \mathrm{e}^{-(b+1)t}}{t}\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

注 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = L, a, b > 0$, 则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax) - f(bx)}{x}\mathrm{d}x = [f(0) - L]\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

二、 计算题. 每题 10 分, 共 50 分.

1. 已知数列 $\{a_n\}$: $a_1 = 0, a_{2m} = \dfrac{a_{2m-1}}{2}, a_{2m+1} = \dfrac{1}{2} + a_{2m}$, 求 $\{a_n\}$ 的上下极限.

解: 根据已知, 有

$$a_{2m+1} = \frac{1}{2} + \frac{a_{2m-1}}{2}.$$

由此递推可知

$$\begin{aligned}a_{2m+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{a_{2m-3}}{2^2} = \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^m} + \frac{a_1}{2^m} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^m} = 1 - \frac{1}{2^m}\end{aligned}$$

那么

$$a_{2m} = \frac{a_{2m-1}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^m}$$

因此 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = 1, \lim_{m\to\infty} a_{2m} = \frac{1}{2}$, 这说明 $\{a_n\}$ 的上下极限分别为 1 和 $\dfrac{1}{2}$.

2. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+\tan u^2}\mathrm{d}u$.

解: 记所求积分为 I,

$$I=-\iint_D \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\tan u^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}u$$

其中 $D: 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \sqrt{x} \leqslant u \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 也可以表示为

$$D: 0 \leqslant u \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0 \leqslant x \leqslant u^2$$

因此

$$\begin{aligned}
I &= -\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\mathrm{d}u\int_0^{u^2}\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\tan u^2\right)}\mathrm{d}x=-\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\left.\frac{2\sqrt{x}}{1+\tan u^2}\right|_0^{u^2}\mathrm{d}u \\
&= -\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{2u}{1+\tan u^2}\mathrm{d}u=-\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{\mathrm{d}\left(u^2\right)}{1+\tan u^2}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\tan t}\ \left(t=u^2\right) \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin w}{\sin w+\cos w}\mathrm{d}w \quad \left(t=\frac{\pi}{2}-w\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t\right)=-\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

3. 计算 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{j}{j^2+k^2}$.

解: 【法 1】利用 Cauchy 命题, 有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{j}{j^2+k^2} &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{j}{j^2+k^2}-\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{j}{j^2+k^2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{j^2+n^2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{n^2+k^2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\frac{j}{n}}{\left(\frac{j}{n}\right)^2+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \\
&= \int_0^1\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \left.\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right|_0^1+\left.\arctan x\right|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

【法 2】对任意的正整数 j,k, 有

$$\int_k^{k+1}\frac{j}{j^2+x^2}\mathrm{d}x\leqslant\frac{j}{j^2+k^2}\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{j}{j^2+x^2}\mathrm{d}x$$

也就是

$$\arctan\frac{k+1}{j}-\arctan\frac{k}{j}\leqslant\frac{j}{j^2+k^2}\leqslant\arctan\frac{k}{j}-\arctan\frac{k-1}{j}$$

上式关于 $k=1,2,\cdots,n$ 求和可得

$$\arctan\frac{n+1}{j}-\arctan\frac{1}{j}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{j}{j^2+k^2}\leqslant\arctan\frac{n}{j}$$

根据公式 $\arctan t+\arctan\frac{1}{t}=\frac{\pi}{2}(t>0)$, 上式也等价于

$$\arctan j-\arctan\frac{j}{n+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{j}{j^2+k^2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{j}{n}$$

那么

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\arctan j-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\arctan\frac{j}{n+1}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{j}{j^2+k^2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\arctan\frac{j}{n}. \tag{26.1}$$

其中

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\arctan\frac{j}{n}&=\int_0^1\arctan x\mathrm{d}x=x\arctan x|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

同理也有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\arctan\frac{j}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n}\arctan\frac{j}{n+1}=\int_0^1\arctan x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$$

而根据 Cauchy 命题还有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\arctan j=\lim_{n\to\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2}$$

因此式(26.1)左右两端在 $n\to\infty$ 的极限相同, 极限值均为 $\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$, 由迫敛性可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{j}{j^2+k^2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

4. 计算 $\oint_L\frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}$, 其中 L 为椭圆 $x^2-4x+4y^2=0$, 取逆时针方向.

解: 将椭圆方程化为标准形式 $L:\frac{(x-2)^2}{4}+y^2=1$.

设 $P(x,y)=\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$, $Q(x,y)=-\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1\cdot\left[(x-1)^2+y^2\right]-y\cdot 2y}{[(x-1)^2+y^2]^2}=\frac{(x-1)^2-y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1\cdot\left[(x-1)^2+y^2\right]-(x-1)\cdot 2(x-1)}{[(x-1)^2+y^2]^2}=\frac{(x-1)^2-y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2}$$

所以 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 但 $(1,0)$ 在 $L:\frac{(x-2)^2}{4}+y^2=1$ 内部, 不能直接用 Green 公式.

补线: $L_\varepsilon:(x-1)^2+y^2=\varepsilon^2$, 其中 ε 足够小, 取顺时针方向, 则

$$I_1=\int_{L+L_\varepsilon}\frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$$\begin{aligned}I_2&=\int_{L_\varepsilon}\frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{L_\varepsilon}y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y=-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_\varepsilon}(-1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{2}{\varepsilon^2}\iint_{D_\varepsilon}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\pi\cdot\varepsilon^2=2\pi\end{aligned}$$

所以 $I=I_1-I_2=0-2\pi=-2\pi$.

5. 求第二类曲面积分 $\iint_S\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 S 为圆柱面 $x^2+y^2=1\ (-1\leqslant z\leqslant 1)$, 方向为外侧.

解: 记所求曲面积分为 I, 由于在 S 上有 $x^2+y^2=1$, 所以

$$I=\iint_S\frac{x}{1+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

记 S_1,S_2 分别为 $z=1$ 及 $z=-1$ 在圆柱面 $x^2+y^2\leqslant 1$ 内的部分, 分别取上侧和下侧, 再设 $S+S_1+S_2$

所围成的立体为 V . 由于在 S_1 与 S_2 上, 有 $\mathrm{d}z=0$, 从而 $\iint_{S_1+S_2}\frac{x}{1+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$, 因此

$$I=\iint_{S+S_1+S_2}\frac{x}{1+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

此时由高斯公式可知

$$I=\iiint_V\frac{1}{1+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+z^2}\mathrm{d}z=\pi\cdot\arctan z|_{-1}^{1}=\frac{\pi^2}{2}$$

三、 证明题. 每题 10 分, 共 40 分.

1. A 是由数码 0, 1 组成的所有数列的集合, 证明 A 不可数.

证明: 反证法. 若 A 可数, 不妨设

$$A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}. \tag{26.2}$$

其中每个 x_n 都表示由 0,1 组成的一个数列. 取数列 x 满足：对任意的正整数 k, 若 x_k 的第 k 项为 1 , 则 x 的第 k 项为 0 , 若 x_k 的第 k 项为 0 , 则 x 的第 k 项为 1 . 显然 x 也是由 0,1 组成的数列, 即 $x\in A$. 同时对任意的正整数 n, 由于 x 与 x_n 的第 n 项不相同, 因此 $x\neq x_n$, 这与式(26.2)矛盾. 因此 A 不可数.

注. 我们用具体的例子来说明 x 的取法. 例如

$$x_1:\underline{0},0,0,1,1,0,0,1,\cdots$$
$$x_2:0,\underline{1},1,0,1,0,1,0,\cdots$$
$$x_3:0,0,\underline{1},1,0,1,0,0,\cdots$$
$$x_4:0,1,1,\underline{0},1,1,0,1,\cdots$$
$$\cdots$$

根据上述带有下划线的各项可知 $x:1,0,0,1,\cdots$.

2. 证明函数 $f(x)=\sqrt{x}\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

证明: 对函数 $f(x)=\sqrt{x}\ln x,(x\in[1,+\infty))$ 求导可得

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot 2\sqrt{x}-(\ln x+2)\cdot 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2}=-\frac{\sqrt{x}\ln x}{x(2\sqrt{x})^2}\leqslant 0$$

所以 $f'(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上单调递减, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}=0$ 及 $f'(1)=1$. 所以 $|f'(x)|\leqslant 1$, 表明 $f'(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上有界, 根据 Lagrange 中值定理, 对于 $x\in[1,+\infty)$ 上任意两点 $x_1,x_2,(x_1<x_2)$, 存在 $\xi_1\in(x_1,x_2)$, 使得

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(\xi_1)||x_2-x_1|\leqslant|x_2-x_1|, \text{其中}\xi_1\in(x_1,x_2).$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 当 $|x_2-x_1|<\delta$ 时, 就有 $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$. 所以函数 $f(x)=\sqrt{x}\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

3. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)\cos(n-1)}{n^p}$ 在 $p>1$ 时收敛, 在 $p\leqslant 1$ 时发散.

证明: 当 $p\leqslant 0$, 明显级数通项不收敛到 0 , 因此级数发散. 下面考虑 $p>0$ 的情况：注意到

$$\frac{\sin(n+1)\cos(n-1)}{n^p}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2n}{n^p}+\frac{\sin 2}{n^p}\right) \tag{26.3}$$

当 $p>0$ 时, 数列 $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$ 单调递减趋近于 0 , 同时对任意的正整数 n, 还有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\right|=\left|\frac{\cos 1-\cos(2n+1)}{2\sin 1}\right|<\frac{1}{\sin 1}$$

由 Dirichlet 判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2n}{n^p}$ 在 $p>0$ 时收敛. 另外, 明显 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2}{n^p}$ 在 $p>1$ 时收敛, 在 $0<p\leqslant 1$ 时发散. 因此结合式(26.3), 便知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(n+1)\cos(n-1)}{n^p}$ 在 $p>1$ 时收敛, 在 $p\leqslant 1$ 时发散.

4. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^2+n}{n^2}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛, 但对任意的 x 不绝对一致收敛.

证明: 【法 1】考虑使用 Cauchy 收敛准则定义:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^2+k}{k^2}\right|=\left|\frac{x^2+(n+1)}{(n+1)^2}-\left[\frac{x^2+(n+2)}{(n+2)^2}-\frac{x^2+(n+3)}{(n+3)^2}\right]-\cdots\right|$$
$$\leqslant\frac{x^2+(n+1)}{(n+1)^2}\leqslant\frac{A^2+(n+1)}{(n+1)^2},(|x|\leqslant A)\to 0,(n\to+\infty)$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^2+n}{n^2}$ 在任何有限区间上一致收敛, 即在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛. 又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2+n}{n^2}=x^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, 所以对任意的 x 不绝对一致收敛.

【法 2】级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^2+n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^2}{n^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$. 由 M 判别法可知: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^2}{n^2}$ 在任何有限区间上一致收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 为收敛的交错级数, 在任何区间上一致收敛, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^2+n}{n^2}$ 在任何有限区间上一致收敛, 即在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛.

又因为对任意 x, $\left|(-1)^n\dfrac{x^2+n}{n^2}\right|\geqslant\dfrac{1}{n}$, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{x^2+n}{n^2}\right|$ 发散, 即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^2+n}{n^2}$ 对任意的 x 不绝对一致收敛.

四、 综合题. 每题 15 分, 共 30 分.

1. (x) 表示 x 的小数部分, 已知 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(nx)}{n^2}\ (x\in\mathbb{R})$.

(1). 求 $f(x)$ 所有间断点.

(2). 证明 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

解: (1) 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有 $\left|\dfrac{\{nx\}}{n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法可知: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\{nx\}}{n^2}$ 在 $\forall x\in\mathbb{R}$ 上一致收敛. 因为无理数是 $\{nx\},(n=1,2,\cdots)$ 的连续点, 所以函数 $f(x)$ 在所有无理点连续. 若 $x=\dfrac{p}{q},(p,q)=1$, 则当 $n=kq$ 时, $\{nx\}=0$, 由一致收敛性可知可逐项求极限. 所以有 $f(x)=\sum\limits_{n\neq kq}\dfrac{\{nx\}}{n^2}=f(x+0)$, 而

$$f(x-0)=f(x)+\sum_{n=kq}\frac{1}{n^2}>f(x+0)$$

所以 $f(x)$ 在有理点有第一类间断 (但右连续), 有理点在 $\mathbb{R}$ 中稠密. 所以 $f(x)$ 的所有间断点可写成 $x=k,(k\in\mathbb{Q})$.

(2) 每一项 $\dfrac{\{nx\}}{n^2}$ 在任意有限闭区间 $[a,b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 故可积. 进一步推广到级数, 可知 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\{nx\}}{n^2}$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}>a_n>0$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(1). 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

(2). 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛.

解: (1)($\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, 即 $\forall \varepsilon > 0$, 要证 $\exists N > 0$, 使得 $n > N$ 时, 有 $0 \leqslant na_n < \varepsilon$), 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 根据 Cauchy 准则: $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, n > N$ 时, $0 < a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_n < \frac{\varepsilon}{2}$, 但是 $\{a_n\} \searrow$, 故 $(n-N)a_n \leqslant a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_n < \frac{\varepsilon}{2}$.

特别地, 令 $n = 2N$ 可得: $(2N - N)a_{2N} < \frac{\varepsilon}{2}$, 故当 $n > 2N$ 时, 有

$$\begin{aligned} na_n &= (n-N)a_n + (2N-N)a_n \\ &< (n-N)a_n + (2N-N)a_{2N} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

所以 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

(2) 设 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, 且 $S = \lim_{n\to\infty} S_n, T_n = \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1})$, 因为

$$\begin{aligned} T_n = \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) &= (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \cdots + n(a_n - a_{n+1}) \\ &= a_1 - (a_2 - 2a_2) - (2a_3 - 3a_3) - \cdots - ((n-1)a_n - na_n) - na_{n+1} \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n - na_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - na_{n+1} \end{aligned}$$

所以 $\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k - \lim_{n\to\infty} na_{n+1}$, 又因为 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 进而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收收敛.

东北大学 2025 年数学分析试卷

一、 计算题. 每题 15 分, 共 60 分.

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x$.

解: 当 $x>0$ 时, 有 $0\leqslant \ln(1+x^n)\leqslant x^n$, 所以

$$0\leqslant \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x\leqslant \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

由夹逼准则可知, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x=0$.

2. 求曲面 $x^2+y^2=az,(a>0), z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成立体区域的体积.

解: 由 $x^2+y^2=az,(a>0)$ 和 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 消去 z, 解得 $x^2+y^2=a\sqrt{x^2+y^2}$, 即 $x^2+y^2=a^2$, 即所求立体在 xOy 面上的投影区域 $D=\{(r,\theta):0\leqslant r\leqslant a, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$, 于是

$$\begin{aligned}V&=\iint_D\left(\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2+y^2}{a}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\left(r-\frac{r^2}{a}\right)r\mathrm{d}r\\&=2\pi\cdot\int_0^a\left(r-\frac{r^2}{a}\right)\cdot r\mathrm{d}r=2\pi\cdot\frac{a^3}{12}=\frac{a^3}{6}\pi.\end{aligned}$$

3. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3x^n$ 的和函数, 其中 $|x|<1$.

解: 注意到 $|x|<1$ 时, 有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, 逐项求导有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$, 继续逐项求导有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\frac{1+x}{(1-x)^3}$, 于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$, 再次逐项求导有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^3x^{n-1}=\frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^3x^n=\frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}, |x|<1.$$

4. 求积分 $I=\iiint_\Omega\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}V$, 其中 $\Omega: x^2+y^2\leqslant z^2, x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, z\geqslant 0$.

解: 球坐标变换: $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\ .\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$ 联立 $\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\ x^2+y^2+z^2=R^2\end{cases}$ 可得 $z=\frac{R}{\sqrt{2}}$, 在交线上有 $\sin^2\varphi\leqslant\cos^2\varphi$, 故 $0<\varphi<\frac{\pi}{4}$, 得

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R\sqrt{r^2}\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r^4\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^3\mathrm{d}r=2\pi\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{R^4}{4}\\&=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot R.\end{aligned}$$

二、 证明题. 每题 15 分, 共 90 分.

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微, 且 $|f'(x)| \leqslant M$. 证明: 对任意的正整数 n, 有

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{n}.$$

证明: 对于任意的正整数 n, 注意到

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f\left(\frac{i}{n}\right)\mathrm{d}x\right| \leqslant \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left|f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right|\mathrm{d}x. \tag{27.1}$$

而当 $x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ 时, 根据 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, 满足

$$\left|f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right| = \left|f'(\xi)\left(x - \frac{i}{n}\right)\right| \leqslant M\left(\frac{i}{n} - x\right) \leqslant \frac{M}{n}$$

将此代入到式(27.1), 便有

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)\right| \leqslant \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \frac{M}{n}\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \frac{M}{n^2} = \frac{M}{n}$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒正连续, 且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$. 证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)(b-a+A)$$

证明: 记 $D = [a,b]\times[a,b]$, 再记 $I = \int_a^b f(x)\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$, 那么结合平均值不等式, 有

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{f(x)\mathrm{e}^{f(x)}}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{f(y)\mathrm{e}^{f(y)}}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{1}{2}\left(\frac{f(x)\mathrm{e}^{f(x)}}{f(y)} + \frac{f(y)\mathrm{e}^{f(y)}}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\geqslant \iint_D \sqrt{\frac{f(x)\mathrm{e}^{f(x)}}{f(y)}\cdot\frac{f(y)\mathrm{e}^{f(y)}}{f(x)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{e}^{\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \iint_D \left[1 + \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= (b-a)^2 + \iint_D f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (b-a)^2 + (b-a)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)(b-a+A). \end{aligned}$$

3. 证明函数列 $f_n(x) = \frac{\ln(nx)}{nx^2}$ 在 $(1,+\infty)$ 上一致收敛.

证明: 根据不等式 $\ln t < t\,(t>0)$ 可知对任意的正整数 n 及 $x \in (1,+\infty)$, 有

$$0 < f_n(x) = \frac{2\ln\sqrt{nx}}{nx^2} < \frac{2\sqrt{nx}}{nx^2} < \frac{2\sqrt{n}x^2}{nx^2} = \frac{2}{\sqrt{n}} \to 0(n\to\infty).$$

由此可知 $\{f_n(x)\}$ 在 $(1,+\infty)$ 上一致收敛于 0 .

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 满足 $f'(a) = f'(b) = 0$. 证明: 至少存在一点 $c \in (a,b)$, 使得

$$|f''(c)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|.$$

证明: 将函数 f 在点 a,b 分别展开为带有 Lagrange 型余项的一阶 Taylor 公式, 此时取 $x = \frac{a+b}{2}$, 则有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + f'(a)\left(\frac{a+b}{2} - a\right) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2$$
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + f'(b)\left(\frac{a+b}{2} - b\right) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2$$

其中 $a < \xi_1 < \frac{a+b}{2} < \xi_2 < b$, 又因为 $f'(a) = f'(b) = 0$. 上面两式相减可得 $0 = f(a) - f(b) + \frac{1}{2}\left[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)\right]\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. 取

$$|f''(\xi)| = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}$$

其中 ξ 介于 ξ_1 与 ξ_2 之间, 所以

$$\begin{aligned}|f(b)-f(a)| &= \frac{1}{2}\left|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\right|\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\left|f''(\xi_1)\right|+\left|f''(\xi_2)\right|\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \leqslant \left|f''(\xi)\right|\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\end{aligned}$$

即 $\dfrac{4}{(a-b)^2}|f(b)-f(a)| \leqslant \left|f''(\xi)\right|$, 得证!

5. 证明 $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$ 在区间 $J_1=(-1,0)$ 和区间 $J_2=(0,1)$ 上均一致连续, 但在 $J_1 \cup J_2$ 上不一致连续.

证明: 在 $J_1=(-1,0)$ 上, $f(x)=-\dfrac{\sin x}{x}$, 则

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} = -1$$

在 $J_2=(0,1)$ 上, $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, 则 $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin x}{x}=1$. 可以通过补充定义后, 利用康托定理可知: $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$ 在 $J_1=(-1,0)$ 以及 $J_2=(0,1)$ 上均是一致连续的, 且 $\exists \eta>0,(\eta<1)$, 使得

$$0<x_1<\eta, -\eta<x_2<0.$$

时, 恒有 $|f(x_2)-f(x_1)|>1$, 故 $f(x)$ 在 $J_1 \cup J_2$ 上不一致连续, 得证!

6. 证明反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 发散.

证明: 记 $F(u)=\displaystyle\int_0^u \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\sin^2 x}$, 下面证明数列 $\{F(n\pi)\}$ 发散: 记

$$F(n\pi)=\int_0^{n\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\sin^2 x}=\sum_{k=1}^n a_k,\ 其中 a_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\sin^2 x}.$$

根据 $\sin^2 x$ 的周期性及不等式 $0\leqslant \sin x\leqslant x(0\leqslant x\leqslant \pi)$, 有

$$\begin{aligned} a_k &= \int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\sin^2 x} \geqslant \int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+k^2\pi^2\sin^2 x} \\ &= \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+k^2\pi^2\sin^2 x} \geqslant \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+k^2\pi^2 x^2} \\ &= \frac{1}{k\pi}\int_0^{k\pi^2}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \geqslant \frac{1}{k\pi}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{k\pi}\arctan t\Big|_0^1 = \frac{1}{4k}. \end{aligned}$$

由于 $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k}$ 发散, 所以 $F(n\pi)=\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k$ 发散, 从而反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\sin^2 x}$ 也发散.

湖南大学 2025 年数学分析试卷

一、 已知 $x_1=1, x_{n+1}=\sqrt{5x_n}$, 证明: $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

证明: 【法 1】先证明：$1\leqslant x_n\leqslant 5, (n=1,2,3,\cdots)$. 当 $n=1$ 时, 有 $x_1=1\in[1,5]$；当 $n=2$ 时, 有 $x_2=\sqrt{5x_1}=\sqrt{5}\in[1,5]$. 假设 $x_n\in[1,5]$, 则 $n+1$ 时, 有

$$1<\sqrt{5}=\sqrt{5\times 1}\leqslant x_{n+1}=\sqrt{5x_n}\leqslant\sqrt{5\times 5}=5.$$

也满足 $x_{n+1}\in[1,5]$, 由数学归纳法可知, $1\leqslant x_n\leqslant 5, \forall n\in\mathbb{N}_+$. 又因为

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\sqrt{5x_n}}{x_n}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x_n}}\geqslant\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$$

所以 $x_{n+1}\geqslant x_n, \forall n\in\mathbb{N}_+$. 表明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递增, 又有上界 5 , 根据单调有界准则可知：$\{x_n\}$ 收敛. 所以可设 $A=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$, 等式 $x_{n+1}=\sqrt{5x_n}$ 两边取极限可得 $A=\sqrt{5A}$. 解得 $A=5$, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=5$.

【法 2】由【法 1】可知, $1\leqslant x_n\leqslant 5, (n=1,2,3,\cdots)$, 所以

$$\begin{aligned}
x_{n+1}-x_n=\sqrt{5x_n}-\sqrt{5x_n}&=\sqrt{5}\left(\sqrt{x_n}-\sqrt{x_{n-1}}\right)\\
&=\sqrt{5}\frac{\left(\sqrt{x_n}-\sqrt{x_{n-1}}\right)\left(\sqrt{x_n}+\sqrt{x_{n-1}}\right)}{\sqrt{x_n}+\sqrt{x_{n-1}}}=\sqrt{5}\cdot\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{x_n}+\sqrt{x_{n-1}}}\\
&\geqslant\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1})=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5x_{n-1}}-\sqrt{5x_{n-2}}\right)\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot\frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{\sqrt{x_{n-1}}+\sqrt{x_{n-2}}}\geqslant\frac{1}{2^2}\cdot(x_{n-1}-x_{n-2})\\
&\geqslant\cdots\geqslant\frac{1}{2^{n-1}}\cdot(x_2-x_1)=\frac{\sqrt{5}-1}{2^{n-1}}\geqslant 0.
\end{aligned}$$

这是对任意 n 都是成立的！所以 $x_{n+1}\geqslant x_n, \forall n\in\mathbb{N}_+$, 表明数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递增有上界. 根据单调有界准则可知,$\{x_n\}$ 收敛. 设 $A=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$, 对递推式 $x_{n+1}=\sqrt{5x_n}$ 两边取极限可得 $A=\sqrt{5A}$. 故 $A=5$, 所以

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=5$$

【法 3】先假定极限存在, 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$ 存在. 对 $x_{n+1}=\sqrt{5x_n}$ 两边取极限可得：$A=\sqrt{5A}$, 所以 $A=5$. 由于

$$\begin{aligned}
|x_{n+1}-A|&=\left|\sqrt{5x_n}-A\right|=\left|\sqrt{5x_n}-\sqrt{5A}\right|\\
&=\sqrt{5}\left|\sqrt{x_n}-\sqrt{A}\right|=\sqrt{5}\frac{\left|\left(\sqrt{x_n}-\sqrt{A}\right)\left(\sqrt{x_n}+\sqrt{A}\right)\right|}{\left|\sqrt{x_n}+\sqrt{A}\right|}\\
&=\sqrt{5}\frac{|x_n-A|}{\left|\sqrt{x_n}+\sqrt{A}\right|}\leqslant\left(\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^1|x_n-A|\\
&=\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\left|\sqrt{5x_{n-1}}-\sqrt{5A}\right|=\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\sqrt{5}\left|\sqrt{x_{n-1}}-\sqrt{A}\right|\\
&=\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\sqrt{5}\frac{\left|\left(\sqrt{x_{n-1}}-\sqrt{A}\right)\left(\sqrt{x_{n-1}}+\sqrt{A}\right)\right|}{\left|\sqrt{x_{n-1}}+\sqrt{A}\right|}\\
&=\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\sqrt{5}\frac{|x_{n-1}-A|}{\left|\sqrt{x_{n-1}}+\sqrt{A}\right|}\leqslant\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}|x_{n-1}-A|\\
&\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n|x_1-A|\to 0,(n\to+\infty)
\end{aligned}$$

利用数列极限定义可知数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 确实收敛且极限等于 5 .

【法 4】对 $x_{n+1}=\sqrt{5x_n}$ 两边取对数可得

$$\ln x_{n+1}=\ln\sqrt{5x_n}=\frac{1}{2}\ln(5x_n)=\frac{1}{2}\ln 5+\frac{1}{2}\ln x_n$$

令 $y_n=\ln x_n$, 替换上式后并化简后可得 $2y_{n+1}=\ln 5+y_n$. 令 $2(y_{n+1}+\delta)=(y_n+\delta)$, 则 $2y_{n+1}=y_n-\delta$, 所以 $\delta=-\ln 5$.

所以 $2(y_{n+1}-\ln 5)=(y_n-\ln 5)$, 令 $z_n=y_n-\ln 5$, 则 $z_{n+1}=\dfrac{1}{2}z_n$. 当 $n=1$ 时, 有 $z_1=y_1-\ln 5=\ln x_1-\ln 5=-\ln 5$. 利用等比数列的通项公式可知：$z_n=z_1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\ln 5$. 所以

$$y_n=\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\ln 5, \text{得} \ln x_n=\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\cdot\ln 5.$$

解得 $x_n=\mathrm{e}^{\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\cdot\ln 5}$, 取极限得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\cdot\ln 5}=5$.

【法 5】由【法 1】, 令 $f(x)=\sqrt{5x}$. 不妨设

$$\left|f'(x)\right|=\left|\frac{1}{2}(5x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 5\right|=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}}<1$$

故需要满足：$x>\dfrac{5}{4}$. 即需要满足 $x_n>\dfrac{5}{4}$. 事实上, 显然

$$x_n\geqslant\sqrt{5}>\frac{5}{4},(n\geqslant 2,n\in\mathbb{N})$$

假设 $x_n>\dfrac{5}{4},(n=2,3,4,\cdots)$. 当 $n=2$ 时, $x_2=\sqrt{5x_1}=\sqrt{5}>\dfrac{5}{4}$, 结论成立！当 $n=3$ 时, $x_3=\sqrt{5x_2}=\sqrt{5\sqrt{5}}>\dfrac{5}{4}$, 结论也成立！假设 $n,(n\geqslant 4)$ 时, 有 $x_n>\dfrac{5}{4}$, 则 $n+1$ 时, 有 $x_{n+1}=\sqrt{5x_n}>\sqrt{5\cdot\dfrac{5}{4}}=\dfrac{5}{2}>\dfrac{5}{4}$. 由数学归纳法可知 $x_n>\dfrac{5}{4},(n\geqslant 2)$, 则 $\left|f'(x)\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}}<\dfrac{\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}}=1$. 利用压缩映射原理可知, 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛. 设 $A=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$, 则等式 $x_{n+1}=\sqrt{5x_n}$ 两边取极限可得 $A=\sqrt{5A}$. 解得 $A=5$, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=5$.

二、 已知 $\{a_n\}$ 是无界数列, 但不是无穷大量. 证明: $\{a_n\}$ 存在两个子列, 一个是收敛数列, 另一个是无穷大量.

证明: 一方面, 因为 $\{x_n\}$ 是无界数列, 所以对 $\forall M>0,\forall N\in\mathbb{N}_+$, 存在 $n_M>N$, 使得 $\left|x_{n_M}\right|>M$, 于是对于 $M=1$, 存在 $n_1>1$, 使得 $\left|x_{n_1}\right|>1$；对于 $M=2$, 存在 $n_2>n_1$, 使得 $\left|x_{n_2}\right|>2$； $\cdots$ ；对于 $M=k$, 存在 $n_k>n_{k-1}$, 使得 $\left|x_{n_k}\right|>k$； $\cdots$ ；由此得到的 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\left\{x_{n_k}\right\}$ 满足：$\left|x_{n_1}\right|>k,k\in\mathbb{N}_+$. 由数列无界的定义不难得知：它是一个无穷大量.

另一方面, 因 $\{x_n\}$ 不是无穷大量, 从而 $\exists K>0,\forall N\in\mathbb{N}_+,\exists m_N>N$, 使得 $\left|x_{m_N}\right|\leqslant K$, 于是对 $N=1$, 存在 $m_1>N$, 使得 $\left|x_{m_1}\right|\leqslant K$；对 $N=\max\{2,m_1\}$, 存在 $m_2>N$, 使得 $\left|x_{m_2}\right|\leqslant K$；$N=\max\{3,m_2\}$, 存在 $m_3>N$, 使得 $\left|x_{m_3}\right|\leqslant K$； $...$ ； $N=\max\{k,m_{k-1}\}$, 存在 $m_k>N$, 使得 $\left|x_{m_k}\right|\leqslant K$； $...$ 根据上面的构造, 得到 $\{x_n\}$ 的一个有界子列 $\left\{x_{m_k}\right\}$. 由致密性定理可知, $\left\{x_{m_k}\right\}$ 存在收敛子列 $\left\{x_{m_{k_q}}\right\}$. 利用包含关系的传递性可知, 显然 $\left\{x_{m_{k_q}}\right\}$ 也是 $\{x_n\}$ 的一个子列, 且收敛. 综上所述,$\{x_n\}$ 存在两个子列：一个子列收敛, 另一个子列是无穷大量.

三、 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 若 $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=+\infty$, 则存在 $x_0\in\mathbb{R}$, 使得 $f(x)$ 可以取到 $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}}f(x)$.

证明: 由 $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=+\infty$ 可知, 对 $\forall M>0,\exists|a|\in\mathbb{R}$, 当 $x>|a|$ 时, 有 $|f(x)|>M$, 又因为 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 所以 $f(x)$ 在 $[-|a|,|a|]$ 上连续, 根据闭区间上连续函数的最值定理可知, 函数 $f(x)$ 在 $[-|a|,|a|]$ 上必存在最小值. 不妨设 $f(x_1)$ 为函数 $f(x)$ 在 $[-|a|,|a|]$ 上的最小值, 则 $x_1\in[-|a|,|a|]$. 又因为当 $x>|a|$ 时, 有 $|f(x)|>M$, 所以 $f(x_1)$ 可以为 $\mathbb{R}$ 上最小值. 此时, 取 $x_0=x_1\in[-|a|,|a|]\subset\mathbb{R}$ 时, 即 $f(x)$ 可以取到 $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}}f(x)$.

四、 解答如下问题:

1. 若 $0<\eta<1$, 证明: $f(x)=\sin\frac{1}{x^2}$ 在 $(\eta,1)$ 上一致连续.

2. 证明 $f(x)=\sin\frac{1}{x^2}$ 在 $(0,1)$ 上不一致收敛.

证明: (1)【法 1】因为 $\eta\in(0,1)$, 所以可以补全定义:

$$F(x)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{\eta^2}\right),x=\eta\\ \sin\left(\frac{1}{x}\right),x\in(\eta,1),\sin 1,x=1\end{cases}$$

因为 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ 在 $(\eta,1),\eta\in(0,1)$ 上连续, 所以 $F(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上是连续的. 利用康托定理可知,$F(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上是一致连续的. 自然蕴含了 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ 在 $(\eta,1)$ 上是一致连续的, 得证!

【法 2】对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta<\frac{\varepsilon\eta^4}{2}>0$, 对 $\forall x_1,x_2\in(\eta,1)$, 当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有 $\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{x_2{}^2}\right)-\sin\left(\frac{1}{x_1{}^2}\right)}{\frac{1}{x_2{}^2}-\frac{1}{x_1{}^2}}\right|=$ $|\cos\xi|<1$, 所以

$$\begin{aligned}|f(x_2)-f(x_1)|&=\left|\sin\left(\frac{1}{x_2^2}\right)-\sin\left(\frac{1}{x_1^2}\right)\right|<\left|\frac{1}{x_2^2}-\frac{1}{x_1^2}\right|\\&=\frac{|x_1^2-x_2^2|}{x_2^2x_1^2}=\frac{|(x_1+x_2)(x_1-x_2)|}{x_2^2x_1^2}<\frac{2|x_1-x_2|}{x_2^2x_1^2}\\&<\frac{2|x_1-x_2|}{\eta^4}<\frac{2\delta}{\eta^4}<\varepsilon\end{aligned}$$

所以函数 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ 在 $(\eta,1)$ 上一致连续, 得证!

(2)【法 1】

引理 28.1

设 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内连续. 恻 $f(x)$ 在 (a,b) 上不一致连续的充要条件是: $f\left(a^+\right),f\left(b^-\right)$ 至少有一个不存在.

因为极限

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

不存在, 根据上述引理28.1可知, 函数 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续, 得证!

【法 2】

引理 28.2

函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上不一致连续的充要条件是: 对区间 (a,b) 上存在两个数列 $\{x_n\},\{y_n\}$, 当 $\lim\limits_{n\to+\infty}|x_n-y_n|=0$ 时, 有

$$\lim_{n\to+\infty}|f(x_n)-f(y_n)|\neq0$$

取 $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}, y_n=\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}$, 显然这两个序列均在 $(0,1)$ 内, 则

$$
\begin{aligned}
0<\lim_{n\to+\infty}|x_n-y_n| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\sqrt{2n\pi}-\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2n\pi}\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}\right| \\
&< \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\left(\sqrt{2n\pi}-\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)\left(\sqrt{2n\pi}+\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)}{2n\pi\left(\sqrt{2n\pi}+\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{4n\left(\sqrt{2n\pi}+\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)}\right| < \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{4n(\sqrt{2n\pi}+\sqrt{2n\pi})}\right| = 0
\end{aligned}
$$

但是 $\lim\limits_{n\to+\infty}|f(x_n)-f(y_n)|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)-\sin(2n\pi)\right|=1$. 由式(28.2)可知, 函数 $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.

【法 3】取 $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}, y_n=\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}$, 显然这两个序列均在 $(0,1)$ 内, 则取 $\delta=\dfrac{1}{2n}$, 对 $\varepsilon_0=1, x_n, y_n\in(0,1)$, 当 $|x_n-y_n|<\dfrac{1}{2n}=\dfrac{\delta}{2n}$ 时, 有

$$
|f(x_n)-f(y_n)|=\left|\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)-\sin(2n\pi)\right|=1-0=1\geqslant\varepsilon_0
$$

根据非一致连续的定义可知, $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.

五、讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^p}$ $(p\in\mathbb{R})$ 的敛散性.

证明: (i) 当 $p>1$ 时, 对 $\forall nx$, 均有 $|\sin(nx)|<1$, 所以

$$
\left|\frac{\sin(nx)}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p}
$$

【积分判别法】: 设数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 令 $a_n=f(n)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 的玫散性相同. 注意到

$$
\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}x^{-p}\mathrm{d}x=\left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right)\Bigg|_1^{+\infty}=\frac{1}{p-1}
$$

所以根据【积分判别法】可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 在 $p>1$ 上收敛. 再由比较判别法可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\sin(nx)}{n^p}\right|$ 在 $p>1$ 上收敛. 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nx)}{n^p}$, $(0<x<\pi)$ 在 $p>1$ 上绝对收敛.

(ii) 当 $0<p\leqslant1$ 时, 因为 $\dfrac{1}{n^p}$ 对于 $\forall x\in(0,\pi)$ 都关于 n 单调递减且在 $x\in(0,\pi)$ 上一致趋于零, 且

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right| &= \left|\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right| \\
&\leqslant \frac{\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|+\left|\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\right|}{\left|2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}\leqslant\frac{1+1}{2\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}\leqslant\left|\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right|
\end{aligned}
$$

所以函数项级数 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin(kx)$ 在 $x\in(0,\pi)$ 上一致有界.

【函数项级数的 Dirichlet 判别法】: 若函数列 $\{a_n(x)\}$ 对于 $\forall x\in E$ 都关于 n 单调且在 E 上一致趋于零, 函数项级数 $\sum\limits_{k=1}^{n}b_k(x)$ 在 E 上一致有界, 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在 E 上一致收敛.

根据【函数项级数的 Dirichlet 判别法】可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^p},(0<x<\pi)$ 在 $0<p\leqslant 1$ 上收敛, 又因为

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n^p}\right|\geqslant\frac{\sin^2(nx)}{n^p}=\frac{1-\cos(2nx)}{2n^p}=\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos(2nx)}{2n^p}.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$ 在 $0<p\leqslant 1$ 上发散, 且同样由 Dirichlet 判别法可知, 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{2n^p}$ 收敛, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos(2nx)}{2n^p}\right)$ 发散. 再次由比较判别法可知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(nx)}{n^p}\right|$ 发散. 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^p},(0<x<\pi)$ 在 $0<p\leqslant 1$ 上非绝对收敛, 是条件收敛.

(iii) 当 $p\leqslant 0$ 时, 因为级数的一般项的极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin(nx)}{n^p}\neq 0$. 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^p},(0<x<\pi)$ 在 $p\leqslant 0$ 上发散.

六、 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导, 任取 $x_1,x_2\in(a,b)$, 满足 $f'(x_1)f'(x_2)<0$. 证明: 至少存在一点 ξ 介于 x_1,x_2 之间, 使得 $f'(\xi)=0$.

证明: 由 $f'(x_1)f'(x_2)<0$ 可知 $f'(x_1),f'(x_2)$ 异号. 不失一般性, 不防设 $f'(x_1)<0<f'(x_2)$. 因 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导, 且 $x_1,x_2\in(a,b)$, 不妨设 $x_1<x_2$, 则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1,x_2]$ 上可微, 故在闭区间 $[x_1,x_2]$ 上能达到最小值. 不防设: $f(\eta)$ 是 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 的最小值. 若 $\eta\in(x_1,x_2)$, 则 $f'(\eta)=0$, 取 $\xi=\eta\in(x_1,x_2)$, 即为所求. 若 $\eta=x_1$ 或 x_2 时, 即 $f(x_1)$ 或 $f(x_2)$ 是 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上的最小值. 也就是说, 对 $\forall x\in[x_1,x_2]$, 均有 $f(x_1)\leqslant f(x)$ 或 $f(x_2)\leqslant f(x)$. 但是, 这是不可能的. 事实上: 如果对 $\forall x\in[x_1,x_2]$, 有 $f(x_1)\leqslant f(x)$, 即 ξ 是 x_1, 那么

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\geqslant 0,(\forall x>x_1).$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_1^+}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(x_1)\geqslant 0$. 而我们假设的是 $f'(x_1)<0$, 产生了矛盾! 因此 ξ 不可能是 x_1. 同理可得 ξ 也不可能是 x_2, 所以 ξ 只能是 (x_1,x_2) 内. 即证出至少存在一点 ξ 介于 x_1,x_2 之间, 使得 $f'(\xi)=0$.

七、 法如下问题:

1. 证明: $\displaystyle\int_a^b\left|x-\frac{a+b}{2}\right|^n\mathrm{d}x=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{2^n(n+1)}$.
2. 已知 $\displaystyle\int_0^1 x^nf(x)\mathrm{d}x=1,\int_0^1 x^kf(x)\mathrm{d}x=0\ (k=0,1,2,\cdots,n-1)$. 证明:

$$\max_{x\in[0,1]}|f(x)|\geqslant 2^n(n+1).$$

证明: (1) 先去绝对值:

$$\begin{aligned}I&=\int_a^b\left|x-\frac{a+b}{2}\right|^n\mathrm{d}x\\&=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^n\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^n\mathrm{d}x\end{aligned}$$

对第一个积分换元 $t=\dfrac{a+b}{2}-x$, 第二个积分换元 $u=x-\dfrac{a+b}{2}$, 则

$$I=-\int_{\frac{b-a}{2}}^{0} t^n\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{b-a}{2}} u^n\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{b-a}{2}} u^n\mathrm{d}u+\int_0^{\frac{b-a}{2}} u^n\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{\frac{b-a}{2}} u^n\mathrm{d}u=2\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_0^{\frac{b-a}{2}}=2\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}-0^{n+1}}{n+1}=\frac{(b-a)^{n+1}}{2^n(n+1)}$$

(2)【法 1】假设对于一切的 $x\in[0,1]$, 使得 $|f(x)|<2^n(n+1)$.

$$1=\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)\mathrm{d}x$$

$$<\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^n|f(x)|\mathrm{d}x<2^n(n+1)\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^n\mathrm{d}x$$

$$=2^n(n+1)\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)^n\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\mathrm{d}x\right)^n$$

$$=2^n(n+1)\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)^n\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$=2^n(n+1)\left(-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)^n\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}-x\right)+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$$

令前面 $t=\dfrac{1}{2}-x$, 后面 $t=x-\dfrac{1}{2}$, 则

$$1<2^n(n+1)\left(-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)^n\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}-x\right)+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$=2^n(n+1)\left(-\int_{\frac{1}{2}}^0 t^n\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{1}{2}} t^n\mathrm{d}t\right)=2^n(n+1)\cdot 2\int_0^{\frac{1}{2}} t^n\mathrm{d}t$$

$$=2^{n+1}(n+1)\left(\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=1.$$

这个过程是矛盾的, 所以假设不成立！所以至少存在一点 $\xi\in[0,1]$, 使得

$$|f(\xi)|\geqslant 2^n(n+1)$$

又因为 $\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|\geqslant|f(\xi)|$, 所以 $\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|\geqslant 2^n(n+1)$, 得证！

【法 2】因为 $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=1,\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x=0,(k=0,1,\cdots,n-1)$, 故

$$\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}C_n^k x^k\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left(C_n^0x^n\left(-\frac{1}{2}\right)^0+C_n^1x^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^1+\cdots+C_n^nx^0\left(-\frac{1}{2}\right)^0\right)f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 x^nf(x)\mathrm{d}x+\int_0^1\left(C_n^1x^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^1+\cdots+C_n^nx^0\left(-\frac{1}{2}\right)^0\right)f(x)\mathrm{d}x$$

$$=1+0=1.$$

所以 $\displaystyle\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)\mathrm{d}x=1$, 其中 n 属于正整数. 再由推广的积分第一中值定理可知, 存在 $\xi\in[0,1]$, 使得

$$1=\left|\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^n|f(x)|\mathrm{d}x=|f(\xi)|\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^n\mathrm{d}x \tag{28.1}$$

由 (1) 可知, $\int_a^b \left|x-\frac{a+b}{2}\right|^n \mathrm{d}x=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{2^n(n+1)}$, 所以

$$\int_a^b \left|x=\frac{1}{2}\right|^n \mathrm{d}x=\frac{1}{2^n(n+1)}$$

将其代入上述式(28.1)中, 得 $1 \leqslant |f(\xi)| \int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right|^n \mathrm{d}x=\frac{|f(\xi)|}{2^n(n+1)}$. 所以 $|f(\xi)| \geqslant 2^n(n+1)$, 又因为 $\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)| \geqslant |f(\xi)|$. 所以

$$\max_{x\in[0,1]}|f(x)| \geqslant 2^n(n+1)$$

八、 证明: $x \to a$ 时 $f(x,y)$ 一致收敛于 $\varphi(y)$ 的充要条件是对任意趋近于 a 的数列 $\{x_n\}$, $f(x_n,y)$ 一致收敛于 $\varphi(y)$.

证明: (必要性) 当 $x \to a$ 时, $f(x,y)$ 关于 y 在 I 上一致收敛于 $\phi(y)$, 则对 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $|x-a|<\delta$ 时, 对一切 $y\in I$, 有

$$|f(x,y)-\phi(y)|<\varepsilon \tag{28.2}$$

若 $\{x_n\}$ 为任一收敛于 a 的点列, 则对上述 $\delta>0$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时, 有 $|x_n-a|<\delta$, 从而对 $\forall y\in I$, 有 $|f(x_n,y)-\phi(y)|<\varepsilon$. 所以函数列 $\{f(x_n,y)\}$ 在区间 I 上均一致收敛于 $\phi(y)$, 必要性得证!

(充分性) 利用反证法, 假设有点列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 且 $x_n\neq a$, 但是函数列 $\{f(x_n,y)\}$ 在区间 I 上收敛于 $\phi(y)$ 但非一致收敛, 则 $\exists\varepsilon_0>0$, 自然数列 $\{n_k\}$ 以及 I 中点列 $\{y_k\}$, 使得 $n_1<n_2<\cdots$ 且

$$\left|f\left(x_{n_k},y_k\right)-\phi\left(y_k\right)\right| \geqslant \varepsilon_0 \tag{28.3}$$

且 $\left\{x_{n_k}\right\}$ 为点列 $\{x_n\}$ 的子列, 显然有 $x_{n_k}\to a, (k\to+\infty)$. 由式(28.3)可以说明：在点 $x=a$ 的任一邻域内部有点 $x=x_{n_k}\neq a$ 以及相应的 $y=y_k\in I$, 使得对 $\varepsilon_0\geqslant\varepsilon>0$, 不等式式(28.2)不能成立, 故当 $x\to a$ 时, $f(x,y)$ 关于 y 在区间 I 上一致收敛于 $\phi(y)$, 则充分性得证!

九、 计算

$$I=\iint_{\Sigma} 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 Σ 是由 $z=\mathrm{e}^y\ (0\leqslant y\leqslant a)$ 绕 z 轴旋转一周生成的曲面, 取下侧.

解: 因为 Σ 是 $z=\mathrm{e}^y,(0\leqslant y\leqslant a)$ 绕 z 轴旋转一周所得曲面. 由旋转曲面公式可知,Σ 的方程为 $z=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}$, 其中 $x^2+y^2\leqslant a^2$, 取下侧, 补面：$\Sigma_1:\begin{cases} z=\mathrm{e}^a \\ x^2+y^2\leqslant a^2 \end{cases}$ 取上侧. 记作 Σ 与 Σ_1 所围成的是封闭曲面, 方向朝外, 记作它们所围立体区域为 Ω. 由 Gauss 公式可知,

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\Sigma+\Sigma_1} 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(1-z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iiint_{\Omega}(4z+(-2z)+(-2z))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega}(0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0 \end{aligned}$$

再设：$D_{xy}=\left\{(x,y):x^2+y^2\leqslant a^2\right\}$, 又因为

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{\Sigma_1} 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(1-z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{\Sigma_1}\left(1-(\mathrm{e}^a)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\left(1-(\mathrm{e}^a)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \left(1-\mathrm{e}^{2a}\right)\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(1-\mathrm{e}^{2a}\right)\cdot\pi a^2=\pi a^2\left(1-\mathrm{e}^{2a}\right). \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \left(\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(1-z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \\ &= I_1-I_2=0-\pi a^2\left(1-\mathrm{e}^{2a}\right)=\pi a^2\left(\mathrm{e}^{2a}-1\right). \end{aligned}$$

东南大学 2025 年数学分析试卷

一、 求空间曲线

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$$

的切线, 其满足平行于平面 $x+2y=0$.

解: 平面 $\Pi: x+2y=0$ 的法向量为 $n_0=(1,2,0)$. 设空间曲线

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$$

上的一点为 $P(x_0,y_0,z_0)$, 平面 $x+y+z=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n_1}=(1,1,1)$; 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$, 则

$$F_x'(x,y,z)=2x, F_y'(x,y,z)=2y, F_z'(x,y,z)=-2z.$$

那么 $x^2+y^2-z^2=0$ 在 P 上的法向量为 $\boldsymbol{n_2}=(2x_0,2y_0,-2z_0)$, 因为

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x_0 & 2y_0 & -2z_0 \end{vmatrix} &= (-2z_0\boldsymbol{i}+2x_0\boldsymbol{j}+2y_0\boldsymbol{k})-(2x_0\boldsymbol{k}+2y_0\boldsymbol{i}-2z_0\boldsymbol{j}) \\ &= (-2z_0-2y_0)\boldsymbol{i}+(2x_0+2z_0)\boldsymbol{j}+(2y_0-2x_0)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

所以, 该点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线 L 的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(-z_0-y_0,x_0+z_0,y_0-x_0).$$

由于切线 L 平行于平面 $\Pi: x+2y=0$, 所以

$$\begin{aligned} 0=\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n_0} &= (-z_0-y_0,x_0+z_0,y_0-x_0)\cdot(1,2,0) \\ &= (-z_0-y_0)\cdot 1+(x_0+z_0)\cdot 2+(y_0-x_0)\cdot 0 \\ &= -z_0-y_0+2x_0+2z_0=2x_0-y_0+z_0 \end{aligned}$$

又因为 $P(x_0,y_0,z_0)$ 满足空间曲线 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$ 表达式, 联立

$$\begin{cases} x_0+y_0+z_0=0 \\ x_0^2+y_0^2=z_0^2 \\ 2x_0-y_0+z_0=0 \end{cases}$$

由 $\begin{cases} x_0+y_0+z_0=0 \\ 2x_0-y_0+z_0=0 \end{cases}$ 可知 $x_0=-\dfrac{2}{3}z_0$, 进而 $y_0=-\dfrac{1}{3}z_0$, 将其代入 ${x_0}^2+{y_0}^2={z_0}^2$ 中, 可得

$$\left(-\frac{2}{3}z_0\right)^2+\left(-\frac{1}{3}z_0\right)^2={z_0}^2 \Rightarrow \frac{5}{9}{z_0}^2={z_0}^2,$$

只有 $z_0=0$ 成立, 进而所求切点为 $P(0,0,0)$.

二、 (本题未完整知晓)$z=z(x,y)$ 是由方程 $\cdots-\displaystyle\int_y^{-\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-\cdots=0$ 确定, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解:

三、 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2(x-1)^n$ 的收敛域与和函数.

解: 令 $u_n(x)=(-1)^{n-1}n^2(x-1)^n$, 则

$$\begin{aligned}\rho(x)&=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^n(n+1)^2(x-1)^{n+1}}{(-1)^{n-1}n^2(x-1)^n}\right|\\&=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\cdot|x-1|\right]=|x-1|<1\end{aligned}$$

解得 $0<x<2$, 当 $x=0$ 时, 代入原幂级数可得 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2$ 发散;当 $x=2$ 时, 代入原幂级数可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2$ 发散. 故收敛域为 $x\in(0,2)$, 注意到

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}nt^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(nt^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}n^2t^{n-1}=\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}n^2t^n$$
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(t^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}=\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}nt^n$$

由等比数列求和可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^n=\dfrac{t}{1-t}$, 所以

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^n\right)'=\left(\frac{t}{1-t}\right)'=\frac{1\cdot(1-t)-t\cdot(-1)}{(1-t)^2}=\frac{1}{(1-t)^2}.$$

所以 $\dfrac{1}{t}\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^n=\dfrac{1}{(1-t)^2}$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^n=\dfrac{t}{(1-t)^2}$, 求导

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}nt^n\right)'=\left(\frac{t}{(1-t)^2}\right)'=\frac{(1-t)^2-t\cdot2(1-t)(-1)}{(1-t)^4}=\frac{1+t}{(1-t)^3}.$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2t^n=\dfrac{(1+t)t}{(1-t)^3}$, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2(x-1)^n=-\frac{(1+(1-x))(1-x)}{(1-(1-x))^3}=-\frac{(x-2)(x-1)}{x^3}$$

其中收敛域为 $x\in(0,2)$,

四、 求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\ln2}-\dfrac{1}{2^x-1}, & x\neq0;\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$ 在 $x=0$ 的导数.

解: 利用导数定义以及 L'Hôpital 法则可知

$$\begin{aligned}f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x\ln2}-\frac{1}{2^x-1}-\frac{1}{2}}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2\left(2^x-1\right)-2(x\ln2)-(x\ln2)\left(2^x-1\right)}{2(x\ln2)\left(2^x-1\right)x}\\&=\frac{1}{2\ln^2 2}\lim_{x\to0}\frac{2\left(2^x-1\right)-2(x\ln2)-(x\ln2)\left(2^x-1\right)}{x^3}\\&=\frac{1}{2\ln^2 2}\lim_{x\to0}\frac{2\cdot2^x\ln2-2\ln2-(\ln2)\left[(2^x-1)+x\cdot2^x\ln2\right]}{3x^2}\\&=\frac{1}{2\ln2}\lim_{x\to0}\frac{2\cdot2^x-1-2^x-x\cdot2^x\ln2}{3x^2}\\&=\frac{1}{2\ln2}\lim_{x\to0}\frac{2\cdot2^x\ln2-2^x\ln2-(2^x+x\cdot2^x\ln2)\ln2}{6x}\\&=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{2^x x\ln2}{6x}=-\frac{\ln2}{12}\lim_{x\to0}2^x=-\frac{\ln2}{12}.\end{aligned}$$

所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的导数为 $f'(0)=-\frac{\ln 2}{12}$,

五、 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 且 $f(x)\neq 0$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 满足

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{1}{a-\xi}+\frac{1}{b-\xi}.$$

解: 令 $F(x)=f(x)(x-a)(b-x)$, 则 $F(a)=F(b)=0$, 且

$$F'(x)=f'(x)(x-a)(b-x)+f(x)(b+a-2x).$$

由题设可知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 所以可由 Rolle 定理可知, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)(\xi-a)(b-\xi)+f(\xi)(b+a-2\xi)=0$$

则 $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{-2\xi+b+a}{(a-\xi)(b-\xi)}=\frac{1}{a-\xi}+\frac{1}{b-\xi}$, 得证!

六、 求 $\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$, L 是曲线 $(x-1)^2+y^2=r^2\ (r\neq 1)$, 取正向.

解: 令 $P(x,y)=-\frac{y}{x^2+4y^2}$, $Q(x,y)=\frac{x}{x^2+4y^2}$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+4y^2}\right)=\frac{\left(x^2+4y^2\right)-y\cdot 8y}{(x^2+4y^2)^2}=-\frac{x^2-4y^2}{(x^2+4y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+4y^2}\right)=\frac{1\cdot\left(x^2+4y^2\right)-x\cdot 2x}{(x^2+4y^2)^2}=-\frac{x^2-4y^2}{(x^2+4y^2)^2}$$

所以 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, 那么积分与路径无关, 但是要求 P,Q 满足一阶连续偏导.

(6-1) 当 $|r|<1$ 时, 显然 P,Q 在 $(x-1)^2+y^2\leqslant r^2,(r\neq 1)$ 所围区域 D 内有连续偏导数, 所以满足 Green 公式, 可得 $\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}=0$,

(6-2) 当 $|r|>1$ 时, $(x-1)^2+y^2\leqslant r^2,(r\neq 1)$ 所围区域 D 内包含原点 $(0,0)$, 所以 P,Q 在区域 D 内有点没有连续偏导数, 不满足 Green 公式. 不能直接用 Green 公式, 补线: $l: x^2+4y^2=\varepsilon^2$, 其中 $\varepsilon>0$, 且 ε 足够小, 保证 l 包含在 L 所围区域, 方向取顺时针, 所以 $\oint_{L+l}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}$

$$\begin{aligned}\oint_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}&=\oint_{L+l}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}-\oint_l\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}\\&=0-\oint_l\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=-\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_l -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_\varepsilon}(1-(-1))\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\varepsilon^2}\int_{x^2+4y^2\leqslant\varepsilon^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\pi.\end{aligned}$$

即 $\oint_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\begin{cases}0,|r|<1\\ \pi,|r|>1\end{cases}$

七、 求 $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-2xyz$ 的最值, 其中 $x^2+y^2+z^2=4$.

解: 先对 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 因式分解, 因为

$$x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right),(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.$$

故 $(x+y)^3-3xy(x+y)=x^3+y^3$. 因此

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y)-3xyz.$$

又因为

$$(x+y)^3+z^3=(x+y+z)\left[(x+y)^2-(x+y)z+z^2\right]-3xy(x+y)-3xyz=-3(x+y+z)xy.$$

所以

$$\begin{aligned}x^3+y^3+z^3-3xyz&=(x+y+z)\left[(x+y)^2-(x+y)z+z^2\right]-3(x+y+z)xy\\&=(x+y+z)\left((x+y)^2-(x+y)z+z^2-3xy\right)\\&=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xz-yz-xy\right).\end{aligned}$$

即 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xz-yz-xy\right)$, 所以

$$f(x,y,z)=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xz-yz-xy\right),$$

则

$$\begin{aligned}f^2(x,y,z)&=(x+y+z)^2\left(x^2+y^2+z^2-xz-yz-xy\right)^2\\&=\left(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\right)\left(x^2+y^2+z^2-xz-yz-xy\right)^2\\&=(4+2xy+2yz+2zx)\left(x^2+y^2+z^2-xz-yz-xy\right)^2\\&=(4+2(xy+yz+zx))(4-(xz+yz+xy))^2.\end{aligned}$$

其中满足 $x^2+y^2+z^2=4$, 令 $t=xz+yz+xy$, 则

$$\begin{aligned}(4+2(xy+yz+zx))(4-(xz+yz+xy))^2&=(4+2t)(4-t)^2\\&\leqslant\left(\frac{4+2t+4-t+4-t}{3}\right)^3=4^3=64\end{aligned}$$

所以 $f(x,y,z)$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=4$ 下最大值为 8 . 根据对称性可知最小值为 -8 .

八、 求 $\iiint_\Omega |xyz|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由 $x+z=1, x-z=1, x+y=1, x-y=1, z=0$ 围成的区域.

解: 由题意可将三重积分化为三次积分, 可得

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega |xy|z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^1\int_{-x}^{1-x}\int_0^{1-x}|xy|z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\int_0^1|x|\mathrm{d}x\int_{-x}^{1-x}|y|\mathrm{d}y\int_0^{1-x}z\mathrm{d}z=\frac12\int_0^1\left(|x|(1-x)^2\right)\mathrm{d}x\int_{-x}^{1-x}|y|\mathrm{d}y\\&=\frac12\int_0^1\left(|x|(1-x)^2\right)\frac12\left[(1-x)^2-(-x)^2\right]\mathrm{d}x\\&=\frac14\int_0^1 x(1-x)^2\left[(1-x)^2-(-x)^2\right]\mathrm{d}x\\&=\frac14\int_0^1 x(1-x)^2(1-2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{240}.\end{aligned}$$

九、 设 $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\cos 2xy\mathrm{d}y$.

1. 证明: $2F'(x)+xF(x)=0$.
2. 求 $F(x)$.

解: (1) 首先记 $g(x,y)=\mathrm{e}^{-y^2}\cos(2xy)$, 显然 $g(x,y)$ 连续, 且关于 x 存在连续的偏导数, 同时

$$|g(x,y)|\leqslant\mathrm{e}^{-t^2},|g_x(x,y)|=\left|-2y\mathrm{e}^{-y^2}\sin(2xy)\right|\leqslant 2y\mathrm{e}^{-y^2}$$

而 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$ 与 $\displaystyle\int_0^{+\infty}2y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$ 均收敛, 所以 $\displaystyle\int_0^{+\infty}g(x,y)\mathrm{d}y$ 与 $\displaystyle\int_0^{+\infty}g_x(x,y)\mathrm{d}t$ 均关于 $x\in(-\infty,+\infty)$ 一致收敛, 于是 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, 且

$$\begin{aligned}F'(x)&=\int_0^{+\infty}g_x(x,y)\mathrm{d}y=-\int_0^{+\infty}2t\mathrm{e}^{-y^2}\sin(2xy)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\sin(2xy)\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-t^2}\right)\\&=\mathrm{e}^{-y^2}\sin(2xy)\Big|_0^{+\infty}-2x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\cos(2xy)\mathrm{d}y=-2xF(x)\end{aligned}$$

从而 $\left[F(x)\mathrm{e}^{x^2}\right]'=\left[F'(x)+2xF(x)\right]\mathrm{e}^{x^2}=0$,

(2) 由 (1) 得 $F(x)\mathrm{e}^{x^2}$ 为常值函数, 再结合 Euler-Possion 积分就有

$$F(x)\mathrm{e}^{x^2}=F(0)\mathrm{e}^{0^2}=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

即 $F(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}, x\in(-\infty,+\infty)$.

十、 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$, 证明: $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证明: 由于 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 所以对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$, 对任意的 $x',x''\in[a,+\infty)$, 只要 $\left|x'-x''\right|<\delta_1$, 就有

$$\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

另外, 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$, 所以对上述 $\varepsilon>0$, 存在 $M>a$, 使得 $x\geqslant M$ 时, 有

$$|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是对任意的 $x',x''\in[M,+\infty)$, 只要 $\left|x'-x''\right|<\delta_1$, 就有

$$\left|g\left(x'\right)-g\left(x''\right)\right|\leqslant\left|g\left(x'\right)-f\left(x'\right)\right|+\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|+\left|f\left(x''\right)-g\left(x''\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon. \tag{29.1}$$

另外, 由于 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 自然在 $[a,M+1]$ 上也连续, 从而一致连续, 所以对上述的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_2>0$, 使得对任意的 $x',x''\in[a,M+1]$, 只要 $\left|x'-x''\right|<\delta_2$, 就有

$$\left|g\left(x'\right)-g\left(x''\right)\right|<\varepsilon. \tag{29.2}$$

现在取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,1\}$, 则对任意的 $x',x''\in[a,+\infty)$, 当 $\left|x'-x''\right|<\delta$ 时, 必有 x',x'' 同时属于 $[a,M+1]$ 或者同时属于 $[M,+\infty)$, 进而结合式(29.1)与式(29.2)可知总有

$$\left|g\left(x'\right)-g\left(x''\right)\right|<\varepsilon.$$

这说明 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

十一、 求 $\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是 $x^2+z^2=2z$ 被 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所截取的部分.

解: 记所求曲面积分为 I, 由于 Σ 关于 yz,xz 平面均对称, 且在对称点处被积函数 z 取值相同, 于是若记 Σ_1 为 Σ 在第一卦限的部分, 则

$$I=4\iint_{\Sigma_1}z\mathrm{d}S$$

由于 $\Sigma_1: z=1+\sqrt{1-x^2},(x,y)\in D$, 其中 $D: 2x^2+y^2\leqslant2\sqrt{x^2+y^2}, x,y\geqslant0$, 于是

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

从而

$$I=4\iint_{\Sigma_1}z\mathrm{d}S=4\iint_D\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint_D\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

作极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 其将 D 对应为

$$D':\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], 0\leqslant r\leqslant\frac{2}{1+\cos^2\theta}$$

所以

$$
\begin{aligned}
I &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{2}{1+\cos^2\theta}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-r^2\cos^2\theta}}+1\right)\cdot r\mathrm{d}r \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2\theta}\sqrt{1-r^2\cos^2\theta}\Big|_{\frac{2}{1+\cos^2\theta}}^{0} \mathrm{d}\theta + 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{(1+\cos^2\theta)^2}\mathrm{d}\theta \\
&= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos^2\theta} + 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\cos^2\theta)^2} \\
&= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\tan\theta)}{\sec^2\theta+1} + 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta}{(\sec^2\theta+1)^2}\mathrm{d}(\tan\theta) \\
&= 8\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2} + 8\int_0^{+\infty} \frac{(t^2+2)-1}{(t^2+2)^2}\mathrm{d}t \quad (\tan\theta = t) \\
&= 2\cdot 8\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty} - 8\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+2)^2} \\
&= 8\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}\sec^2 u}{4\sec^4 u}\mathrm{d}u \quad (t = \sqrt{2}\tan u) \\
&= 4\sqrt{2}\pi - 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\mathrm{d}u \\
&= 4\sqrt{2}\pi - 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}\pi
\end{aligned}
$$

十二、 记 $u_n(x) = \dfrac{\ln(1+n^\alpha x)}{n^\beta}$, $x>0, \alpha, \beta>0$.

1. 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的敛散性.
2. 在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛的基础上, 讨论其一致收敛性.
3. 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的可导性.

解: (1) 当 $\beta>1$ 时, 任取 $r\in(1,\beta)$, 对任意的 $\alpha>0$ 及 $x\in(0,+\infty)$, 有

$$
\lim_{n\to\infty} n^r u_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n^\alpha x)}{n^{\beta-r}} = 0.
$$

由比较原则可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛. 而若 $\beta\leqslant 1$, 对任意的 $\alpha>0$ 及 $x\in(0,+\infty)$, 当 n 充分大时, 有 $u_n(x)\geqslant\dfrac{1}{n^\beta}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\beta}$ 发散, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 也发散. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 仅在 $\beta>1$ 时收敛.

(2) 首先对任意的正整数 n 及 $\alpha>0, \beta>1$, 有 $\sup\limits_{x\in(0,+\infty)} u_n(x) = +\infty$, 因此 $\{u_n(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛于 0 , 自然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上也不一致收敛. 而任取 $x_0>0$, 当 $x\in(0,x_0]$ 时, 有

$$
0<u_n(x)\leqslant\frac{\ln(1+n^\alpha x_0)}{n^\beta}.
$$

由 (1) 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(1+n^\alpha x_0)}{n^\beta}$ 收敛, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在任意的 $(0,x_0]\,(x_0>0)$ 上一致收敛.

(3) 设 $\alpha>0, \beta>1$, 注意到 $u_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导, 且

$$
u_n'(x) = \frac{n^\alpha}{n^\beta(1+n^\alpha x)}.
$$

任取 $[a,b]\subseteq(0,+\infty)$, 当 $x\in[a,b]$, 有 $0<u_n'(x)\leqslant\dfrac{n^\alpha}{n^\beta\left(1+n^\alpha a\right)}$, 其中

$$\lim_{n\to\infty}n^\beta\cdot\frac{n^\alpha}{n^\beta\left(1+n^\alpha a\right)}=\frac{1}{a}.$$

由数项级数的比较原则可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^\alpha}{n^\beta\left(1+n^\alpha a\right)}$ 收敛, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 也就是在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛, 再结合 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上收敛可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导, 且导数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$.

十三、 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为连续函数, f 无不动点, 记

$$f_n(x)=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{ 个}}(x)$$

为 $f(x)$ 的 n 次复合, 数列 $\{f_n(x)\}$ 是否有界?

证明: 因为 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为连续函数, f 无不动点, 即对 $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)\neq x$, 考虑函数 $g(x)=f(x)-x$, $g(x)$ 也是连续函数, 且 $g(x)$ 恒不为零, 由连续函数的介值定理可知, 要么 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒大于零, 要么在 $\mathbb{R}$ 上恒小于零, 不妨设 $g(x)=f(x)-x>0$, 即 $f(x)>x,(\forall x\in\mathbb{R})$, 因为 $f(x)>x,(\forall x\in\mathbb{R})$, 所以 $f_2(x)=f(f(x))>f(x)$, 因为 $f(x)>x$, 且 f 是严格单调递增的, 则若 $x_1-x_2<0$, 则

$$f\left(x_1\right)-x_1>0, f\left(x_2\right)-x_2>0, f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)>0.$$

由 $f_2(x)=f(f(x))>f(x), f(x)>x$ 可得 $f_2(x)>f(x)>x$, 通过数学归纳法可知,$f_n(x)>f_{n-1}(x)>\cdots>f(x)>x$. 所以, 对于任意的 $M>0$, 取 $x_0=M$, 由于

$$f_n\left(x_0\right)>f_{n-1}\left(x_0\right)>\cdots>f\left(x_0\right)>x_0=M$$

说明当 n 足够大时, $f_n\left(x_0\right)$ 可以大于任意给定的 M_0, 即数列 $[f_n(x)]$ 无界.