Unidad 2: Introducción a la probabilidad

ESTADÍSTICA *en* LA PRÁCTICA (OCEANWIDE SEAFOOD, pág. 149)

La probabilidad es una medida numérica de la posibilidad de que un evento ocurra. Se utiliza como una medida del grado de incertidumbre asociado con un evento.

La probabilidad toma valores en el rango de 0 a 1. Una probabilidad cercana a 0 indica que es poco probable que un evento ocurra, una probabilidad cercana a 1 indica que es casi seguro que un evento se produzca. Valores entre 0 y 1 representan diferentes grados de posibilidad de que un evento ocurra. Por ejemplo, si la probabilidad de lluvia para mañana es “casi nula”, significa que la posibilidad de lluvia es muy baja. Sin embargo, una probabilidad de 0.90 de lluvia, es probable que llueva. Una medida de 0.50 indica que la probabilidad de que llueva es igual a la de que no llueva.

Un experimento es un proceso que genera varios posibles resultados. En cada repetición del experimento ocurre sólo uno de los posibles resultados.

Experimento	Resultados del experimento
Lanzar una moneda	Cara, cruz
Seleccionar una parte para inspeccionarla	Defectuosa, sin defectos
Hacer una llamada de ventas	Comprar, no comprar
Arrojar un dado	1, 2, 3, 4, 5, 6
Jugar un partido de futbol americano	Ganar, perder, empatar

El espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento. Si S denota el espacio muestral: S={cara, cruz}, S={defectuosa, sin defectos}, S={1, 2, 3, 4, 5, 6}, etc.

Unidad 2: Introducción a la probabilidad

Reglas de Conteo

Se lanzan dos monedas. EL experimento consiste de dos pasos en el cual el paso 1 es el lanzamiento de la primera moneda y el paso 2 de la segunda. Si S denota "sello" y A "águila", (S, S) indica sello en la primera y sello en la segunda. Así, el espacio muestral (S) para el experimento consiste de 4 posibles resultados:

S={(*S*, *S*), (*S*, *A*), (*A*, *S*), (*A*, *A*)}

Si el experimento consiste de una secuencia de k pasos con n_1 resultados posibles en el primero, n_2 en el segundo, etc., el total de resultados está dado por $(n_1)\ (n_2) \ldots (n_k)$.

Reglas de Conteo para combinaciones

Si el experimento consiste en seleccionar n objetos de de N objetos donde $(n < N)$, el número de resultados (combinaciones, donde el orden de selección no importa) posibles es

$$C_n^N = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Si el experimento consiste en seleccionan n objetos de un conjunto de N objetos y el orden de selección es importante, el número de resultados (permutaciones) posibles está dado por

$$P_n^N = n!\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Unidad 2: Introducción a la probabilidad

Asignación de probabilidades

Al asignar probabilidades a los resultados se deben cumplir dos requisitos básicos:

1: La probabilidad asignada P al resultado debe estar en el intervalo [0,1]. Si E_i el i-ésimo resultado del experimento y $P(E_i)$ su probabilidad, entonces

$$1 \geq P(E_i) \geq 0 \text{ para toda } i$$

2: La suma de las probabilidades para todos los resultados del experimento debe ser la unidad:

$$P(E_1) + \mathrm{P}(\mathrm{E}_2) + \cdots + P(E_n) = 1$$

Existen 3 métodos para asignar probabilidades: clásico, frecuencia relativa y subjetivo.

El método clásico es apropiado cuando todos los resultados son equiprobables. Si n resultados son posibles, se asigna una probabilidad de $1/n$ a cada resultado experimental.

El método de frecuencia relativa es apropiado cuando se dispone de datos para estimar la frecuencia en que ocurrirá un resultado si el experimento se repite muchas veces.

El método subjetivo es apropiado cuando no se puede asumir equiprobabilidad, no se dispone de datos, y no queda mas que apoyarse en nuestra intuición. Utilizando este método, distintas personas asignarán probabilidades diferentes al mismo resultado experimental. Las mejores asignaciones se obtienen al combinar los tres métodos.

Ejercicios. Resuelva las aplicaciones pares de la pág. 159.

Unidad 2: Introducción a la probabilidad

Ejemplo. La CFE tiene planeado construir la presa hidroeléctrica Las Cruces. El proyecto se divide en dos etapas : 1) diseño y 2) construcción. La gerencia estima que la duración posible de la etapa de diseño pueden ser 2, 3 o 4 meses y la duración de la construcción de 6, 7 u 8 meses. La gerencia ha fijado una meta de 10 meses para completar todo el proyecto. ¿Cuántas posibles duraciones pudiera tener el proyecto? (n_1=3) (n_2=3)=9. La gerencia optó por emplear el método de frecuencia relativa puesto que el proyecto actual era muy parecido a los 40 anteriores. Por ejemplo, la etapa 1 completada en 2 meses y la 2 completada en 6 meses ocurrió 6 veces en los últimos 40 proyectos.

Duración (meses)					
Etapa 1 Diseño	Etapa 2 Construcción	Punto de muestreo	Duración del proyecto	Número de proyectos anteriores con estos tiempos de terminación	Probabilidad del punto de muestreo
2	6	(2, 6)	8 meses	6	$P(2, 6) = 6/40 = 0.15$
2	7	(2, 7)	9 meses	6	$P(2, 7) = 6/40 = 0.15$
2	8	(2, 8)	10 meses	2	$P(2, 8) = 2/40 = 0.05$
3	6	(3, 6)	9 meses	4	$P(3, 6) = 4/40 = 0.10$
3	7	(3, 7)	10 meses	8	$P(3, 7) = 8/40 = 0.20$
3	8	(3, 8)	11 meses	2	$P(3, 8) = 2/40 = 0.05$
4	6	(4, 6)	10 meses	2	$P(4, 6) = 2/40 = 0.05$
4	7	(4, 7)	11 meses	4	$P(4, 7) = 4/40 = 0.10$
4	8	(4, 8)	12 meses	6	$P(4, 8) = 6/40 = 0.15$
			Total	40	Total 1.00

Un evento es una colección de puntos de la muestra. Si el evento C="el proyecto dura 10 meses o menos", entonces C={(2, 6), (2, 7), (2, 8), (3, 6), (3, 7), (4, 6)}. El evento C ocurre si cualquiera de estos seis puntos de la muestra aparece como el resultado experimental.

La probabilidad de cualquier evento es igual a la suma de las probabilidades de los puntos de la muestra del evento.

Así, la probabilidad de que el proyecto tarde en completarse 10 meses o menos, P(C), está dada por

$$P(C)=P(2,6)+P(2,7)+P(2,8)+P(3,6)+P(3,7)+P(4,6)=0.15+0.15+0.05+0.10+0.20+0.05=0.70$$

Ejercicios. Resuelva las aplicaciones pares de la pág. 163.

Unidad 2: Introducción a la probabilidad

Complemento de un evento

Dado un evento A, el complemento de A es el evento que consta de todos los puntos de la muestra que no están en A, y se denota por A^c. Así,

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

Un gerente de ventas establece que 80% de los contactos de clientes nuevos no generan ninguna venta. Al hacer que A denote el evento "se realiza una venta" y Ac de que "no se realice", el gerente establece que $P(A^c) = 0.80$. Entonces, la probabilidad de que un contacto de un cliente nueve genere una venta es,

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.80 = 0.20.$$

La unión de A y B es el evento que contiene todos los puntos de la muestra que pertenecen a A o B o ambos. La unión se denota mediante A∪B.

Dados dos eventos A y B, la intersección de A y B es el evento que contiene los puntos de la muestra que pertenecen a tanto a A como a B. La intersección se denota por medio de A∩B.

Ley de la adición

La probabilidad de la unión de dos eventos A y B, P(A∪B) está dada por P(A∪B)=P(A)+P(B)-P(A∩B).

Dos eventos son mutuamente excluyentes si no tienen puntos de la muestra en común. En este caso P(A∩B)=0.

Ejercicio. Resuelva las aplicaciones pares de la pág. 169.

Unidad 2: Introducción a la probabilidad

Probabilidad condicional

A veces, la probabilidad de un evento es influida por la ocurrencia de otro. Suponga que se tiene un evento A con probabilidad $P(A)$ y se sabe que un evento relacionado B, ya ocurrió. Esta nueva información se puede aprovechar para calcular la nueva probabilidad del evento A, denominada como probabilidad condicional, y denotada por $P(A|B)$, que indica la probabilidad del evento A dado que B ya ocurrió.

Considere los ascensos de oficiales hombres y mujeres de una fuerza policiaca metropolitana en el este de EU. La policía local está formada por 1,200 oficiales: 960 hombres y 240 mujeres. Durante los últimos dos años fueron promovidos 324 oficiales de policía:

	Hombres	Mujeres	Total
Promovido(a)	288	36	324
No promovido(a)	672	204	876
Total	960	240	1200

Un comité de mujeres policía acusó al departamento por discriminación. La comandancia argumentó que el número relativamente bajo de ascensos de las oficiales femeninas no se debe a discriminación, sino de que hay relativamente pocos miembros que son mujeres. Utilicemos la probabilidad condicional para analizar tal acusación.

Sean los eventos: $M =$ el oficial es hombre; $W =$ el oficial es mujer; $A =$ el oficial promovido; $A^c =$ el oficial no es promovido. Así.

Probabilidad de un hombre sea promovido es $P(M \cap A) = 288/1200 = 0.24$.

Probabilidad de que un hombre no se promovido es $P(M \cap A^c) = 672/1200 = 0.56$.

Probabilidad de una mujer sea promovida es $P(W \cap A) = 36/1200 = 0.03$.

Probabilidad de que una mujer no se promovida es $P(W \cap A^c) = 204/1200 = 0.17$.

Unidad 2: Introducción a la probabilidad

Esta información se puede presentar en una tabla de probabilidad conjunta:

Las probabilidades conjuntas aparecen en el cuerpo de la tabla

	Hombres (M)	Mujeres (W)	Total
Promovido (A)	0.24	0.03	0.27
No promovido (A^c)	0.56	0.17	0.73
Total	0.80	0.20	1.00

Las probabilidades marginales aparecen en los bordes de la tabla.

Los valores marginales de esta tabla proporcionan las probabilidades marginales de ambas variables (género y estatus). Esto es, $P(M) = 0.80;\ P(W) = 0.20;$ y $P(A) = 0.27; P(A^c) = 0.73$. Las probabilidades marginales se encuentran al sumar las probabilidades conjuntas en la fila o columna correspondiente. Así, la probabilidad marginal de ser promovido es $P(A) = P(M \cap A) + P(W \cap A) = 0.24 + 0.03 = 0.27$, etc. Así, la probabilidad de que un oficial sea promovido debido a que es hombre es $P(A \mid M) = 288/960 = 0.24/0.80 = 0.30$.

Igualmente, la probabilidad de que un oficial sea promovido debido a que es mujer es $P(A \mid W) = 36/240 = 0.03/0.20 = 0.15$. Estos valores apoyan el argumento presentado por los policías mujeres. Resumiendo,

PROBABILIDAD CONDICIONAL

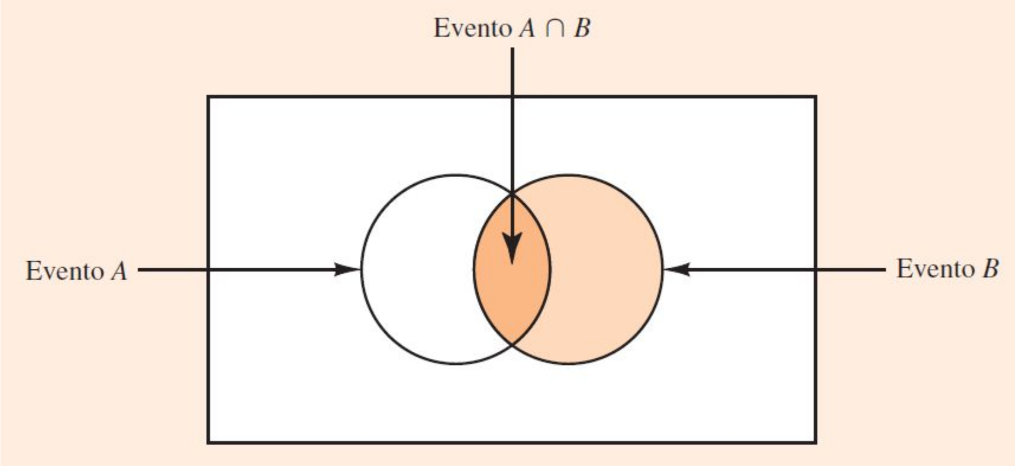
$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{4.7}$$

o

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{4.8}$$

Unidad 2: Introducción a la probabilidad

De manera gráfica, $P(A|B)$ representa la fracción de B cubierta por $A \cap B$.



Eventos independientes

En el ejemplo anterior, la probabilidad de ser promovido depende de que el oficial sea hombre, puesto que $P(A \mid M) \neq P(A)$. Así, A y M son eventos dependientes. Si ocurriera que $P(A \mid M) = P(A)$, diríamos que A y M son eventos independientes. Esta situación conduce a la definición siguiente de la independencia de dos eventos:

EVENTOS INDEPENDIENTES

Dos eventos A y B son independientes si

$$P(A \mid B) = P(A) \quad \textbf{(4.9)}$$

o

$$P(B \mid A) = P(B) \quad \textbf{(4.10)}$$

De lo contrario, los eventos son dependientes.

Unidad 2: Introducción a la probabilidad

Ley de la multiplicación

Mientras que la ley aditiva de la probabilidad se utiliza para calcular la probabilidad de la unión de dos eventos, la ley de la multiplicación se utiliza para calcular la probabilidad de la intersección de dos eventos. Esta última ley se basa en la definición de la probabilidad condicional. Con ayuda de las ecuaciones (4.7) y (4.8) y calculando $P(A \cap B)$, se obtiene la ley de la multiplicación.

LEY DE LA MULTIPLICACIÓN

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B) \tag{4.11}$$

o

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) \tag{4.12}$$

El 84% de las familias de un vecindario tiene una suscripción de periódico. Sean los eventos: $D =$ una familia se suscribe a la edición diaria, $P(D)$=0.84. Además, la probabilidad de que una familia ya suscrita también adquiera la edición dominical (S) es de 0.75; es decir, $P(S|D) = 0.75$. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia se suscriba tanto a las ediciones dominicales como a las ediciones diarias del periódico, $P(S \cap D)$?

$$P(S \cap D) = P(D)P(S|D) = 0.84(0.75) = 0.63$$

Unidad 2: Introducción a la probabilidad

Si los eventos involucrados son independientes, la ley de la multiplicación se simplifica: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

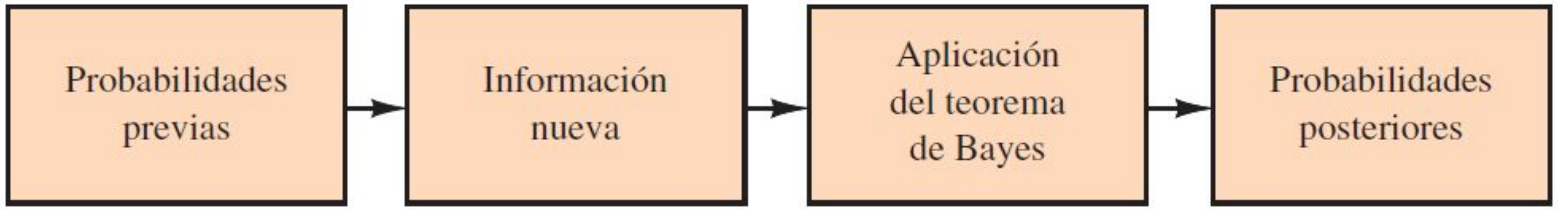
La expresión anterior proporciona otra manera de determinar si A y B son independientes. Es decir, si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, entonces A y B son independientes; si $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, entonces A y B son dependientes.

Un gerente de estaciones de servicio sabe que el 80% de sus clientes usan tarjeta de crédito cuando compra gasolina. ¿Cuál es la probabilidad de que los siguientes dos clientes que compren gasolina usen tarjeta de crédito? Si A= el primer cliente usa tarjeta, y B= el segundo cliente usa tarjeta, se desea calcular $P(A \cap B)$. Suponiendo que A y B son eventos independientes, $P(A \cap B) = P(A)P(B) = (0.80)(0.80) = 0.64$

Ejercicios. Resuelva las aplicaciones pares a partir de la pág. 176.

Teorema de Bayes

En ocasiones se obtiene información nueva sobre eventos desde un muestreo, un informe especial o una prueba de productos. Con esta información podemos actualizar los valores de probabilidad previos mediante el cálculo de las probabilidades a posteriori aplicando el teorema de Bayes.



Unidad 2: Introducción a la probabilidad

Con las probabilidades previas (a priori) $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_n)$ y las probabilidades condicionales apropiadas $P(B|A_1)$, $P(B|A_2)$, . . . , $P(B|A_n)$, el Teorema de Bayes calcula la probabilidad a posteriori $P(A_i|B)$ de los eventos A_1, A_2,...,A_n cuya unión es el espacio muestral:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n)} \quad \textbf{(4.19)}$$

Ejemplo. Una empresa manufacturera compra refacciones a dos proveedores diferentes. Sea A_1= la refacción proviene del proveedor 1 y A_2= la refacción proviene del proveedor 2. En la actualidad, el 65% de las refacciones provienen del proveedor 1 y 35% del proveedor 2. Así, $P(A_1) = 0.65$ y $P(A_2) = 0.35$. La calidad de las refacciones está condicionada al proveedor:

	Porcentaje de refacciones en buen estado	Porcentaje de refacciones en mal estado
Proveedor 1	98	2
Proveedor 2	95	5

Sea G= refacción en buen estado y B= refacción en mal estado, entonces $P(G|A_1) = 0.98$; $P(B|A_1) = 0.02$ y $P(G|A_2) = 0.95$; $P(B|A_2) = 0.05$.

Dada la información de que la refacción esta defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que provenga del proveedor 1 y cuál de que provenga del proveedor 2?

Se desea calcular $P(A_1|B)$ y $P(A_2|B)$. Así, de 4.19:

Unidad 2: Introducción a la probabilidad

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} = \frac{(0.65)(0.02)}{(0.65)(0.02) + (0.35)(0.05)} = \frac{0.013}{0.0305} = 0.4262$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} = \frac{(0.35)(0.05)}{(0.65)(0.02) + (0.35)(0.05)} = \frac{0.0175}{0.0305} = 0.5738$$

Ejercicios. Resuelva las aplicaciones pares a partir de la pág. 183 y los ejercicios complementarios pares de la pág. 186.