Nombre y apellidos: Arnau Gonzalez Almirall (M21) y Miriam de Juan Borrás (M22)
Fecha: 09/01/24

ACTIVIDAD NO PRESENCIAL

Regulación de un servomecanismo de posición para controlar la posición de una bola sobre una viga

En la Figura 1 está representado el esquema de un servomecanismo de posición que controla la posición de una bola sobre una viga a partir del control del ángulo que forma la viga con el plano horizontal.

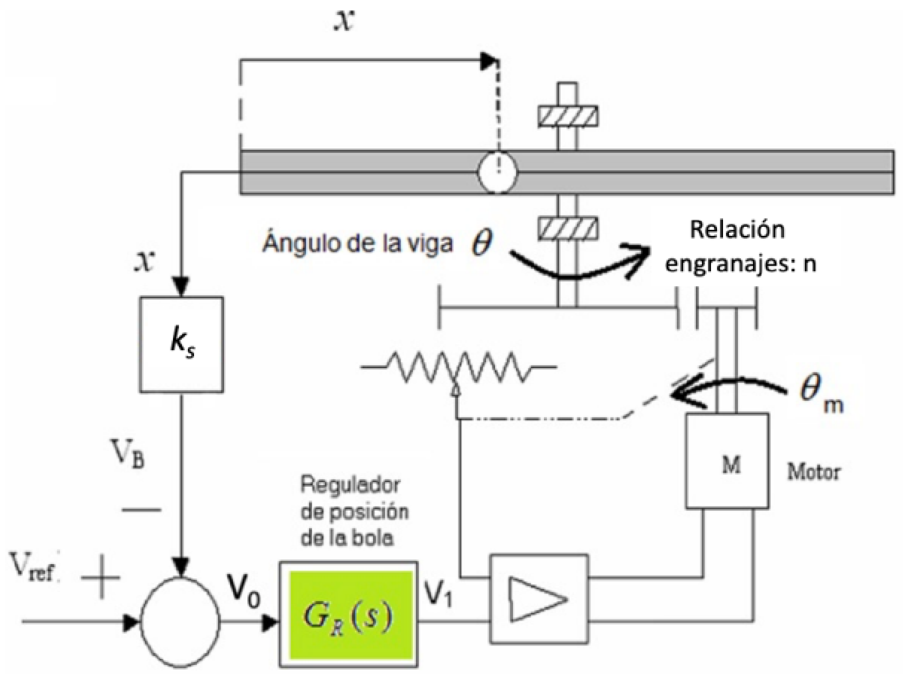


Figura 1. Esquema del servo de posición de la bola.

En este diagrama, la señal de entrada es V_{ref} y la señal de salida se considerará que es la tensión V_B generada por el sensor de posición de la bola, que es proporcional a la posición de la bola sobre la viga "*x*". La diferencia de estas dos señales será la entrada del regulador con función de transferencia $G_R(s)$. El principal objetivo de está actividad no presencial será diseñar el regulador del control de la posición de la bola $G_R(s)$, de tal forma que la respuesta del sistema, V_B, cumpla unas especificaciones determinadas.

1. Dados los siguientes valores del servomecanismo de posición que controla el ángulo que forma la viga con el plano horizontal:

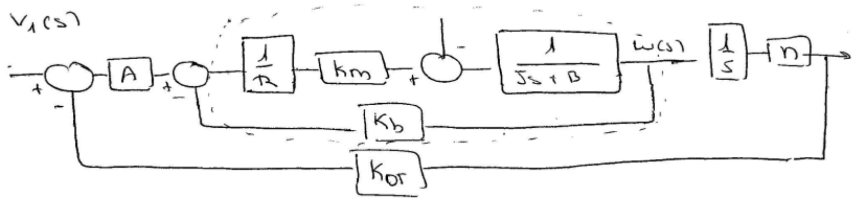
Amplificación a la entrada de la armadura del motor: A= 0.9
Resistencia de la armadura del motor R= 4.52 Ω
Inductancia de la armadura del motor: L= 1.46 mH
Constante del par motor: Km=92 mNm/A
Constante de fuerza contra-electromotriz: Kb = 92 mV/(rad/s)
Momento de inercia del motor: J1 = 6.41 10^{-5} Kg m^2
Coeficiente de fricción viscosa del motor B1 = 3 10^{-5} Nm/(rad/s)
Momento de inercia del eje de carga: J2 = 0.4 Kg m^2
Coeficiente de fricción viscosa del eje de carga B2 = 0.15 Nm/(rad/s)
Relación de reducción del tren de engranajes: n = 1/50

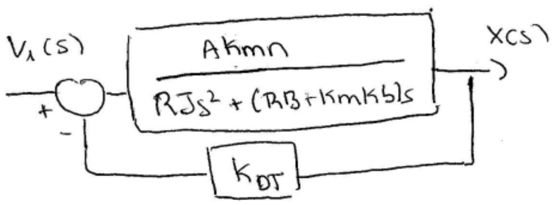
Teniendo en cuenta que para leer la posición angular del eje de salida del motor θ_m se utiliza un potenciómetro rotacional de 10 vueltas alimentado a ±12 V, dibuje el diagrama de bloques del servomecanismo de posición y compruebe que la función de transferencia que relaciona el ángulo del eje de carga θ (el que forma la viga con el plano horizontal) con la tensión de entrada al motor V1(s) es:

$$\frac{\theta(s)}{V_1(s)} = \frac{1.6349}{s^2 + 8.758\,s + 31.22}$$

$$Jeq \;=\; J1 \;+\; n^2 \cdot J2 \;=\; 2,241 \cdot 10^{-4} [kg \cdot m^2]$$
$$Beq \;=\; B1 \;+\; n^2 \cdot B2 \;=\; 9 \cdot 10^{-5} [kg \cdot m^2]$$
$$K_{DT} \;=\; \frac{12 \cdot 10}{2\pi}$$

DIAGRAMA DE BLOQUES





Ecuación obtenida

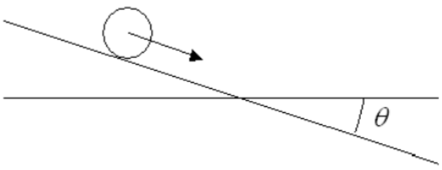
$$\frac{X(s)}{V1(s)} = \frac{A \cdot Km \cdot n}{RJs^2 + (RB + Km \cdot Kb)s + A \cdot Km \cdot Kb \cdot n}$$

Sustituimos los valores

$$\frac{X(s)}{V1(s)} = \frac{0.9 \cdot 92 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{50}}{(4.52 \cdot 2.241 \cdot 10^{-4}) \cdot s^2 + (4.52 \cdot 9 \cdot 10^{-5} + 92 \cdot 10^{-3} \cdot 92 \cdot 10^{-3}) \cdot s + 0.9 \cdot 92 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{12 \cdot 10}{2\pi} \cdot \frac{1}{50}}$$

$$\frac{X(s)}{V1(s)} = \frac{1.6348}{s^2 + 8.75s + 31.22}$$

2. La salida del servo de posición es el ángulo θ que forma la viga con el plano horizontal. Este ángulo es la variable que determina la aceleración de la bola. La dinámica de la bola sobre la viga se rige por la ecuación [1], tal como se muestra en la Figura 2.



$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{5}{7} \cdot g \cdot sen(\theta) \approx \frac{5}{7} \cdot g \cdot \theta \qquad [1]$$

Figura 2. La aceleración de la bola depende de θ

En la ecuación [1] se ha supuesto que el ángulo θ es pequeño y por tanto es válida la aproximación:

$$sen\theta \simeq \theta \ [2]$$

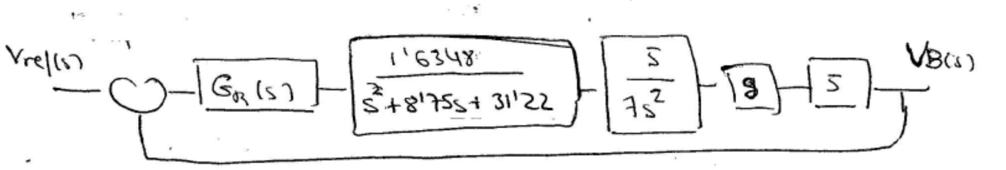
Determine el intervalo de valores del ángulo θ para el que se comete un error relativo inferior al 1% al emplear la aproximación [2], y la función de transferencia que relaciona el desplazamiento lineal de la bola *x(t)* con el ángulo que forma la viga con el plano horizontal θ utilizando la aproximación [2].

$$Error = \frac{|Valor\ real - Valor\ aproximado|}{Valor\ real} = \frac{|sin\theta - \theta|}{sin\theta} = 0,01$$

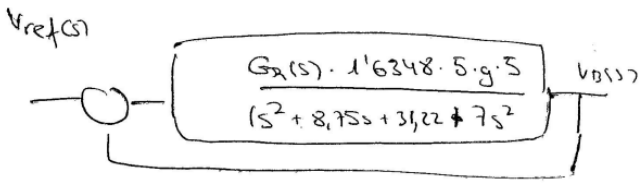
$$\theta = \pm\ 0,244\, rad = 14,12º$$

3. En un extremo de la viga se coloca un sensor de posición proporcional que relaciona la tensión V_B, con la posición de la bola $x(t)$, de tal forma que proporciona 5 V por cada metro de distancia entre el sensor y la bola.

a. Dibuje el diagrama de bloques del sistema realimentado completo que relaciona la entrada $V_{ref}(s)$ con la salida $V_B(s)$.



b. Compruebe que la función de transferencia en lazo $\frac{VB(s)}{V0(s)}$, suponiendo que se utiliza un regulador de acción proporcional con ganancia unitaria ($G_R(s)$= 1) es:



$$\frac{V_B(s)}{V_0(s)} = G_R(s)\frac{57.22}{s^2(s^2 + 8.758s + 31.22)}$$

$$\frac{VB(s)}{V0(s)} = G_R(s) \cdot \frac{1,6348}{s^2 + 8,75s + 31,22} \cdot \frac{5}{7s^2} \cdot 9,81 \cdot 5 = G_R(s) \cdot \frac{57,276}{s^2 \cdot (s^2 + 8,75s + 31,22)}$$

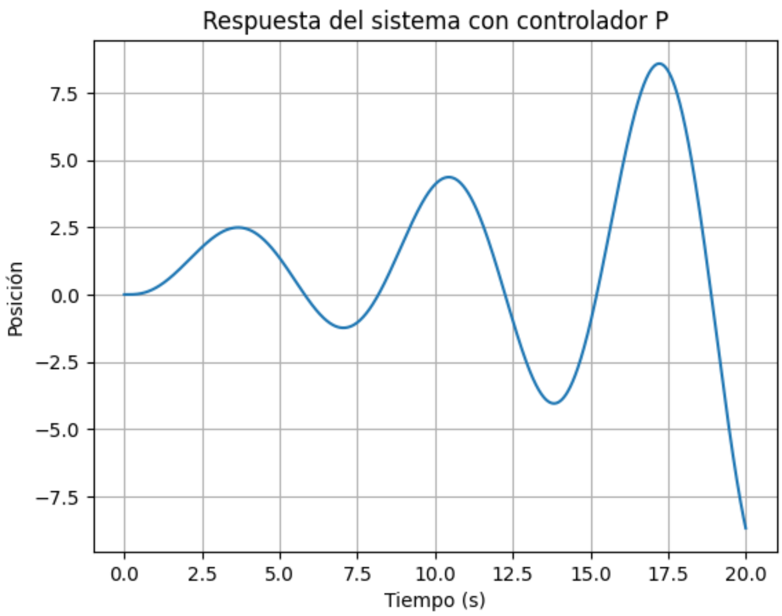
4. Elección de un regulador apropiado para estabilizar el sistema.

a. Demuestre que la respuesta del sistema en lazo cerrado, con entrada $V_{ref}(s)$ y salida $V_B(s)$, cuando se utiliza un regulador de acción proporcional, $G_R(s) = K_p$, es inestable (compruebe el resultado utilizando el modelo de Simulink adjunto[1]).

$$\frac{VB(s)}{V0(s)} = K_p \cdot \frac{57,276}{s^2 \cdot (s^2 + 8,75s + 31,22)}$$

Aplicamos → $1 + G_R(s) \cdot G_p(s) = 0 \rightarrow s^4 + 8,75 \cdot s^3 + 31,22 \cdot s^2 + 57,276 \cdot K_p = 0$

Vemos que falta el término s^1 , por lo que el sistema es inestable. Utilizando la simulación en el Simulink y suponiendo Kp=0.5, observamos la inestabilidad del sistema en la siguiente imagen:



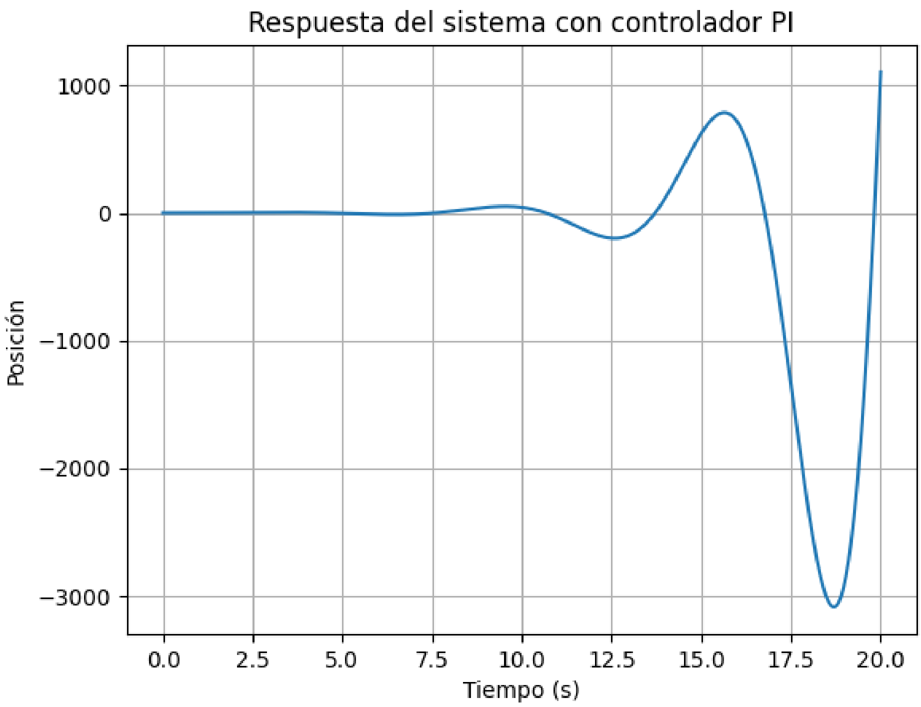
b. Demuestre que este sistema es inestable también si se emplea un regulador de acción proporcional-integral (compruebe el resultado utilizando Simulink[1]).

$$\frac{VB(s)}{V0(s)} = \frac{K_p \cdot s + Ki}{s} \cdot \frac{57{,}276}{s^2 \cdot (s^2 + 8{,}75s + 31{,}22)}$$

Aplicamos $\rightarrow 1 \ + \ G_R(s) \cdot G_p(s) \ = \ 0$

$$\rightarrow s^5 + 8,75 \cdot s^4 + 31,22 \cdot s^3 + 57,276 \cdot K_p \cdot s + 57,276 \cdot Ki \ = 0$$

En este caso, falta el término s^2 , por lo que el sistema es inestable. Utilizando la simulación en el Simulink y suponiendo Kp=0.5 y Ki = 0.5, observamos la inestabilidad del sistema en la siguiente imagen:

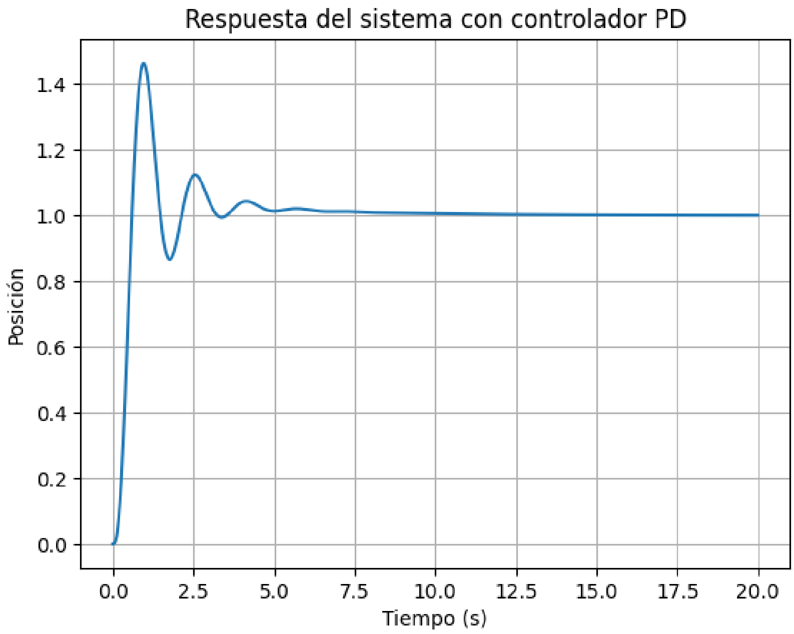


c. Justifique que empleando un regulador de acción proporcional-derivativa ("regulador PD") se puede estabilizar el sistema.

$$\frac{VB(s)}{V0(s)} = K_p + K_d \cdot s \cdot \frac{57,276}{s^2 \cdot (s^2 + 8,75s + 31,22)}$$

$$1 + G_R(s) \cdot G_p(s) = 0 \rightarrow s^4 + 8,75 \cdot s^3 + 31,22 \cdot s^2 + 57,276 \cdot K_d \cdot s + 57,276 \cdot K_p = 0$$

Ahora, no falta ningún término en "s", por lo que deducimos que con ciertos valores de Kd y Kp, el sistema será estable. Para poder determinar los valores de Kp y Kd que hacen que el sistema sea estable, aplicamos el criterio de Routh-Hurwitz



s^4	1	31,22	57.276Kp
s^3	8,75	57.276Kd	
s^2	31.22 - 6,545Kd	57.276Kp	
s^1	$\frac{(31.22 - 6,545Kd) \cdot 57.276Kd - 8,75 \cdot 57.276Kp}{(31.22 - 6,545Kd)}$		
s^0	57.276Kp		

Los valores de Kd y Kp que hacen el sistema estable son

$$\frac{(31.22 - 6,545Kd) \cdot 57.276Kd - 8,75 \cdot 57.276Kp}{(31.22 - 6,545Kd)} > 0$$

$$(31.22\ -\ 6,545Kd)\cdot 57.276Kd\ -\ 8,75\cdot 57.276Kp > 0$$

$$57.276Kp > 0 \rightarrow Kp > 0$$

5. Determinación de las condiciones que deben cumplir los parámetros del regulador PD para estabilizar el sistema.

a. Determine el valor de K_p necesario para que el error estático para entrada de aceleración $r(t)=0.5t^2\cdot u(t)$ sea igual a 1 V.

La entrada de la aceleración significa que tenemos una entrada parabólica

$$r(t)\ =\ 0,5\cdot t^2\cdot u(t) \rightarrow r(t)\ =\ \frac{A}{2}\cdot t^2\cdot u(t) \rightarrow \frac{A}{2}\ =\ 0,5 \rightarrow A\ =\ 1$$

En el dominio de Laplace se traduce así $R(s)\ =\ \frac{A}{s^3}$

$$e_{ss} = \lim_{s\rightarrow 0} s\cdot R(s)\cdot \frac{1}{1+G(s)\cdot H(s)} = \lim_{s\rightarrow 0} s\cdot \frac{A}{s^3}\cdot \frac{1}{1+(K_p+K_d\cdot s)\cdot \frac{57,276}{s^2\cdot(s^2+8,75s+31,22)}} =$$

$$\lim_{s\rightarrow 0} s\cdot \frac{1}{s^3}\cdot \frac{s^2\cdot(s^2+8,75s+31,22)}{s^4+8,75\cdot s^3+31,22\cdot s^2+57,276\cdot K_d\cdot s+57,276\cdot K_p} = \frac{31,22}{57,276Kp}$$

$$e_{ss} = 1 \quad e_{ss} = \frac{31,22}{57,276Kp} \rightarrow Kp\ =\ 0,545$$

b. Utilizando este valor de K_p, utilizando el criterio de Routh, determine qué condiciones deben cumplir K_D para que el sistema sea estable.

s^4	1	31,22	31,22
s^3	8,75	57.276Kd	
s^2	31.22 - 6,545Kd	57.276Kp	
s^1	$\frac{(31.22-6,545Kd)\cdot 51.276Kd-8,75\cdot 31,22}{(31.22-6,545Kd)}$		
s^0	31,22		

$$(31.22\ -\ 6,545Kd)\cdot 57.276Kd\ -\ 8,75\cdot 31,22 > 0$$

$$-\ 374,87Kd^2\ +\ 1788,156Kd\ -\ 273,175\ >\ 0$$

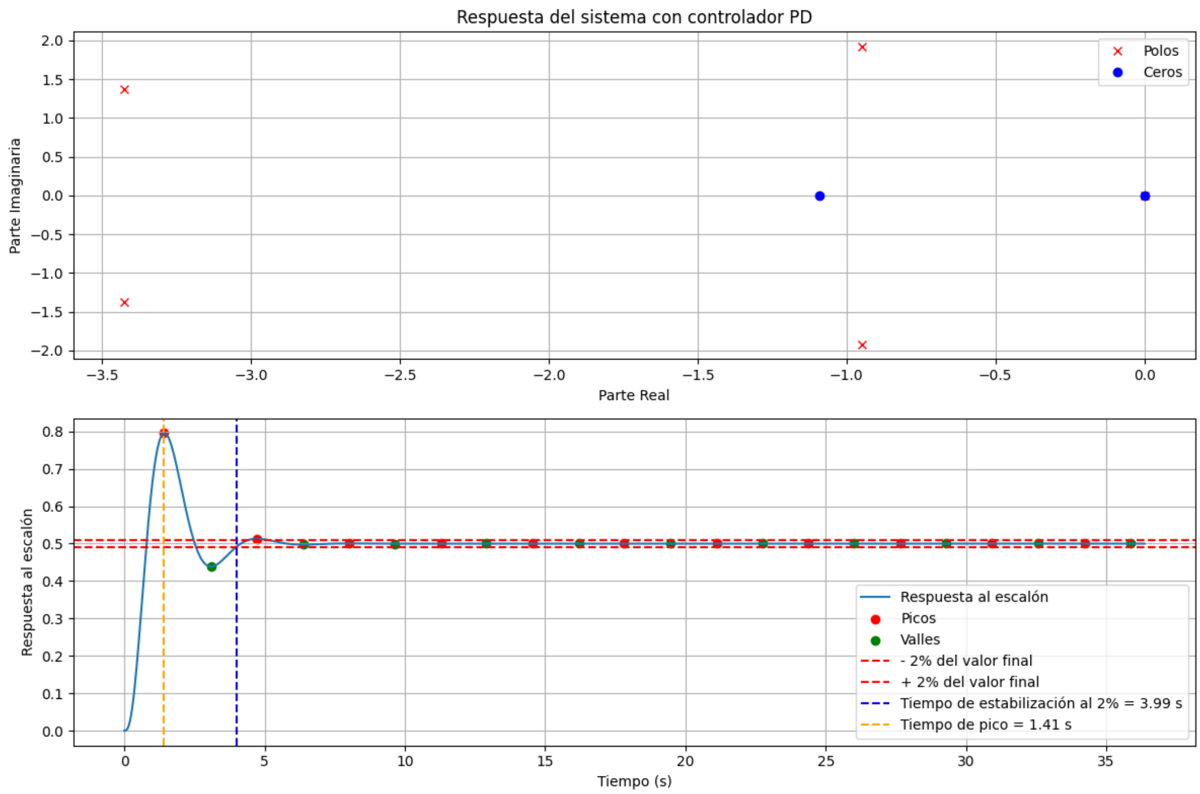
$$Kd\ =\ \frac{1788,16\pm 1669,70}{749,74}$$

El rango de Kd es 0,16 < Kd < 4,61

c. Utilizando Python (función numpy, control,), dibuje los polos en el plano s para valores de igual a 0.5, 1 y 2, y en función de la posición de los polos justifique cómo debe ser la forma de la respuesta transitoria del sistema y determine el tiempo de estabilización del sistema. Utilizando el modelo de Simulink[1] , verifique por simulación que el comportamiento del sistema se corresponde al esperado

Para Kd = 0,5

$$T(s) = K_p + K_d \cdot s \cdot \frac{57,276}{s^2 \cdot (s^2 + 8,75s + 31,22)} = \frac{28,64 \cdot s + 31,22}{s^4 + 8,75s^3 + 31,22s^2 + 28,64 \cdot s + 31,22}$$

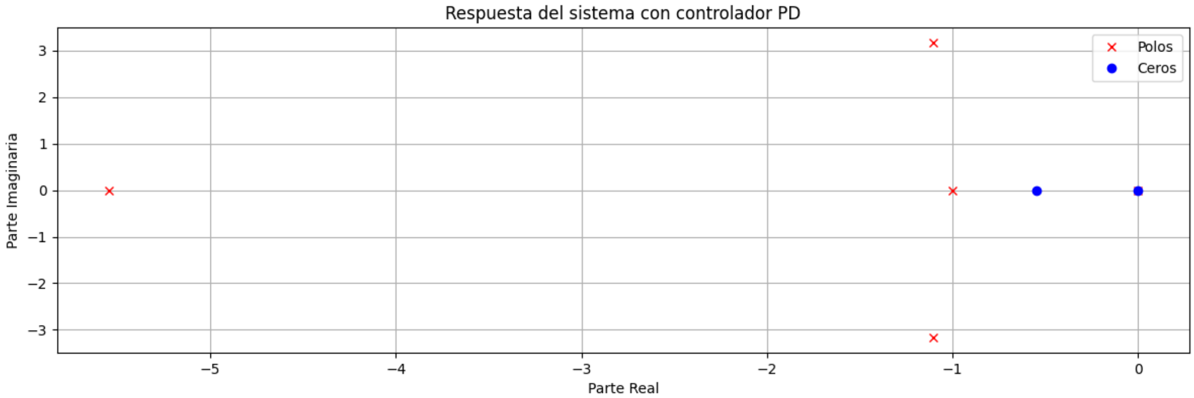


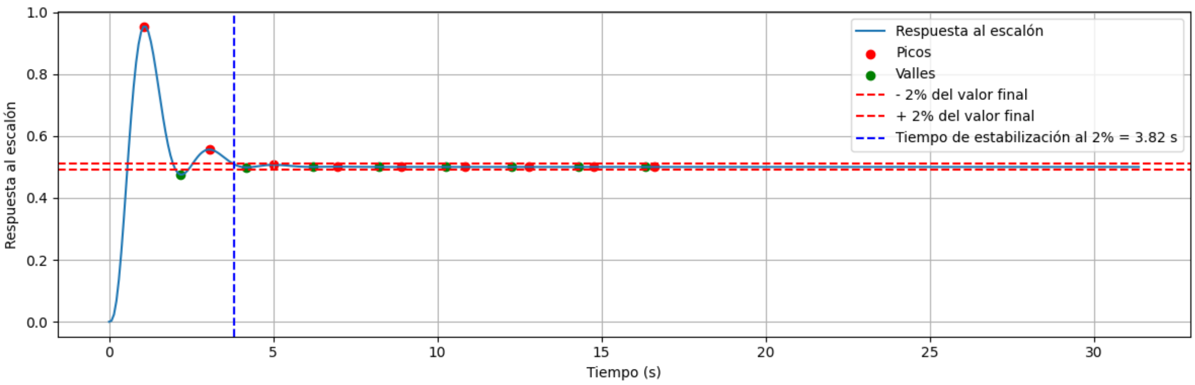
Coordenadas de los polos del sistema:
Polo: -3.4250 + 1.3751j
Polo: -3.4250 + -1.3751j
Polo: -0.9500 + 1.9186j
Polo: -0.9500 + -1.9186j
Polo: 0.0000 + 0.0000j

Coordenadas de los ceros del sistema:
Cero: -1.0900 + 0.0000j
Cero: 0.0000 + 0.0000j

Para Kd = 1

$$T(s) = K_p + K_d \cdot s \cdot \frac{57{,}276}{s^2 \cdot (s^2 + 8{,}75s + 31{,}22)} = \frac{57{,}276 \cdot s + 31{,}22}{s^4 + 8{,}75s^3 + 31{,}22s^2 + 57{,}276 \cdot s + 31{,}22}$$





Coordenadas de los polos del sistema:

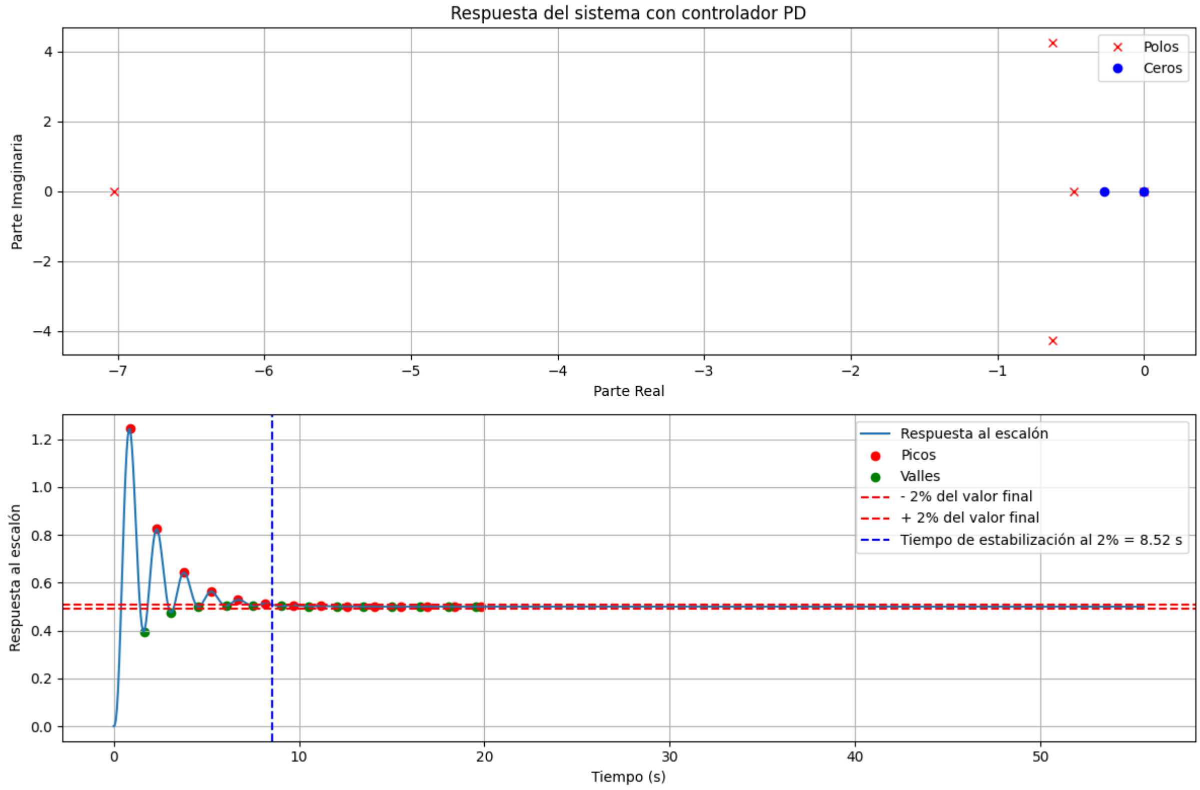
Polo: -5.5485 + 0.0000j
Polo: -1.1009 + 3.1691j
Polo: -1.1009 + -3.1691j
Polo: -0.9998 + 0.0000j
Polo: 0.0000 + 0.0000j

Coordenadas de los ceros del sistema:

Cero: -0.5450 + 0.0000j
Cero: 0.0000 + 0.0000j

Para Kd = 2

$$T(s) = K_p + K_d \cdot s \cdot \frac{57{,}276}{s^2 \cdot (s^2 + 8{,}75s + 31{,}22)} = \frac{114{,}55 \cdot s + 31{,}22}{s^4 + 8{,}75s^3 + 31{,}22s^2 + 114{,}55 \cdot s + 31{,}22}$$



Coordenadas de los polos del sistema:

Polo: -7.0271 + 0.0000j
Polo: -0.6215 + 4.2579j
Polo: -0.6215 + -4.2579j
Polo: -0.4798 + 0.0000j
Polo: 0.0000 + 0.0000j

Coordenadas de los ceros del sistema:

Cero: -0.2725 + 0.0000j
Cero: 0.0000 + 0.0000j