# 什么是收敛?

{}有极限

# 什么是有限覆盖

实数理论，实数连续性命题

Cauchy数列(基本数列)

定义:{}为R中的一个数列，如果>0, , 当m, n >M时， 满足

等价于如果>0, , 当n, n + p >M时， 满足

七个实数连续命题

这几个命题通过循环证明

1. 有上（下）界的非空数集必属于R的最小（大）上（下）有限上（下）界，有上（下）确界
2. 单调增（减）有上（下）界的数列必定收敛

证明1->2:

设单调数列有上界，根据命题易得有上确界

下面证明收敛性

因为是上确界，所以, 不是上界，同时因为单调递增，, 所以当 > m, 有下列不等式成立

, 存在极限，所以收敛

1. (闭区间套原理，Carton)，设置递降的区间数列

证明2->3

从命题3有下面单调数列

根据命题2， 可以知道{} 有 {} 有

(根据命题3, )

说明数列收敛到同一个数，记

需要证明

根据递增，递减 ，并且

根据上下确界的关系 , 说明存在任何一个区间

所以有

证明 是 唯一点

假设还存在一个点

那么存在 （因为一样都位于所有区中，那么他们必定小于区间的长度）

那么, 有

那么有

得证唯一

1. (有界闭区间的紧致性，Heine-Borel有限覆盖定理)

[a, b]的任何开覆盖τ (τ 中的元素均为开集，并且∀ x∈ [a,b], 必有开集U∈ τ ,使得x∈ U, 或[a, b] ⊂ )必有有限子覆盖{ } ⊂ τ 覆盖[a, b], 即[a, b] ⊂

证明3→4

反证法，假设[a,b]不能被有限覆盖，那么可以把[a, b]等分为两个闭区间，

[a, (a+b)/2], [(a+b)/2, b], 那么必定有一个区间不能被有限覆盖，我们可以记为, 然后同样的方式等分我们可以得, 这里有, 如此下去我们可以得到一个递降闭区间序列

其中每个区间都不能被有限覆盖, 区间长度为

(n→+∞) = 0

由命题3可以知道, 但是命题4条件，

因为U是开集，那么∃ N∈ N, 当n>N,有 (长度可以趋于0)

所以和假设矛盾