Aufgaben zum CSE-Lab 4

Andreas Lebedev 25. November 2022

Aufgabe 4.1:

Zur Berechnung der Ableitung in einem definierten Intervall werden in der numerischen Mathematik verschiedene Verfahren verwendet.

a) Mit dem sogenannten Vorwärtsdifferenzenquotient wird die Ableitung einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_i mit der Schrittweite h näherungsweise berechnet:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

Erstelle dazu die Matlab-Funktion:

```
function [df] = vorwaertsdiff(f,x,h)
```

Hierbei sind die Parameter:

- `f` - function-handle
- `x` - Vektor mit den x-Werten, an denen die Ableitung berechnet werden soll
- `h` - Schrittweite
- `df` - Vektor mit den Werten der Ableitung an den Stellen von `x`

b) Für Testzwecke soll ein Testskript `test_diffquotient` implementiert werden. Dazu ist die Funktion $f(x) = sin(x)$ mit $f : \mathbb{R} \to [-1; 1]$ gegeben. Die Ableitung von f soll nun im Intervall $x \in [-2\pi, 2\pi]$ an 400 äquidistant verteilten Punkten mit $h = \frac{\pi}{6}$ bestimmt werden und im Vektor `df_vorw` gespeichert werden.

c) Anschließend soll ein beschrifteter Plot der rechnerischen Ableitung $f'(x) = cos(x)$ von f sowie der numerisch approximierten Ableitung f'_{vorw} mit jeweils unterschiedlichen Farben erstellt werden.

d) Eine andere Möglichkeit für die numerische Ableitung ist der Rückwärtsdifferenzenquotient:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}$$

Erstelle dazu die Matlab-Funktion:

```
function [df] = rueckwaertsdiff(f,x,h)
```

Erweitere außerdem den Plot aus Aufgabe c) um die numerische Ableitung mit Rückwärtsdifferenz.

e) Eine dritte Möglichkeit für die numerische Ableitung ist der Zentraldifferenzenquotient:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2 * h}$$

Erstelle dazu die Matlab-Funktion:

```
function [df] = zent_diff(f,x,h)
```

Erweitere außerdem den Plot aus Aufgabe c) bzw. d) um die numerische Ableitung mit zentralem Differenzenquotient.

f) Variiere die Schrittweite h und diskutiere die Ergebnisse.

g) Erstelle ein neues Testskript `fehler_diffquotient.m`. Nun sollen mit einer `for`-Schleife verschiedene Schrittweiten h getestet werden:

```
h = [pi/4, pi/8, pi/16, pi/32, pi/64];
```

In jedem Schleifendurchlauf soll der absolute Fehler zwischen exakter Lösung und numerischer Lösung für jedes der drei Verfahren berechnet werden. Der absolute Fehler wird wie folgt berechnet:

$err = \|f'_{vorw}(x) - f'(x)\|_2 =$ `norm(df_vorw-df(x),2)`

Anschließend soll ein doppelt logarithmischer Plot (`loglog`) erstellt werden, welcher den Fehler aller drei Verfahren für verschiedene Schrittweiten h darstellt. Wie lässt sich das Ergebnis interpretieren?

In der folgenden Abbildung ist ein möglicher Fehlerplot dargestellt. Dieser kann als Zielsetzung für die Teilaufgabe g) verwendet werden: