Aufgabe 7

Clemens Ibrom

May 3, 2024

Teil 1. Der Integrator

Um das Integral aus der Aufgabe zu behandeln habe ich den Simpson Integrator, den ich im Rahmen von Blatt 1 geschrieben habe, angepasst. Hier ist der Code:

```
double mn_integrate_simpson_two(
double left, double right, double delta_x,
double integrand(double, double), double k
)
```

Die übergebenen parameter sind: left - untere Integralgrenze, right- obere Intergalgrenze, delta_x- Schrittgröße, integrand - die Funktion die Integriert wird und k - der Parameter.

Teil 2. Die Funktion

Die funktion die den Integranden für den Realteil implementiert, mit $\omega = 2$ ist:

```
double fourier_integrand_sinc_real(double x, double k){
    if(x==0){
        return cos(k*x);
    }
    else{
        return (sin(2.0*x)/(2.0*x))*cos(k*x);
    }
}
```

Zu beachten ist, dass für $x = 0$ eine Division durch 0 vermieden werden muss, aber zum Glück ist $sinc(0) = 1$. Mehr dazu im nächsten Teil.

Teil 3. Die Mathe

Gegeben ist die Folge von Integralen:

$$\hat{f}_M(k) := \int_{-M}^{M} sinc(\omega t) cos(kt) dt$$

mit $sinc(x) = sin(x)/x$. Wir zeigen, dass diese Folge nicht divergent ist, in dem wir das Integrationsintervall aufteilen in eine Umgebung von Null und den Rest. Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(\omega x)}{\omega x} = \lim_{x\to 0} \frac{\omega x - \frac{(\omega x)^2}{2} + \cdots}{\omega x} = \lim_{x\to 0} 1 + (\omega x)(\cdots) = 1$$

und $cos(0) = 1$. Daher, mit der Standardabschätzung für Integrale:

$$\begin{aligned} \mid \hat{f}_M(k) \mid &\leq \int_{-M}^{M} \mid sinc(\omega t) cos(kt) \mid dt \\ &= \int_{-M}^{-1} \mid sinc(\omega t) cos(kt) \mid dt + \int_{-1}^{1} \mid sinc(\omega t) cos(kt) \mid dt \\ &+ \int_{1}^{M} \mid sinc(\omega t) cos(kt) \mid dt. \end{aligned}$$

Dann ist das mittlere Integral höchstens $\int_{-1}^{1} 1dt = 2$ und die anderen beiden Integrale lassen sich abschätzen durch

$$\mid sinc(\omega t) cos(kt) \mid \leq \mid sinc(\omega t) \mid\mid cos(kt) \mid \leq \frac{1}{\mid \omega t \mid}.$$

Insgesamt ist also

$$\mid \hat{f}_M(k) \mid \leq 2 + \int_{-M}^{-1} \frac{1}{\mid \omega t \mid} dt + \int_{1}^{M} \frac{1}{\mid \omega t \mid} dt$$

Die beiden übrigen Integrale sind gleich $2log(M)$, also ist jedes $\hat{f}_M(k)$ endlich und somit auf dem Computer berechenbar.

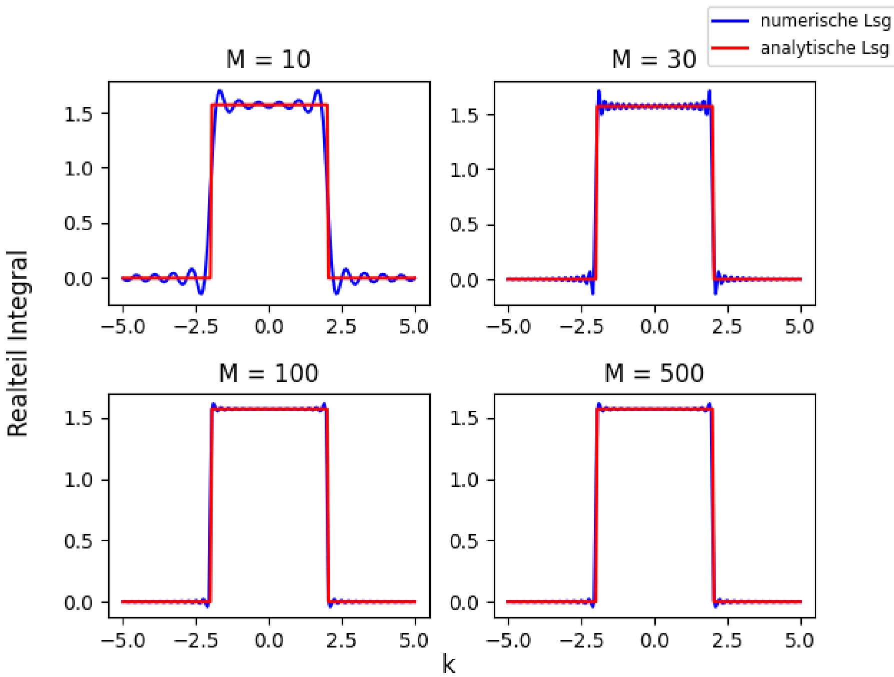
Teil 4. Die plots

Der Code der die Plots erstellt ist in der Datei 'cwr-2024/07 - Fourier PrfVorleistung/plots.py' zu finden.
Das Integral $\hat{f}_M(k)$ wurde numerisch mit der Simpsonregel für vier steigende Werte von M berechnet und mit der analytischen Lösung:

$$\hat{f}_{ana}(k) = \frac{\pi}{\mid \omega \mid} \text{rect}\left(\frac{k}{2\omega}\right)$$

verglichen.

So sehen die Vergleiche aus:



Desto größer M, desto genauer die Approximation, wie zu erwarten.

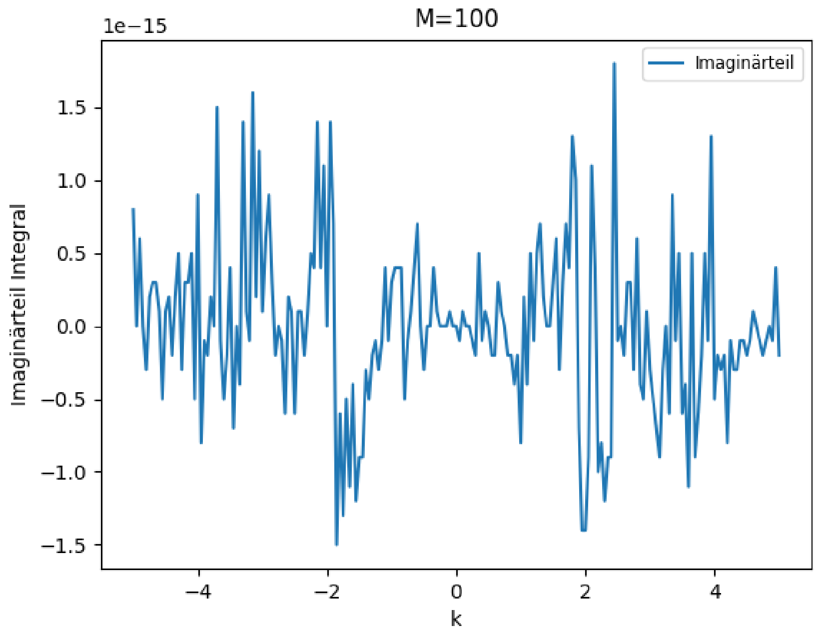
Teil 5. Der Imaginärteil

Analytisch ist der Imaginärteil gleich Null. Um das numerisch zu verifizieren wurde der Integrand, für $\omega = 2$, wie folgt implementiert:

```
double fourier_integrand_sinc_imag(double x, double k){
    if(x==0){
        return sin(-k*x);
    }
    else{
        return (sin(2.0*x)/(2.0*x))*sin(-k*x);
    }
}
```

Hier ist wieder die Division durch Null für $x = 0$ wie bei dem reellen Teil zu vermeiden.

Plotten, für $M = 100$ ergibt



Das ist zwar nicht sehr gleichmäßig, aber zu beachten ist, dass die Werte mit $1e - 15$ skaliert sind, also sehr nah an der Null.