Aufgabe 22 - 3 Körper Problem

Clemens Ibrom

June 2024

1 Das 3 Körper Problem

Wir betrachten die Dynamik des Systems von drei Massepunkten in zwei Dimensionen. Hierbei sollen keine externe Kraft wirken, nur die Gravitationskräfte der involvierten Massen, gegeben durch

$$\vec{F}_{ji} = G \frac{m_i \cdot m_j}{r^2} \hat{r} \tag{1}$$

Hier ist $r = d(m_1, m_2)$ und \hat{r} der normierte Abstandsvektor in Richtung m_2 . Auf Masse m_i wirken zu jedem Zeitpunkt die resultierende Kraft $\vec{F}_{ki} + \vec{F}_{ji}$, für $j \neq k$. Um das umzusetzten müssen die Vektoren wieder Komponentenweise betrachtet werden. Das ist analog zu den Betrachtungen von Aufgabe 16, mit dem kleinen Unterschied, dass jetzt keiner der Körper als Stationär betrachtet werden kann. Daher ist jetzt eine Komponente (in Richtung x_i) von \vec{F}_{ji} gegeben von:

$$(\vec{F}_{ji})_{x_i} = - |\vec{F}_{ji}| \frac{((m_i)_{x_i} - (m_j)_{x_j})}{r}.$$
 (2)

Der Aufgabe zufolge wurde dieser Schritt in die Funktion gravity_accel ausgeführt, um die Funktion die die Beschleunigung ausrechnet überschaubarer zu machen. Aus dem selben Grund nutzten wir die Routine init_state: um die Anfangswerte für die vier verschiedenen Stepper zu initiieren. Hier könnte man auch die Nullen mit einer Schleife ausfüllen, aber explizit ist es beim Lesen klarer was genau die Werte von welcher Masse sind und Änderungen sind einfacher.

2 Die Simulation(en)

Wir wollen die Leistung der vier Einschrittverfahren die wir bisher gesehen haben vergleichen: Euler, Runge-Kutta 2. Ordnung (RK2), Runge-Kutta 4. Ordnung (RK4) und Velocity-Verlet (VV). Dazu lassen wir die vier parallel die Simulation des 3 Körper Problems rechnen. Die Anfangswerte sind:

$x_1(0) = +1.2098 \cdot 10^7 m,$	$y_1(0) = 0m,$
$x_2(0) = +1.2342 \cdot 10^7 m,$	$y_1(0) = 0m,$
$x_3(0) = 0m,$	$y_1(0) = 0m,$
$v_{x_1}(0) = 0ms^{-1},$	$v_{y_1}(0) = +6.9262 \cdot 10^4 m s^{-1},$
$v_{x_2}(0) = 0ms^{-1},$	$v_{y_2}(0) = +4.2158 \cdot 10^4 m s^{-1},$
$v_{x_3}(0) = 0ms^{-1},$	$v_{y_3}(0) = 0ms^{-1}$.

Hier ist zu bemerken, dass Masse 3 im Ursprung startet, während Massen 1 und 2 weit entfernt von Masse 1 aber relativ sehr nah aneinander Starten. Zudem sind die Massen:

$$m_1 = 1.345 \cdot 10^{24} kg$$
, $m_2 = 1.345 \cdot 10^{24} kg$, $m_3 = 5.683 \cdot 10^{26} kg$,

also ist Masse 3 deutlich größer. Daher ist zu erwarten, dass wir eine Art Orbitalbewegung von den Massen 1 und 2 um Masse 3 sehen und die zwei kleinen Massen um sich herum 'schwirren'.

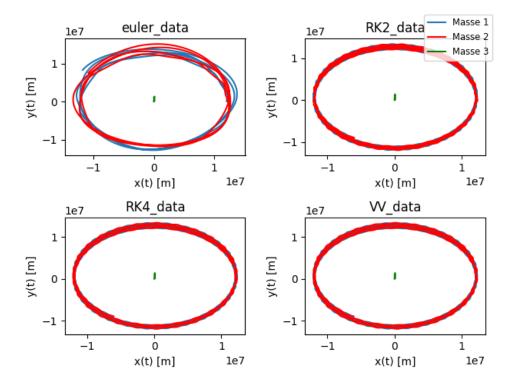


Figure 1: Trajektorien der Massen im Vergleich

(2.1) zu finden. Man erkennt, dass die Trajektorie von Velocity-Verlet am engsten ist und das Ende am wenigsten abweicht. Somit ist der Fazit hier, dass VV am besten ist, wobei der Unterschied zu RK4 nicht sehr groß ist. Trotz der Massenunterschiede sieht man die Wirkung der kleineren Massen auf Masse 3. Diese bewegt sich sehr wenig, aber bleibt nicht komplett Stationär.

2.1 Gesamtenergie des Systems

Die Gesamtenergie des Systems ist gegeben durch die summe der Kinetischen und Potenziellen Energien der drei Massen. Es ist ein Skalar, sollte also die Zeit über konstant bleiben. Dies ist jedoch nicht der Fall bei dem Euler-Verfahren, so wie bei den RK-Verfahren, da diese nur eine genauere Version von Euler sind. Jedoch ist RK4 wieder so gut wie ununterscheidbar von VV über kurze Simulationszeiten. Das VV Verfahren ist im Schnitt am besten, da es um eine konstanten Mittelwert oszilliert und nicht abfällt. Wegen dieser Oszillation ist es aber bei sehr kurzen Simulationszeiten schlechter als RK4.

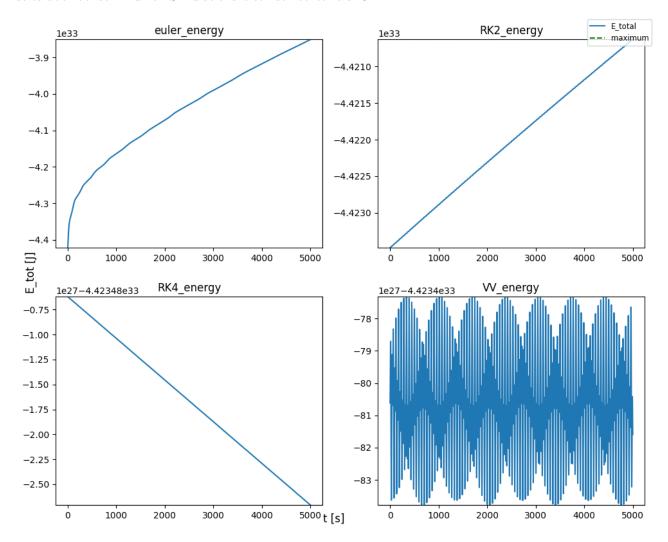


Figure 2: Vergleich der Gesamtenergie

Appendix A: Plots

Das Layout ist suboptimal, sorry. Ich habe leider nicht genug Zeit diese Wochje gehabt um mit den La TeX floats zu kämpfen. Hier sind die normale und lange Zeitskala Plots. Ich habe T_{-} max auf 50000 Sekunden gesetzt und wie man sieht, kommt Euler irgendwann nicht mehr mit. Die Massen fliegen ins All und die Energie ist auch ganz durcheinandner. Hauptsächlich ging's mir um RK2 und RK4 im Vergleich zu VV hier.

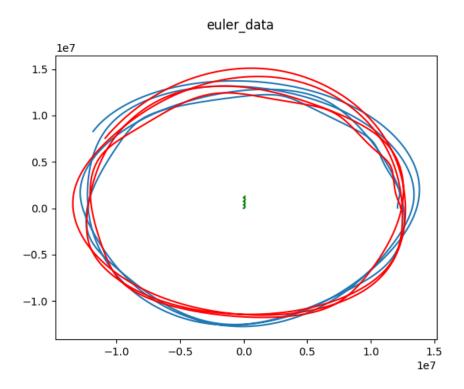


Figure 3: Trajektorie mit Euler-Verfahren

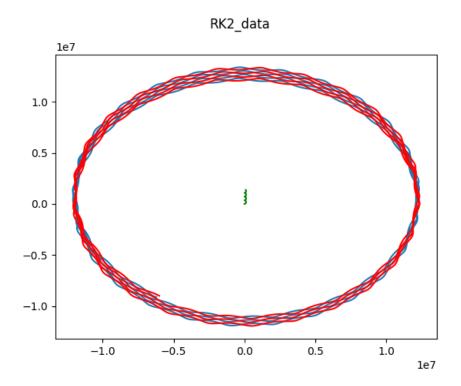


Figure 4: Trajektorie mit RK2

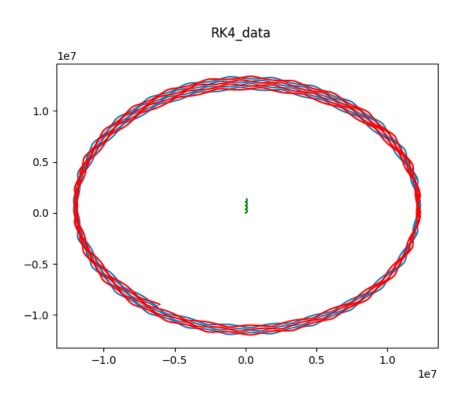


Figure 5: Trajektorie mit RK4

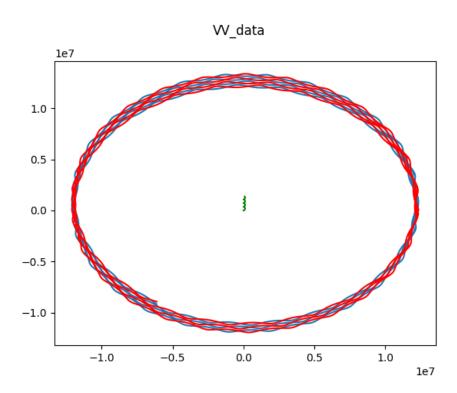


Figure 6: Trajektorie mit VV

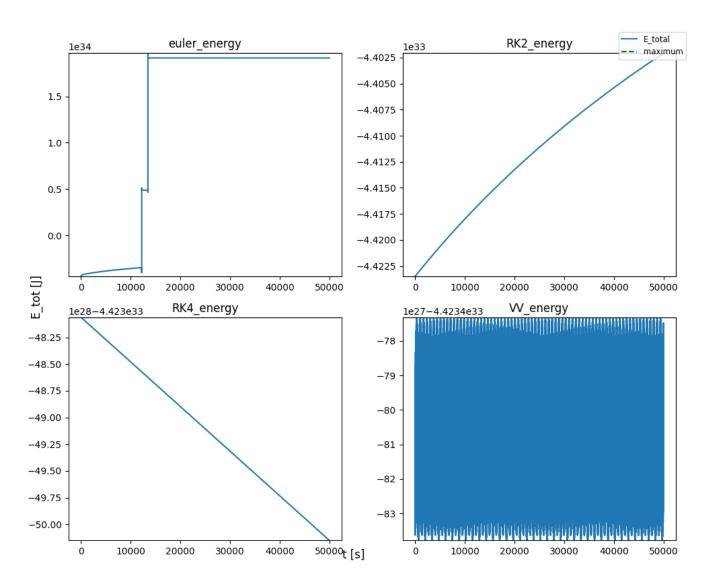


Figure 7: Gesamtenergie bei Zeitskala t $_{-}\mathrm{max} = 50000\mathrm{s}$

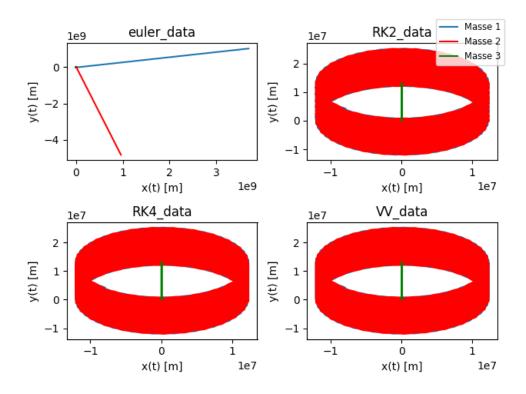


Figure 8: Trajektorien bei Zeitskala t_max = 50000s