分治（Divide And Conquer）

@M了个J

https://github.com/CoderMJLee

http://cnblogs.com/mjios

码拉松

分治（Divide And Conquer）

■ 分治，也就是分而治之。它的一般步骤是

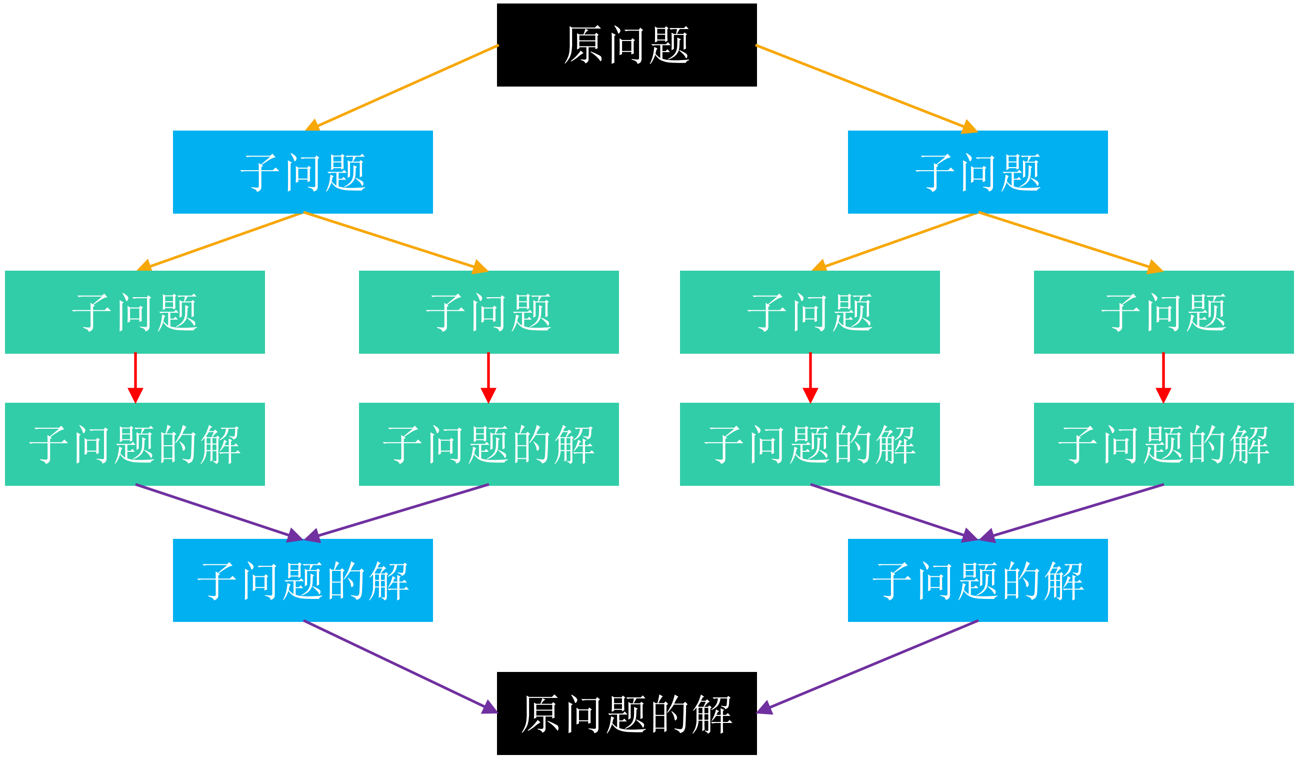
① 将原问题分解成若干个规模较小的子问题（子问题和原问题的结构一样，只是规模不一样）

② 子问题又不断分解成规模更小的子问题，直到不能再分解（直到可以轻易计算出子问题的解）

③ 利用子问题的解推导出原问题的解

■ 因此，分治策略非常适合用递归

■ 需要注意的是：子问题之间是相互独立的



■ 分治的应用

□ 快速排序

□ 归并排序

□ Karatsuba算法（大数乘法）

主定理（Master Theorem）

- 分治策略通常遵守一种通用模式
  - 解决规模为 n 的问题，分解成 a 个规模为 $\frac{n}{b}$ 的子问题，然后在 $O(n^d)$ 时间内将子问题的解合并起来
  - 算法运行时间为：$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^d)$，$a > 0, b > 1, d \geq 0$
    - ✓ $d > \log_b a$，$T(n) = O(n^d)$
    - ✓ $d = \log_b a$，$T(n) = O(n^d \log n)$
    - ✓ $d < \log_b a$，$T(n) = O(n^{\log_b a})$

- 比如归并排序的运行时间是：$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$，$a = 2, b = 2, d = 1$，所以 $T(n) = O(n\log n)$

- 思考：为什么有些问题采取分治策略后，性能会有所提升？

练习1 – 最大连续子序列和

■ leetcode_53_最大子序和：https://leetcode-cn.com/problems/maximum-subarray/

■ 给定一个长度为 n 的整数序列，求它的最大连续子序列和

□ 比如 –2、1、–3、4、–1、2、1、–5、4 的最大连续子序列和是 4 + (–1) + 2 + 1 = 6

■ 这道题也属于最大切片问题（最大区段，Greatest Slice）

■ 概念区分

□ 子串、子数组、子区间必须是连续的，子序列是可以不连续的

解法1 – 暴力出奇迹

- 穷举出所有可能的连续子序列，并计算出它们的和，最后取它们中的最大值

```java
int maxSubArray(int[] nums) {
    if (nums == null || nums.length == 0) return 0;
    int max = Integer.MIN_VALUE;
    for (int begin = 0; begin < nums.length; begin++) {
        for (int end = begin; end < nums.length; end++) {
            int sum = 0;
            for (int i = begin; i <= end; i++) {
                sum += nums[i];
            }
            max = Math.max(max, sum);
        }
    }
    return max;
}
```

- 空间复杂度：$O(1)$，时间复杂度：$O(n^3)$

解法1 – 暴力出奇迹 – 优化

■ 重复利用前面计算过的结果

```java
int maxSubArray(int[] nums) {
    if (nums == null || nums.length == 0) return 0;
    int max = Integer.MIN_VALUE;
    for (int begin = 0; begin < nums.length; begin++) {
        int sum = 0;
        for (int end = begin; end < nums.length; end++) {
            sum += nums[end];
            max = Math.max(max, sum);
        }
    }
    return max;
}
```

■ 空间复杂度：$O(1)$，时间复杂度：$O(n^2)$

解法2 – 分治

- 将序列均匀地分割成 2 个子序列
  - [begin , end) = [begin , mid) + [mid , end)，mid = (begin + end) >> 1

- 假设 [begin , end) 的最大连续子序列和是 S[i , j) ，那么它有 3 种可能
  - [i , j) 存在于 [begin , mid) 中，同时 S[i , j) 也是 [begin , mid) 的最大连续子序列和
  - [i , j) 存在于 [mid , end) 中，同时 S[i , j) 也是 [mid , end) 的最大连续子序列和
  - [i , j) 一部分存在于 [begin , mid) 中，另一部分存在于 [mid , end) 中
    - ✓ [i , j) = [i , mid) + [mid , j)
    - ✓ S[i , mid) = max { S[k , mid) }，begin ≤ k < mid
    - ✓ S[mid , j) = max { S[mid , k) }，mid < k ≤ end

解法2 – 分治

```
int maxSubArray(int[] nums) {
    if (nums == null || nums.length == 0) return 0;
    return maxSubArray(nums, 0, nums.length);
}
int maxSubArray(int[] nums, int begin, int end) {
    if (end - begin < 2) return nums[begin];
    int mid = (begin + end) >> 1;
    int leftMax = nums[mid - 1];
    int leftSum = leftMax;
    for (int i = mid - 2; i >= begin; i--) {
        leftSum += nums[i];
        leftMax = Math.max(leftMax, leftSum);
    }
    int rightMax = nums[mid];
    int rightSum = rightMax;
    for (int i = mid + 1; i < end; i++) {
        rightSum += nums[i];
        rightMax = Math.max(rightMax, rightSum);
    }
    return Math.max(leftMax + rightMax,
            Math.max(maxSubArray(nums, begin, mid),
                    maxSubArray(nums, mid, end)));
}
```

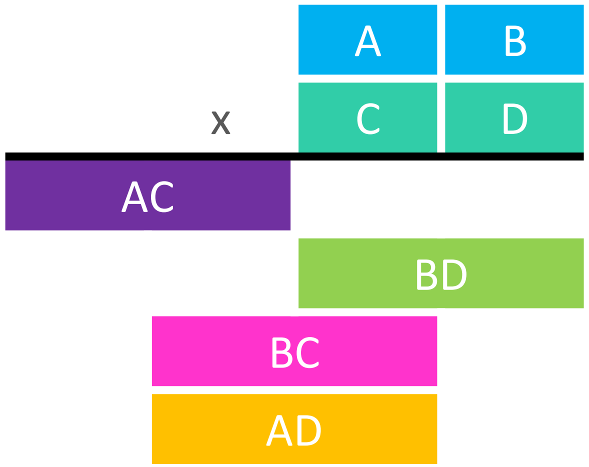
- 空间复杂度：$O(\log n)$

- 时间复杂度：$O(n\log n)$
  - 跟归并排序、快速排序一样
  - $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$

练习2 – 大数乘法

- 2个超大的数（比如2个100位的数），如何进行乘法?
  - 按照小学时学习的乘法运算，在进行 n 位数之间的相乘时，需要大约进行 n^2 次个位数的相乘
  - 比如计算 36 x 54

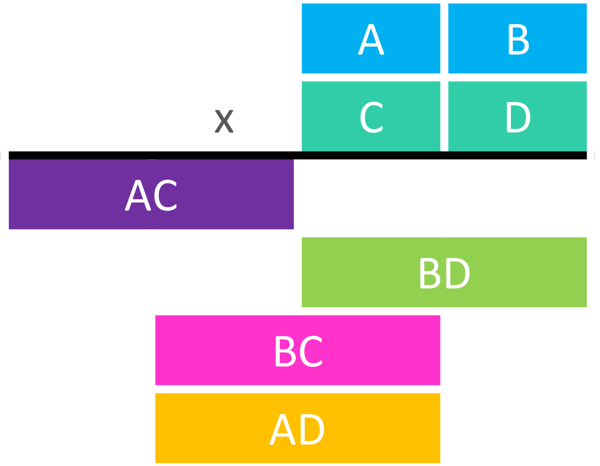
36		36		36		36		
x 54	+	x 54	+	x 54	+	x 54	=	1944
24		120		300		1500		

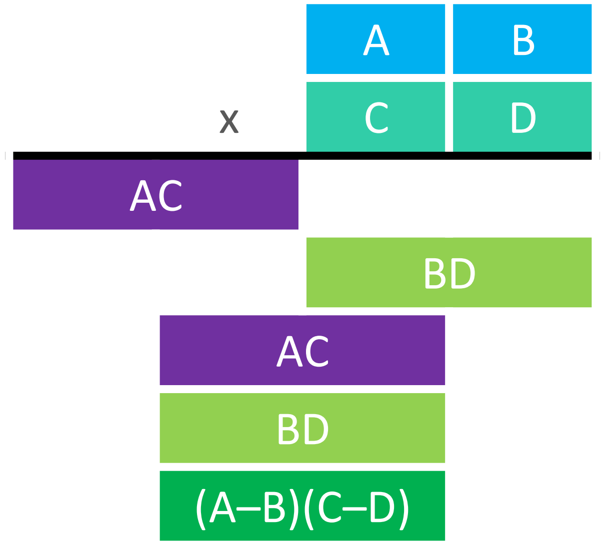


- $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) = O(n^2)$

练习2 – 大数乘法

- 1960 年 Anatolii Alexeevitch Karatsuba 提出了 Karatsuba 算法，提高了大数乘法的效率





- $BC + AD = AC + BD - (A - B)(C - D)$

- $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) = O(n^{1.585})$