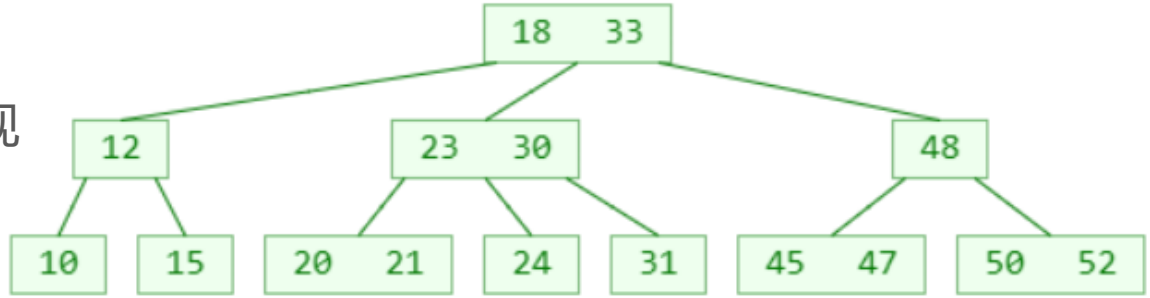
B树

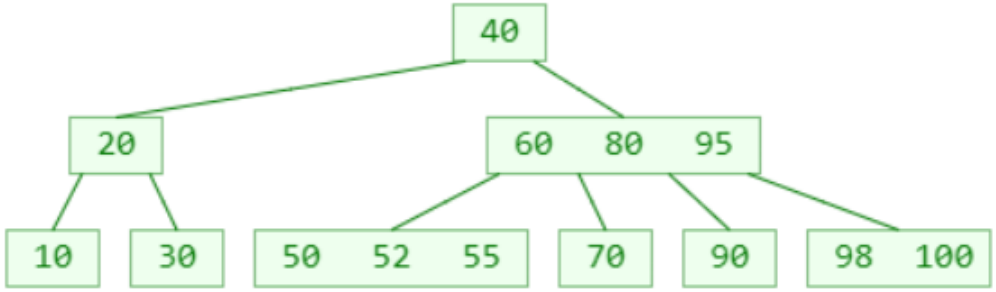
B树（B-tree、B-树）

- B树是一种平衡的多路搜索树，多用于文件系统、数据库的实现

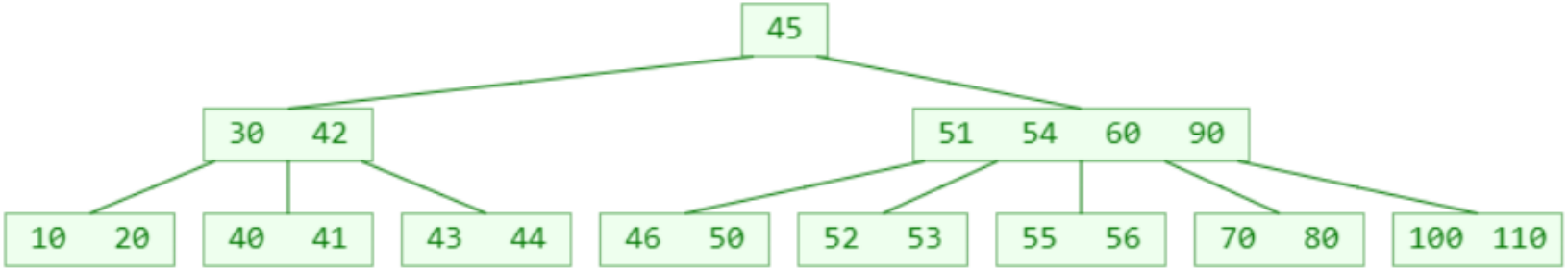
- 仔细观察B树，有什么眼前一亮的特点？
  - 1 个节点可以存储超过 2 个元素、可以拥有超过 2 个子节点
  - 拥有二叉搜索树的一些性质
  - 平衡，每个节点的所有子树高度一致
  - 比较矮



3阶B树



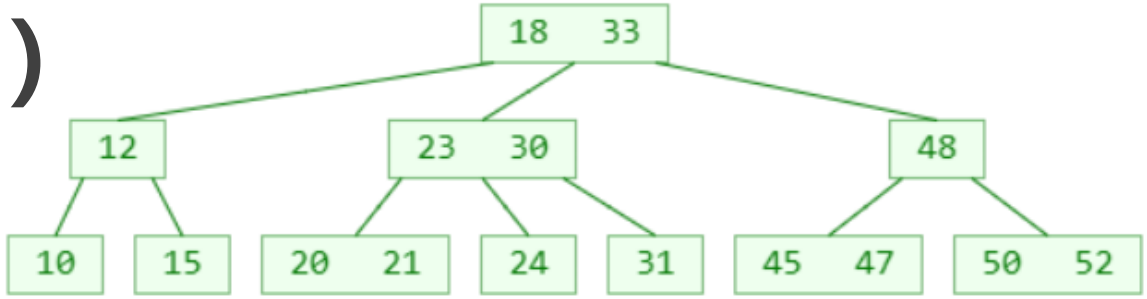
4阶B树



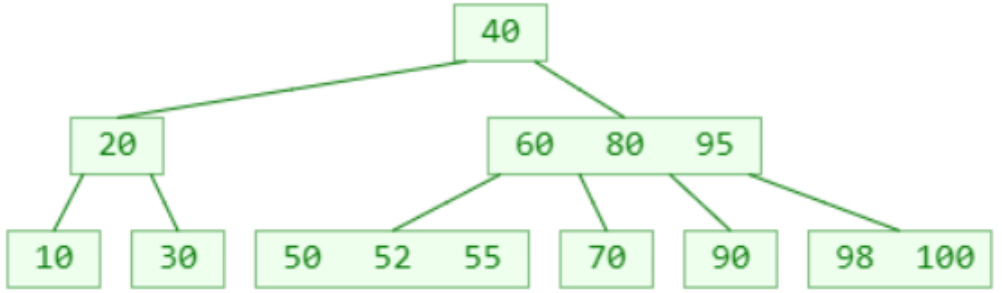
5阶B树

m阶B树的性质（m≥2）

- 假设一个节点存储的元素个数为 x
  - 根节点：$1 \le x \le m - 1$
  - 非根节点：$\lceil m/2 \rceil - 1 \le x \le m - 1$
  - 如果有子节点，子节点个数 $y = x + 1$
    - ✓ 根节点：$2 \le y \le m$
    - ✓ 非根节点：$\lceil m/2 \rceil \le y \le m$
      - ➢ 比如 m = 3，$2 \le y \le 3$，因此可以称为（2, 3）树、2-3树
      - ➢ 比如 m = 4，$2 \le y \le 4$，因此可以称为（2, 4）树、2-3-4树
      - ➢ 比如 m = 5，$3 \le y \le 5$，因此可以称为（3, 5）树
      - ➢ 比如 m = 6，$3 \le y \le 6$，因此可以称为（3, 6）树
      - ➢ 比如 m = 7，$4 \le y \le 7$，因此可以称为（4, 7）树



3阶B树



4阶B树

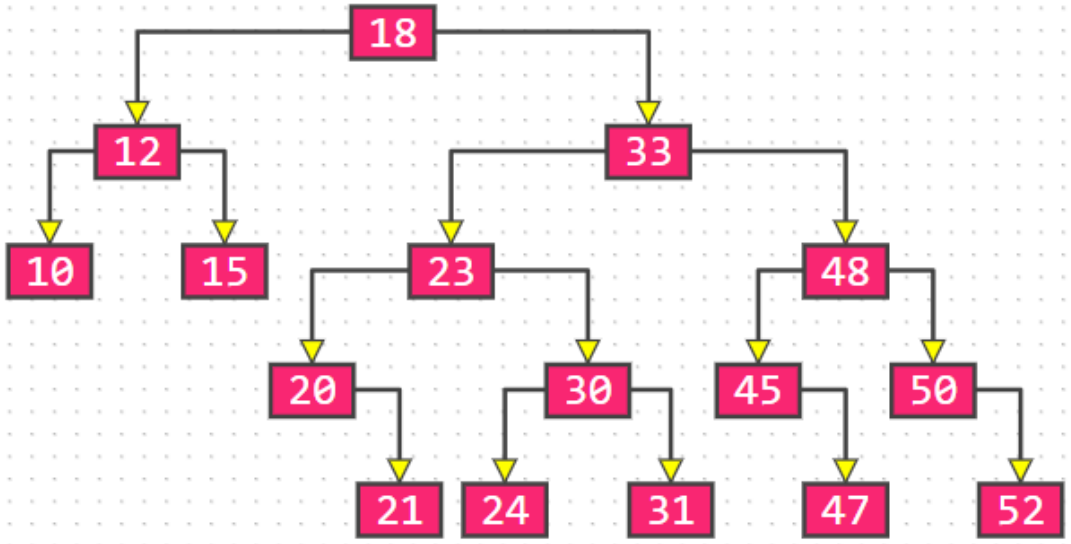
- 思考：如果 m = 2，那B树是什么样子？
- 你猜数据库实现中一般用几阶B树？
  - 200 ~ 300

B树 VS 二叉搜索树

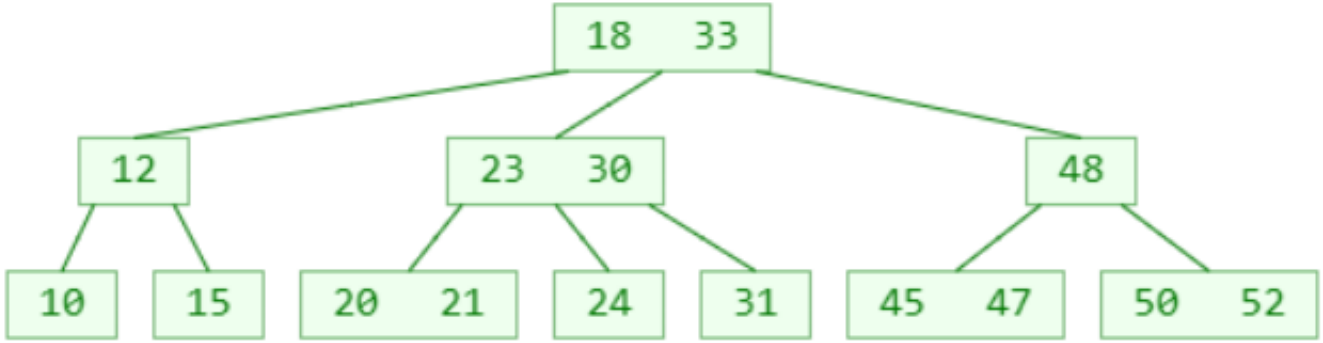
- B树 和 二叉搜索树，在逻辑上是等价的

- 多代节点合并，可以获得一个超级节点
  - 2代合并的超级节点，最多拥有 4 个子节点（至少是 4阶B树）
  - 3代合并的超级节点，最多拥有 8 个子节点（至少是 8阶B树）
  - n代合并的超级节点，最多拥有 2^n个子节点（ 至少是 2^n阶B树）

- m阶B树，最多需要 $\log_2 m$ 代合并



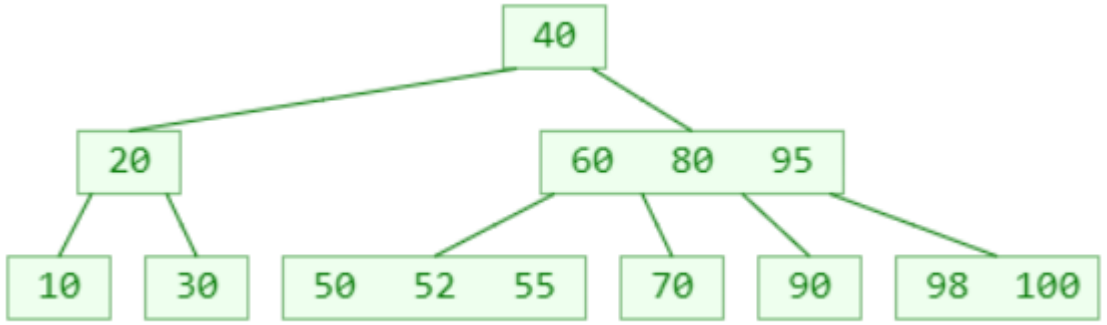
二叉搜索树



3阶B树

搜索

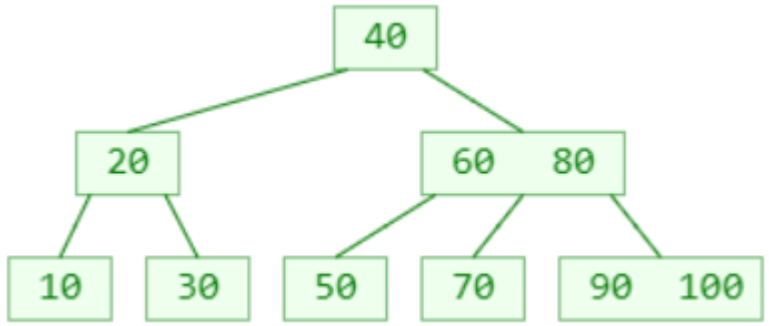
- 跟二叉搜索树的搜索类似



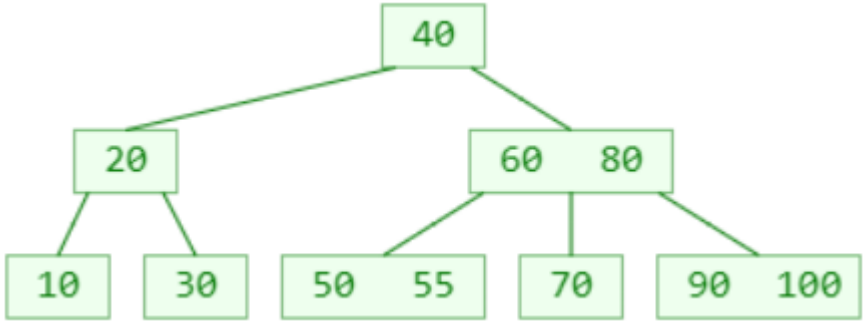
1. 先在节点内部从小到大开始搜索元素
2. 如果命中，搜索结束
3. 如果未命中，再去对应的子节点中搜索元素，重复步骤 1

添加

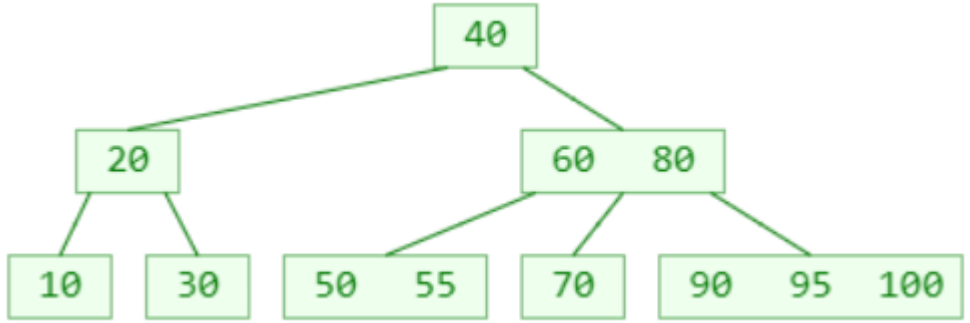
- 新添加的元素必定是添加到叶子节点



- 插入55



- 插入95



- 再插入 98 呢？（假设这是一棵 4阶B树）
  - 最右下角的叶子节点的元素个数将超过限制
  - 这种现象可以称之为：上溢（overflow）

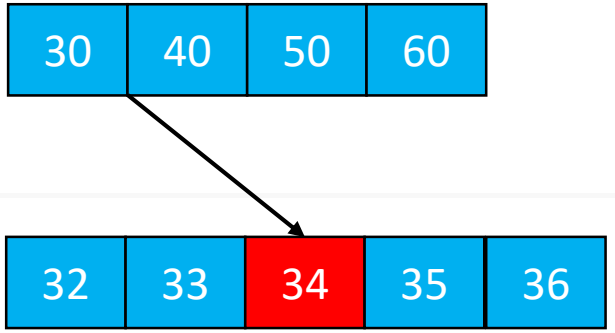
添加 – 上溢的解决(假设5阶)

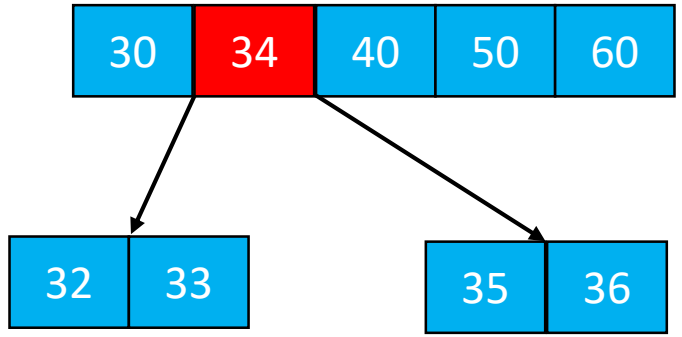
- 上溢节点的元素个数必然等于 m

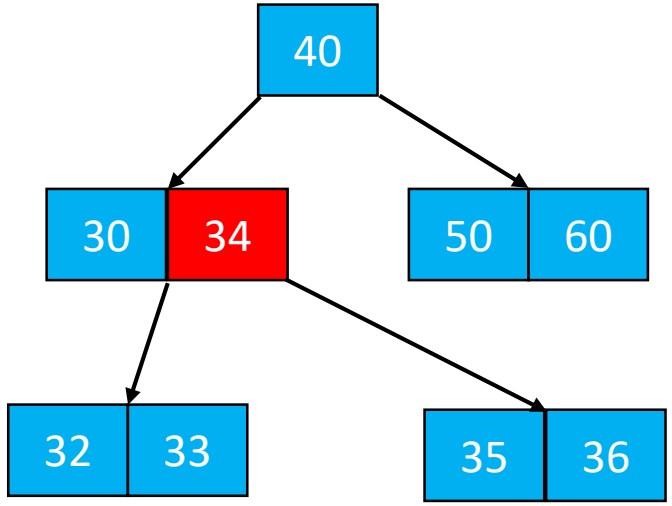
- 假设上溢节点最中间元素的位置为 k
  - 将 k 位置的元素向上与父节点合并

  - 将 [0, k-1] 和 [k + 1, m - 1] 位置的元素分裂成 2 个子节点
    - ✓ 这 2 个子节点的元素个数，必然都不会低于最低限制（$\lceil m/2 \rceil - 1$）

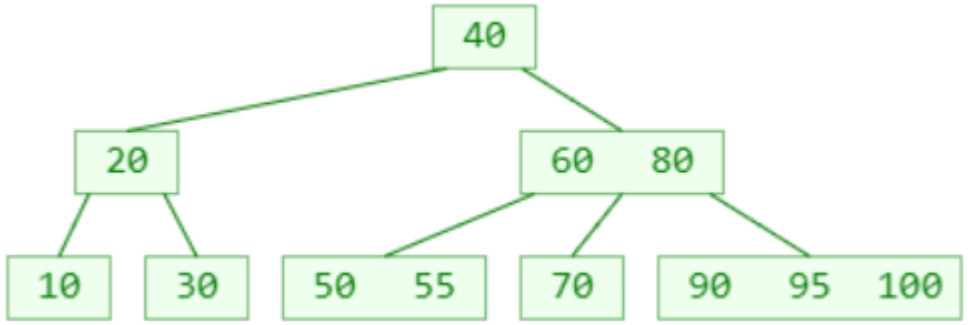
- 一次分裂完毕后，有可能导致父节点上溢，依然按照上述方法解决
  - 最极端的情况，有可能一直分裂到根节点



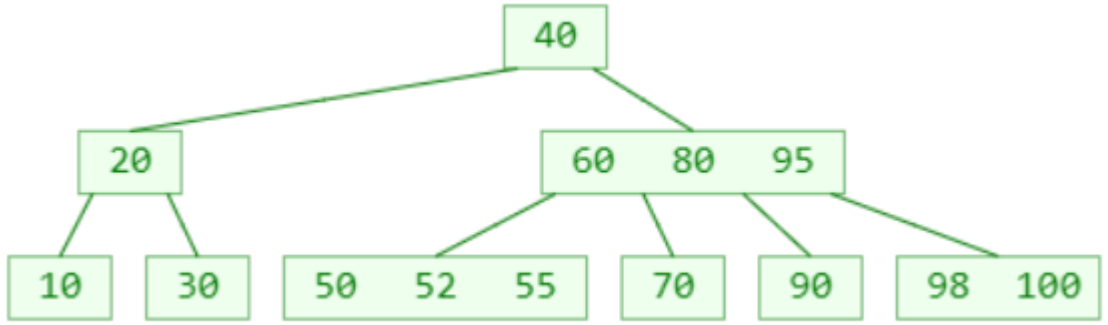




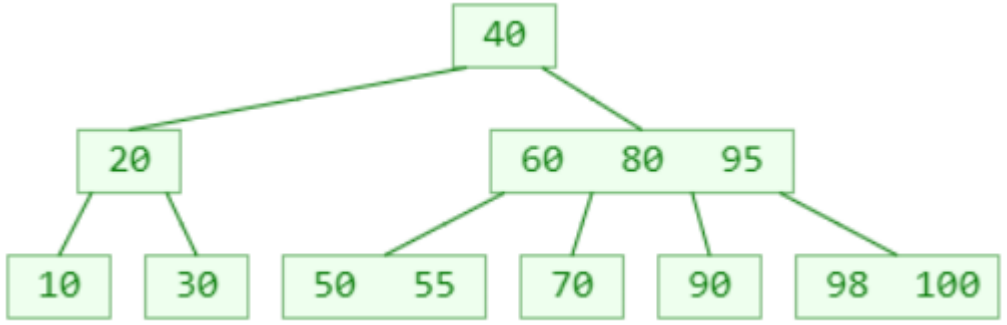
添加



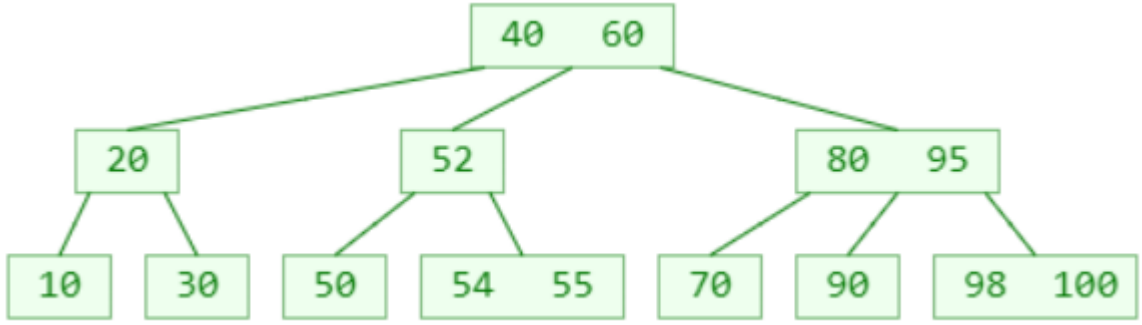
■ 插入 52



■ 插入 98

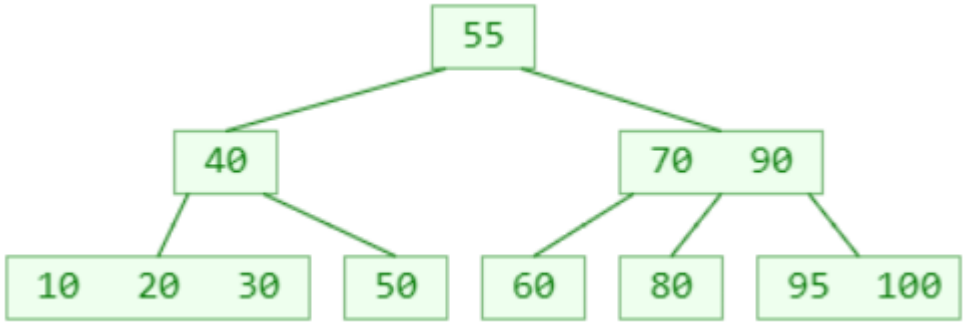


■ 插入 54

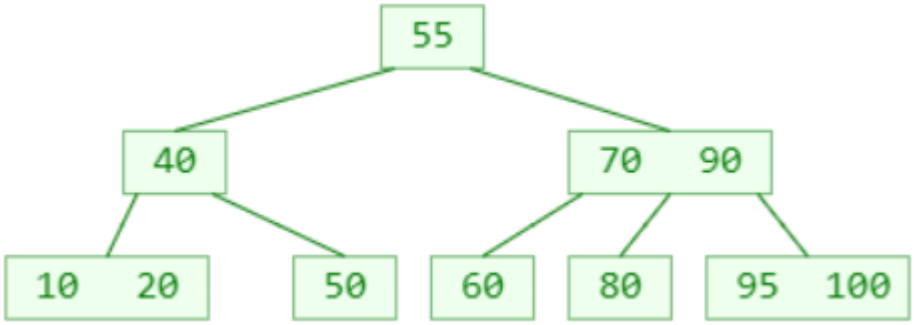


删除 – 叶子节点

- 假如需要删除的元素在叶子节点中，那么直接删除即可



- 删除 30

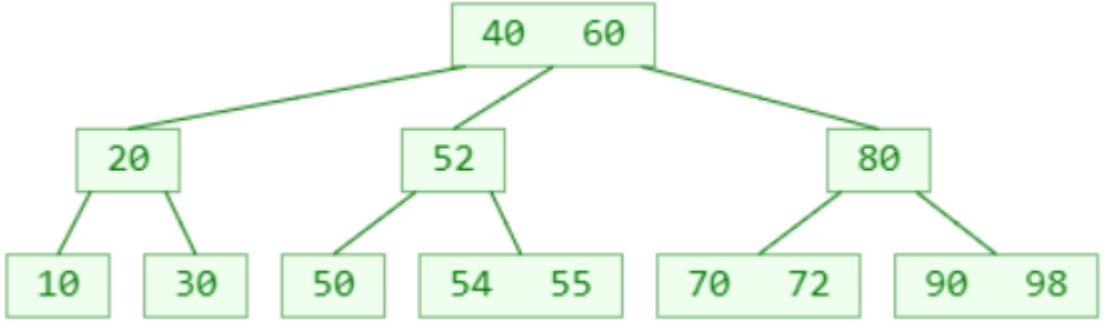


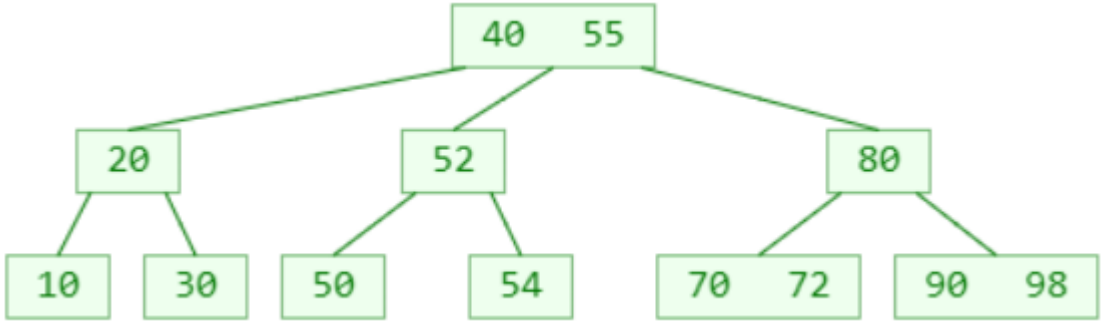
删除 – 非叶子节点

■ 假如需要删除的元素在非叶子节点中

1. 先找到前驱或后继元素，覆盖所需删除元素的值
2. 再把前驱或后继元素删除

■ 删除 60

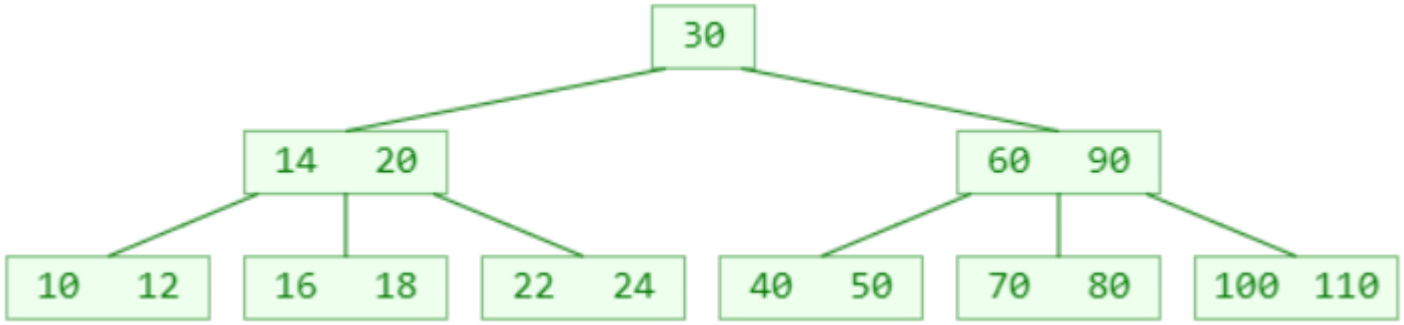




■ 非叶子节点的前驱或后继元素，必定在叶子节点中

- 所以这里的删除前驱或后继元素 ， 就是最开始提到的情况：删除的元素在叶子节点中
- 真正的删除元素都是发生在叶子节点中

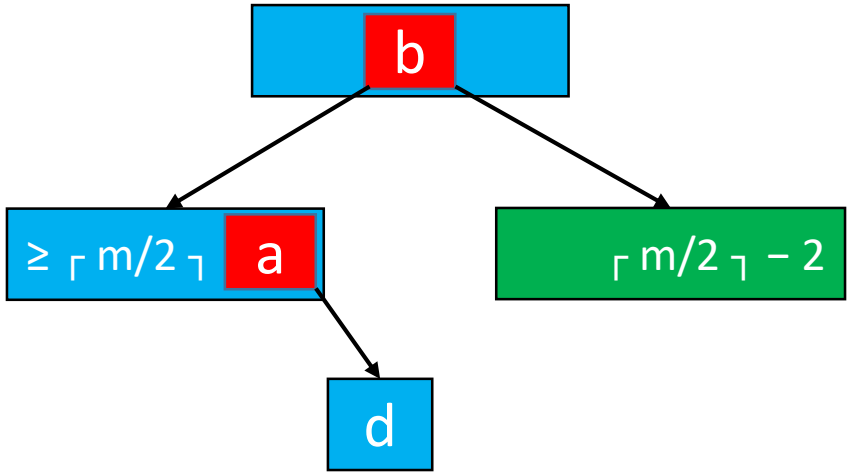
删除 – 下溢

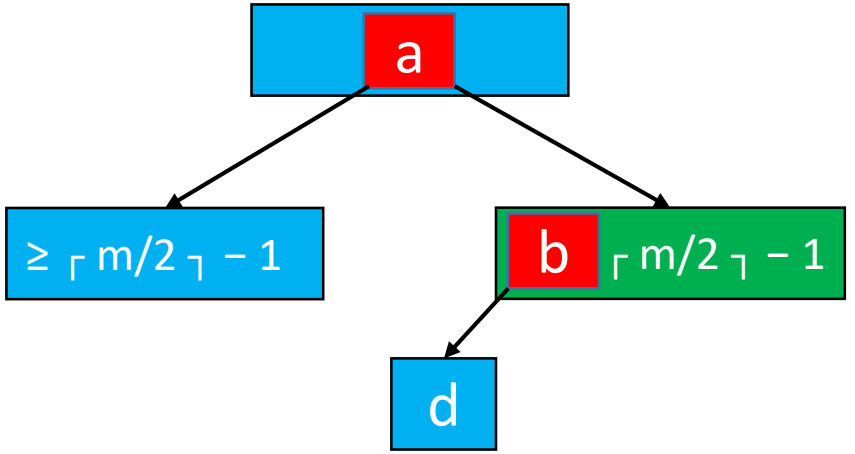


- 删除 22？（假设这是一棵 5阶B树）
- 叶子节点被删掉一个元素后，元素个数可能会低于最低限制（ ≥ ⌈m/2⌉ – 1 ）
- 这种现象称为：下溢（underflow）

删除 – 下溢的解决

- 下溢节点的元素数量必然等于 $\lceil m/2 \rceil - 2$
- 如果下溢节点临近的兄弟节点，有至少 $\lceil m/2 \rceil$ 个元素，可以向其借一个元素
  - 将父节点的元素 b 插入到下溢节点的 0 位置（最小位置）
  - 用兄弟节点的元素 a（最大的元素）替代父节点的元素 b
  - 这种操作其实就是：旋转

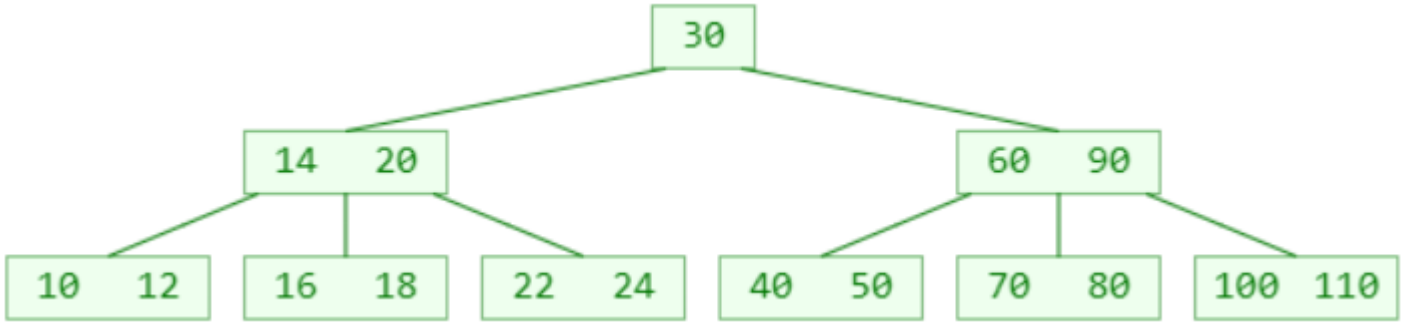




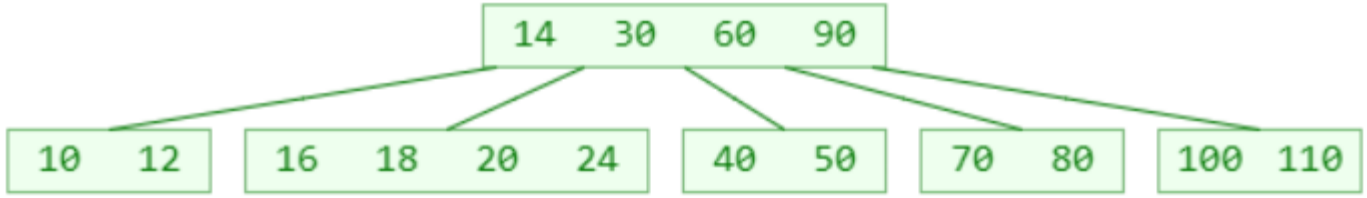
删除 – 下溢的解决

- 如果下溢节点临近的兄弟节点，只有 $\lceil m/2 \rceil - 1$ 个元素
  - 将父节点的元素 b 挪下来跟左右子节点进行合并
  - 合并后的节点元素个数等于 $\lceil m/2 \rceil + \lceil m/2 \rceil - 2$，不超过 $m - 1$
  - 这个操作可能会导致父节点下溢，依然按照上述方法解决，下溢现象可能会一直往上传播

删除



- 删除 22？ （假设这是一棵 5阶B树）



4阶B树

- 如果先学习4阶B树（2-3-4树），将能更好地学习理解红黑树

- 4阶B树的性质
  - 所有节点能存储的元素个数 x：1 ≤ x ≤ 3
  - 所有非叶子节点的子节点个数 y：2 ≤ y ≤ 4

- 添加
  - 从 1 添加到 22

- 删除
  - 从 1 删除到 22