

跳表 (Skip List)

思考

■ 一个有序链表搜索、添加、删除的平均时间复杂度是多少？

□ $O(n)$



■ 能否利用二分搜索优化有序链表，将搜索、添加、删除的平均时间复杂度降低至 $O(\log n)$ ？

□ 链表没有像数组那样的高效随机访问（ $O(1)$ 时间复杂度），所以不能像有序数组那样直接进行二分搜索优化

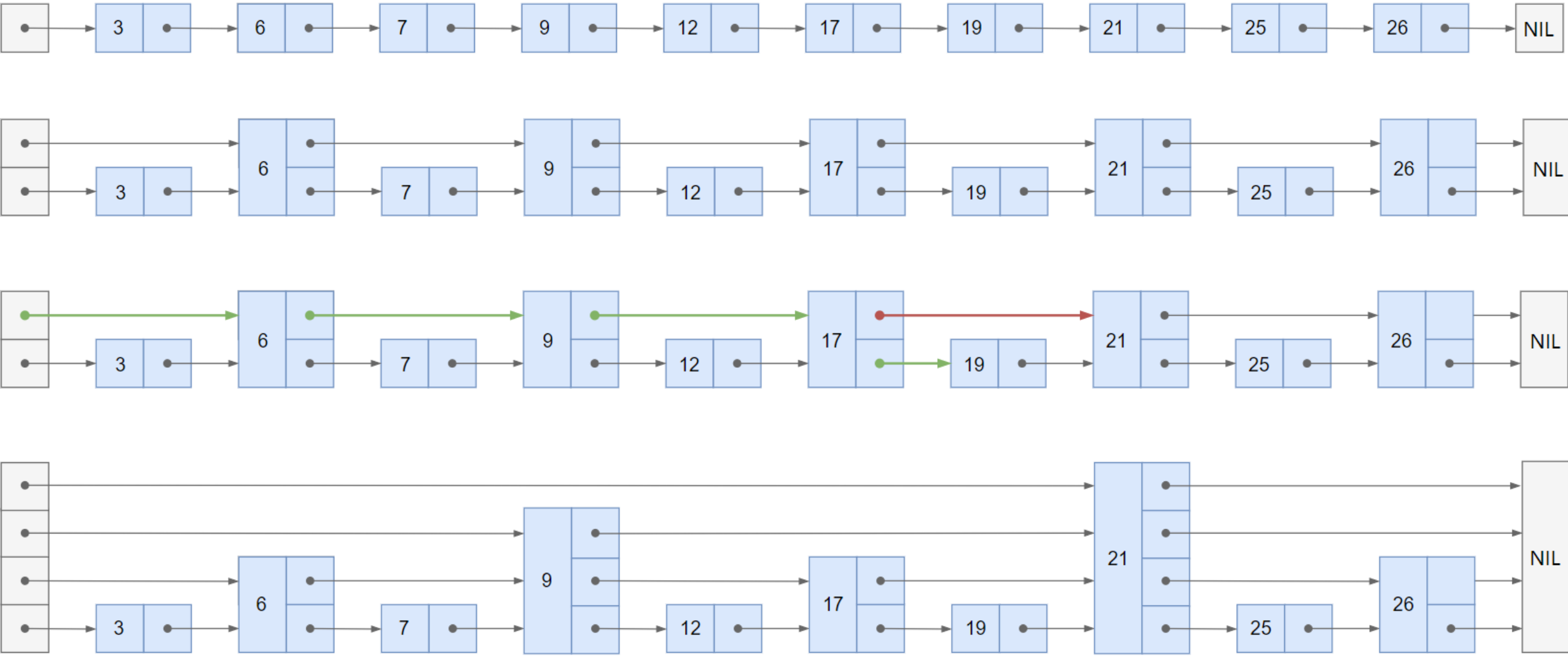
■ 那有没有其他办法让有序链表搜索、添加、删除的平均时间复杂度降低至 $O(\log n)$ ？

□ 使用跳表 (SkipList)

跳表 (SkipList)

- 跳表，又叫做跳跃表、跳跃列表，在有序链表的基础上增加了“跳跃”的功能
- 由William Pugh于1990年发布，设计的初衷是为了取代平衡树（比如红黑树）
- Redis中的 SortedSet、LevelDB 中的 MemTable 都用到了跳表
- Redis、LevelDB 都是著名的 Key-Value 数据库
- 对比平衡树
- 跳表的实现和维护会更加简单
- 跳表的搜索、删除、添加的平均时间复杂度是 $O(\log n)$

使用跳表优化链表（图片来源于网络）

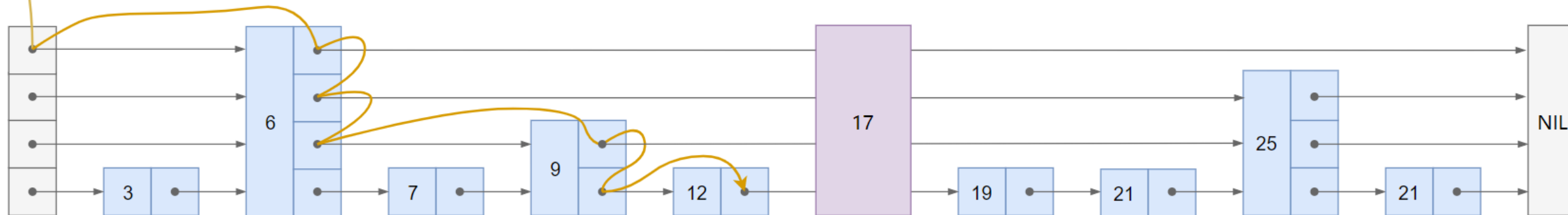


跳表的搜索

- ① 从顶层链表的首元素开始，从左往右搜索，直至找到一个大于或等于目标的元素，或者到达当前层链表的尾部
- ② 如果该元素等于目标元素，则表明该元素已被找到
- ③ 如果该元素大于目标元素或已到达链表的尾部，则退回到当前层的前一个元素，然后转入下一层进行搜索

跳表的添加、删除

Search Path



■ 添加的细节

- 随机决定新添加元素的层数

■ 删除的细节

- 删除一个元素后，整个跳表的层数可能会降低

跳表的层数

- 跳表是按层构造的，底层是一个普通的有序链表，高层相当于是低层的“快速通道”
- 在第 i 层中的元素按某个固定的概率 p （通常为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{4}$ ）出现在第 $i + 1$ 层中，产生越高的层数，概率越低
- ✓ 元素层数恰好等于 1 的概率为 $1 - p$
- ✓ 元素层数大于等于 2 的概率为 p ，而元素层数恰好等于 2 的概率为 $p * (1 - p)$
- ✓ 元素层数大于等于 3 的概率为 p^2 ，而元素层数恰好等于 3 的概率为 $p^2 * (1 - p)$
- ✓ 元素层数大于等于 4 的概率为 p^3 ，而元素层数恰好等于 4 的概率为 $p^3 * (1 - p)$
- ✓
- ✓ 一个元素的平均层数是 $1 / (1 - p)$

$$1 \times (1-p) + 2p(1-p) + 3p^2(1-p) + 4p^3(1-p) + \dots = (1-p) \sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} = (1-p) \cdot \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{1-p}$$

- 当 $p = \frac{1}{2}$ 时，每个元素所包含的平均指针数量是 2
- 当 $p = \frac{1}{4}$ 时，每个元素所包含的平均指针数量是 1.33

跳表的复杂度分析

■ 每一层的元素数量

- 第 1 层链表固定有 n 个元素
- 第 2 层链表平均有 $n * p$ 个元素
- 第 3 层链表平均有 $n * p^2$ 个元素
- 第 k 层链表平均有 $n * p^k$ 个元素
- ...

■ 另外

- 最高层的层数是 $\log_{1/p} n$, 平均有个 $1/p$ 元素
- 在搜索时, 每一层链表的预期查找步数最多是 $1/p$, 所以总的查找步数是 $-(\log_p n / p)$, 时间复杂度是 $O(\log n)$