动态规划（Dynamic Programming）

动态规划（Dynamic Programming）

- 动态规划，简称DP
- 是求解最优化问题的一种常用策略

面试题47． 礼物的最大价值

在一个 m*n 的棋盘的每一格都放有一个礼物，每个礼物都有一定的价值（价值大于 0）。你可以从棋盘的左上角开始拿格子里的礼物，并每次向右或者向下移动一格、直到到达棋盘的右下角。给定一个棋盘及其上面的礼物的价值，请计算你最多能拿到多少价值的礼物？

输入:

```
[
  [1,3,1],
  [1,5,1],
  [4,2,1]
]
```

输出: 12

解释: 路径 1→3→5→2→1 可以拿到最多价值的礼物

提示:

- `0 < grid.length <= 200`
- `0 < grid[0].length <= 200`

■ 类似的题目

□ 64． 最小路径和

□ 62． 不同路径

- 假设dp[row][col]是走到[row][col]位置时的最大价值

```
{ 1, 3, 1, 2 },
{ 1, 5, 1, 3 },
{ 4, 2, 1, 4 },
{ 3, 2, 6, 5 }
```

- 你是如何走到[row][col]位置的？有2种可能
  - 从[row][col - 1]位置往右走
  - 从[row - 1][col]位置往下走

		[row - 1][col]
	[row][col - 1]	[row][col]

dp	0	1	2	3
0	1	4	5	7
1	2	9	10	13
2	6	11	12	17
3	9	13	19	24

- 所以dp[row][col] = max(dp[row][col - 1], dp[row - 1][col]) + grid[row][col]

121. 买卖股票的最佳时机

假设把某股票的价格按照时间先后顺序存储在数组中，请问买卖该股票一次可能获得的最大利润是多少?

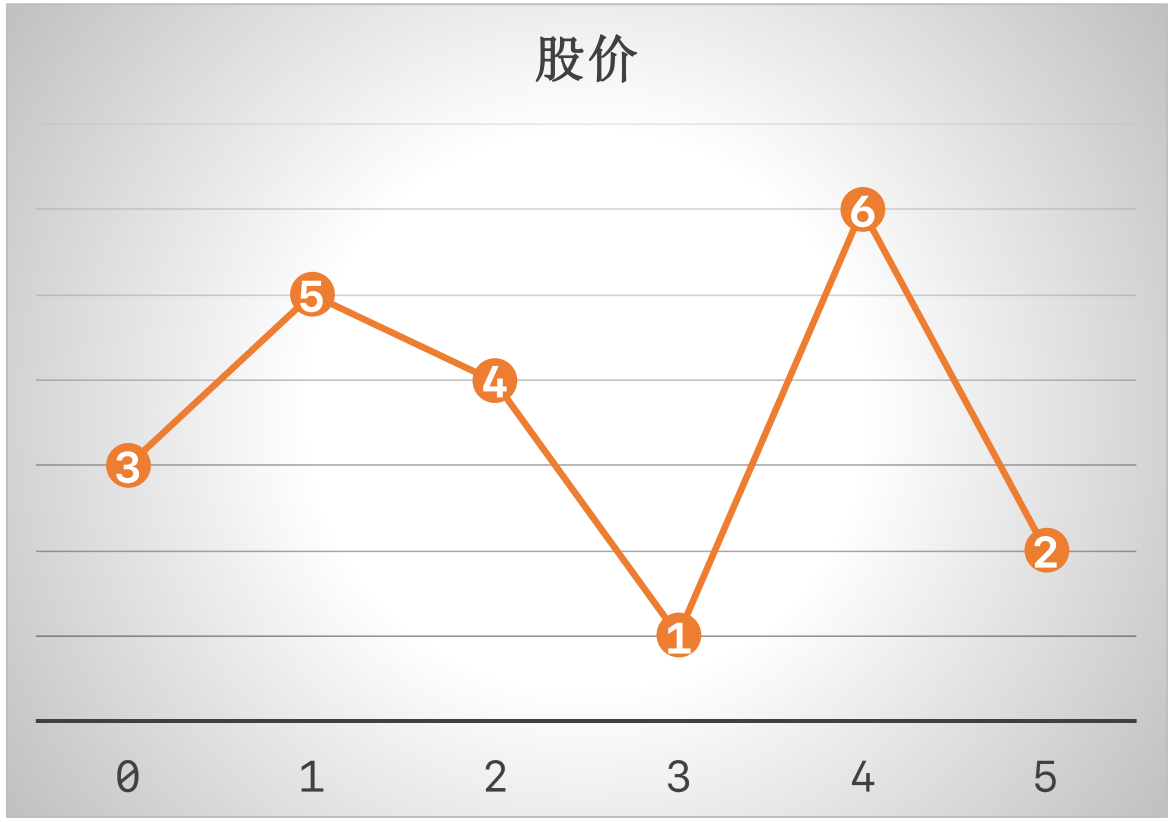
输入: [7,1,5,3,6,4]
输出: 5
解释: 在第 2 天（股票价格 = 1）的时候买入，在第 5 天（股票价格 = 6）的时候卖出，最大利润 = 6-1 = 5 。
注意利润不能是 7-1 = 6, 因为卖出价格需要大于买入价格。

输入: [7,6,4,3,1]
输出: 0
解释: 在这种情况下, 没有交易完成, 所以最大利润为 0。

- 相同的题目
- 面试题63. 股票的最大利润

- 时间复杂度：O(n)
- 空间复杂度：O(1)

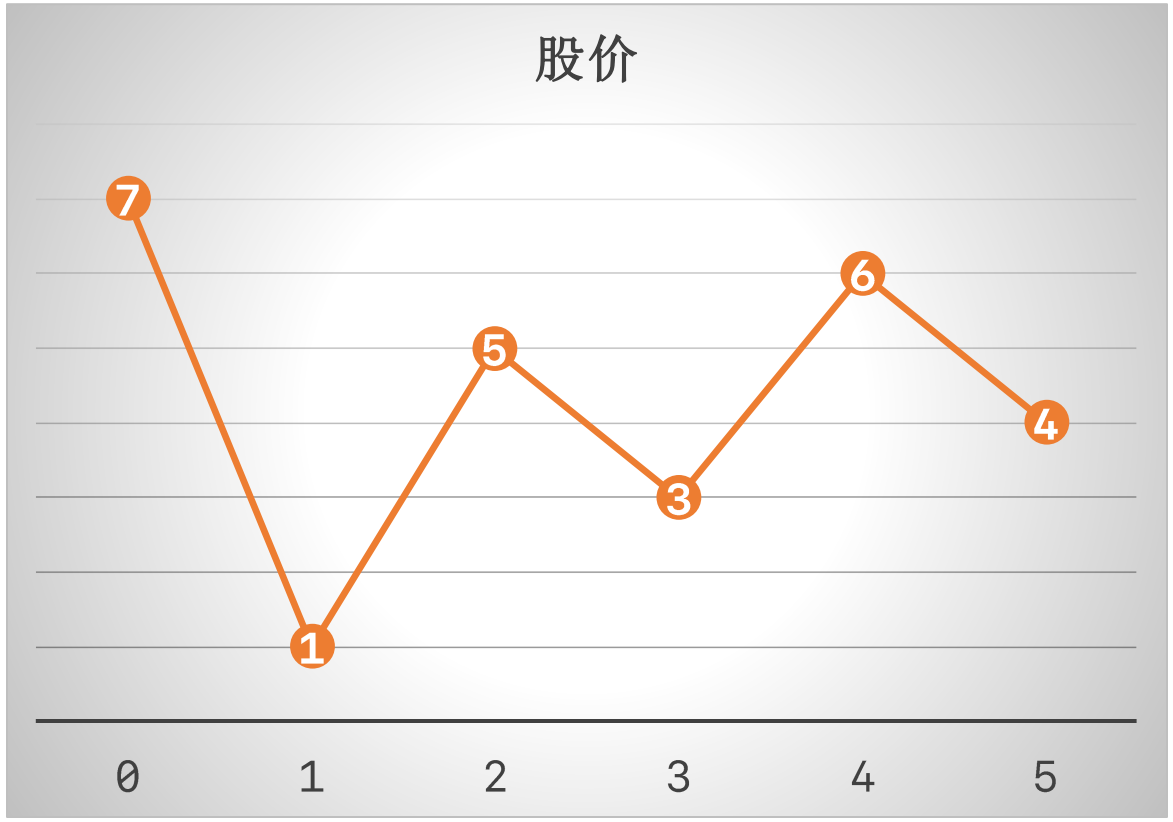
0	1	2	3	4	5
3	5	4	1	6	2



卖出价	3	5	4	1	6	2
买入价		3	3		1	1
利润		2	1		5	1

动态规划

0	1	2	3	4	5
7	1	5	3	6	4



- 第i天买，第j天卖的利润是
  - 第i~j天内，所有相邻两天股价差的和

- 第1天买，第4天卖的利润是
  - (6-3)+(3-5)+(5-1) == 6-1 == 5

相邻两天的股价差				
0~1	1~2	2~3	3~4	4~5
-6	4	-2	3	-2

- 于是，转化为了求【最大子数组和】的问题
  - 也就是求【最大连续子序列和】的问题

72. 编辑距离

给定两个单词 *word1* 和 *word2*，计算出将 *word1* 转换成 *word2* 所使用的最少操作数 。

你可以对一个单词进行如下三种操作：

1. 插入一个字符
2. 删除一个字符
3. 替换一个字符

```
输入：word1 = "horse", word2 = "ros"
输出：3
解释：
horse -> rorse (将 'h' 替换为 'r')
rorse -> rose (删除 'r')
rose -> ros (删除 'e')
```

编辑距离算法被数据科学家广泛应用，是用作机器翻译和语音识别评价标准的基本算法。

				s2[0]	s2[1]	s2[2]	s2[3]	s2[4]
			j	a	r	i	s	e
		dp	0	1	2	3	4	5
	i	0						
s1[0]	m	1						
s1[1]	i	2						
s1[2]	c	3						
s1[3]	e	4						

- 假设字符串1（“mice”）为s1，它的长度为n1；字符串2（“arise”）为s2，它的长度为n2
- dp是大小为(n1 + 1) * (n2 + 1)的二维数组
- dp[i][j]是s1[0, i)转换成s2[0, j)的最少操作数
  - s1[0, i)是由s1的前i个字符组成的子串
  - s2[0, j)是由s2的前j个字符组成的子串

- 很显然，dp[n1][n2]就是我们要的答案，就是s1[0, n1)转换成s2[0, n2)的最少操作数
  - 也就是s1转换成s2的最少操作数

				s2[0]	s2[1]	s2[2]	s2[3]	s2[4]
			j	a	r	i	s	e
		dp	0	1	2	3	4	5
	i	0	0	1	2	3	4	5
s1[0]	m	1	1					
s1[1]	i	2	2					
s1[2]	c	3	3					
s1[3]	e	4	4					

- 最左上角的dp[0][0]：代表s1的空子串转换为s2的空子串的最少操作数
  - 其实就是什么也不用做，所以：dp[0][0] = 0

- 第0列的dp[i][0]：代表s1[0, i)转换为s2的空子串的最少操作数
  - 其实就是删除s1[0, i)的所有字符，所以：dp[i][0] = i

- 第0行的dp[0][j]：代表s1的空子串转换为s2[0, j)的最少操作数
  - 其实就是插入s2[0, j)的所有字符，所以：dp[0][j] = j

				0	1	2	3	4
			j	a	r	i	s	e
		dp	0	1	2	3	4	5
	i	0	0	1	2	3	4	5
0	m	1	1	1	2	3	4	5
1	i	2	2	2	2	2	3	4
2	c	3	3	3	3	3	3	4
3	e	4	4	4	4	4	4	3

- 如何求出其他位置的dp[i][j]?
  - dp[i][j]是s1[0, i)转换成s2[0, j)的最少操作数
  - 可以分4种情况讨论

① 先删除s1[0, i)的最后一个字符得到s1[0, i - 1)
- 然后由s1[0, i - 1)转换为s2[0, j)
- 这种情况下，dp[i][j] = 1 + dp[i - 1][j]

② 先由s1[0, i)转换为s2[0, j - 1)，然后在最后插入字符s2[j - 1]，得到s2[0, j)
- 这种情况下，dp[i][j] = dp[i][j - 1] + 1

③ 如果s1[i - 1] != s2[j - 1]，先由s1[0, i - 1)转换为s2[0, j - 1)
- 然后将s1[i - 1]替换为s2[j - 1]，这种情况下，dp[i][j] = dp[i - 1][j - 1] + 1

④ 如果s1[i - 1] == s2[j - 1]，由s1[0, i - 1)转换为s2[0, j - 1)后就不用再做任何操作
- 这种情况下，dp[i][j] = dp[i - 1][j - 1]

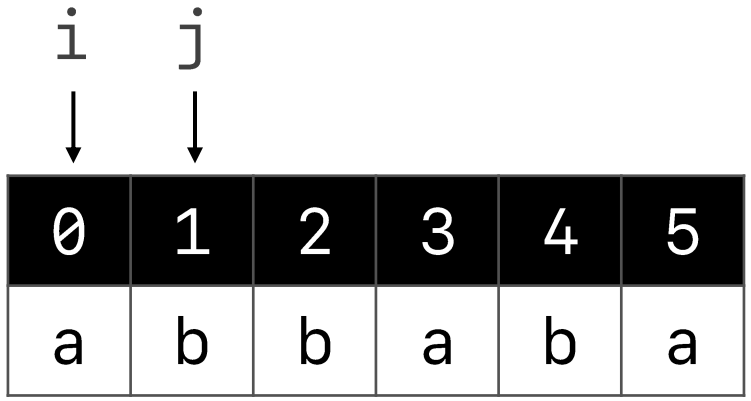
5. 最长回文子串

给定一个字符串 `s`，找到 `s` 中最长的回文子串。你可以假设 `s` 的最大长度为 1000。

输入："babad"
输出："bab"
注意："aba" 也是一个有效答案。

输入："cbbd"
输出："bb"

暴力法



- 列举出所有的子串，时间复杂度： O(n^2)
- 检查每一个子串是否为回文串，每一个子串所需时间复杂度：O(n)
- 总共时间复杂度：O(n^3)，空间复杂度：O(1)

	j	b	a	b	a	d
i	dp	0	1	2	3	4
b	0	T	F	T	F	F
a	1		T	F	T	F
b	2			T	F	F
a	3				T	F
d	4					T

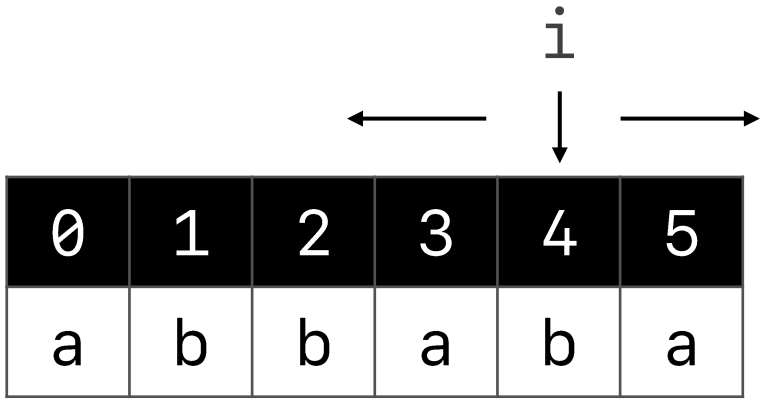
- 动态规划解法
  - 其实是基于暴力法的优化，优化的部分：判断每个串是否为回文串
  - 时间复杂度：O(n^2)
  - 空间复杂度：O(n^2)
  - 空间复杂度可以优化至O(n)

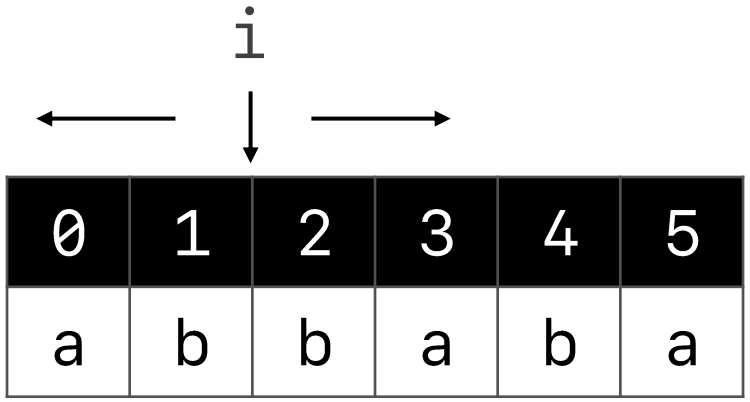
- 假设字符串（"babad"）为s，它的长度为n
- dp是大小为n * n的二维数组，dp[i][j]表示s[i, j]是否为回文串，存储true、false
- 如何求出dp[i][j]的值？分2种情况

① 如果s[i, j]的长度 (j - i + 1) ≤ 2时
- 如果s[i]等于s[j]，那么s[i, j]是回文串，所以dp[i][j] = s[i] == s[j]

② 如果s[i, j]的长度 (j - i + 1) > 2时
- 如果s[i + 1, j - 1]是回文串，并且s[i]等于s[j]，那么s[i, j]是回文串
- 所以dp[i][j] = dp[i + 1, j - 1] && (s[i] == s[j])

扩展中心法





- 假设字符串（“abbaba”）的长度为n，那么一共有n + （n – 1） == 2n – 1个扩展中心
- 时间复杂度：O(n^2)
- 空间复杂度：O(1)

基于扩展中心法的优化

i r

0	1	2	3	4	5	6	7	8
b	a	b	b	b	a	b	a	a

- 算法的核心思想：由连续的相同字符组成的子串作为扩展中心
- 所以，字符串“babbbabaa”的扩展中心有
  - “b”、“a”、“bbb”、“a”、“b”、“aa”

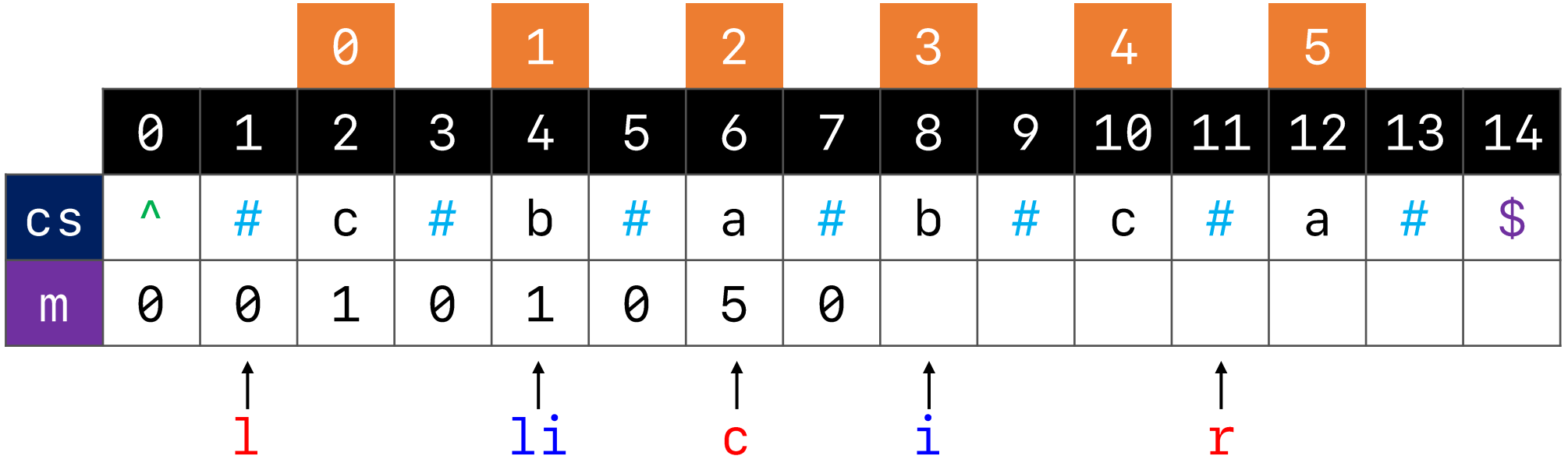
- 核心逻辑
  - 找到右边第一个不等于s[i]的字符，记为位置r，i左边位置记为l
  - r作为下一次的i
  - 由l开始向左、r开始向右扩展，找到最长的回文子串

Manacher（马拉车）

			0		1		2		3		4		5		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
cs	^	#	a	#	b	#	b	#	a	#	b	#	a	#	$
m	0	0	1	0	1	4	1	0	3	0	3	0	1	0	0

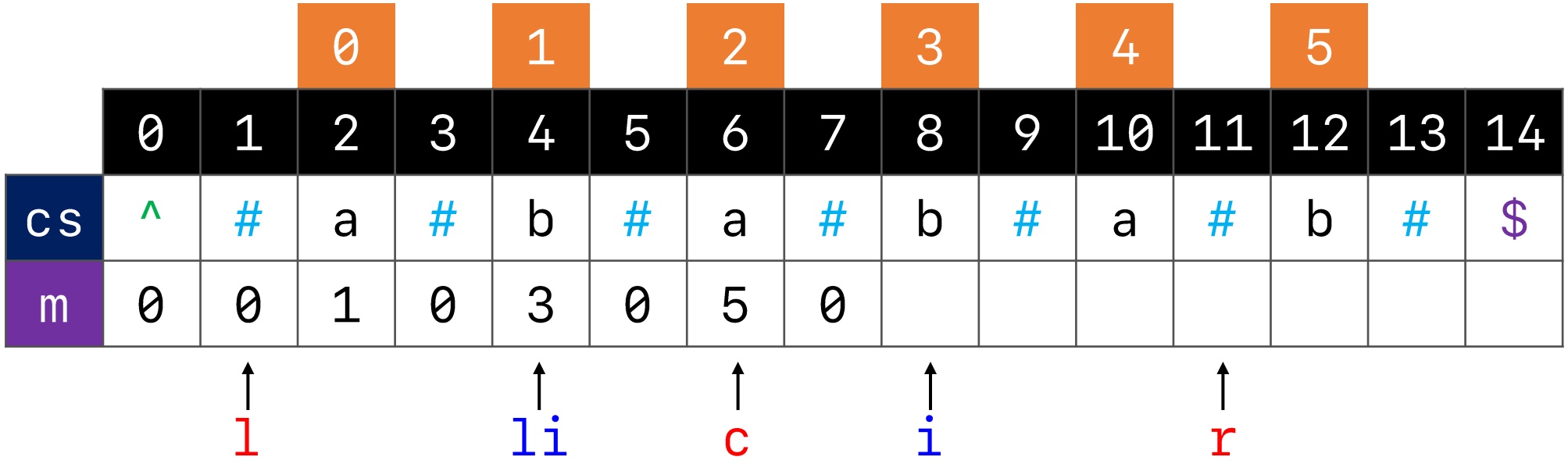
- 中间的#字符可以是任意字符，头部的^字符、尾部的$字符，必须是原字符串中不包含的字符
- m[i]的含义
  - 是以cs[i]为扩展中心的最大回文子串的长度（不包含#字符）
  - ✓ 最大回文子串在原字符串中的开始索引：(i – m[i]) >> 1
  - 是以cs[i]为扩展中心的最大回文子串的右半部分或左半部分的长度（包含#字符）
- 所以，Manacher算法的关键在于求出m数组

Manacher（马拉车）



- 已知
  - 索引l、li、c、i、r的值分别为1、4、6、8、11
  - cs[l, r]是以c为中心的最大回文串
  - i、li以c为中心对称，m[i]是待求项
  - m[li] == 1
  - i + m[li] < r
- 由于回文的对称性，得出结论
  - m[i] = m[li]
  - m[i] == 1

Manacher（马拉车）



- 已知
  - m[li] == 3
  - i + m[li] == r
- 结论
  - m[i]至少是m[li]，也就是说，至少是3
  - 接下来利用扩展中心法以i为中心计算出m[i]
- 当i + m[i] > r时，更新c、r
  - c = i
  - r = i + m[i]

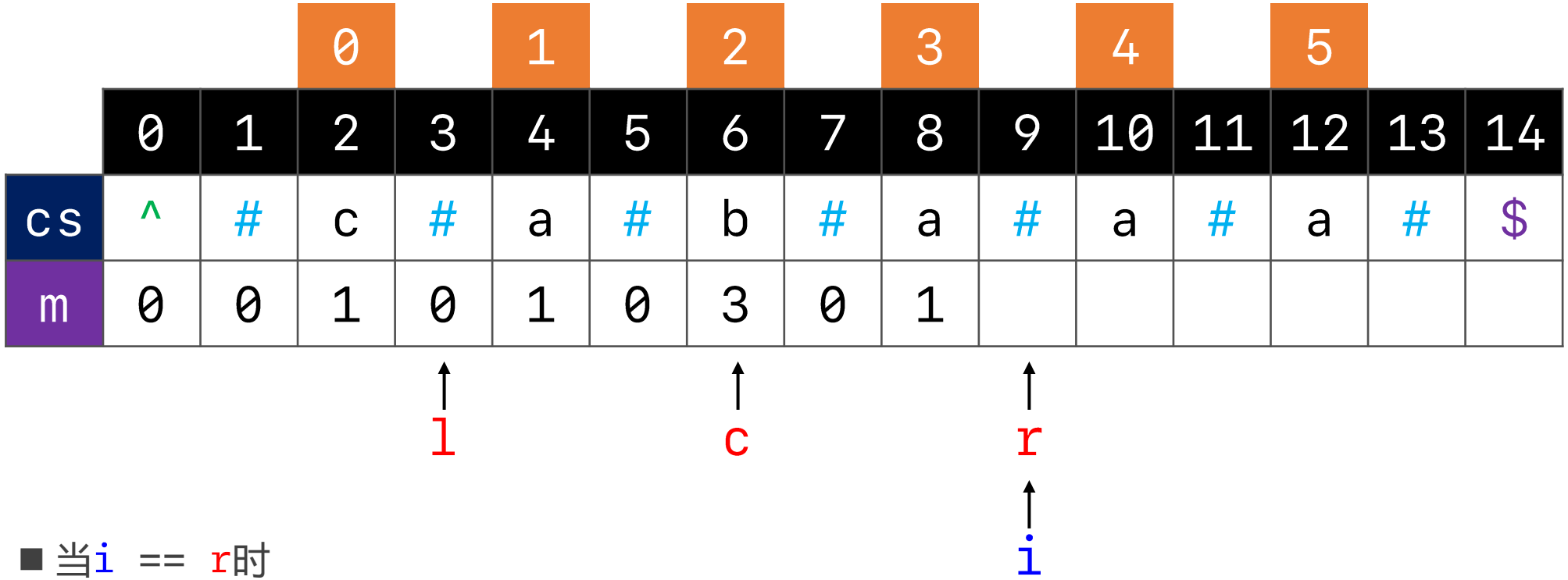
Manacher（马拉车）

		0		1		2		3		4		5		6		7		8		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
cs	^	#	c	#	b	#	a	#	b	#	c	#	b	#	a	#	b	#	b	#	$
m	0	0	1	0	1	0	5	0	1	0	7	0	1	0							

l li c i r

- 已知
  - m[li] == 5
  - i + m[li] > r
- 结论
  - m[i]至少是r – i，也就是说，至少是3
  - 接下来利用扩展中心法以i为中心计算出m[i]
- 当i + m[i] > r时，更新c、r
  - c = i
  - r = i + m[i]

Manacher（马拉车）



- 当i == r时
  - 直接利用扩展中心法以i为中心计算出m[i]

- 当i + m[i] > r时，更新c、r
  - c = i
  - r = i + m[i]

作业

- 将面试题47．礼物的最大价值、72．编辑距离、5．最长回文子串中的二维数组优化成一维数组
- 1143．最长公共子序列（第二季中讲过）
- 53．最大子序和、面试题42．连续子数组的最大和（第二季中讲过）
- 322．零钱兑换、面试题 08.11．硬币（第二季中讲过）
- 300．最长上升子序列（第二季中讲过）
- 70．爬楼梯（第二季中讲过）
- 198．打家劫舍（每周一到算法题中讲过）、213．打家劫舍 II

作业

- 674．最长连续递增序列
- 63．不同路径 II
- 122．买卖股票的最佳时机 II
- 123．买卖股票的最佳时机 III
- 188．买卖股票的最佳时机 IV
- 714．买卖股票的最佳时机含手续费

思考题

- 673．最长递增子序列的个数
- 1235．规划兼职工作
- 943．最短超级串
- 516．最长回文子序列
- 376．摆动序列