二叉堆

@M了个J

https://github.com/CoderMJLee

http://cnblogs.com/mjios

思考

- 设计一种数据结构，用来存放整数，要求提供 3 个接口
  - 添加元素
  - 获取最大值
  - 删除最大值

0	1	2	3	4	5	6
31	66	17	15	28	20	59

0	1	2	3	4	5	6
15	17	20	28	31	59	66

	获取最大值	删除最大值	添加元素	
动态数组\双向链表	O(n)	O(n)	O(1)	
有序动态数组\双向链表	O(1)	O(1)	O(n)	全排序有点浪费
BBST	O(logn)	O(logn)	O(logn)	杀鸡用了牛刀

- 有没有更优的数据结构?
  - 堆
    - ✓ 获取最大值：O(1)、删除最大值：O(logn)、添加元素：O(logn)

Top K问题

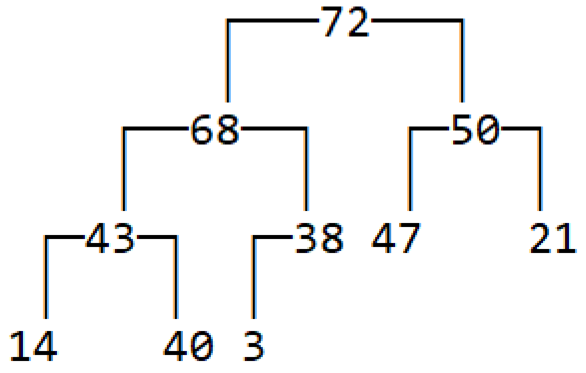
- 什么是 Top K 问题
  - 从海量数据中找出前 K 个数据

- 比如
  - 从 100 万个整数中找出最大的 100 个整数

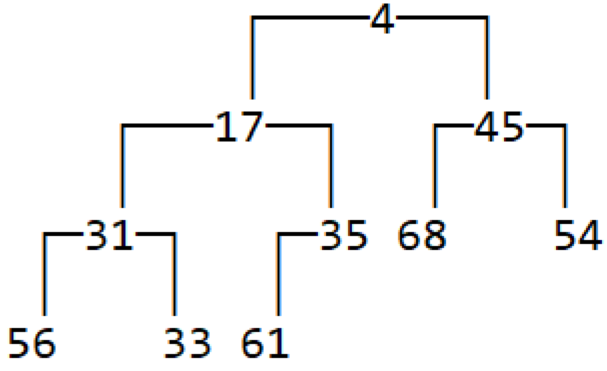
- Top K 问题的解法之一：可以用数据结构“堆”来解决

堆（Heap）

- 堆（Heap）也是一种树状的数据结构（不要跟内存模型中的“堆空间”混淆），常见的堆实现有
  - 二叉堆（Binary Heap，完全二叉堆）
  - 多叉堆（D-heap、D-ary Heap）
  - 索引堆（Index Heap）
  - 二项堆（Binomial Heap）
  - 斐波那契堆（Fibonacci Heap）
  - 左倾堆（Leftist Heap，左式堆）
  - 斜堆（Skew Heap）



最大堆_二叉堆



最小堆_二叉堆

- 堆的一个重要性质：任意节点的值总是 ≥（ ≤ ）子节点的值
  - 如果任意节点的值总是 ≥ 子节点的值，称为：最大堆、大根堆、大顶堆
  - 如果任意节点的值总是 ≤ 子节点的值，称为：最小堆、小根堆、小顶堆

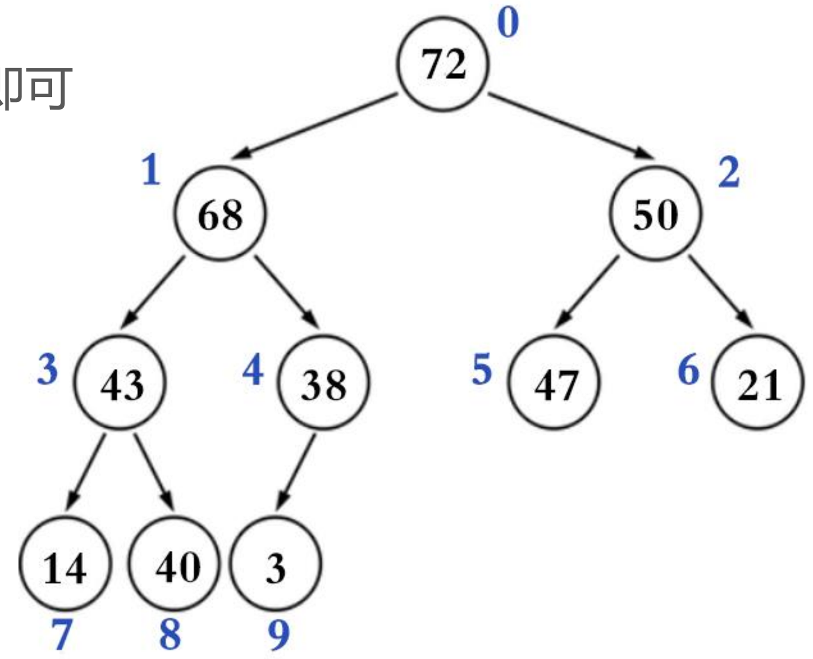
- 由此可见，堆中的元素必须具备可比较性（跟二叉搜索树一样）

堆的基本接口设计

- `int size();` // 元素的数量
- `boolean isEmpty();` // 是否为空
- `void clear();` // 清空
- `void add(E element);` // 添加元素
- `E get();` // 获得堆顶元素
- `E remove();` // 删除堆顶元素
- `E replace(E element);` // 删除堆顶元素的同时插入一个新元素

二叉堆（Binary Heap）

- 二叉堆的逻辑结构就是一棵完全二叉树，所以也叫完全二叉堆
- 鉴于完全二叉树的一些特性，二叉堆的底层（物理结构）一般用数组实现即可
- 索引 i 的规律（ n 是元素数量）
  - 如果 i = 0 ，它是根节点
  - 如果 i > 0 ，它的父节点的索引为 floor((i – 1) / 2)
  - 如果 2i + 1 ≤ n – 1，它的左子节点的索引为 2i + 1
  - 如果 2i + 1 > n – 1 ，它无左子节点
  - 如果 2i + 2 ≤ n – 1 ，它的右子节点的索引为 2i + 2
  - 如果 2i + 2 > n – 1 ，它无右子节点



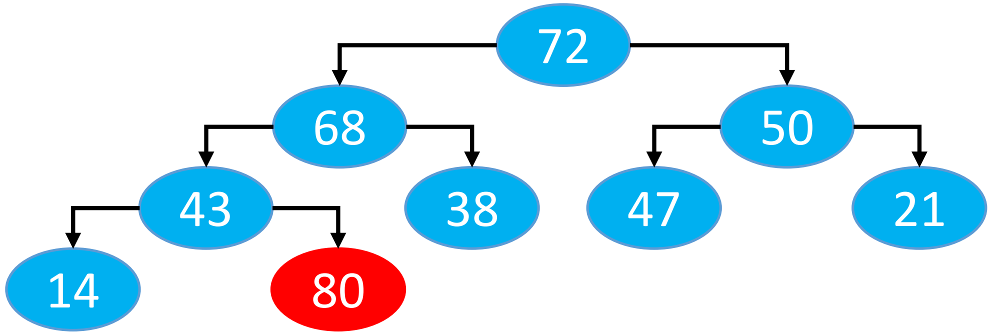
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
72	68	50	43	38	47	21	14	40	3

获取最大值

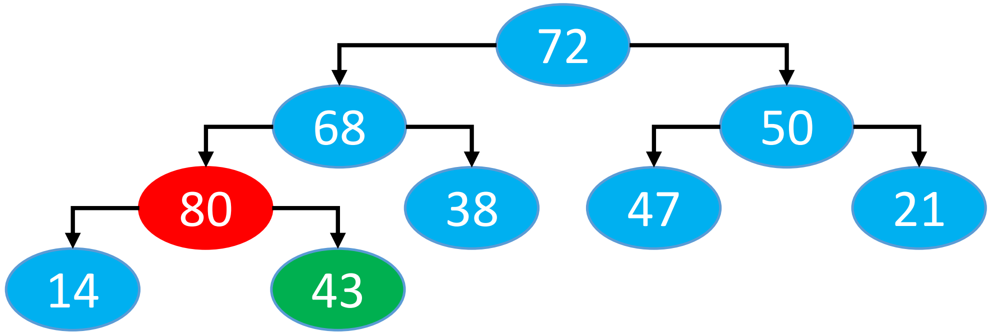
```java
public E get() {
    emptyCheck();
    return elements[0];
}
```

```java
private void emptyCheck() {
    if (size == 0) {
        throw new IndexOutOfBoundsException("Heap is empty");
    }
}
```

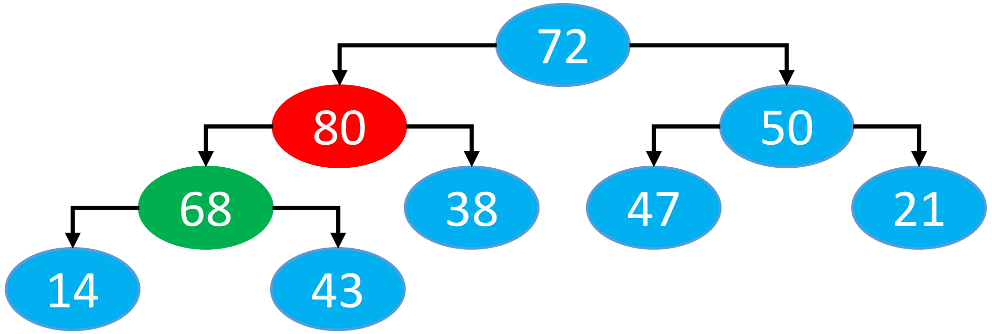
最大堆 – 添加



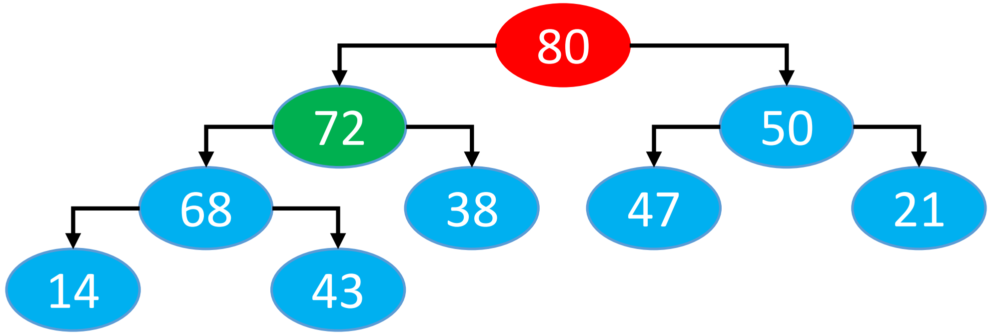
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
72	68	50	43	38	47	21	14	80	



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
72	68	50	80	38	47	21	14	43	

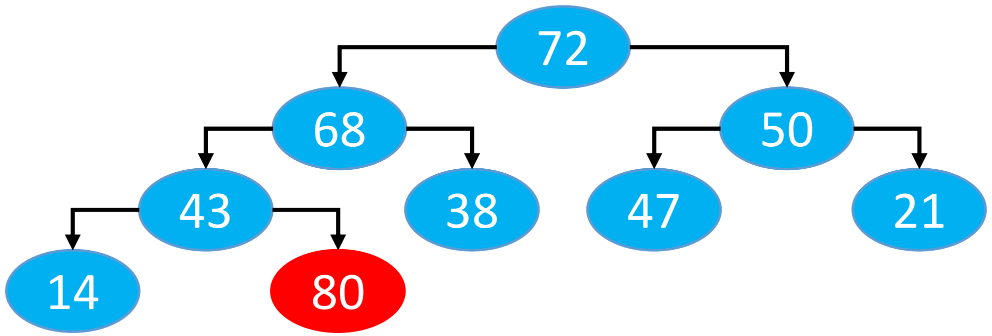


0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
72	80	50	68	38	47	21	14	43	



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
80	72	50	68	38	47	21	14	43	

最大堆 – 添加 – 总结



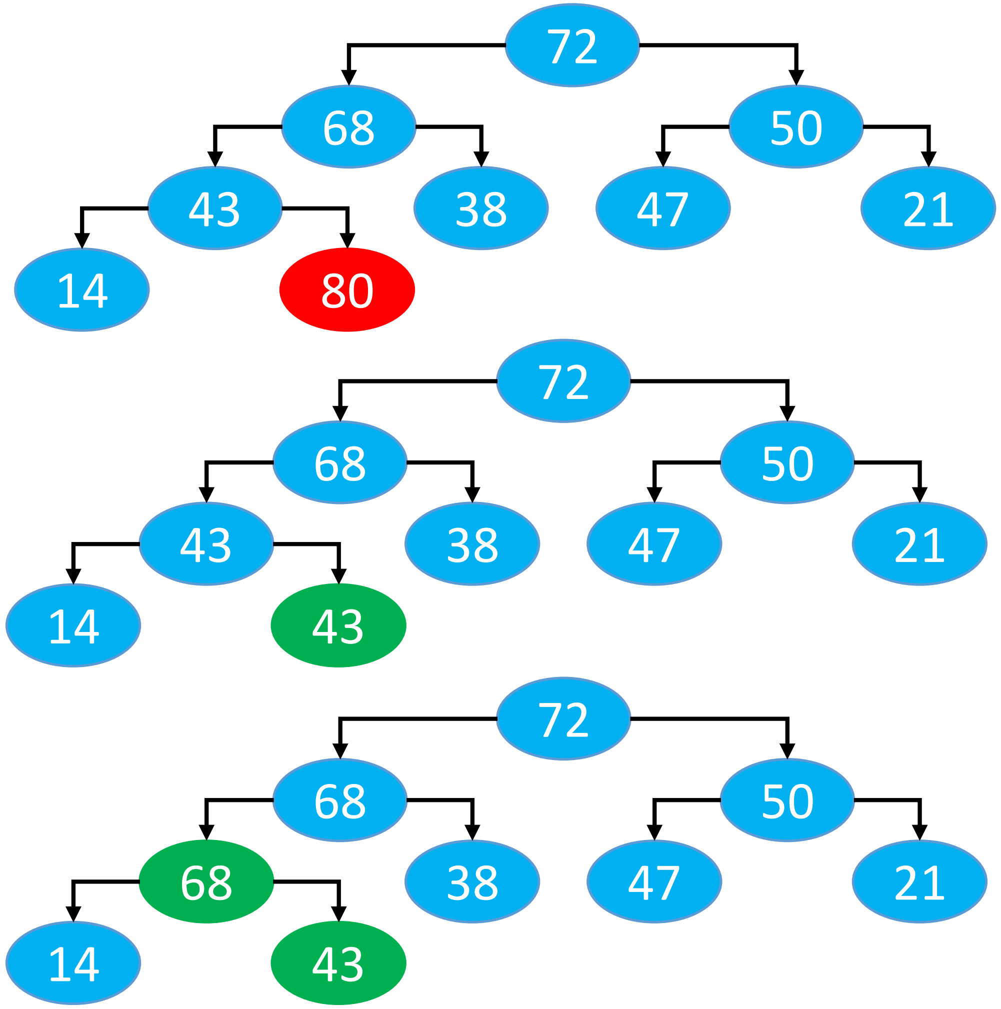
- ■ 循环执行以下操作（图中的 80 简称为 node）
  - □ 如果 node ＞ 父节点
    - ✓ 与父节点交换位置
  - □ 如果 node ≤ 父节点，或者 node 没有父节点
    - ✓ 退出循环
- ■ 这个过程，叫做上滤（Sift Up）
  - □ 时间复杂度：O(logn)

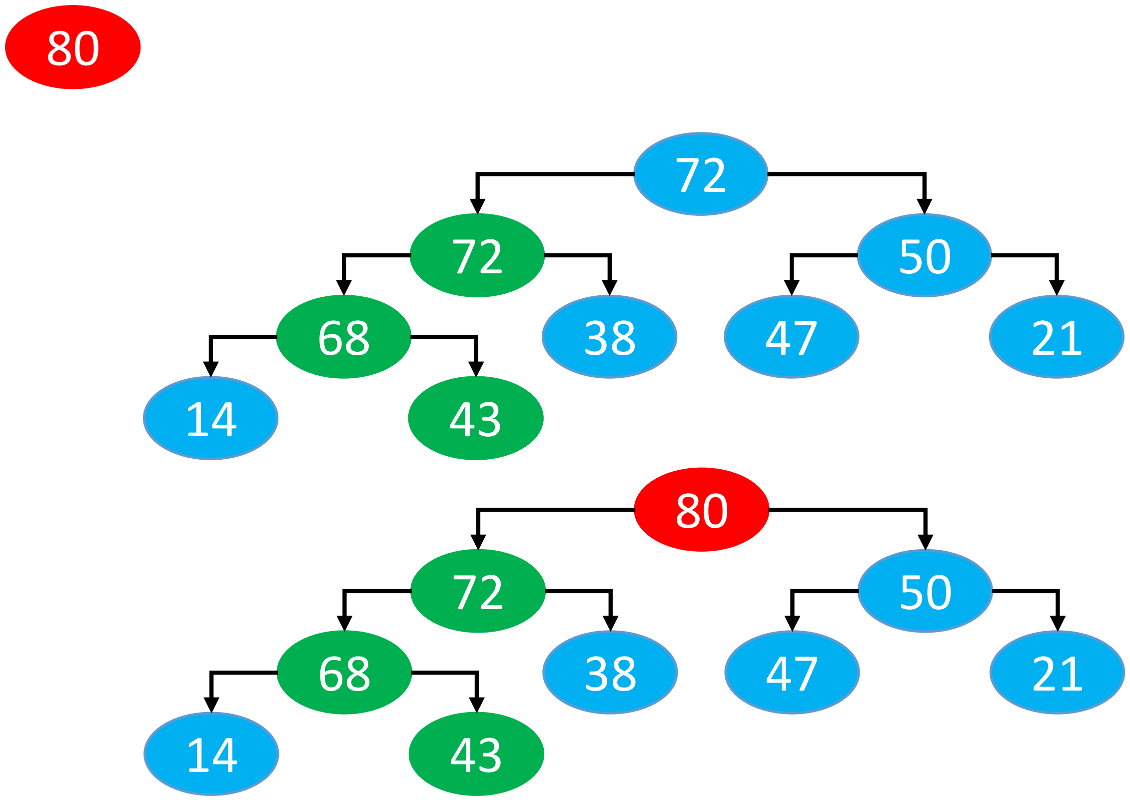
```java
public void add(E element) {
    elementNotNullCheck(element);
    ensureCapacity(size + 1);
    elements[size++] = element;
    siftUp(size - 1);
}
```

```java
private void siftUp(int index) {
    E element = elements[index];
    while (index > 0) {
        int parentIndex = (index - 1) >> 1;
        E parent = elements[parentIndex];
        // 小于父节点
        if (compare(parent, element) >= 0) break;
        // 将父元素安排到index位置
        elements[index] = parent;
        index = parentIndex;
    }
    elements[index] = element;
}
```

最大堆 – 添加 – 交换位置的优化

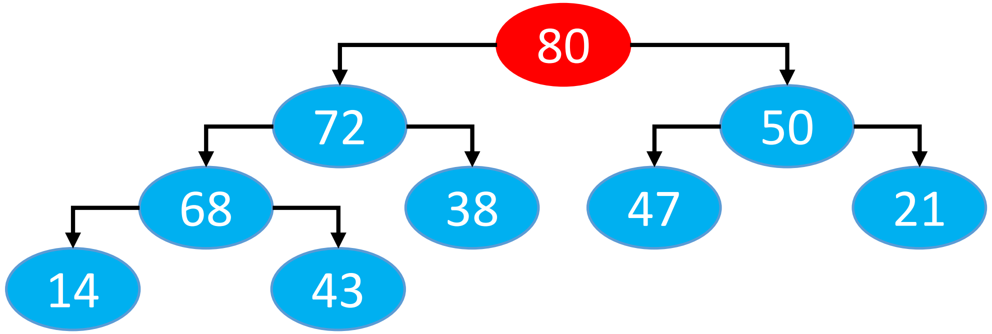
- ■ 一般交换位置需要3行代码，可以进一步优化
- □ 将新添加节点备份，确定最终位置才摆放上去



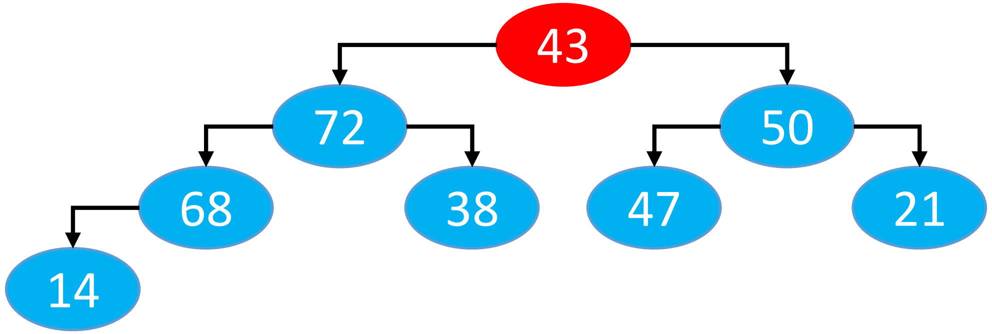


- ■ 仅从交换位置的代码角度看
- □ 可以由大概的 3 * O(logn) 优化到 1 * O(logn) + 1

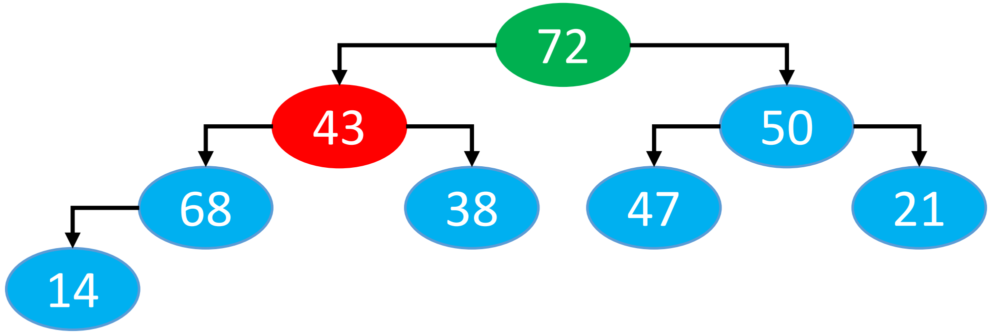
最大堆 – 删除



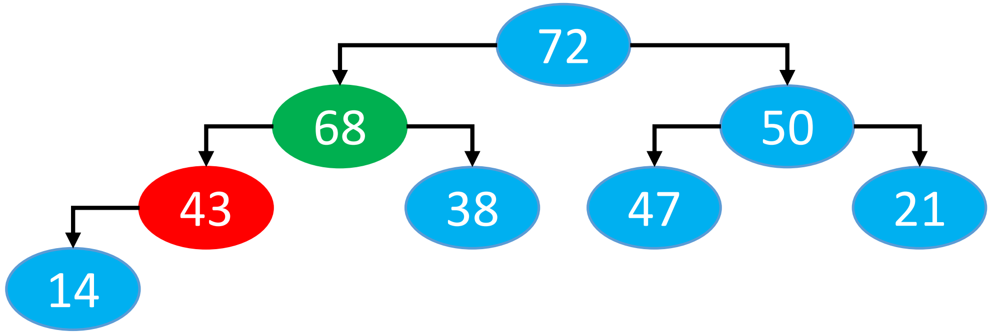
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
80	72	50	68	38	47	21	14	43	



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	72	50	68	38	47	21	14		

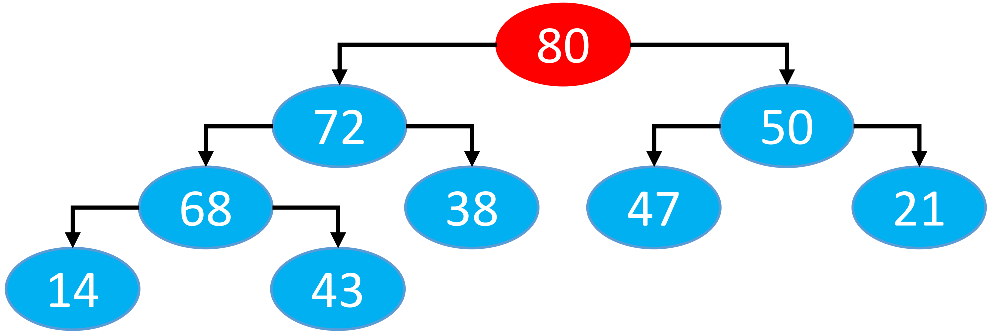


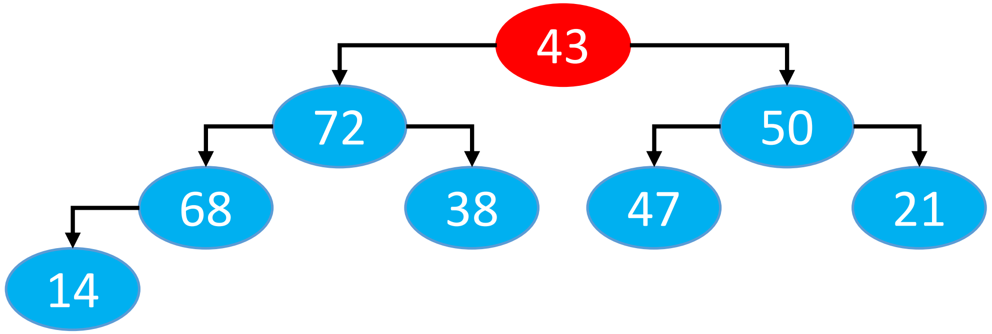
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
72	43	50	68	38	47	21	14		



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
72	68	50	43	38	47	21	14		

最大堆 – 删除 – 总结





1. 用最后一个节点覆盖根节点
2. 删除最后一个节点
3. 循环执行以下操作（图中的 43 简称为 node）

- 如果 node < 最大的子节点
  - ✓ 与最大的子节点交换位置
- 如果 node ≥ 最大的子节点， 或者 node 没有子节点
  - ✓ 退出循环

- 这个过程，叫做下滤（Sift Down），时间复杂度：O(logn)

- 同样的，交换位置的操作可以像添加那样进行优化

最大堆 – 删除

小码哥教育 SEEMYGO

```java
public E remove() {
    emptyCheck();
    E first = elements[0];
    int lastIndex = --size;
    elements[0] = elements[lastIndex];
    elements[lastIndex] = null;
    siftDown(0);
    return first;
}
```

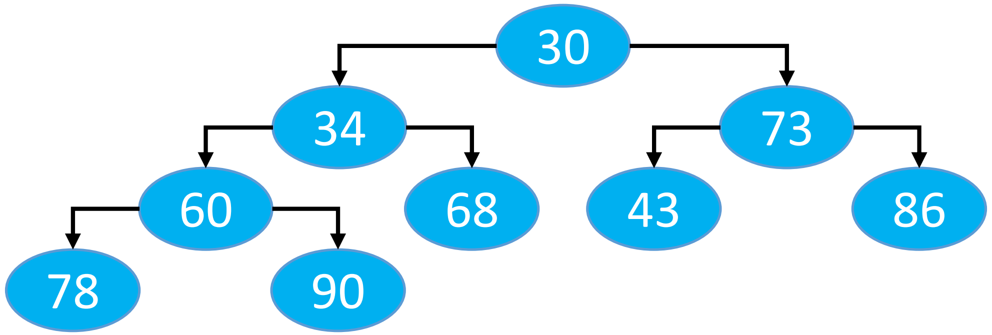
```java
private void siftDown(int index) {
    E element = elements[index];

    int half = size >> 1;
    while (index < half) { // index必须是非叶子节点
        // 默认是左边跟父节点比
        int childIndex = (index << 1) + 1;
        E child = elements[childIndex];

        int rightIndex = childIndex + 1;
        // 右子节点比左子节点大
        if (rightIndex < size &&
                compare(elements[rightIndex], child) > 0) {
            child = elements[childIndex = rightIndex];
        }

        // 大于等于子节点
        if (compare(element, child) >= 0) break;

        elements[index] = child;
        index = childIndex;
    }
    elements[index] = element;
}
```

replace

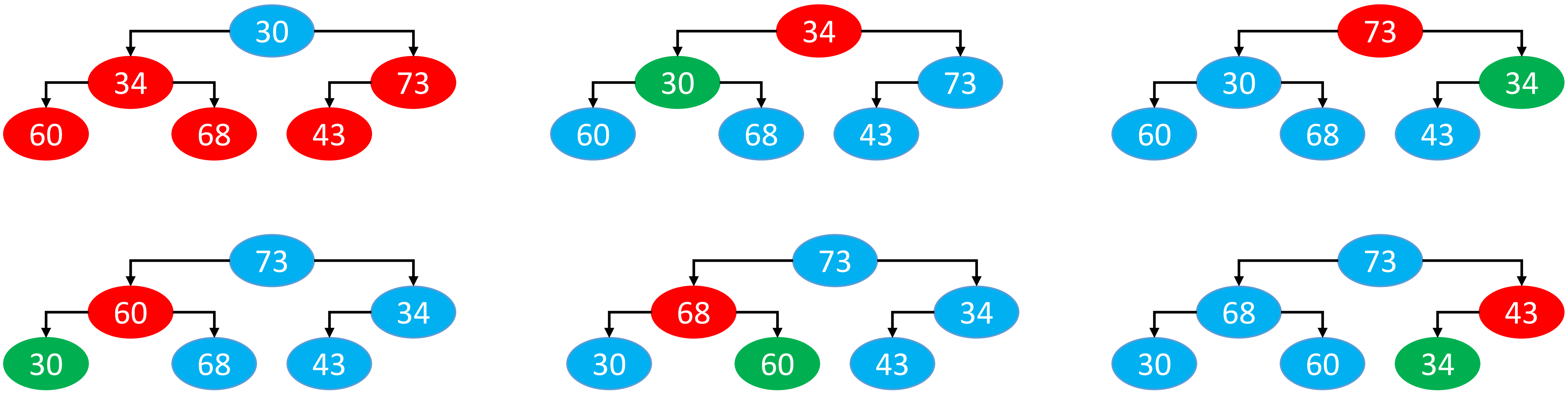
```java
public E replace(E element) {
    E top = null;
    if (size == 0) {
        elements[size++] = element;
    } else {
        top = elements[0];
        elements[0] = element;
        siftDown(0);
    }
    return top;
}
```

最大堆 – 批量建堆（Heapify）

- 批量建堆，有 2 种做法
  - 自上而下的上滤
  - 自下而上的下滤

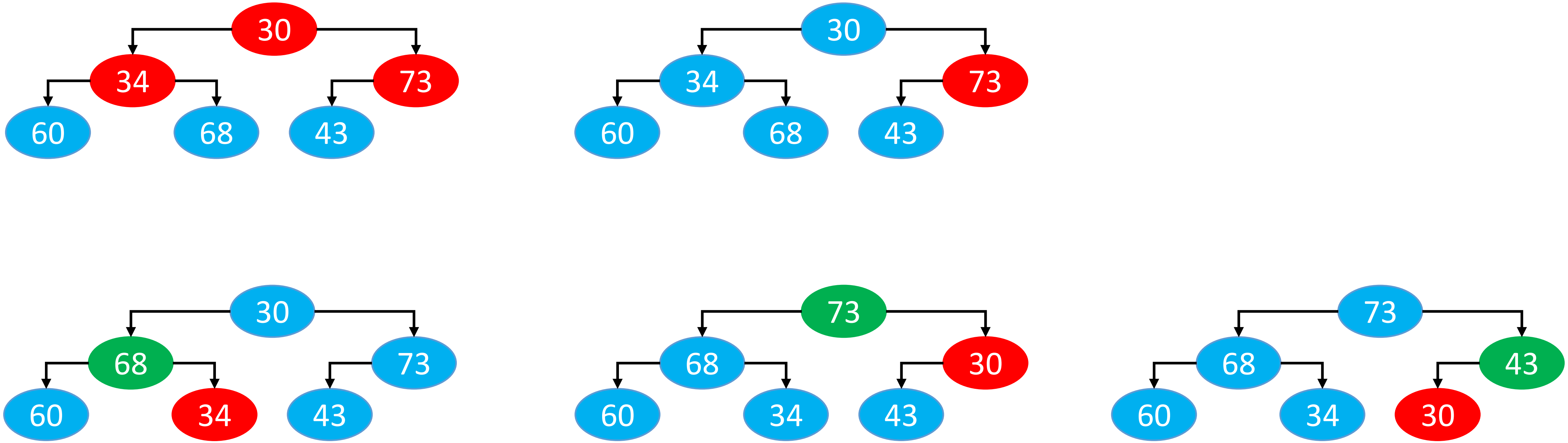


最大堆 – 批量建堆 – 自上而下的上滤



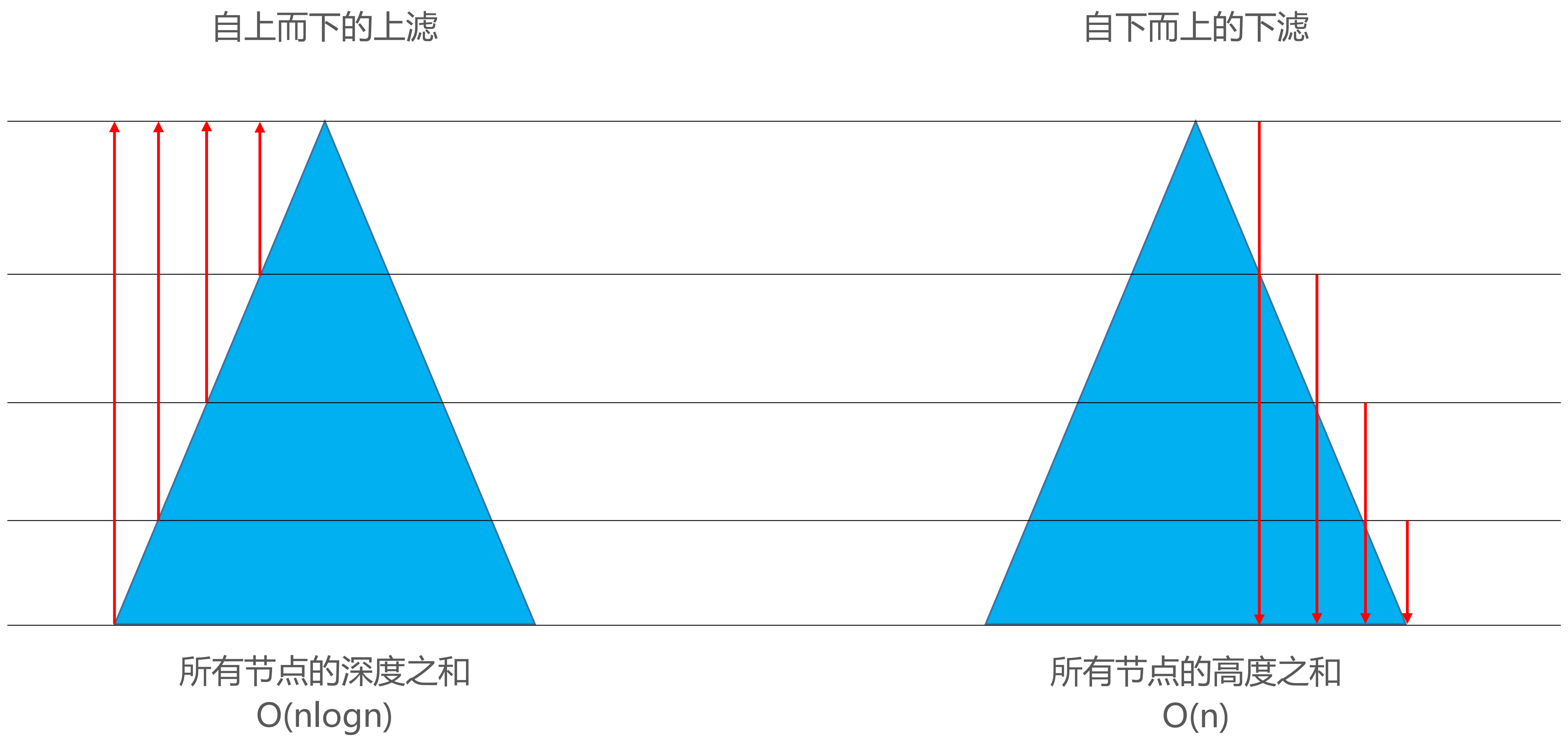

```java
for (int i = 1; i < size; i++) {
    siftUp(i);
}
```

最大堆 – 批量建堆 – 自下而上的下滤




```
for (int i = (size >> 1) - 1; i >= 0; i--) {
    siftDown(i);
}
```

最大堆 – 批量建堆 – 效率对比



最大堆 – 批量建堆 – 效率对比

- 所有节点的深度之和
  - 仅仅是叶子节点，就有近 n/2 个，而且每一个叶子节点的深度都是 O(logn) 级别的
  - 因此，在叶子节点这一块，就达到了 O(nlogn) 级别
  - O(nlogn) 的时间复杂度足以利用排序算法对所有节点进行全排序

- 所有节点的高度之和
  - 假设是满树，节点总个数为 n，树高为 h，那么 $n = 2^h - 1$
  - 所有节点的树高之和 $H(n) = 2^0 * (h-0) + 2^1 * (h-1) + 2^2 * (h-2) + \cdots + 2^{h-1} * [h-(h-1)]$
  - $H(n) = h * \left(2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{h-1}\right) - \left[1 * 2^1 + 2 * 2^2 + 3 * 2^3 + \cdots + (h-1) * 2^{h-1}\right]$
  - $H(n) = h * \left(2^h - 1\right) - \left[(h-2) * 2^h + 2\right]$
  - $H(n) = h * 2^h - h - h * 2^h + 2^{h+1} - 2$
  - $H(n) = 2^{h+1} - h - 2 = 2 * (2^h - 1) - h = 2n - h = 2n - \log_2(n+1) = O(n)$

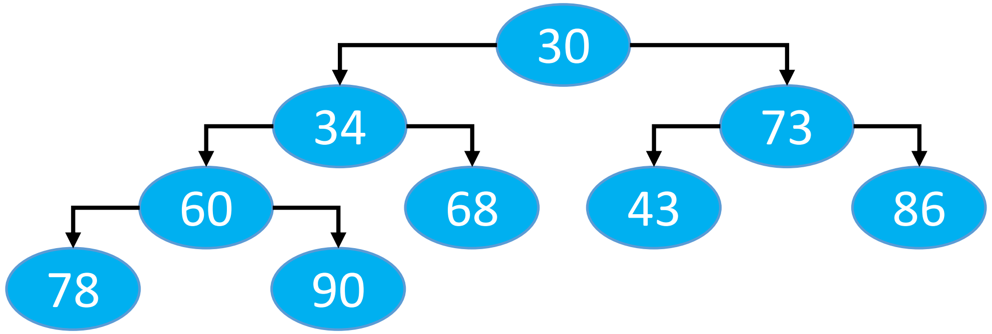
公式推导

- $S(h) = 1*2^1 + 2*2^2 + 3*2^3 + \cdots + (h-2)*2^{h-2} + (h-1)*2^{h-1}$
- $2S(h) = 1*2^2 + 2*2^3 + 3*2^4 + \cdots + (h-2)*2^{h-1} + (h-1)*2^h$
- $S(h) - 2S(h) = [2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{h-1}] - (h-1)*2^h = (2^h - 2) - (h-1)*2^h$
- $S(h) = (h-1)*2^h - (2^h - 2) = (h-2)*2^h + 2$

疑惑

- 以下方法可以批量建堆么
  - 自上而下的下滤
  - 自下而上的上滤

- 上述方法不可行，为什么?
  - 认真思考【自上而下的上滤】、【自下而上的下滤】的本质



批量建堆

```java
public BinaryHeap(E[] elements, Comparator<E> comparator) {
    super(comparator);

    if (elements == null || elements.length == 0) {
        this.elements = (E[]) new Object[DEFAULT_CAPACITY];
    } else {
        int capacity = Math.max(DEFAULT_CAPACITY, elements.length);
        this.elements = (E[]) new Object[capacity];
        this.size = elements.length;
        for (int i = 0; i < elements.length; i++) {
            this.elements[i] = elements[i];
        }
        heapify();
    }
}
```

```java
private void heapify() {
    for (int i = (size >> 1) - 1; i >= 0; i--) {
        siftDown(i);
    }
}
```

如何构建一个小顶堆?

```
Integer[] data = {
        70, 30, 34, 73, 60, 68, 43,
        86, 15, 1, 64, 65, 54, 77,
        25, 72, 78, 90, 57};
BinaryHeap<Integer> heap = new BinaryHeap<>(data, new Comparator<Integer>() {
    public int compare(Integer o1, Integer o2) {
        return o2 - o1;
    }
});
```

Top K问题

- 从 n 个整数中，找出最大的前 k 个数（ k 远远小于 n ）

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
    int value = data[i];
    if (minHeap.size() < k) {
        minHeap.add(value);
    } else if (value > minHeap.get()) {
        minHeap.replace(value);
    }
}
```

- 如果使用排序算法进行全排序，需要 O(nlogn) 的时间复杂度

- 如果使用二叉堆来解决，可以使用 O(nlogk) 的时间复杂度来解决
  - 新建一个小顶堆
  - 扫描 n 个整数
    - ✓ 先将遍历到的前 k 个数放入堆中
    - ✓ 从第 k + 1 个数开始，如果大于堆顶元素，就使用 replace 操作（删除堆顶元素，将第 k + 1 个数添加到堆中）
  - 扫描完毕后，堆中剩下的就是最大的前 k 个数

- 如果是找出最小的前 k 个数呢?
  - 用大顶堆
  - 如果小于堆顶元素，就使用 replace 操作

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
    int value = data[i];
    if (maxHeap.size() < k) {
        maxHeap.add(value);
    } else if (value < maxHeap.get()) {
        maxHeap.replace(value);
    }
}
```

作业

- 了解和实现堆排序

- 使用堆排序将一个无序数组转换成一个升序数组
  - 空间复杂度能否下降至 O(1)?