

动态规划 (Dynamic Programming)

@M了个J

<https://github.com/CoderMJLee>

<http://cnblogs.com/mjios>

码拉松



实力IT教育 www.520it.com

动态规划 (Dynamic Programming)

■ 动态规划，简称DP

□ 是求解最优化问题的一种常用策略

■ 通常的使用套路（一步一步优化）

① 暴力递归（自顶向下，出现了重叠子问题）

② 记忆化搜索（自顶向下）

③ 递推（自底向上）

动态规划的常规步骤

■ 动态规划中的“动态”可以理解为是“会变化的状态”

① 定义状态 (状态是原问题、子问题的解)

✓ 比如定义 $dp(i)$ 的含义

② 设置初始状态 (边界)

✓ 比如设置 $dp(0)$ 的值

③ 确定状态转移方程

✓ 比如确定 $dp(i)$ 和 $dp(i - 1)$ 的关系

动态规划的一些相关概念

■ 来自维基百科的解释

□ **Dynamic Programming** is a method for solving a complex problem by breaking it down into a collection of **simpler subproblems**, solving each of those subproblems **just once**, and **storing** their solutions.

- ① 将复杂的原问题拆解成若干个简单的子问题
- ② 每个子问题仅仅解决1次，并保存它们的解
- ③ 最后推导出原问题的解

■ 可以用动态规划来解决的问题，通常具备2个特点

□ 最优子结构（最优化原理）：通过求解子问题的最优解，可以获得原问题的最优解

□ 无后效性

- ✓ 某阶段的状态一旦确定，则此后过程的演变不再受此前各状态及决策的影响（未来与过去无关）
- ✓ 在推导后面阶段的状态时，只关心前面阶段的具体状态值，不关心这个状态是怎么一步步推导出来的

(0, 0)				
		(i, j-1)		
	(i-1, j)	(i, j)		
				(4, 4)

■ 从起点 (0, 0) 走到终点 (4, 4) 一共有多少种走法？只能向右、向下走

■ 假设 $dp(i, j)$ 是从 (0, 0) 走到 (i, j) 的走法

□ $dp(i, 0) = dp(0, j) = 1$

□ $dp(i, j) = dp(i, j - 1) + dp(i - 1, j)$

■ 无后效性

□ 推导 $dp(i, j)$ 时只需要用到 $dp(i, j - 1)$ 、 $dp(i - 1, j)$ 的值

□ 不需要关心 $dp(i, j - 1)$ 、 $dp(i - 1, j)$ 的值是怎么求出来的

有后效性

(0, 0)				
		(i, j-1)		
	(i-1, j)	(i, j)		
				(4, 4)

■ 如果可以向左、向右、向上、向下走，并且同一个格子不能走 2 次

■ 有后效性

□ $dp(i, j)$ 下一步要怎么走，还要关心上一步是怎么来的

✓ 也就是还要关心 $dp(i, j - 1)$ 、 $dp(i - 1, j)$ 是怎么来的？

练习1 – 找零钱

- leetcode_322_零钱兑换: <https://leetcode-cn.com/problems/coin-change/>
- 假设有25分、20分、5分、1分的硬币，现要找给客户41分的零钱，如何办到硬币个数最少？
 - 此前用贪心策略得到的并非是最优解（贪心得到的解是 5 枚硬币）
- 假设 $dp(n)$ 是凑到 n 分需要的最少硬币个数
 - 如果第 1 次选择了 25 分的硬币，那么 $dp(n) = dp(n - 25) + 1$
 - 如果第 1 次选择了 20 分的硬币，那么 $dp(n) = dp(n - 20) + 1$
 - 如果第 1 次选择了 5 分的硬币，那么 $dp(n) = dp(n - 5) + 1$
 - 如果第 1 次选择了 1 分的硬币，那么 $dp(n) = dp(n - 1) + 1$
 - 所以 $dp(n) = \min \{ dp(n - 25), dp(n - 20), dp(n - 5), dp(n - 1) \} + 1$

找零钱 - 暴力递归

```
int coins(int n) {  
    if (n < 1) return Integer.MAX_VALUE;  
    if (n == 1 || n == 5 || n == 20 || n == 25) return 1;  
    int min1 = Math.min(coins(n - 1), coins(n - 5));  
    int min2 = Math.min(coins(n - 20), coins(n - 25));  
    return Math.min(min1, min2) + 1;  
}
```

- 类似于斐波那契数列的递归版，会有大量的重复计算，时间复杂度较高

找零钱 - 记忆化搜索

```
int coins(int n) {
    if (n < 1) return -1;
    int[] dp = new int[n + 1];
    int[] faces = {1, 5, 20, 25};
    for (int face : faces) {
        if (n < face) break;
        dp[face] = 1;
    }
    return coins(n, dp);
}

static int coins(int n, int[] dp) {
    if (n < 1) return Integer.MAX_VALUE;
    if (dp[n] == 0) {
        int min1 = Math.min(coins(n - 25, dp), coins(n - 20, dp));
        int min2 = Math.min(coins(n - 5, dp), coins(n - 1, dp));
        dp[n] = Math.min(min1, min2) + 1;
    }
    return dp[n];
}
```

找零钱 - 递推

```
int coins(int n) {  
    if (n < 1) return -1;  
    int[] dp = new int[n + 1];  
    for (int i = 1; i <= n; i++) {  
        int min = dp[i - 1];  
        if (i >= 5) min = Math.min(dp[i - 5], min);  
        if (i >= 20) min = Math.min(dp[i - 20], min);  
        if (i >= 25) min = Math.min(dp[i - 25], min);  
        dp[i] = min + 1;  
    }  
    return dp[n];  
}
```

■ 时间复杂度、空间复杂度： $O(n)$

思考题：请输出找零钱的具体方案（具体是用了哪些面值的硬币）

```
int coins(int n) {  
    if (n < 1) return -1;  
    int[] dp = new int[n + 1];  
    int[] faces = new int[dp.length];  
    for (int i = 1; i <= n; i++) {  
        int min = dp[i - 1];  
        faces[i] = 1;  
        if (i >= 5 && dp[i - 5] < min) {  
            min = dp[i - 5];  
            faces[i] = 5;  
        }  
        if (i >= 20 && dp[i - 20] < min) {  
            min = dp[i - 20];  
            faces[i] = 20;  
        }  
        if (i >= 25 && dp[i - 25] < min) {  
            min = dp[i - 25];  
            faces[i] = 25;  
        }  
        dp[i] = min + 1;  
    }  
    print(faces, n);  
    return dp[n];  
}
```

```
void print(int[] faces, int i) {  
    while (i > 0) {  
        System.out.print(faces[i] + " ");  
        i -= faces[i];  
    }  
    System.out.println();  
}
```

找零钱 – 通用实现

```
int coins(int n, int[] faces) {  
    if (n < 1 || faces == null || faces.length == 0) return -1;  
    int[] dp = new int[n + 1];  
    for (int i = 1; i <= n; i++) {  
        int min = Integer.MAX_VALUE;  
        for (int face : faces) {  
            if (i < face) continue;  
            if (dp[i - face] < 0 || dp[i - face] >= min) continue;  
            min = dp[i - face];  
        }  
        if (min == Integer.MAX_VALUE) {  
            dp[i] = -1;  
        } else {  
            dp[i] = min + 1;  
        }  
    }  
    return dp[n];  
}
```

练习2 - 最大连续子序列和

■ 给定一个长度为 n 的整数序列，求它的最大连续子序列和

□ 比如 -2、1、-3、4、-1、2、1、-5、4 的最大连续子序列和是 $4 + (-1) + 2 + 1 = 6$

■ 状态定义

□ 假设 $dp(i)$ 是以 $nums[i]$ 结尾的最大连续子序列和 ($nums$ 是整个序列)

✓ 以 $nums[0]$ -2 结尾的最大连续子序列是 -2，所以 $dp(0) = -2$

✓ 以 $nums[1]$ 1 结尾的最大连续子序列是 1，所以 $dp(1) = 1$

✓ 以 $nums[2]$ -3 结尾的最大连续子序列是 1、-3，所以 $dp(2) = dp(1) + (-3) = -2$

✓ 以 $nums[3]$ 4 结尾的最大连续子序列是 4，所以 $dp(3) = 4$

✓ 以 $nums[4]$ -1 结尾的最大连续子序列是 4、-1，所以 $dp(4) = dp(3) + (-1) = 3$

✓ 以 $nums[5]$ 2 结尾的最大连续子序列是 4、-1、2，所以 $dp(5) = dp(4) + 2 = 5$

✓ 以 $nums[6]$ 1 结尾的最大连续子序列是 4、-1、2、1，所以 $dp(6) = dp(5) + 1 = 6$

✓ 以 $nums[7]$ -5 结尾的最大连续子序列是 4、-1、2、1、-5，所以 $dp(7) = dp(6) + (-5) = 1$

✓ 以 $nums[8]$ 4 结尾的最大连续子序列是 4、-1、2、1、-5、4，所以 $dp(8) = dp(7) + 4 = 5$

最大连续子序列和 – 状态转移方程和初始状态

■ 状态转移方程

- 如果 $dp(i - 1) \leq 0$, 那么 $dp(i) = \text{nums}[i]$
- 如果 $dp(i - 1) > 0$, 那么 $dp(i) = dp(i - 1) + \text{nums}[i]$

■ 初始状态

- $dp(0)$ 的值是 $\text{nums}[0]$

■ 最终的解

- 最大连续子序列和是所有 $dp(i)$ 中的最大值 $\max \{ dp(i) \}, i \in [0, \text{nums.length})$

最大连续子序列和 – 动态规划 – 实现

```
int maxSubArray(int[] nums) {  
    if (nums == null || nums.length == 0) return 0;  
    int[] dp = new int[nums.length];  
    int max = dp[0] = nums[0];  
    for (int i = 1; i < dp.length; i++) {  
        int prev = dp[i - 1];  
        if (prev > 0) {  
            dp[i] = prev + nums[i];  
        } else {  
            dp[i] = nums[i];  
        }  
        max = Math.max(max, dp[i]);  
    }  
    return max;  
}
```

■ 空间复杂度: $O(n)$, 时间复杂度: $O(n)$

最大连续子序列和 – 动态规划 – 优化实现

```
int maxSubArray(int[] nums) {  
    if (nums == null || nums.length == 0) return 0;  
    int dp = nums[0];  
    int max = dp;  
    for (int i = 1; i < nums.length; i++) {  
        if (dp > 0) {  
            dp = dp + nums[i];  
        } else {  
            dp = nums[i];  
        }  
        max = Math.max(max, dp);  
    }  
    return max;  
}
```

■ 空间复杂度: $O(1)$, 时间复杂度: $O(n)$

练习3 – 最长上升子序列 (LIS)

- 最长上升子序列 (最长递增子序列, Longest Increasing Subsequence, LIS)
- leetcode_300_最长上升子序列: <https://leetcode-cn.com/problems/longest-increasing-subsequence/>
- 给定一个无序的整数序列, 求出它最长上升子序列的长度 (要求严格上升)
 - 比如 [10, 2, 2, 5, 1, 7, 101, 18] 的最长上升子序列是 [2, 5, 7, 101]、[2, 5, 7, 18], 长度是 4

最长上升子序列 – 动态规划 – 状态定义

■ 假设数组是 `nums`, `[10, 2, 2, 5, 1, 7, 101, 18]`

□ `dp(i)` 是以 `nums[i]` 结尾的最长上升子序列的长度, $i \in [0, \text{nums.length})$

✓ 以 `nums[0]` 10 结尾的最长上升子序列是 10, 所以 `dp(0) = 1`

✓ 以 `nums[1]` 2 结尾的最长上升子序列是 2, 所以 `dp(1) = 1`

✓ 以 `nums[2]` 2 结尾的最长上升子序列是 2, 所以 `dp(2) = 1`

✓ 以 `nums[3]` 5 结尾的最长上升子序列是 2、5, 所以 `dp(3) = dp(1) + 1 = dp(2) + 1 = 2`

✓ 以 `nums[4]` 1 结尾的最长上升子序列是 1, 所以 `dp(4) = 1`

✓ 以 `nums[5]` 7 结尾的最长上升子序列是 2、5、7, 所以 `dp(5) = dp(3) + 1 = 3`

✓ 以 `nums[6]` 101 结尾的最长上升子序列是 2、5、7、101, 所以 `dp(6) = dp(5) + 1 = 4`

✓ 以 `nums[7]` 18 结尾的最长上升子序列是 2、5、7、18, 所以 `dp(7) = dp(5) + 1 = 4`

■ 最长上升子序列的长度是所有 `dp(i)` 中的最大值 $\max \{ dp(i) \}$, $i \in [0, \text{nums.length})$

最长上升子序列 – 动态规划 – 状态转移方程

- 遍历 $j \in [0, i)$

- 当 $\text{nums}[i] > \text{nums}[j]$

- ✓ $\text{nums}[i]$ 可以接在 $\text{nums}[j]$ 后面, 形成一个比 $\text{dp}[j]$ 更长的上升子序列, 长度为 $\text{dp}[j] + 1$

- ✓ $\text{dp}[i] = \max \{ \text{dp}[i], \text{dp}[j] + 1 \}$

- 当 $\text{nums}[i] \leq \text{nums}[j]$

- ✓ $\text{nums}[i]$ 不能接在 $\text{nums}[j]$ 后面, 跳过此次遍历 (continue)

- 状态的初始值

- $\text{dp}[0] = 1$

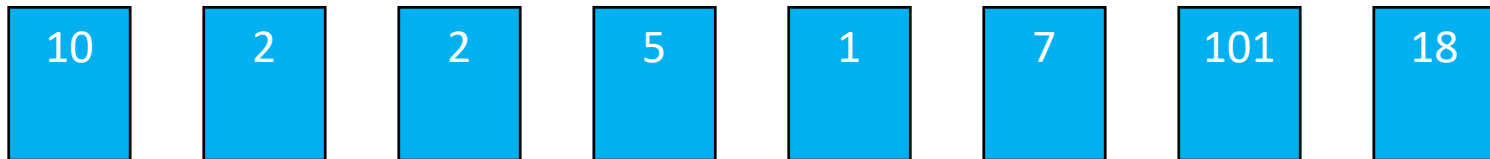
- 所有的 $\text{dp}[i]$ 默认都初始化为 1

最长上升子序列 – 动态规划 – 实现

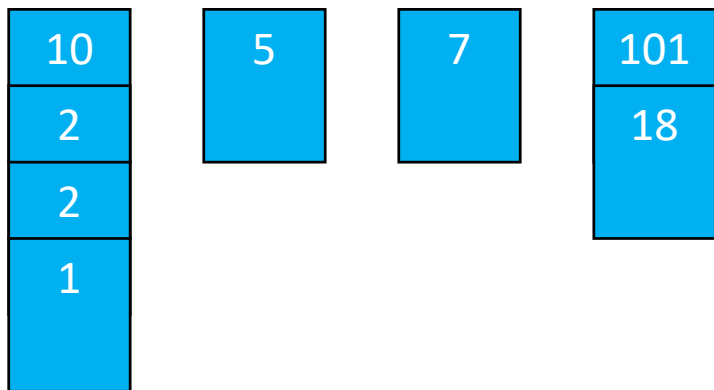
```
int lengthOfLIS(int[] nums) {  
    if (nums == null || nums.length == 0) return 0;  
    int[] dp = new int[nums.length];  
    int max = dp[0] = 1;  
    for (int i = 1; i < dp.length; i++) {  
        dp[i] = 1;  
        for (int j = 0; j < i; j++) {  
            if (nums[i] <= nums[j]) continue;  
            dp[i] = Math.max(dp[i], dp[j] + 1);  
        }  
        max = Math.max(dp[i], max);  
    }  
    return max;  
}
```

■ 空间复杂度: $O(n)$, 时间复杂度: $O(n^2)$

最长上升子序列 - 二分搜索 - 思路



- 把每个数字看做是一张扑克牌，从左到右按顺序处理每一个扑克牌
- 将它压在（从左边数过来）第一个牌顶 \geq 它的牌堆上面
- 如果找不到牌顶 \geq 它的牌堆，就在最右边新建一个牌堆，将它放入这个新牌堆中



- 当处理完所有牌，最终牌堆的数量就是最长上升子序列的长度

最长上升子序列 – 二分搜索 – 思路

- 思路（假设数组是 `nums`，也就是最初的牌数组）
 - `top[i]` 是第 `i` 个牌堆的牌顶，`len` 是牌堆的数量，初始值为 0
 - 遍历每一张牌 `num`
 - ✓ 利用二分搜索找出 `num` 最终要放入的牌堆位置 `index`
 - ✓ `num` 作为第 `index` 个牌堆的牌顶，`top[index] = num`
 - ✓ 如果 `index` 等于 `len`，相当于新建一个牌堆，牌堆数量 +1，也就是 `len++`

最长上升子序列 - 二分搜索 - 实现

```
int lengthOfLIS(int[] nums) {  
    if (nums == null || nums.length == 0) return 0;  
    int[] top = new int[nums.length];  
    int len = 0;  
    for (int num : nums) {  
        int begin = 0, end = len;  
        while (begin < end) {  
            int mid = (begin + end) >> 1;  
            if (num <= top[mid]) {  
                end = mid;  
            } else {  
                begin = mid + 1;  
            }  
        }  
        top[begin] = num;  
        if (begin == len) len++;  
    }  
    return len;  
}
```

- 空间复杂度: $O(n)$
- 时间复杂度: $O(n \log n)$

练习4 – 最长公共子序列 (LCS)

- 最长公共子序列 (Longest Common Subsequence, LCS)
- leetcode_1143_最长公共子序列: <https://leetcode-cn.com/problems/longest-common-subsequence/>
- 求两个序列的最长公共子序列长度
 - [1, 3, 5, 9, 10] 和 [1, 4, 9, 10] 的最长公共子序列是 [1, 9, 10], 长度为 3
 - ABCBDAB 和 BDCABA 的最长公共子序列长度是 4, 可能是
 - ✓ ABCBDAB 和 BDCABA > BDAB
 - ✓ ABCBDAB 和 BDCABA > BDAB
 - ✓ ABCBDAB 和 BDCABA > BCAB
 - ✓ ABCBDAB 和 BDCABA > BCBA

最长公共子序列 – 思路

■ 假设 2 个序列分别是 `nums1`、`nums2`

□ $i \in [1, \text{nums1.length}]$

□ $j \in [1, \text{nums2.length}]$

前 $i - 1$ 个元素

`nums1[i - 1]`

前 $j - 1$ 个元素

`nums2[j - 1]`

■ 假设 $\text{dp}(i, j)$ 是【`nums1` 前 i 个元素】与【`nums2` 前 j 个元素】的最长公共子序列长度

□ $\text{dp}(i, 0)$ 、 $\text{dp}(0, j)$ 初始值均为 0

□ 如果 `nums1[i - 1] = nums2[j - 1]`，那么 $\text{dp}(i, j) = \text{dp}(i - 1, j - 1) + 1$

□ 如果 `nums1[i - 1] ≠ nums2[j - 1]`，那么 $\text{dp}(i, j) = \max \{ \text{dp}(i - 1, j), \text{dp}(i, j - 1) \}$

前 $i - 1$ 个元素

前 $i - 1$ 个元素

前 $i - 1$ 个元素

`nums1[i - 1]`

前 $j - 1$ 个元素

前 $j - 1$ 个元素

`nums2[j - 1]`

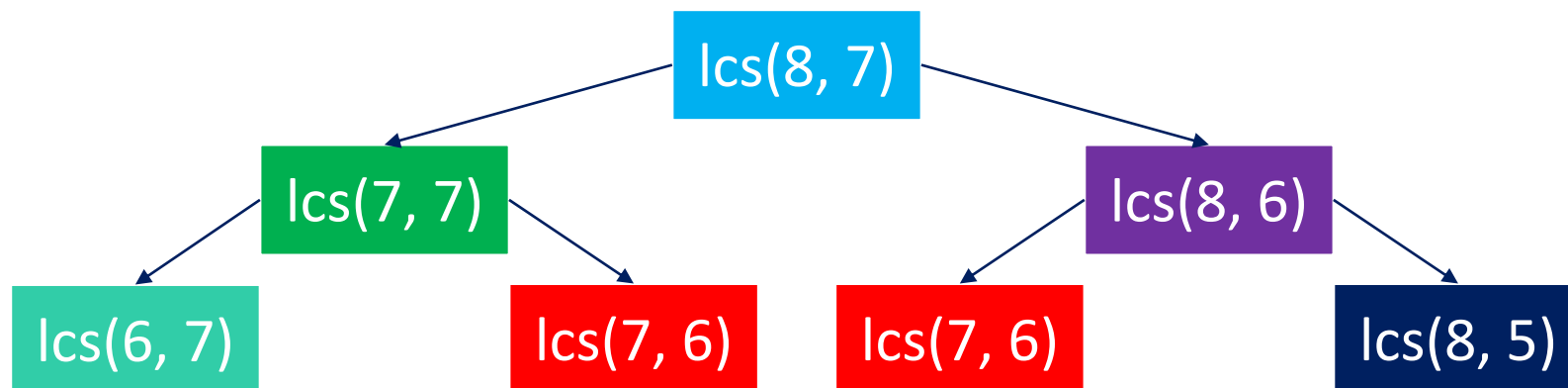
前 $j - 1$ 个元素

最长公共子序列 – 递归实现

```
int lcs(int[] nums1, int[] nums2) {  
    if (nums1 == null || nums1.length == 0) return 0;  
    if (nums2 == null || nums2.length == 0) return 0;  
    return lcs(nums1, nums1.length, nums2, nums2.length);  
}  
  
int lcs(int[] nums1, int i,  
        int[] nums2, int j) {  
    if (i == 0 || j == 0) return 0;  
    if (nums1[i - 1] != nums2[j - 1]) {  
        return Math.max(  
            lcs(nums1, i - 1, nums2, j),  
            lcs(nums1, i, nums2, j - 1));  
    }  
    return lcs(nums1, i - 1, nums2, j - 1) + 1;  
}
```

- 空间复杂度: $O(k)$, $k = \min\{n, m\}$, n 、 m 是 2 个序列的长度
- 时间复杂度: $O(2^n)$, 当 $n = m$ 时

最长公共子序列 – 递归实现分析



■ 出现了重复的递归调用

最长公共子序列 – 非递归实现

```
int lcs(int[] nums1, int[] nums2) {  
    if (nums1 == null || nums1.length == 0) return 0;  
    if (nums2 == null || nums2.length == 0) return 0;  
    int[][] dp = new int[nums1.length + 1][nums2.length + 1];  
    for (int i = 1; i <= nums1.length; i++) {  
        for (int j = 1; j <= nums2.length; j++) {  
            if (nums1[i - 1] == nums2[j - 1]) {  
                dp[i][j] = dp[i - 1][j - 1] + 1;  
            } else {  
                dp[i][j] = Math.max(dp[i - 1][j], dp[i][j - 1]);  
            }  
        }  
    }  
    return dp[nums1.length][nums2.length];  
}
```

■ 空间复杂度: $O(n * m)$

■ 时间复杂度: $O(n * m)$

最长公共子序列 – 非递归实现

■ dp 数组的计算结果如下所示

				A	B	C	B	D	A	B
		i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7
		0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
D	2	0	0	1	1	1	2	2	2	2
C	3	0	0	1	2	2	2	2	2	2
A	4	0	1	1	2	2	2	3	3	3
B	5	0	1	2	2	3	3	3	4	4
A	6	0	1	2	2	3	3	4	4	4

最长公共子序列 – 非递归实现 – 滚动数组

- 可以使用滚动数组优化空间复杂度

```
int lcs(int[] nums1, int[] nums2) {  
    if (nums1 == null || nums1.length == 0) return 0;  
    if (nums2 == null || nums2.length == 0) return 0;  
    int[][] dp = new int[2][nums2.length + 1];  
    for (int i = 1; i <= nums1.length; i++) {  
        int row = i & 1;  
        int prevRow = (i - 1) & 1;  
        for (int j = 1; j <= nums2.length; j++) {  
            if (nums1[i - 1] == nums2[j - 1]) {  
                dp[row][j] = dp[prevRow][j - 1] + 1;  
            } else {  
                dp[row][j] = Math.max(dp[prevRow][j], dp[row][j - 1]);  
            }  
        }  
    }  
    return dp[nums1.length & 1][nums2.length];  
}
```

最长公共子序列 - 非递归实现 - 一维数组

- 可以将二维数组优化成一维数组，进一步降低空间复杂度

```
int lcs(int[] nums1, int[] nums2) {  
    if (nums1 == null || nums1.length == 0) return 0;  
    if (nums2 == null || nums2.length == 0) return 0;  
    int[] dp = new int[nums2.length + 1];  
    for (int i = 1; i <= nums1.length; i++) {  
        int cur = 0;  
        for (int j = 1; j <= nums2.length; j++) {  
            int leftTop = cur;  
            cur = dp[j];  
            if (nums1[i - 1] == nums2[j - 1]) {  
                dp[j] = leftTop + 1;  
            } else {  
                dp[j] = Math.max(dp[j], dp[j - 1]);  
            }  
        }  
    }  
    return dp[nums2.length];  
}
```

最长公共子序列 – 非递归实现 – 一维数组

■ 可以空间复杂度优化至 $O(k)$, $k = \min\{n, m\}$

```
int lcs(int[] nums1, int[] nums2) {
    if (nums1 == null || nums1.length == 0) return 0;
    if (nums2 == null || nums2.length == 0) return 0;
    int[] rowsNums = nums1, colsNums = nums2;
    if (nums1.length < nums2.length) {
        colsNums = nums1;
        rowsNums = nums2;
    }
    int[] dp = new int[colsNums.length + 1];
    for (int i = 1; i <= rowsNums.length; i++) {
        int cur = 0;
        for (int j = 1; j <= colsNums.length; j++) {
            int leftTop = cur;
            cur = dp[j];
            if (rowsNums[i - 1] == colsNums[j - 1]) {
                dp[j] = leftTop + 1;
            } else {
                dp[j] = Math.max(dp[j], dp[j - 1]);
            }
        }
    }
    return dp[colsNums.length];
}
```


练习5 – 最长公共子串

- 最长公共子串 (Longest Common Substring)

- 子串是连续的子序列

- 求两个字符串的最长公共子串长度

- ABCBA 和 BABCA 的最长公共子串是 ABC，长度为 3

最长公共子串 - 思路

■ 假设 2 个字符串分别是 `str1`、`str2`

□ $i \in [1, \text{str1.length}]$

□ $j \in [1, \text{str2.length}]$

■ 假设 $\text{dp}(i, j)$ 是以 `str1[i - 1]`、`str2[j - 1]` 结尾的最长公共子串长度

□ $\text{dp}(i, 0)$ 、 $\text{dp}(0, j)$ 初始值均为 0

□ 如果 `str1[i - 1] = str2[j - 1]`，那么 $\text{dp}(i, j) = \text{dp}(i - 1, j - 1) + 1$

□ 如果 `str1[i - 1] ≠ str2[j - 1]`，那么 $\text{dp}(i, j) = 0$

■ 最长公共子串的长度是所有 $\text{dp}(i, j)$ 中的最大值 $\max \{ \text{dp}(i, j) \}$

最长公共子串 - 实现

```
int lcs(String str1, String str2) {  
    if (str1 == null || str2 == null) return 0;  
    char[] cs1 = str1.toCharArray();  
    if (cs1.length == 0) return 0;  
    char[] cs2 = str2.toCharArray();  
    if (cs2.length == 0) return 0;  
    int[][] dp = new int[cs1.length + 1][cs2.length + 1];  
    int max = 0;  
    for (int i = 1; i <= cs1.length; i++) {  
        for (int j = 1; j <= cs2.length; j++) {  
            if (cs1[i - 1] != cs2[j - 1]) continue;  
            dp[i][j] = dp[i - 1][j - 1] + 1;  
            max = Math.max(max, dp[i][j]);  
        }  
    }  
    return max;  
}
```

■ 空间复杂度: $O(n * m)$

■ 时间复杂度: $O(n * m)$

最长公共子串 - 实现

■ dp 数组的计算结果如下所示

		j					
		i \ j					
		0	1	2	3	4	5
A	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	1	0	0	1
	2	0	1	0	2	0	0
	3	0	0	0	0	3	0
	4	0	1	0	1	0	0
A	5	0	0	2	0	0	1

最长公共子串 - 一维数组实现

```
if (str1 == null || str2 == null) return 0;
char[] cs1 = str1.toCharArray();
if (cs1.length == 0) return 0;
char[] cs2 = str2.toCharArray();
if (cs2.length == 0) return 0;
char[] rowStr = cs1, colStr = cs2;
if (cs1.length < cs2.length) {
    colStr = cs1;
    rowStr = cs2;
}
int[] dp = new int[colStr.length + 1];
```

```
int max = 0;
for (int i = 1; i <= rowStr.length; i++) {
    for (int j = colStr.length; j >= 1; j--) {
        if (rowStr[i - 1] == colStr[j - 1]) {
            dp[j] = dp[j - 1] + 1;
        } else {
            dp[j] = 0;
        }
        max = Math.max(max, dp[j]);
    }
}
return max;
```

- 空间复杂度: $O(k)$, $k = \min\{n, m\}$
- 时间复杂度: $O(n * m)$

练习6 – 0-1背包

- 有 n 件物品和一个最大承重为 W 的背包，每件物品的重量是 w_i 、价值是 v_i
 - 在保证总重量不超过 W 的前提下，选择某些物品装入背包，背包的最大总价值是多少？
 - 注意：每个物品只有 1 件，也就是每个物品只能选择 0 件或者 1 件
-
- 假设 `values` 是价值数组，`weights` 是重量数组
 - 编号为 k 的物品，价值是 `values[k]`，重量是 `weights[k]`， $k \in [0, n)$
-
- 假设 $dp(i, j)$ 是 **最大承重为 j 、有前 i 件物品可选** 时的最大总价值， $i \in [1, n]$ ， $j \in [1, W]$
 - $dp(i, 0)$ 、 $dp(0, j)$ 初始值均为 0
 - 如果 $j < weights[i - 1]$ ，那么 $dp(i, j) = dp(i - 1, j)$
 - 如果 $j \geq weights[i - 1]$ ，那么 $dp(i, j) = \max \{ dp(i - 1, j), dp(i - 1, j - weights[i - 1]) + values[i - 1] \}$

0-1背包 - 实现

```
int select(int[] values, int[] weights, int capacity) {  
    if (values == null || values.length == 0) return 0;  
    if (weights == null || weights.length == 0) return 0;  
    if (weights.length != values.length) return 0;  
    if (capacity <= 0) return 0;  
    int[][] dp = new int[values.length + 1][capacity + 1];  
    for (int i = 1; i <= values.length; i++) {  
        for (int j = 1; j <= capacity; j++) {  
            if (j < weights[i - 1]) {  
                dp[i][j] = dp[i - 1][j];  
            } else {  
                dp[i][j] = Math.max(dp[i - 1][j],  
                                     dp[i - 1][j - weights[i - 1]] + values[i - 1]);  
            }  
        }  
    }  
    return dp[values.length][capacity];  
}
```

0-1背包 – 非递归实现

■ dp 数组的计算结果如下所示

		j											
i \ j		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
v=6, w=2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6	6	
	2	0	0	6	6	9	9	9	9	9	9	9	
	3	0	0	6	6	9	9	9	9	11	11	14	
	4	0	0	6	6	9	9	9	10	11	13	14	
	5	0	0	6	6	9	9	12	12	15	15	15	

0-1背包 – 非递归实现 – 一维数组

- $dp(i, j)$ 都是由 $dp(i - 1, k)$ 推导出来的，也就是说，第 i 行的数据是由它的上一行第 $i - 1$ 行推导出来的
- 因此，可以使用一维数组来优化
- 另外，由于 $k \leq j$ ，所以 j 的遍历应该由大到小，否则导致数据错乱

```
int select(int[] values, int[] weights, int capacity) {  
    if (values == null || values.length == 0) return 0;  
    if (weights == null || weights.length == 0) return 0;  
    if (weights.length != values.length) return 0;  
    if (capacity <= 0) return 0;  
    int[] dp = new int[capacity + 1];  
    for (int i = 1; i <= values.length; i++) {  
        for (int j = capacity; j >= 1; j--) {  
            if (j < weights[i - 1]) continue;  
            dp[j] = Math.max(dp[j],  
                             dp[j - weights[i - 1]] + values[i - 1]);  
        }  
    }  
    return dp[capacity];  
}
```

0-1背包 – 非递归实现 – 一维数组优化

- 观察二维数组表，得出结论： j 的下界可以从 1 改为 $\text{weights}[i - 1]$

```
int select(int[] values, int[] weights, int capacity) {  
    if (values == null || values.length == 0) return 0;  
    if (weights == null || weights.length == 0) return 0;  
    if (weights.length != values.length) return 0;  
    if (capacity <= 0) return 0;  
    int[] dp = new int[capacity + 1];  
    for (int i = 1; i <= values.length; i++) {  
        for (int j = capacity; j >= weights[i - 1]; j--) {  
            dp[j] = Math.max(dp[j],  
                             dp[j - weights[i - 1]] + values[i - 1]);  
        }  
    }  
    return dp[capacity];  
}
```

0-1背包 – 恰好装满

- 有 n 件物品和一个最大承重为 W 的背包，每件物品的重量是 w_i 、价值是 v_i
- 在保证总重量恰好等于 W 的前提下，选择某些物品装入背包，背包的最大总价值是多少？
- 注意：每个物品只有 1 件，也就是每个物品只能选择 0 件或者 1 件

■ $dp(i, j)$ 初始状态调整

□ $dp(i, 0) = 0$ ，总重量恰好为 0，最大总价值必然也为 0

□ $dp(0, j) = -\infty$ （负无穷）， $j \geq 1$ ，负数在这里代表无法恰好装满

		j											
		$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$v=6, w=2$	1	0	-	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$v=3, w=2$	2	0	-	6	-	9	-	-	-	-	-	-	-
$v=5, w=6$	3	0	-	6	-	9	-	5	-	11	-	14	
$v=4, w=5$	4	0	-	6	-	9	4	5	10	11	13	14	
$v=6, w=4$	5	0	-	6	-	9	4	12	10	15	13	14	

0-1背包 – 恰好装满 – 实现

```
int selectExactly(int[] values, int[] weights, int capacity) {  
    if (values == null || values.length == 0) return -1;  
    if (weights == null || weights.length == 0) return -1;  
    if (weights.length != values.length) return 0;  
    if (capacity <= 0) return 0;  
    int[] dp = new int[capacity + 1];  
    for (int j = 1; j <= capacity; j++) {  
        dp[j] = Integer.MIN_VALUE;  
    }  
    for (int i = 1; i <= values.length; i++) {  
        for (int j = capacity; j >= weights[i - 1]; j--) {  
            dp[j] = Math.max(dp[j],  
                             dp[j - weights[i - 1]] + values[i - 1]);  
        }  
    }  
    return dp[capacity] < 0 ? -1 : dp[capacity];  
}
```