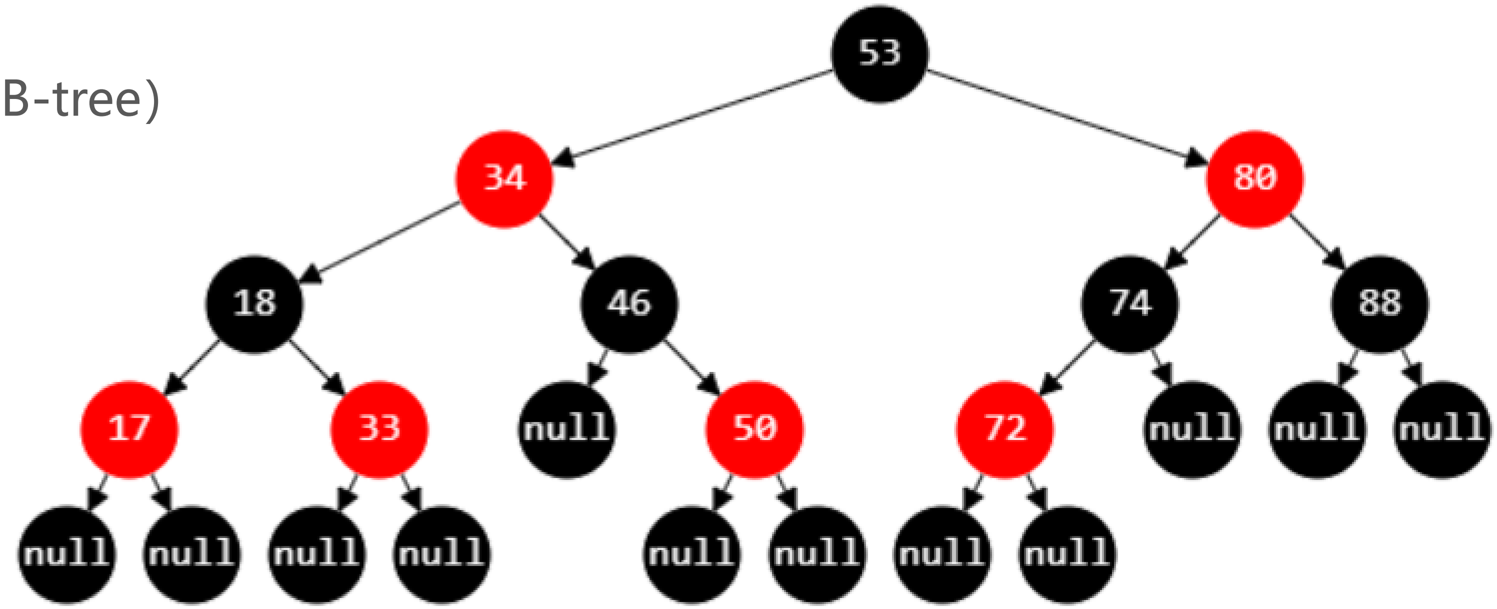
红黑树

红黑树（Red Black Tree）

■ 红黑树也是一种自平衡的二叉搜索树

□ 以前也叫做平衡二叉B树（Symmetric Binary B-tree）



■ 红黑树必须满足以下 5 条性质

1. 节点是 ***RED*** 或者 ***BLACK***
2. 根节点是 ***BLACK***
3. 叶子节点（外部节点，空节点）都是 ***BLACK***
4. ***RED*** 节点的子节点都是 ***BLACK***

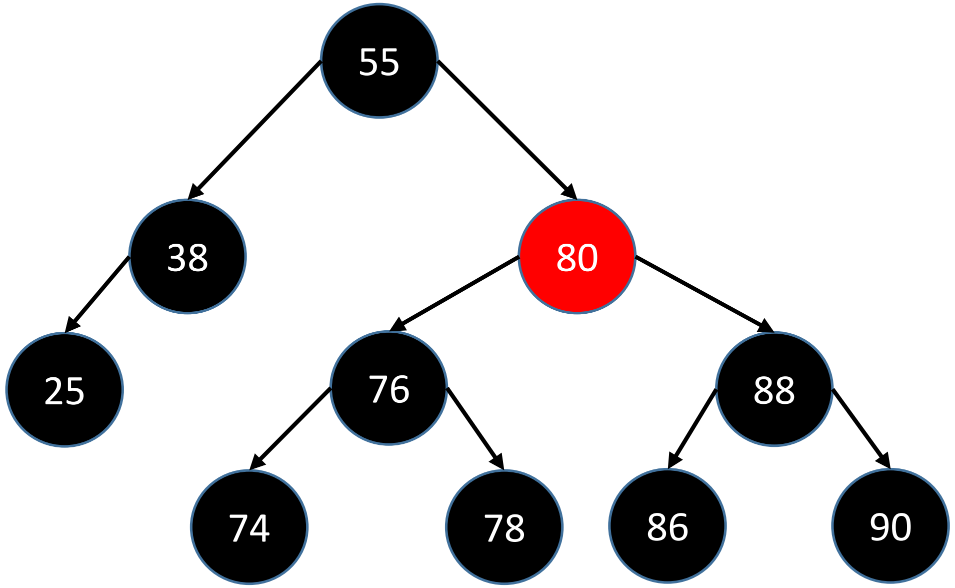
✓ ***RED*** 节点的 parent 都是 ***BLACK***

✓ 从根节点到叶子节点的所有路径上不能有 2 个连续的 ***RED*** 节点

5. 从任一节点到叶子节点的所有路径都包含相同数目的 ***BLACK*** 节点

■ 为何这些规则下，就能保证平衡？

请问下面这棵是红黑树么？



■ 红黑树必须满足以下 5 条性质

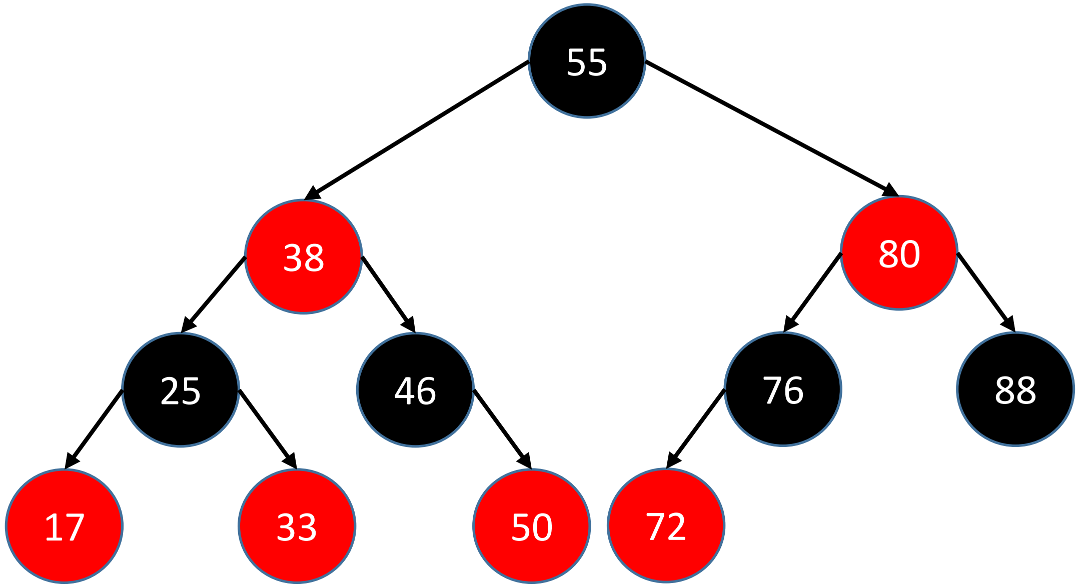
1. 节点是 ***RED*** 或者 ***BLACK***
2. 根节点是 ***BLACK***
3. 叶子节点（外部节点，空节点）都是 ***BLACK***
4. ***RED*** 节点的子节点都是 ***BLACK***

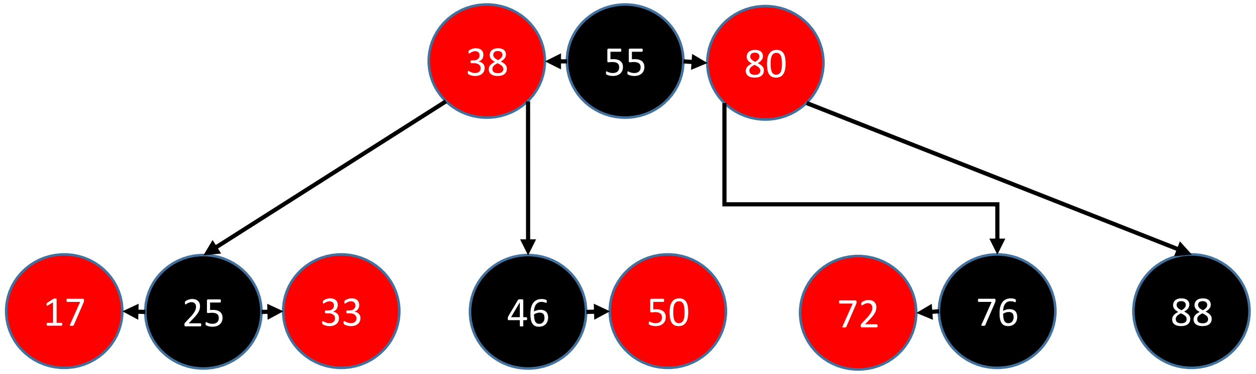
✓ ***RED*** 节点的 `parent` 都是 ***BLACK***

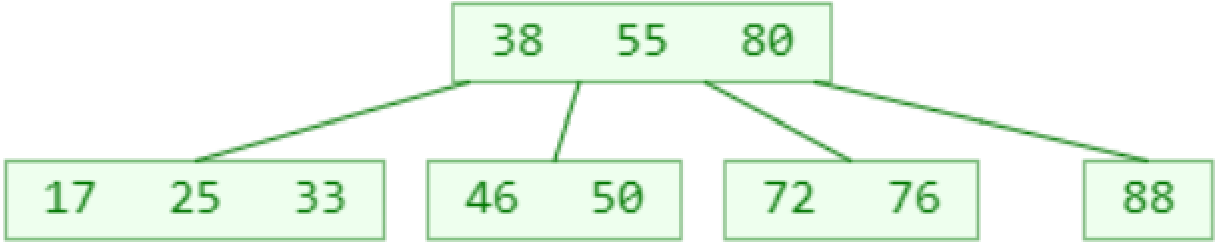
✓ 从根节点到叶子节点的所有路径上不能有 2 个连续的 ***RED*** 节点

5. 从任一节点到叶子节点的所有路径都包含相同数目的 ***BLACK*** 节点

红黑树的等价变换

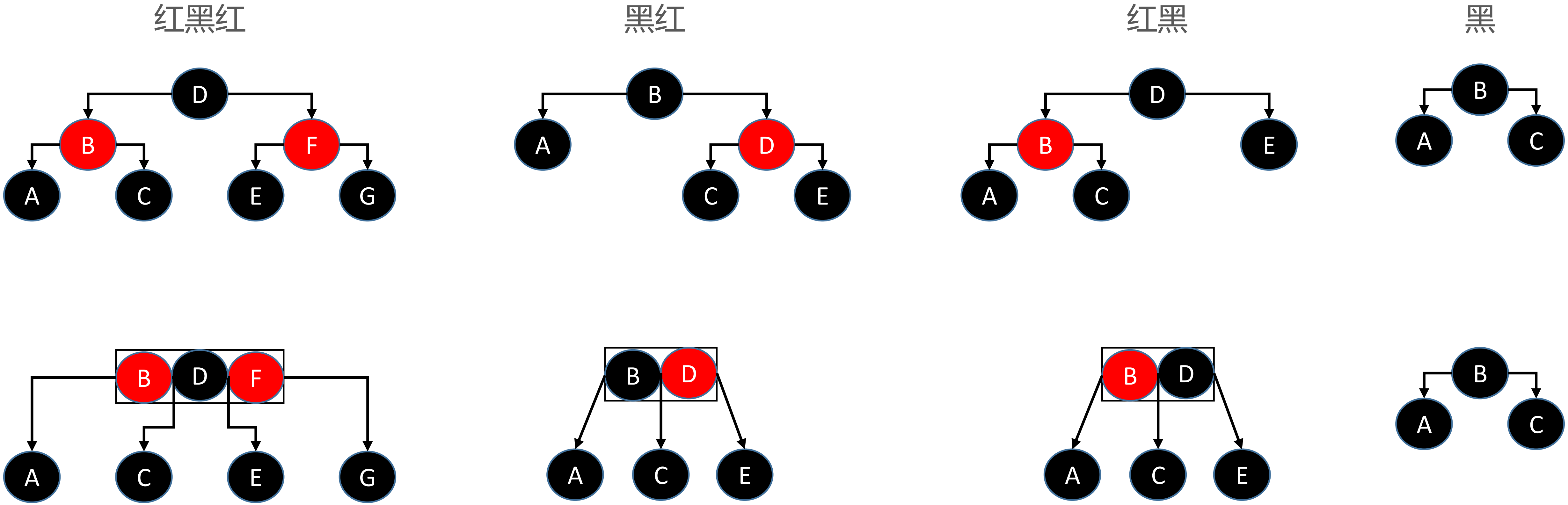






- 红黑树 和 4阶B树（2-3-4树）具有等价性
- ***BLACK*** 节点与它的 ***RED*** 子节点融合在一起，形成1个B树节点
- 红黑树的 ***BLACK*** 节点个数 与 4阶B树的节点总个数 相等
- 网上有些教程：用 2-3树 与 红黑树 进行类比，这是极其不严谨的，2-3树 并不能完美匹配 红黑树 的所有情况
- 注意：因为PPT界面空间有限，后面展示的红黑树都会省略 ***NULL*** 节点

红黑树 vs 2-3-4树

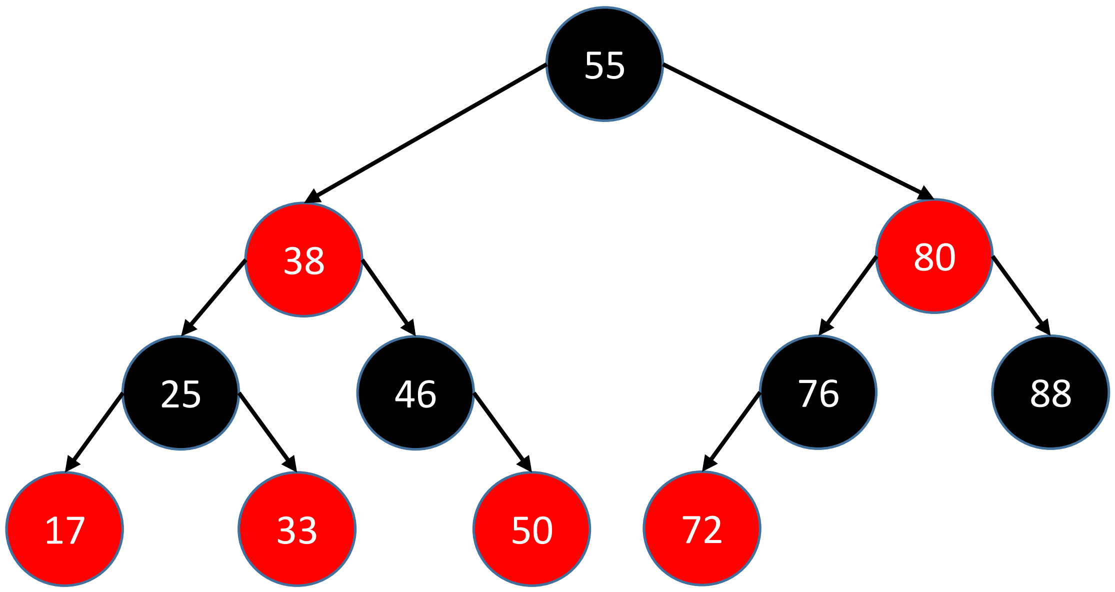


■ 思考：如果上图最底层的 ***BLACK*** 节点是不存在的，在B树中是什么样的情形？

□ 整棵B树只有1个节点，而且是超级节点

几个英文单词

- parent：父节点
- sibling：兄弟节点
- uncle：叔父节点（ parent 的兄弟节点）
- grand：祖父节点（ parent 的父节点）



一些辅助函数

```java
private boolean isBlack(Node<E> node) {
    return colorOf(node) == BLACK;
}

private boolean isRed(Node<E> node) {
    return colorOf(node) == RED;
}

private boolean colorOf(Node<E> node) {
    return node == null ? BLACK : ((RBNode<E>)node).color;
}

private RBNode<E> color(Node<E> node, boolean color) {
    if (node != null) ((RBNode<E>)node).color = color;
    return (RBNode<E>) node;
}

private RBNode<E> black(Node<E> node) {
    return color(node, BLACK);
}

private RBNode<E> red(Node<E> node) {
    return color(node, RED);
}
```

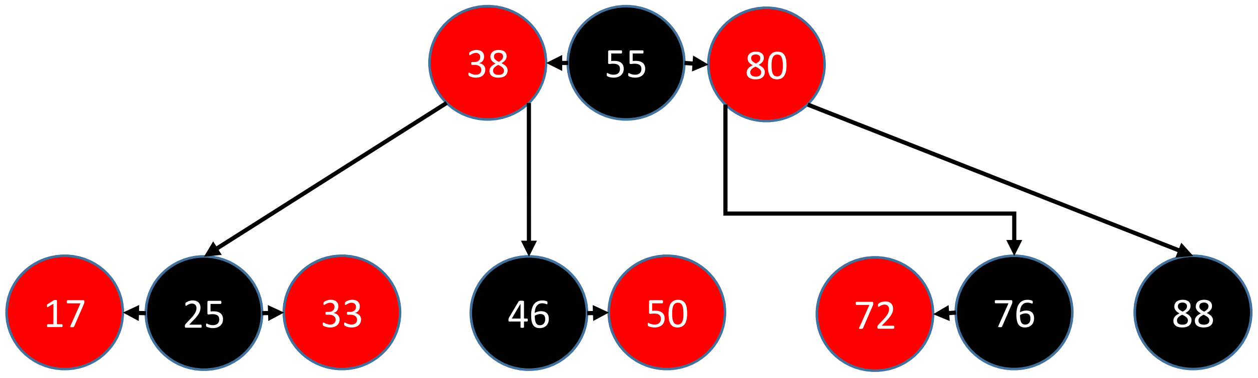
```java
public Node<E> sibling() {
    if (isLeftChild()) {
        return parent.right;
    }

    if (isRightChild()) {
        return parent.left;
    }

    return null;
}
```

添加

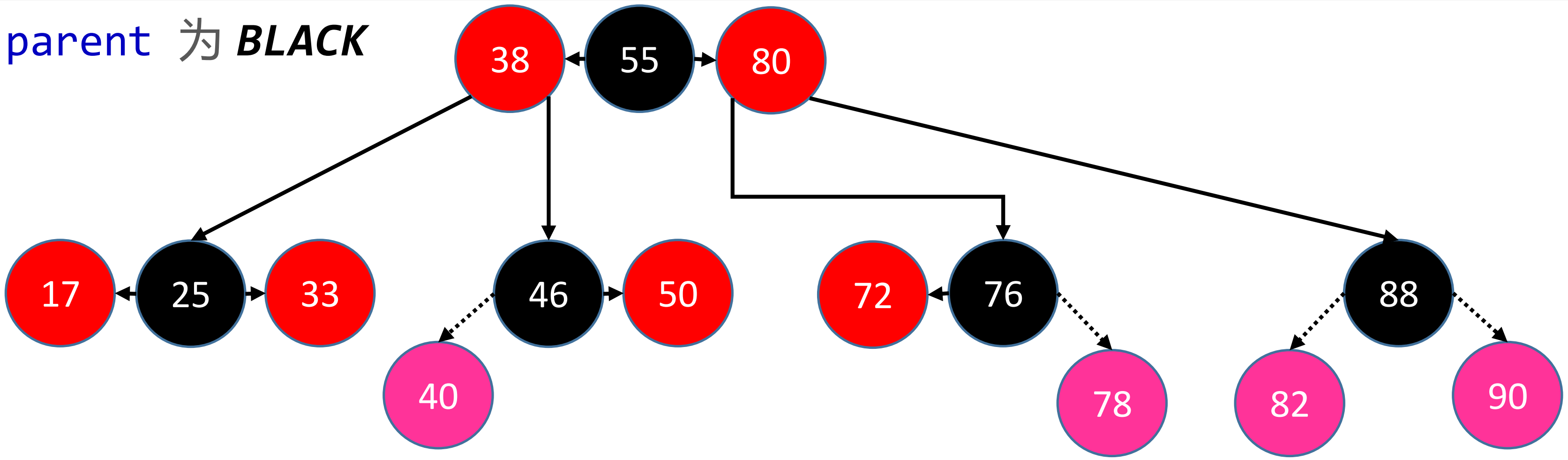
- 已知
  - B树中，新元素必定是添加到叶子节点中
  - 4阶B树所有节点的元素个数 x 都符合 1 ≤ x ≤ 3
- 建议新添加的节点默认为 ***RED***，这样能够让红黑树的性质尽快满足（性质 1、2、3、5 都满足，性质 4 不一定）



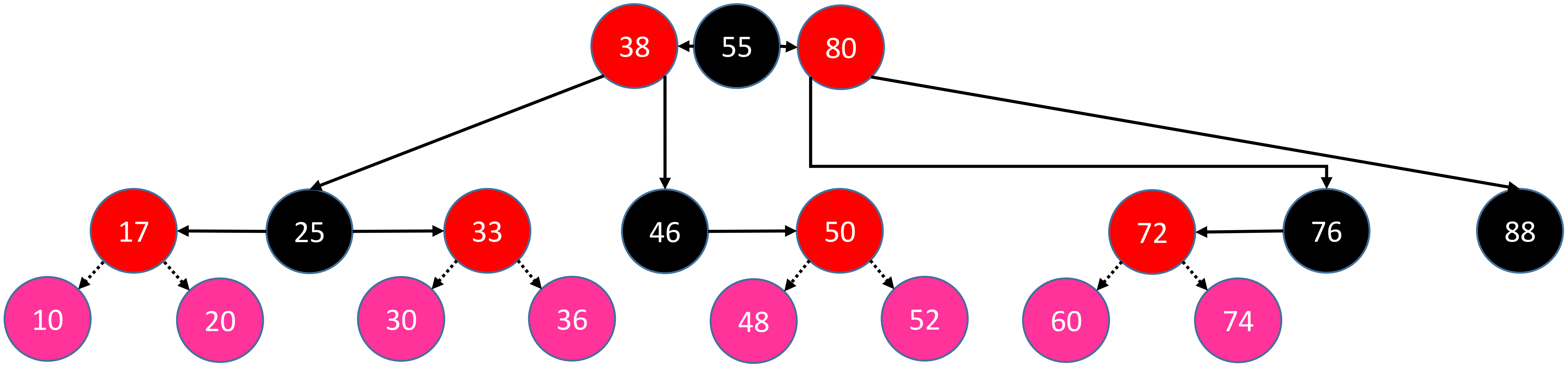
- 如果添加的是根节点，染成 ***BLACK*** 即可

添加的所有情况

- 有 4 种情况满足红黑树的性质 4 ： parent 为 ***BLACK***
  - 同样也满足 4阶B树 的性质
  - 因此不用做任何额外处理



- 有 8 种情况不满足红黑树的性质 4 ： parent 为 ***RED***（ ***Double Red*** ）
  - 其中前 4 种属于B树节点上溢的情况

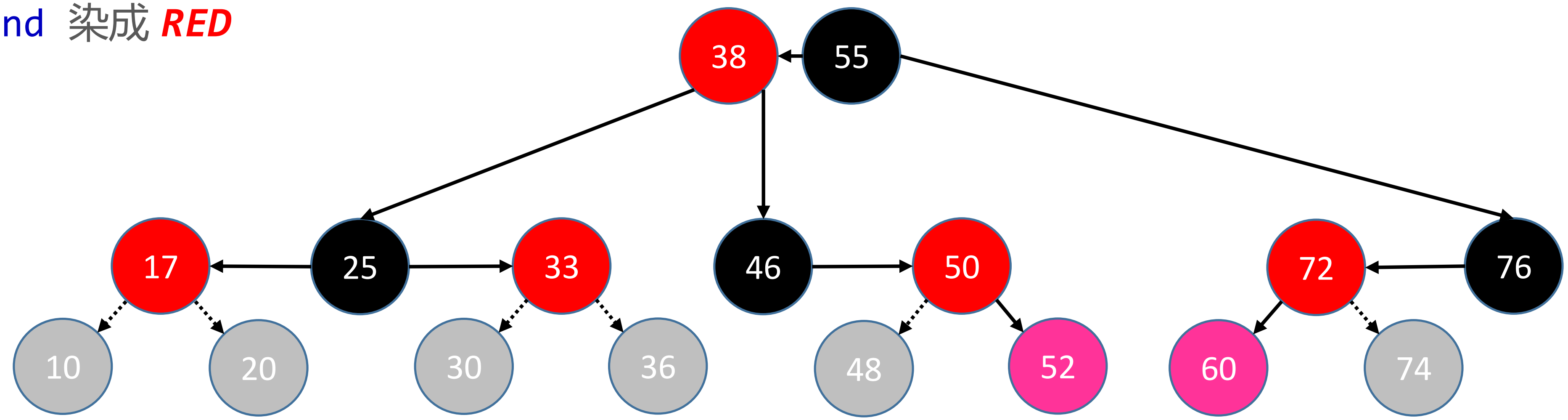


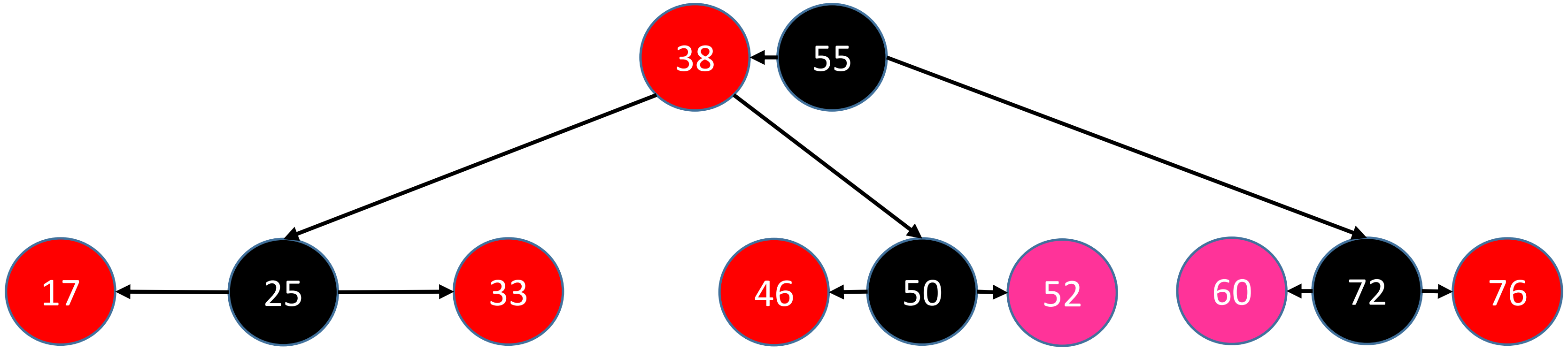
添加 – 修复性质4 – LL\RR

- 判定条件：uncle 不是 ***RED***

1. parent 染成 ***BLACK***，grand 染成 ***RED***
2. grand 进行单旋操作

- LL：右旋转
- RR：左旋转



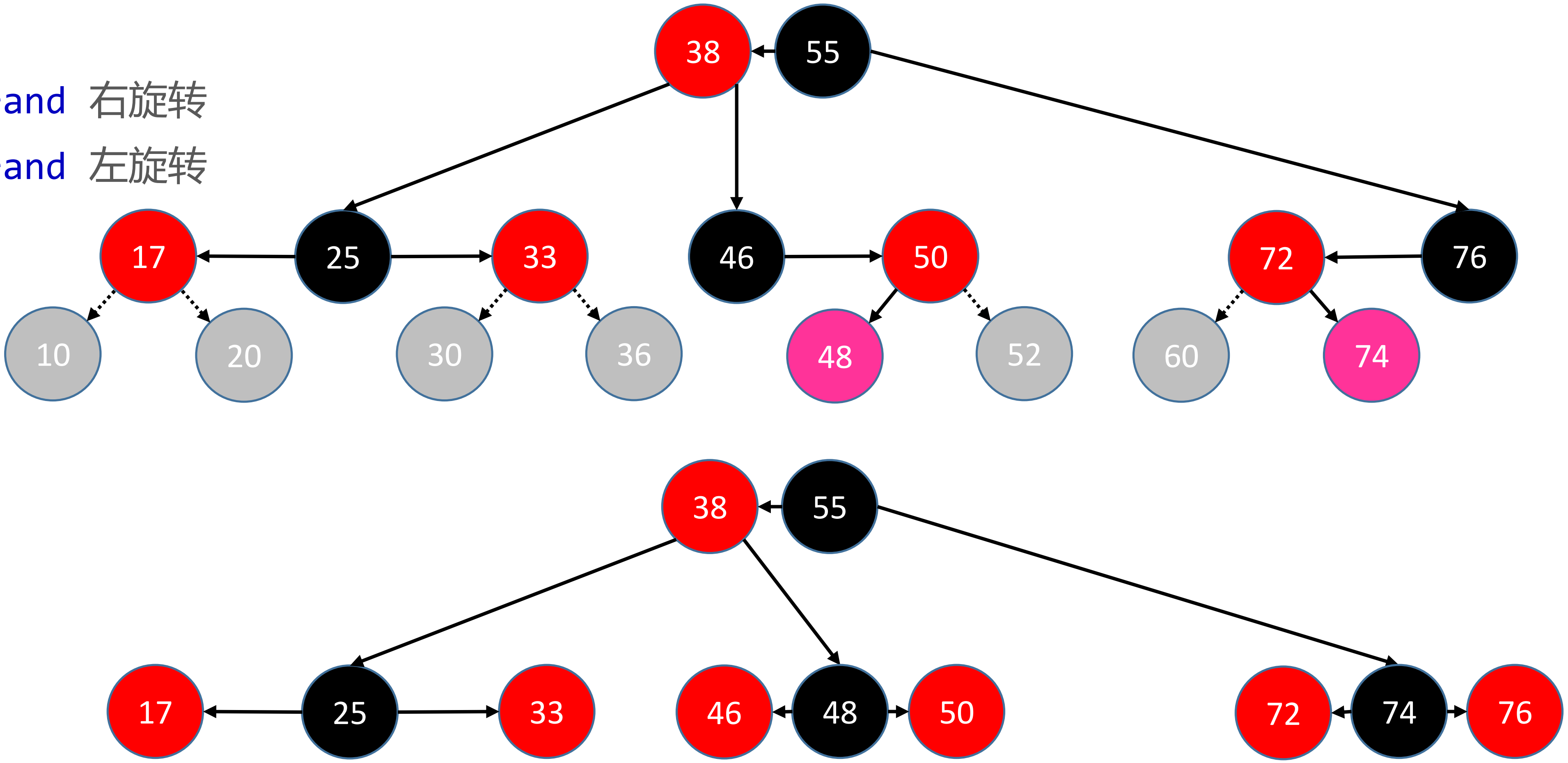


添加 – 修复性质4 – LR\RL

- 判定条件：uncle 不是 ***RED***

1. 自己染成 ***BLACK***，grand 染成 ***RED***
2. 进行双旋操作

- LR：parent 左旋转， grand 右旋转
- RL：parent 右旋转， grand 左旋转

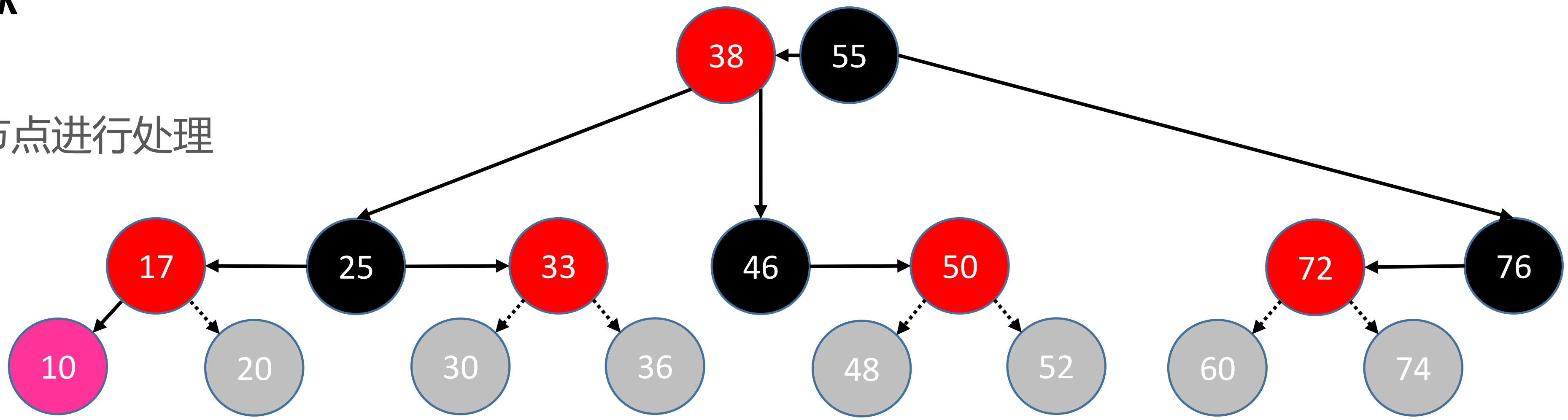


添加 – 修复性质4 – 上溢 – LL

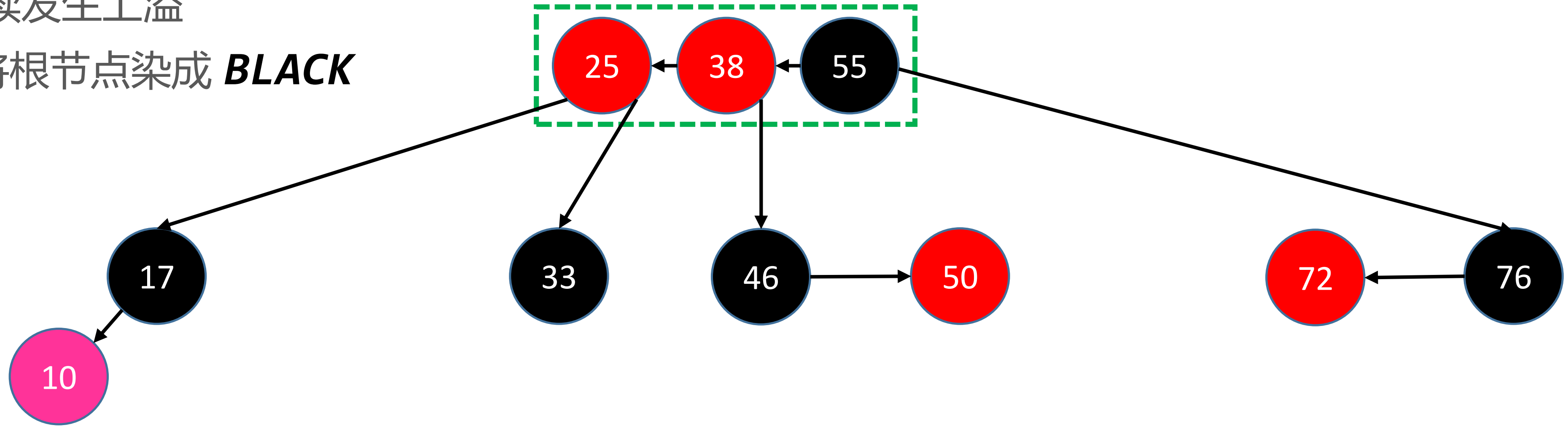
- 判定条件：uncle 是 ***RED***

1. parent、uncle 染成 ***BLACK***
2. grand 向上合并

- 染成 ***RED***，当做是新添加的节点进行处理



- grand 向上合并时，可能继续发生上溢
- 若上溢持续到根节点，只需将根节点染成 ***BLACK***



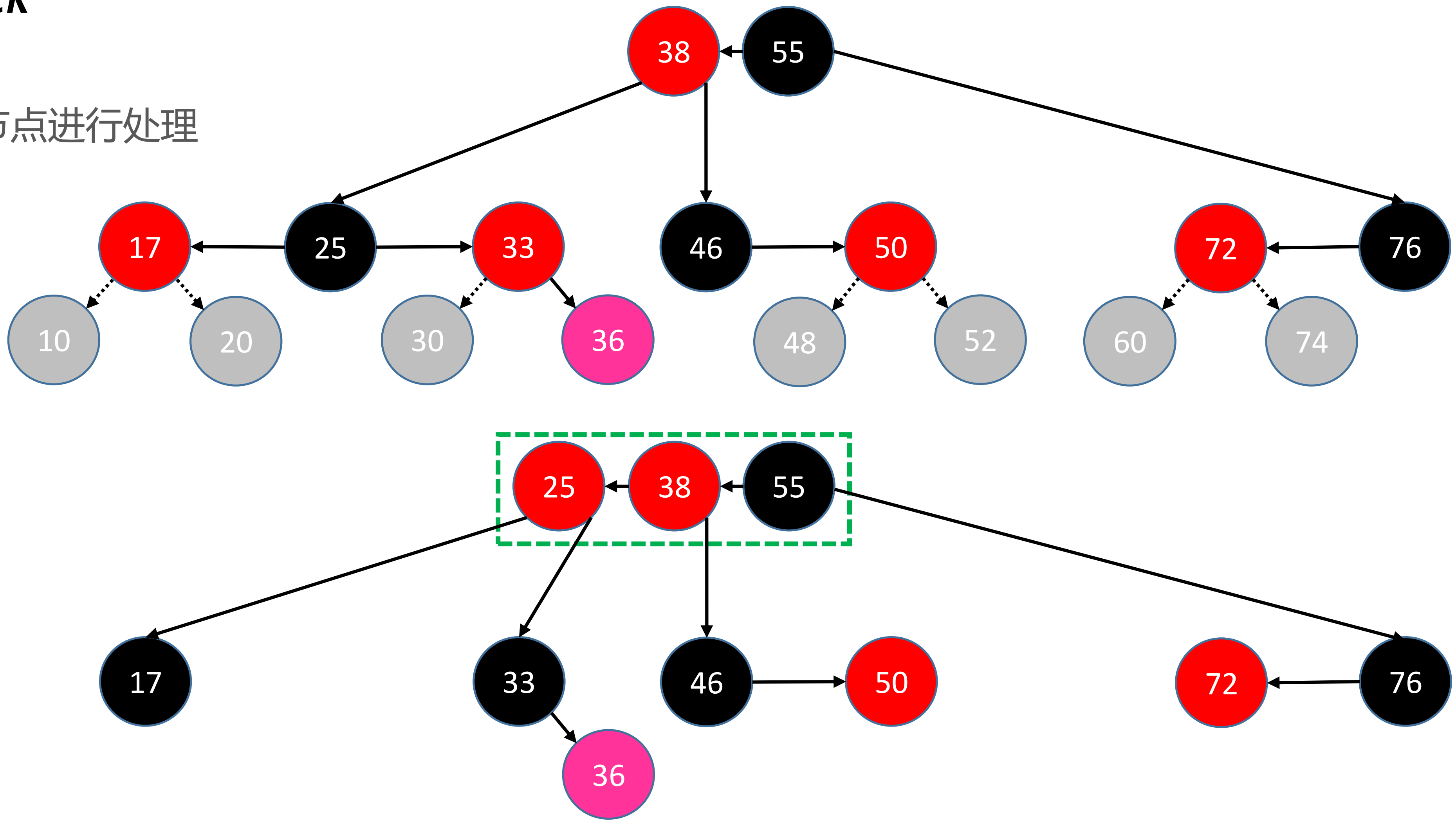
添加 – 修复性质4 – 上溢 – RR

■ 判定条件：uncle 是 ***RED***

1. parent、uncle 染成 ***BLACK***

2. grand 向上合并

□ 染成 ***RED***，当做是新添加的节点进行处理

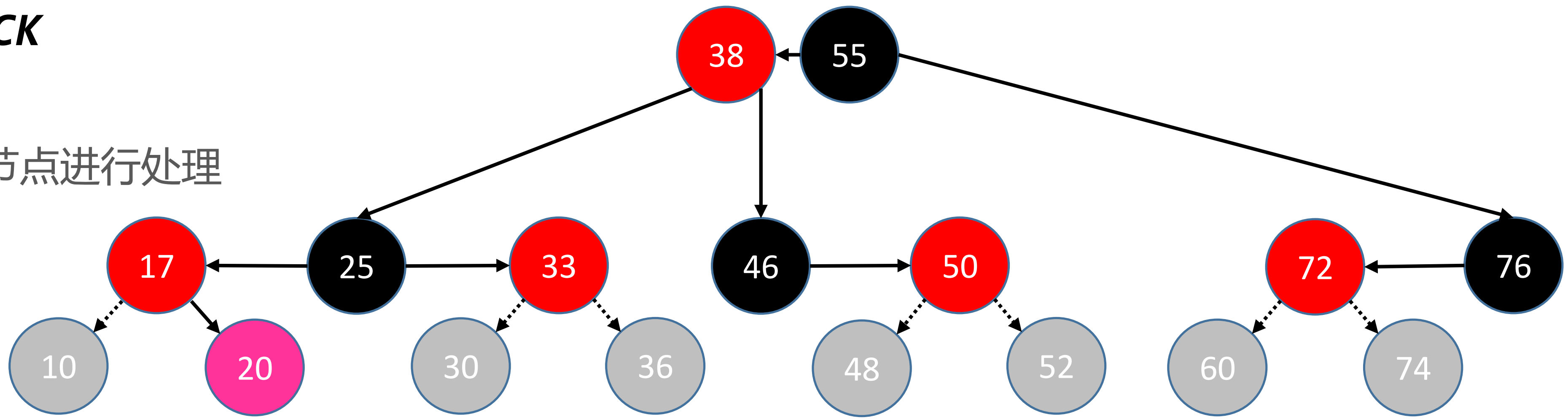


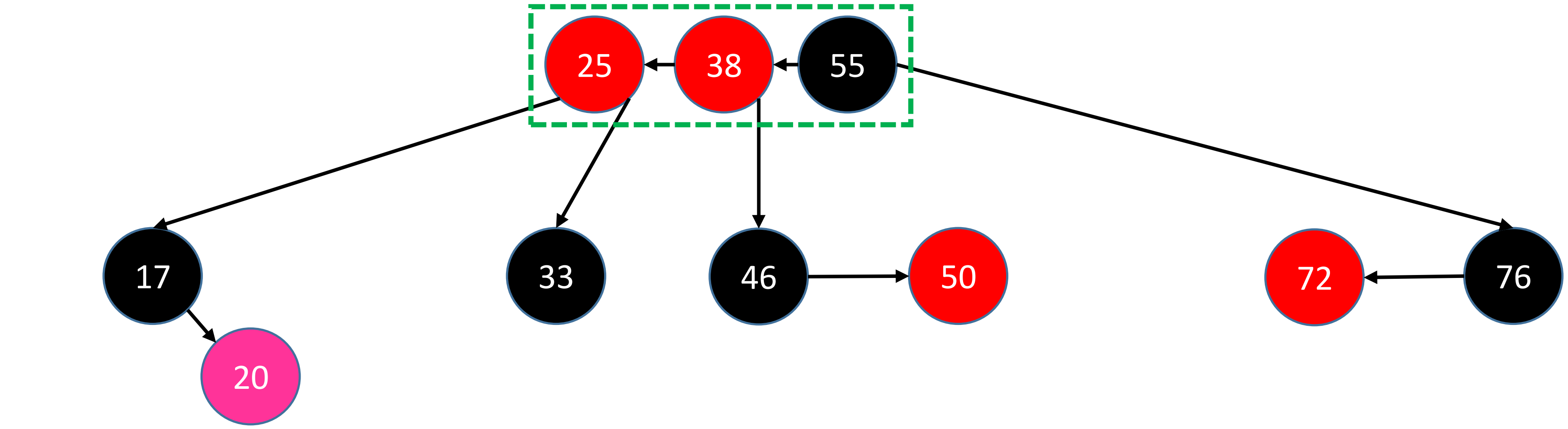
添加 – 修复性质4 – 上溢 – LR

- 判定条件：uncle 是 ***RED***

1. parent、uncle 染成 ***BLACK***
2. grand 向上合并

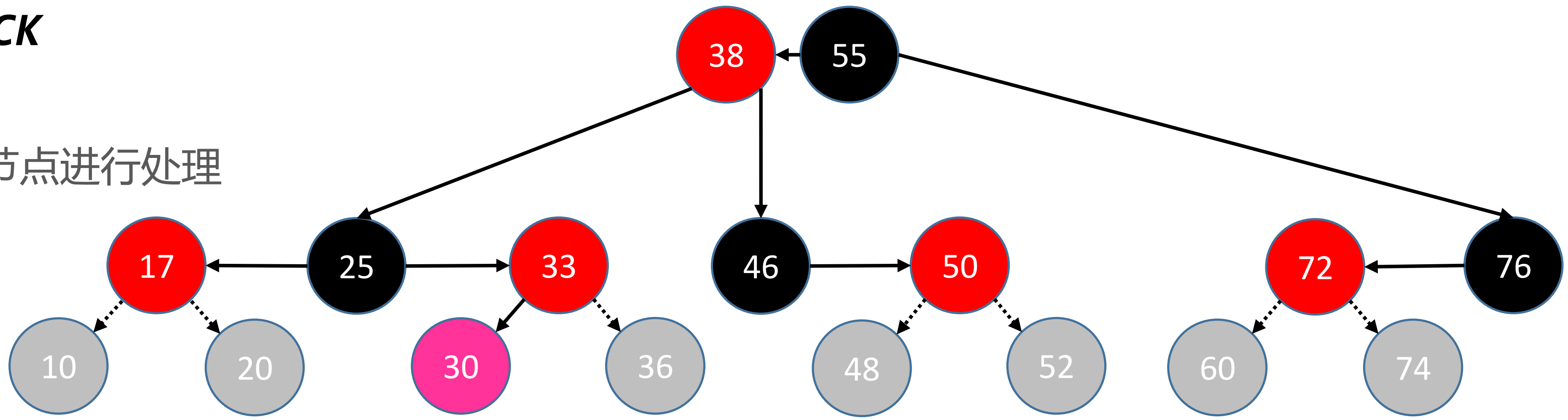
- 染成 ***RED***，当做是新添加的节点进行处理

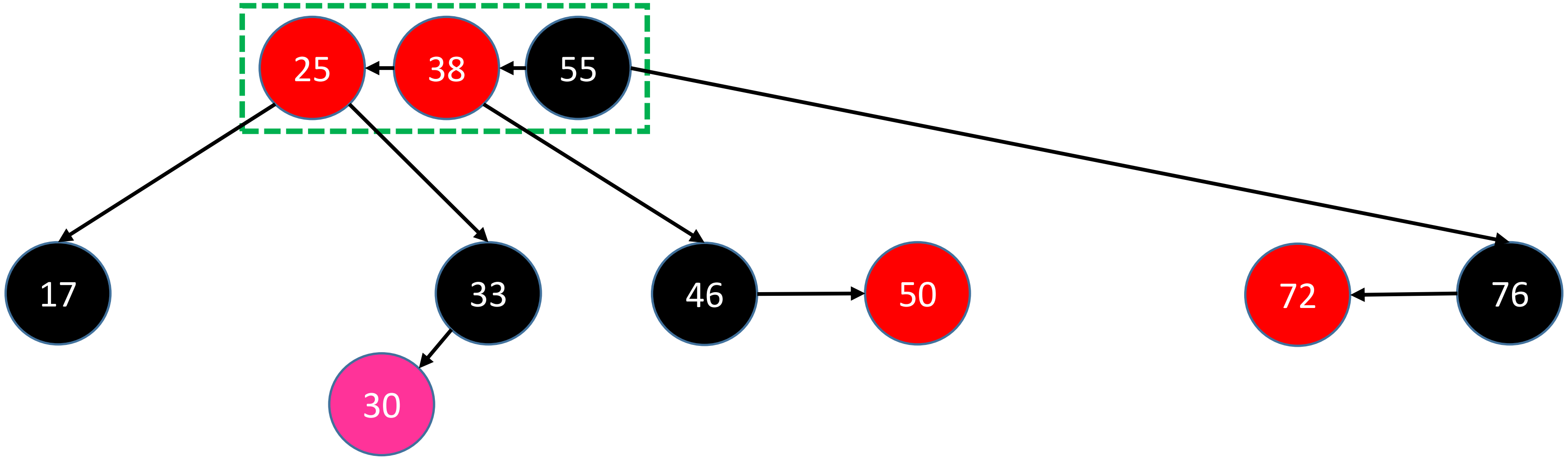




添加 – 修复性质4 – 上溢 – RL

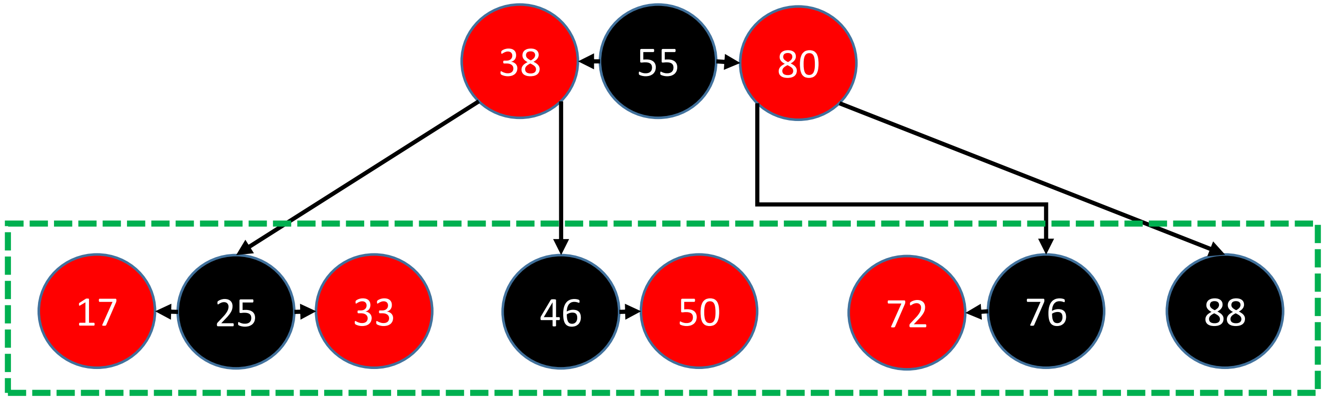
- ■ 判定条件：uncle 是 ***RED***
- 1. parent、uncle 染成 ***BLACK***
- 2. grand 向上合并
- □ 染成 ***RED***，当做是新添加的节点进行处理





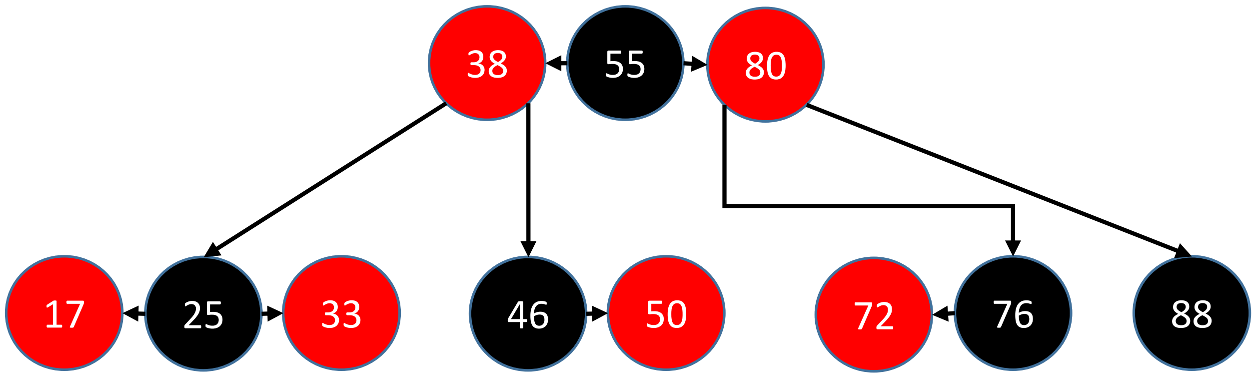
删除

- B树中，最后真正被删除的元素都在叶子节点中



删除 – RED节点

- 直接删除，不用作任何调整



删除 – BLACK节点

■ 有 3 种情况

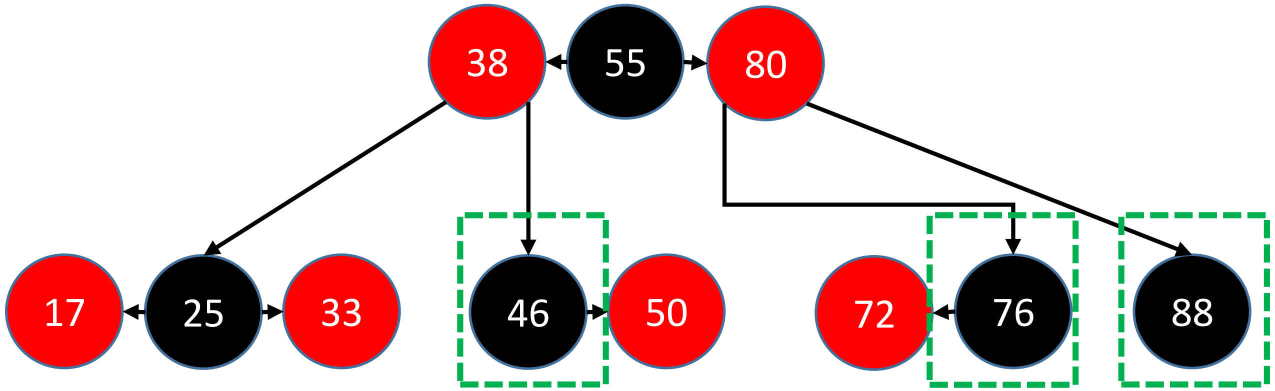
□拥有 2 个 ***RED*** 子节点的 ***BLACK*** 节点

✓不可能被直接删除，因为会找它的子节点替代删除

✓因此不用考虑这种情况

□拥有 1 个 ***RED*** 子节点的 ***BLACK*** 节点

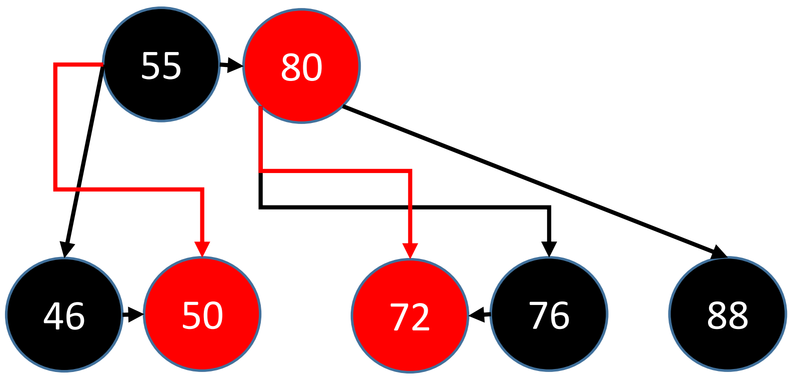
□***BLACK*** 叶子节点

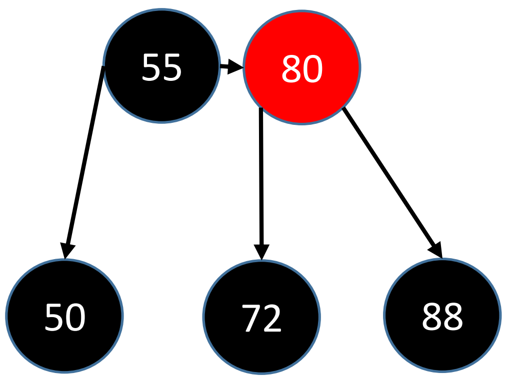


删除 – 拥有1个RED子节点的BLACK节点

- 判定条件：用以替代的子节点是 ***RED***

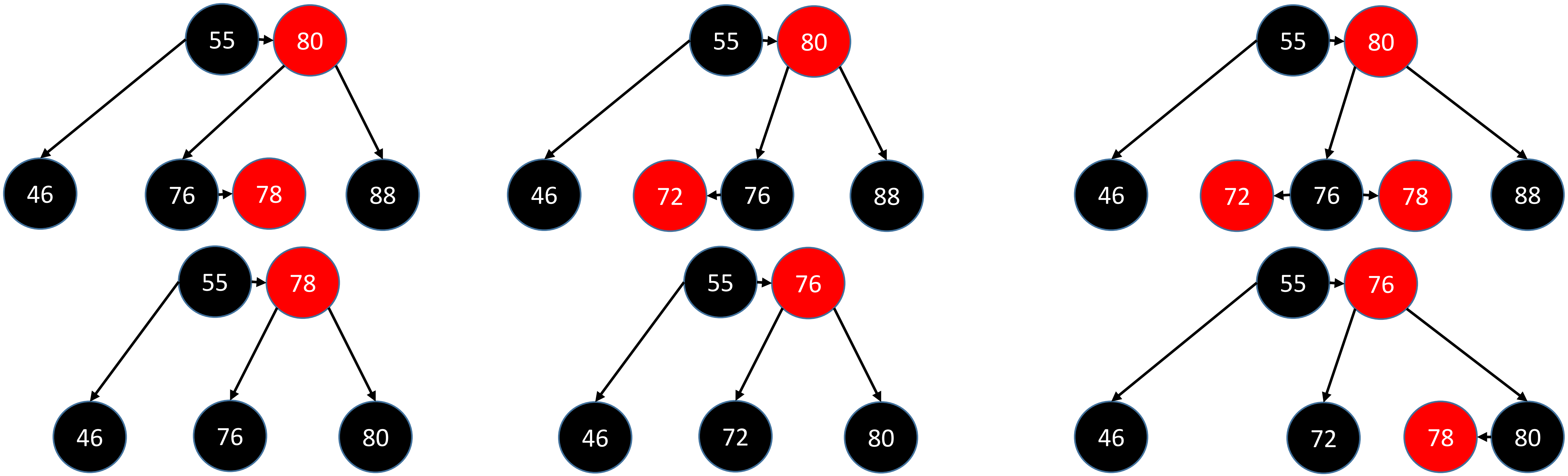
- 将替代的子节点染成 ***BLACK*** 即可保持红黑树性质

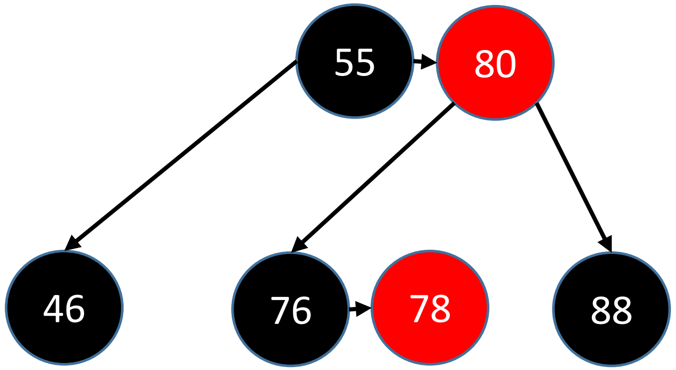


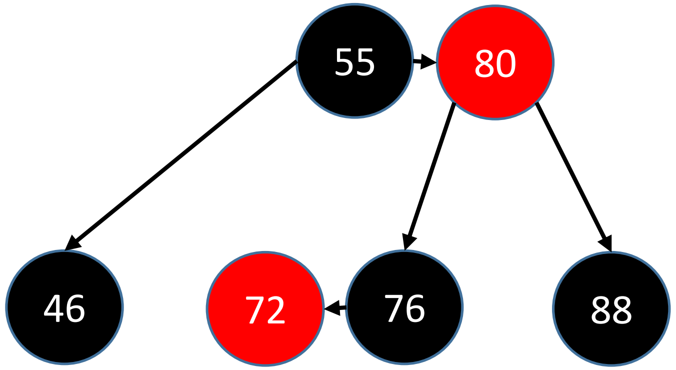


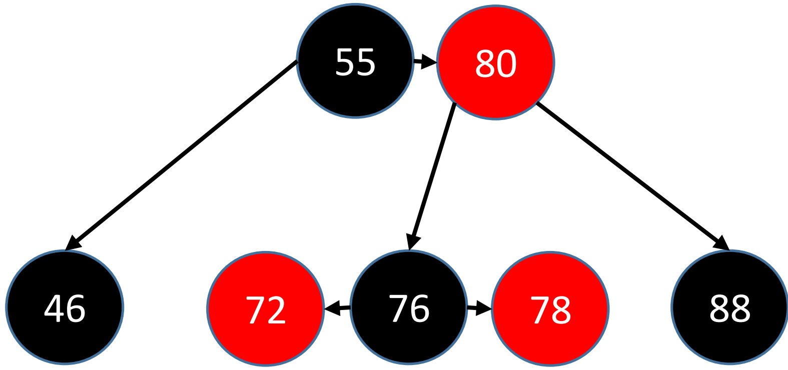
删除 – BLACK叶子节点 – sibling为BLACK

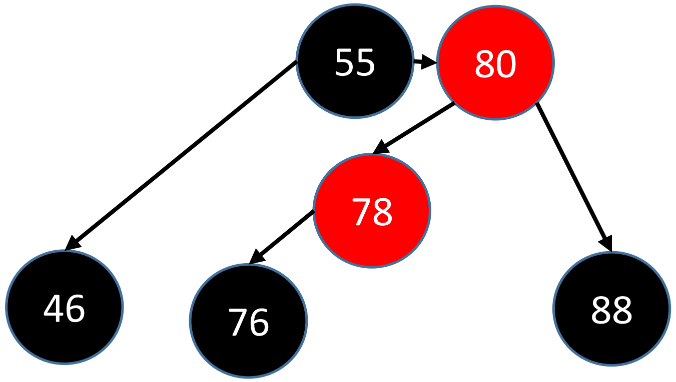
- ***BLACK*** 叶子节点被删除后，会导致B树节点下溢（比如删除88）
- 如果 `sibling` 至少有 1 个 ***RED*** 子节点
  - 进行旋转操作
  - 旋转之后的中心节点继承 `parent` 的颜色
  - 旋转之后的左右节点染为 ***BLACK***




55
80
46
76
78
88


55
80
46
72
76
88

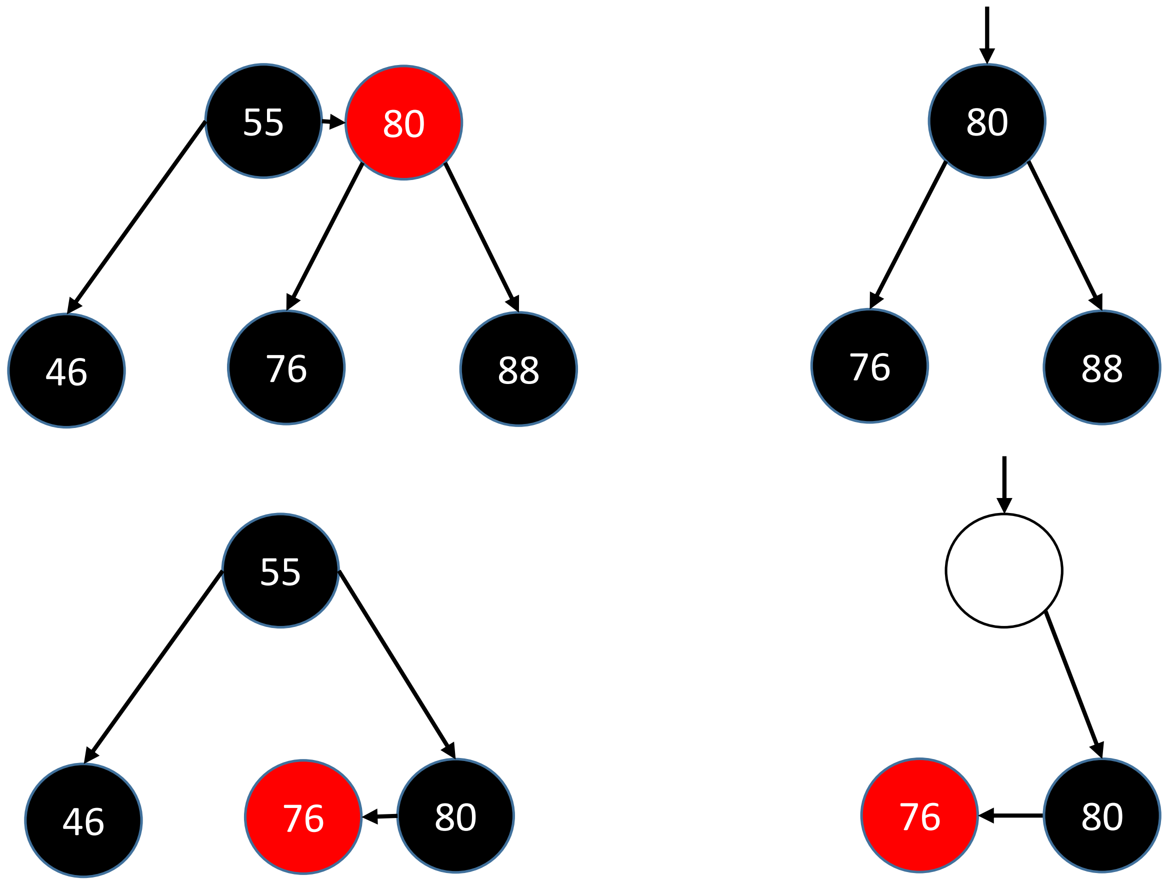

55
80
46
72
76
78
88


55
80
78
46
76
88

删除 – BLACK叶子节点 – sibling为BLACK

■ 判定条件：sibling 没有 1 个 ***RED*** 子节点

■ 将 sibling 染成 ***RED***、parent 染成 ***BLACK*** 即可修复红黑树性质



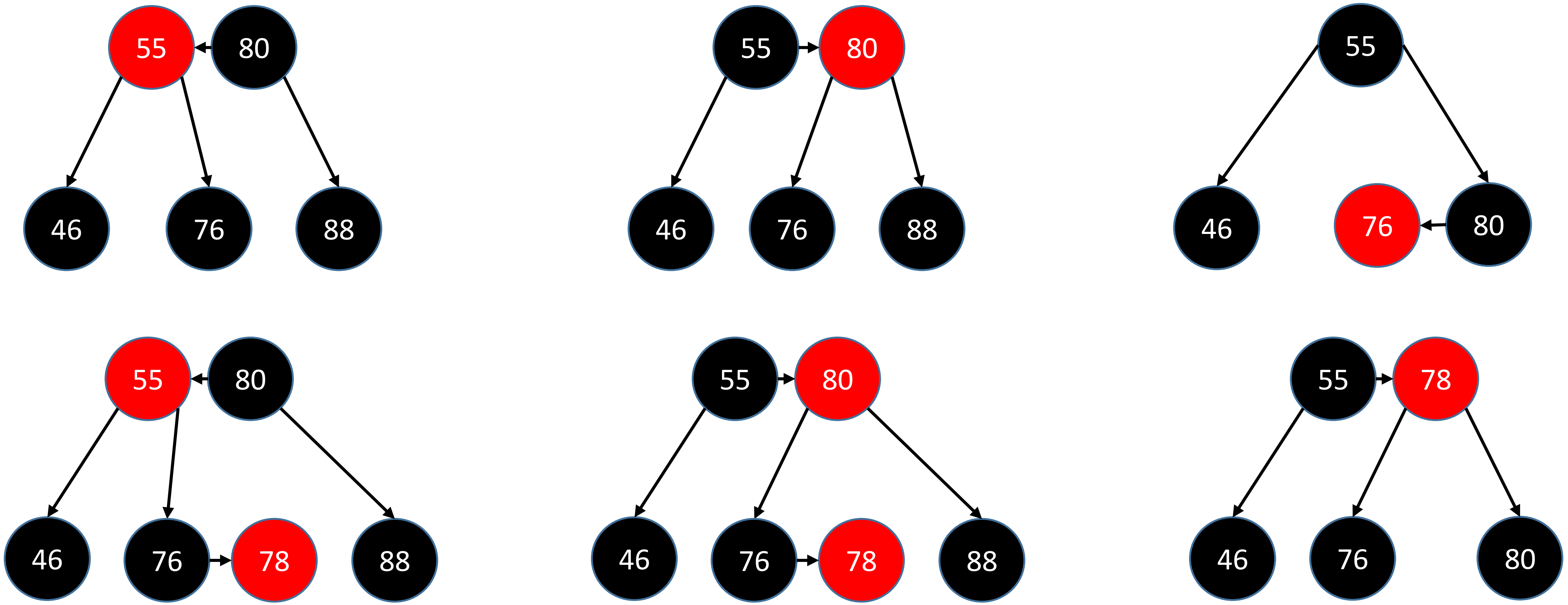
■ 如果 parent 是 ***BLACK***

□ 会导致 parent 也下溢

□ 这时只需要把 parent 当做被删除的节点处理即可

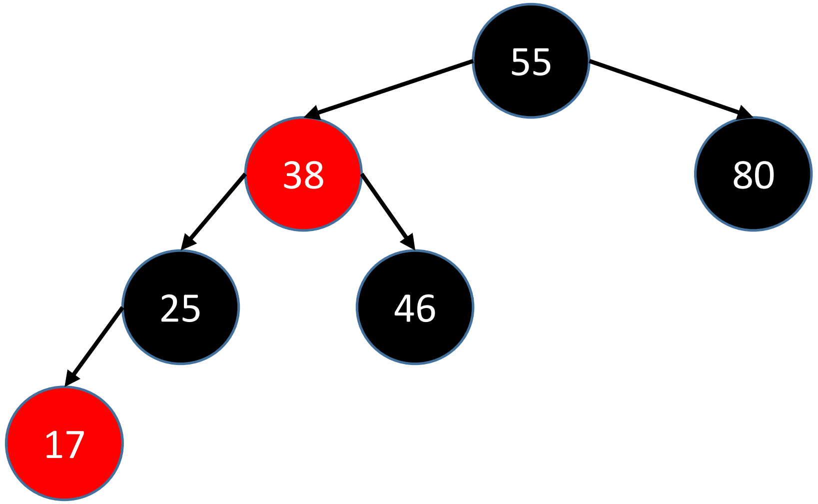
删除 – BLACK叶子节点 – sibling为RED

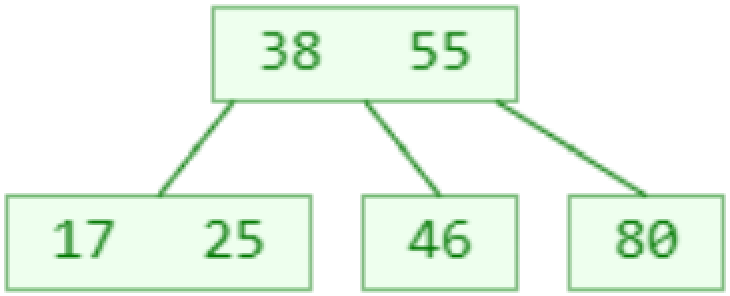
- 如果 sibling 是 ***RED***
- sibling 染成 ***BLACK***，parent 染成 ***RED***，进行旋转
- 于是又回到 sibling 是 ***BLACK*** 的情况



红黑树的平衡

- 最初遗留的困惑：为何那5条性质，就能保证红黑树是平衡的?
- 那5条性质，可以保证 红黑树 等价于 4阶B树





- 相比AVL树，红黑树的平衡标准比较宽松：没有一条路径会大于其他路径的2倍
- 是一种弱平衡、黑高度平衡
- 红黑树的最大高度是 $2 * \log_2(n+1)$，依然是 O(logn) 级别

平均时间复杂度

- 搜索：O(logn)
- 添加：O(logn)，O(1) 次的旋转操作
- 删除：O(logn)，O(1) 次的旋转操作

AVL树 vs 红黑树

- AVL树
  - 平衡标准比较严格：每个左右子树的高度差不超过1
  - 最大高度是 $1.44 * \log_2(n+2) - 1.328$（100W个节点，AVL树最大树高28）
  - 搜索、添加、删除都是 O(logn) 复杂度，其中添加仅需 O(1) 次旋转调整、删除最多需要 O(logn) 次旋转调整

- 红黑树
  - 平衡标准比较宽松：没有一条路径会大于其他路径的2倍
  - 最大高度是 $2 * \log_2(n+1)$（ 100W个节点，红黑树最大树高40）
  - 搜索、添加、删除都是 O(logn) 复杂度，其中添加、删除都仅需 O(1) 次旋转调整

- 搜索的次数远远大于插入和删除，选择AVL树；搜索、插入、删除次数几乎差不多，选择红黑树
- 相对于AVL树来说，红黑树牺牲了部分平衡性以换取插入/删除操作时少量的旋转操作，整体来说性能要优于AVL树
- 红黑树的平均统计性能优于AVL树，实际应用中更多选择使用红黑树

BST vs AVL Tree vs Red Black Tree

10, 35, 47, 11, 5, 57, 39, 14, 27, 26, 84, 75, 63, 41, 37, 24, 96