ejercicio 2

Luis Esteban Castro Bernal

September 2023

1 Ejercicio 2

Sea la fórmula de Newton-cotes con la siguiente

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} c_i f(x_i)$$

se puede reinterpretar de la siguiente manera

$$f_3(x) = \frac{y_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + \frac{y_1(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$+\frac{y_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{y_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Tambien sabemos que la diferencia llamada h se entiende de la siguiente forma

$$h = \frac{x_3-x_0}{3} = x_1-x_0 = x_2-x_1 = x_3-x_2$$

Por lo tanto la ecuación reinterpretada en terminos de h de Newton-Codes se puede ver como

$$f_3(x) = \frac{y_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(-h)(-2h)(-3h)} + \frac{y_1(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(-h)(-2h)(-3h))}$$

$$+\frac{y_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(-h)(-2h)(-3h)} + \frac{y_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(-h)(-2h)(-3h)}$$

simplificado es

$$f_3(x) = \frac{y_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{-6h^3} + \frac{y_1(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{2h^3}$$

$$+\frac{y_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{-2h^3} + \frac{y_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6h^3}$$

Procedemos a integrar esta ecuación para calcular el área bajo la curva de la parábola como se muestra

$$\int_{x_0}^{x_3} \frac{y_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{-6h^3} + \frac{y_1(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{2h^3}$$

$$+\frac{y_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{-2h^3} + \frac{y_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6h^3}dx$$

al ser una suma y resta se puede realizar por partes

$$\int_{x_0}^{x_3} \frac{y_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{-6h^3}dx$$

que h al ser constante la integral se redefine como

$$\frac{y_0}{-6h^3}\int_{x_0}^{x_3} (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)dx$$

se realiza la integral de la forma

$$\int_{x_0}^{x_3} (x-a)(x-b)(x-c)dx$$

$$= \frac{(x-a)(x-b)(x-c)^2}{2} - \frac{(x-c)^4}{4} + \left(-c + \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)\left(\frac{(x-c)^3}{3}\right)$$

$$= -\frac{y_0}{6h^3}\left(\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)^2}{2} - \frac{(x-x_3)^4}{4} + \left(-x_3 + \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right)\left(\frac{(x-x_3)^3}{3}\right)\right)$$

Esto al ser evaluado en x0 a x3 en x3 al darnos 0 solo nos queda evaluar en x=x0 quedando de la siguiente manera

$$= \frac{y_0}{6h^3}\left(\frac{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)^2}{2} - \frac{(x_0-x_3)^4}{4} + \left(-x_3 + \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right)\left(\frac{(x_0-x_3)^3}{3}\right)\right)$$

reinterpretandolo en forma de h queda

$$= \frac{y_0}{6h^3}\left(\frac{(-h)(-2h)(-3h)^2}{2} - \frac{(-3h)^4}{4} + \left(-\frac{3h}{2}\right)\left(\frac{(-3h)^3}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{y_0}{6h^3}\left(9h^4 - \frac{81h^4}{4} + \frac{27h^4}{2}\right)$$

$$= \frac{y_0}{6h^3}\left(\frac{9h^4}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{8}y_0h$$

ahora en el caso x1

$$\frac{y_1}{2h^3}\int_{x_0}^{x_3} (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)dx$$

se realiza la integral de la forma

$$\int_{x_0}^{x_3} (x-a)(x-b)(x-c)dx$$

$$= \frac{(x-a)(x-b)(x-c)^2}{2} - \frac{(x-c)^4}{4} + \left(-c + \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)\left(\frac{(x-c)^3}{3}\right)$$

$$= \frac{y_0}{2h^3}\left(\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)^2}{2} - \frac{(x-x_3)^4}{4} + \left(-x_3 + \frac{x_0}{2} + \frac{x_2}{2}\right)\left(\frac{(x-x_3)^3}{3}\right)\right)$$

Esto al ser evaluado en x0 a x3 en x3 al darnos 0 y en algunas partes de x0 se reformula como

$$= -\frac{y_0}{2h^3}\left(-\frac{(x_0-x_3)^4}{4} + \left(-x_3 + \frac{x_0}{2} + \frac{x_2}{2}\right)\left(\frac{(x_0-x_3)^3}{3}\right)\right)$$

reinterpretandolo en forma de h queda

$$= -\frac{y_0}{2h^3}\left(-\frac{(-3h)^4}{4} + \left(-\frac{8h}{4}\right)\left(\frac{(-3h)^3}{3}\right)\right)$$

$$= -\frac{y_0}{2h^3}\left(-\frac{81h^4}{4} + \frac{36h^4}{2}\right)$$

$$= \frac{y_0}{2h^3}\left(\frac{9h^4}{4}\right)$$

$$= \frac{9}{8}y_0 h$$

con esto se encuentra el primer y segundo termino de la integral y al hacer lo mismo para los demas terminos queda

$$\int_{x_0}^{x_3} f_3(x)dx = \frac{3}{8}y_0 h + \frac{9}{8}y_1 h + \frac{9}{8}y_2 h + \frac{3}{8}y_3 h$$

$$= \frac{3}{8}h(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$