

Certifier la qualité d’une heuristique sur graphes réels

Fabrice Lécuyer, Sorbonne, CNRS, LIP6, fabrice.lecuyer@lip6.fr

Pour d’importants problèmes de graphes, les algorithmes exacts ont des complexités et des temps de calcul qui sont rédhibitoires sur les gros graphes réels. En pratique, des algorithmes rapides sans garanties théoriques, appelés heuristiques, donnent de bons résultats approchés. Il serait intéressant d’avoir une indication sur la distance effective entre ce résultat et la valeur optimale.

La technique de certification de qualité présentée ici le permet : pour un graphe donné, elle consiste à calculer un résultat approché et une borne de la valeur optimale pour encadrer la qualité du résultat. Une telle borne peut être obtenue de plusieurs manières, et l’exemple de Vertex Cover permet d’en illustrer une qui se généralise aux problèmes ayant une k -approximation.

Le problème de Minimum Vertex Cover consiste à trouver un petit ensemble de nœuds qui couvre toutes les arêtes du graphe. Il est NP-difficile mais une 2-approximation est donnée par les nœuds de n’importe quel couplage maximal. La certification de qualité fonctionne ainsi pour un graphe G dont on ne connaît pas de couverture minimum C^* : on calcule d’abord une petite couverture C^- avec n’importe quelle heuristique, et on a $|C^*| \leq |C^-|$. Puis on trouve un couplage maximal dont les nœuds forment une grande couverture C^+ . Comme C^+ est issue d’un couplage, on sait qu’elle constitue une 2-approximation de la couverture minimum : $\frac{1}{2}|C^+| \leq |C^*|$. Cet encadrement de $|C^*|$ permet de garantir que le résultat heuristique C^- est à un facteur multiplicatif $\frac{2|C^-|}{|C^+|}$ de l’optimum. En pratique, ce ratio peut être beaucoup plus petit que le facteur 2 de la garantie théorique.

Testée sur un centaine de graphes réels (du web, des réseaux sociaux, des interactions biologiques etc), cette méthode permet de certifier la qualité de l’heuristique avec des ratios très bas dans la moitié des cas. Elle donne d’aussi bons résultats avec d’autres problèmes comme Independent Set.

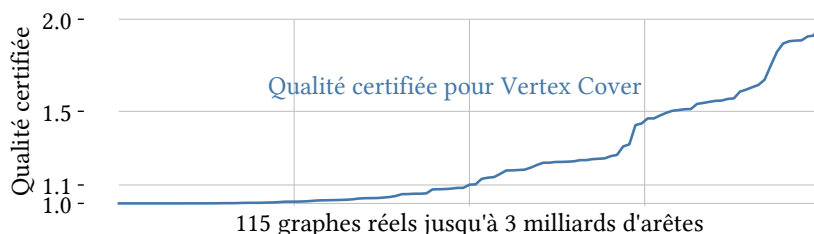


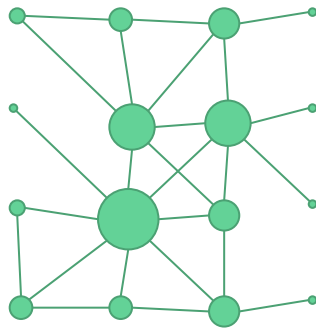
FIGURE 1 – La qualité certifiée pour Vertex Cover prouve que la couverture trouvée est moins de 10% plus grande qu’optimum sur 50% des graphes.

Certifier la qualité d'une heuristique sur des graphes réels

Fabrice Lécuyer

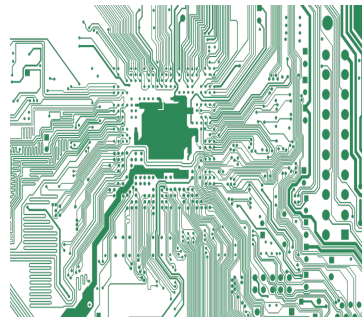
JGA 2022

Étudier des graphes réels



Bonnes propriétés

Petit diamètre
Loi de puissance
Communautés



Contraintes pratiques

Propriétés inconnues
Temps de calcul
Stockage en RAM

Que faire d'un problème difficile ?

Algo exact

Qualité



Certitude



Vitesse



Que faire d'un problème difficile ?

	Algo exact	Approximation
Qualité	★	×
Certitude	★	★
Vitesse	×	★

Que faire d'un problème difficile ?

	Algo exact	Approximation	Heuristique
Qualité	★	×	☆
Certitude	★	☆	×
Vitesse	×	☆	★

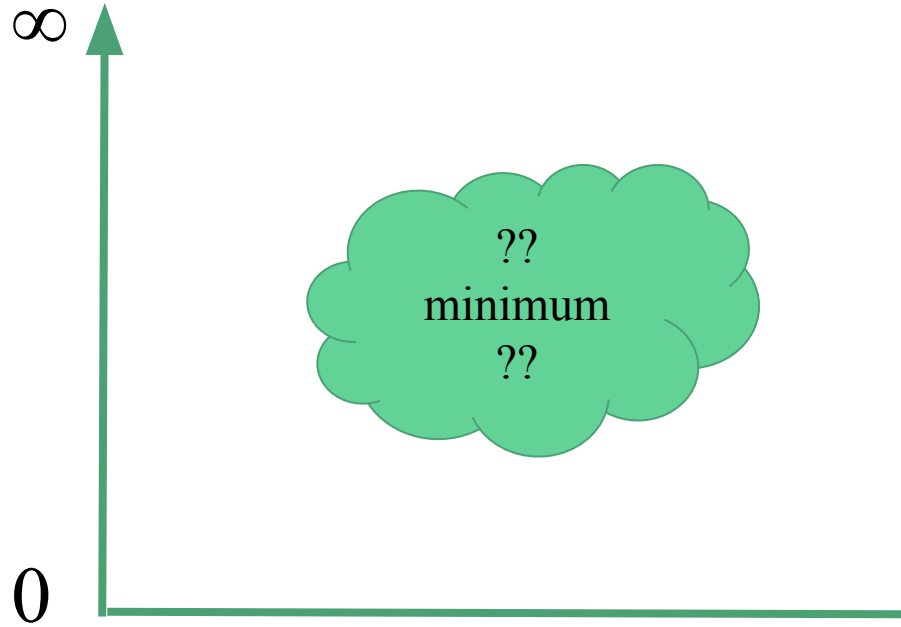
Que faire d'un problème difficile ?

	Algo exact	Approximation	Heuristique	
Qualité	★	×	★	★
Certitude	★	★	★	×
Vitesse	×	★	★	★
			??	

Certifier la qualité d'une heuristique sur des graphes réels

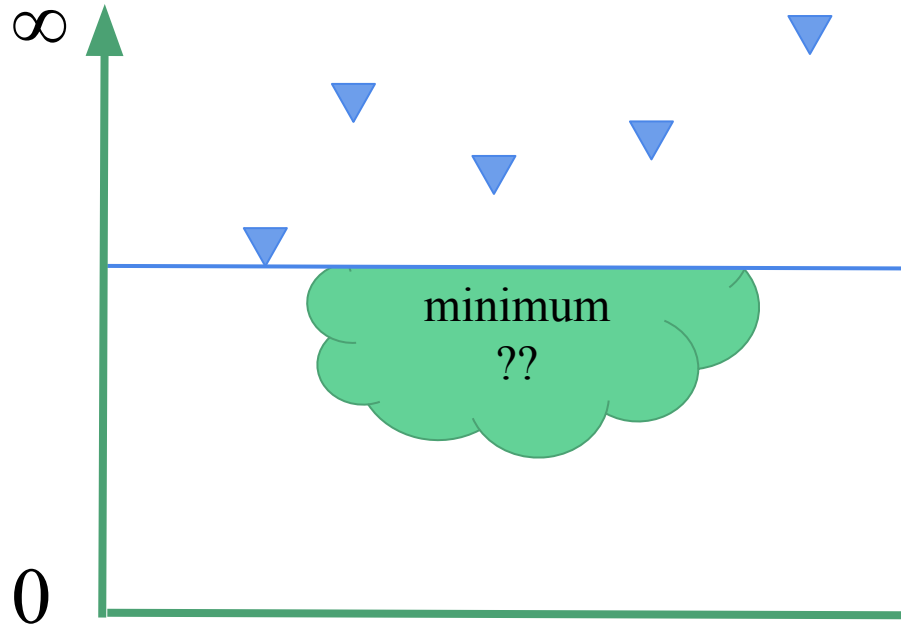
- ▶ Certification
 - ▶ Vertex Cover
 - ▶ Résultats
-

Cas d'une minimisation difficile



Minimum long à trouver

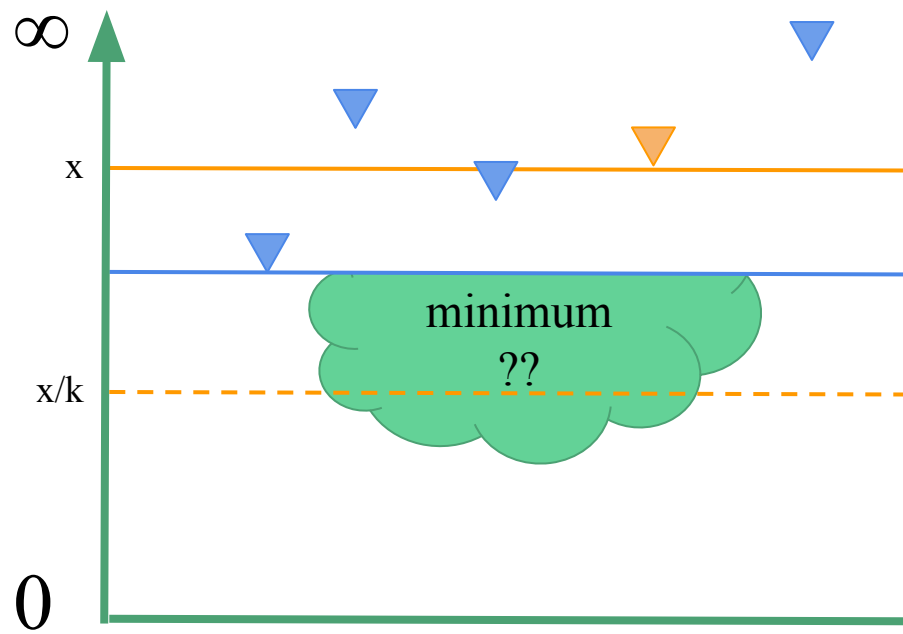
Cas d'une minimisation difficile



Valeurs approchées

Minimum long à trouver

Cas d'une minimisation difficile

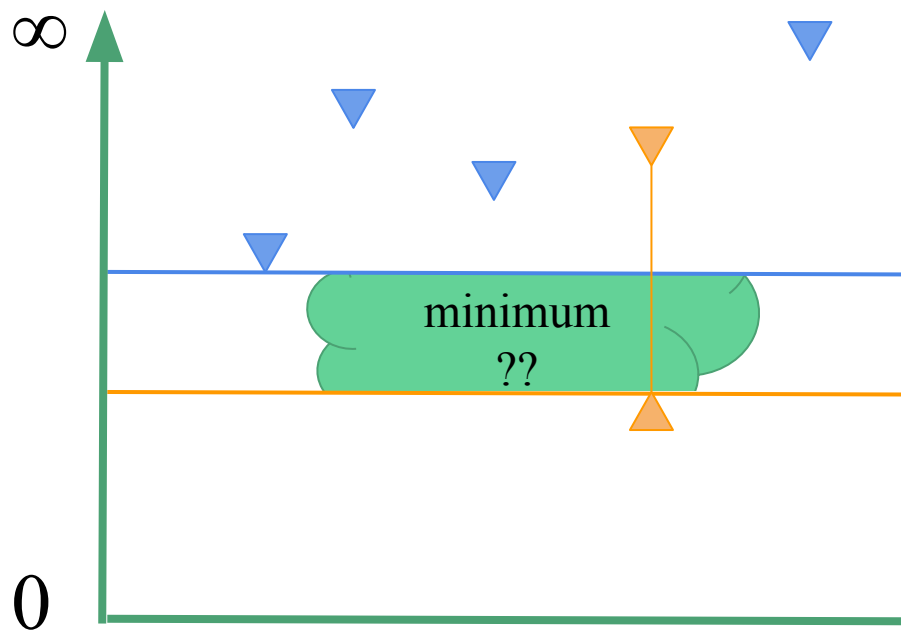


Valeurs approchées

k -approximations

Minimum long à trouver

Cas d'une minimisation difficile



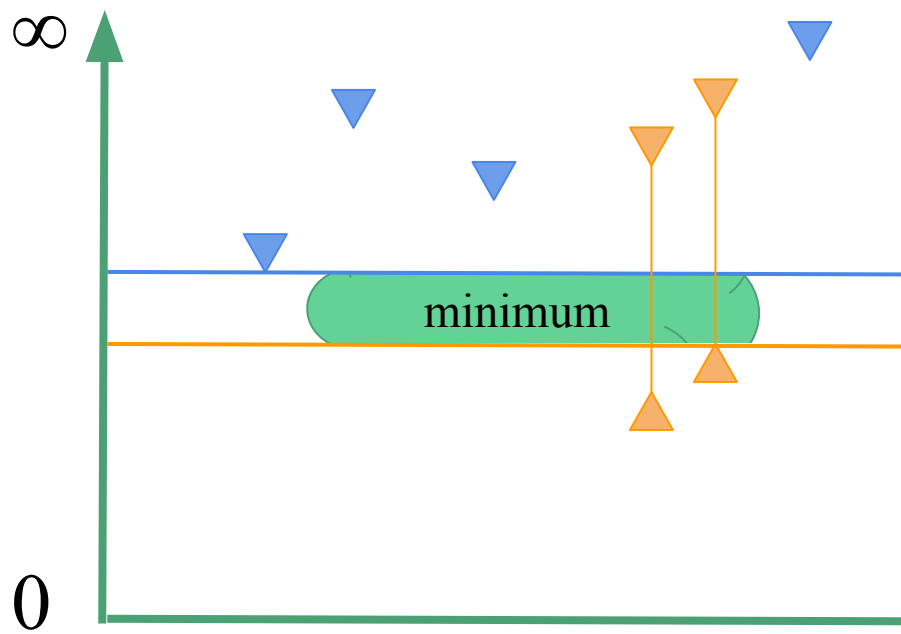
Valeurs approchées

k-approximations

Minimum long à trouver

Bornes inférieures

Cas d'une minimisation difficile



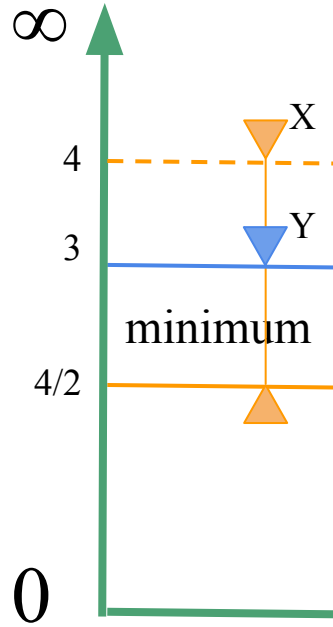
Valeurs approchées

k-approximations

Minimum long à trouver

Bornes inférieures

Certification de qualité : exemple



$$4/2 \leq \text{minimum} \leq 3$$

Le couple (X,Y) certifie que
Y est au plus $3/(4/2)=1.5$ fois
plus grand que le minimum

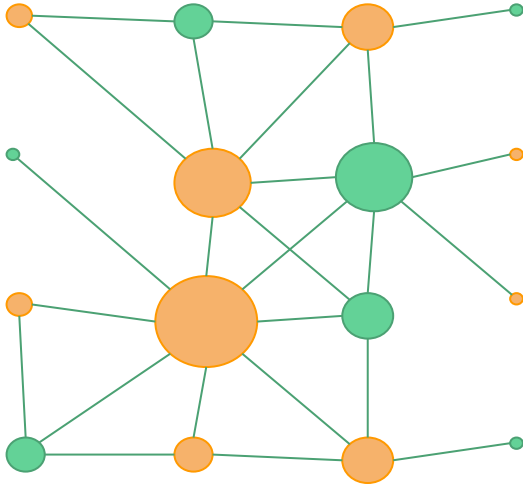


Certifier la qualité d'une heuristique sur des graphes réels

- ▶ Certification
- ▶ Vertex Cover
- ▶ Résultats

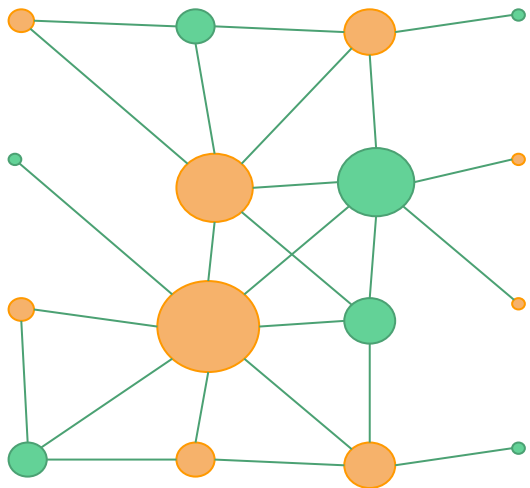


Vertex Cover : couverture des arêtes par les sommets



9 sommets d'une couverture

Vertex Cover



Trouver le minimum :

NP-difficile
règles de réduction

Valeurs approchées :

heuristiques très rapides
résultats « proches » du minimum

Approximations :

inconnues pour $k < 2$
linéaires pour $k = 2$ (couplage maximal)

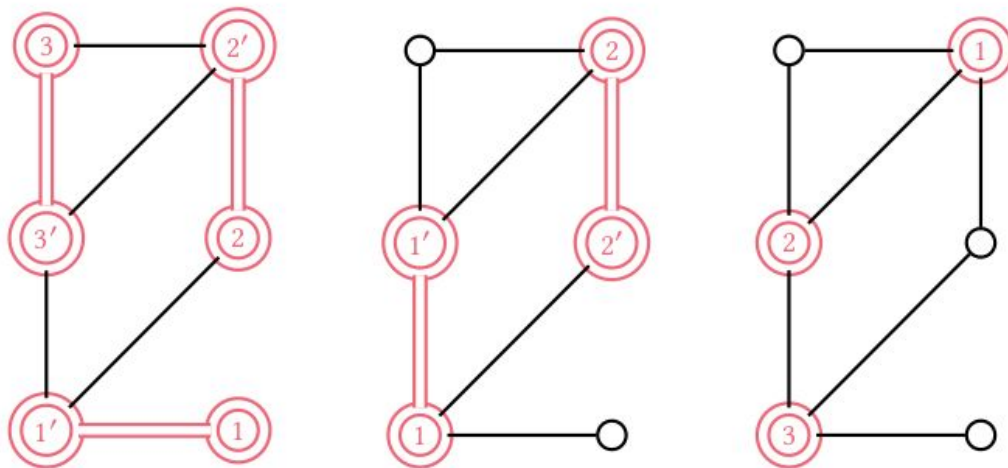
Vertex Cover : 2-approximation

couverture initialement vide

tant que toutes les arêtes ne sont pas couvertes :

choisir une arête non couverte

ajouter ses 2 extrémités à la couverture



Vertex Cover : certification

Valeur approchée : $6 \geq \min$

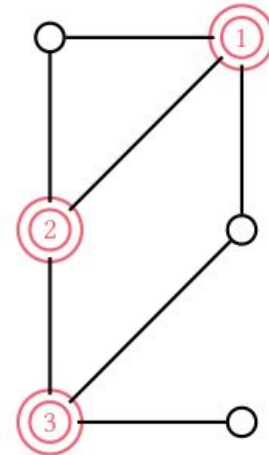
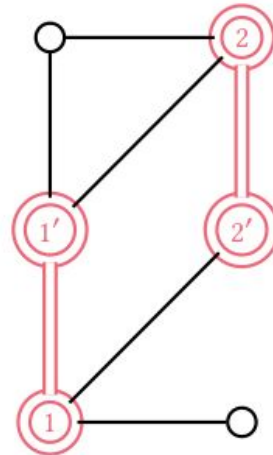
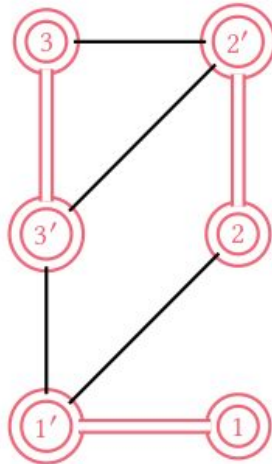
$4 \geq \min$

$3 \geq \min$

Couplage (2-approx) : $6/2 = 3 \leq \min$

$4/2 = 2 \leq \min$

—

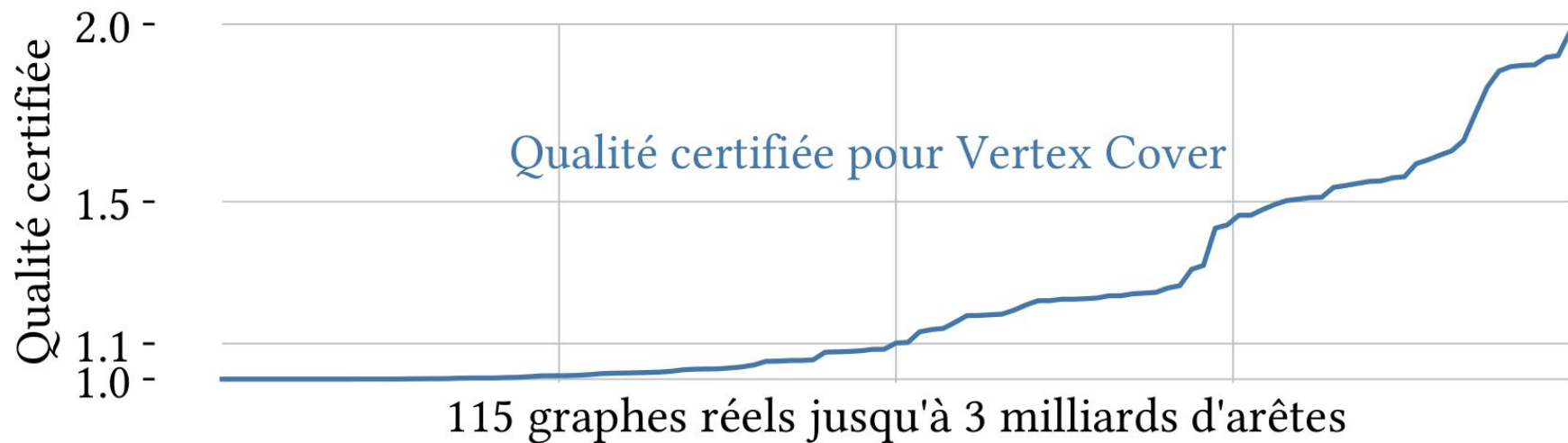


Certifier la qualité d'une heuristique sur des graphes réels

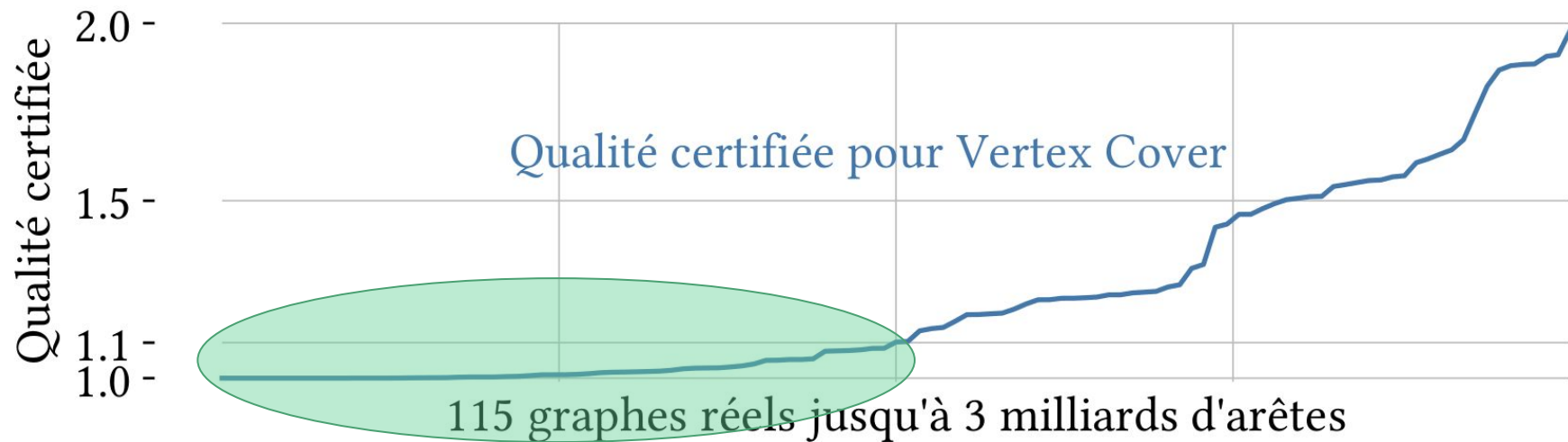
- ▶ Certification
- ▶ Vertex Cover
- ▶ Résultats



Résultats pour Vertex Cover



Résultats pour Vertex Cover



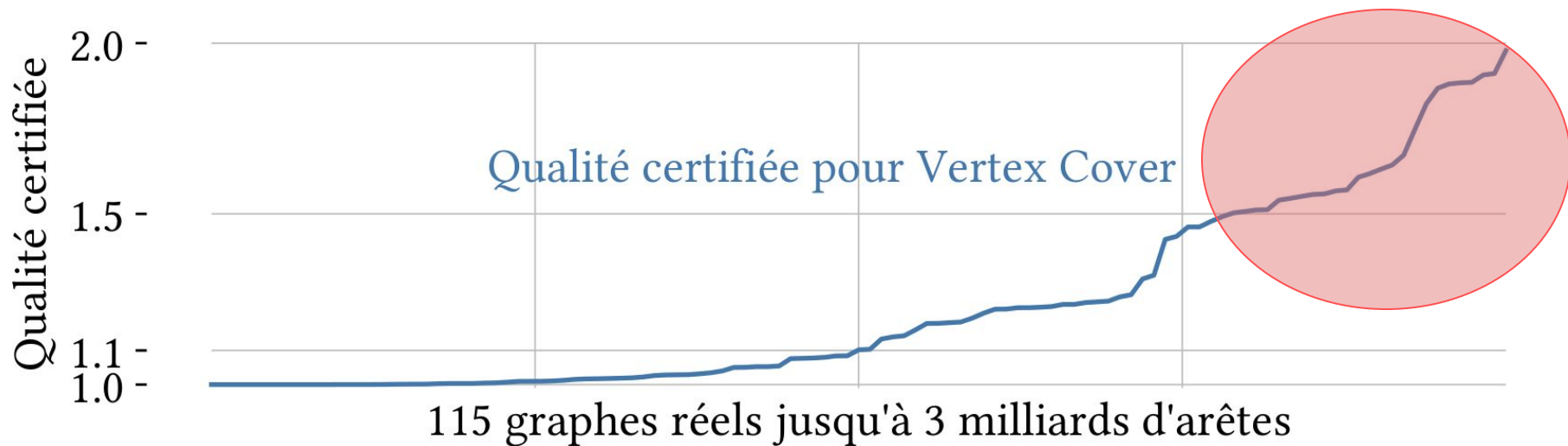
Bonne certification (<1.1)

Bonne certification

- Heuristique efficace
- Garantie du résultat
- Allocation des ressources

Résultats pour Vertex Cover

Mauvaise certification (>1.5)



Mauvaise certification

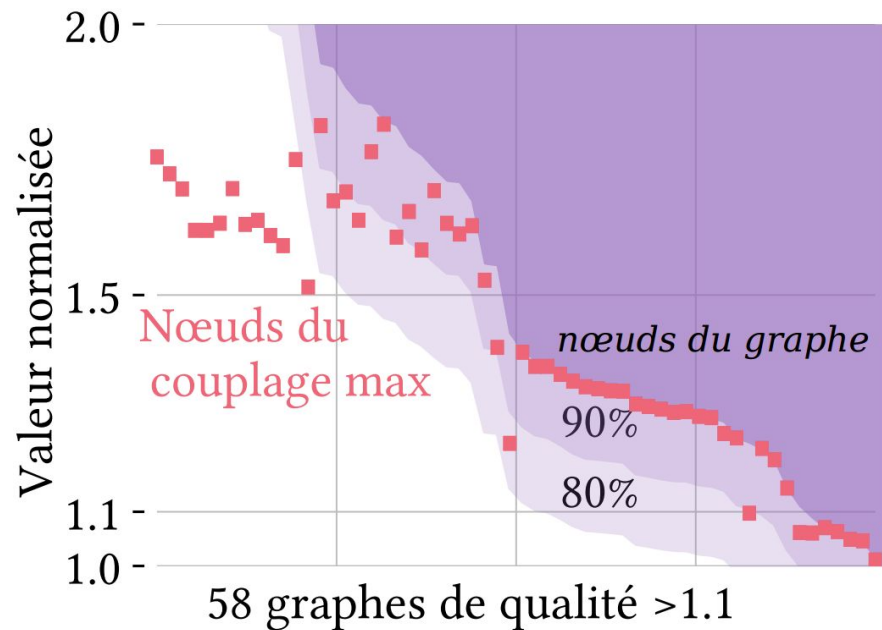
- Heuristique inefficace
-
-
-

Mauvaise certification

- ~~Heuristique inefficace~~
- Couplage non-maximum
-
-

Mauvaise certification

- ~~Heuristique inefficace~~
- ~~Couplage non-maximum~~
- Couplage non-parfait
-

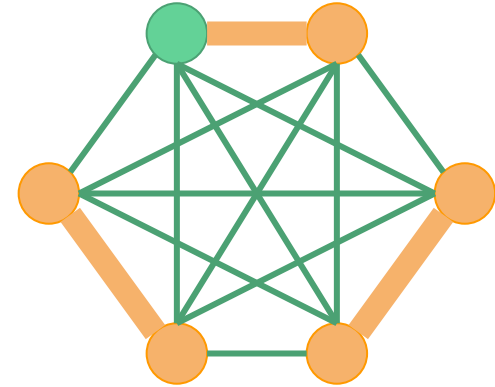


Mauvaise certification

- ~~Heuristique inefficace~~
- ~~Couplage non-maximum~~
- ~~Couplage non-parfait~~
- Grande couverture minimum

Mauvaise certification

- ~~Heuristique inefficace~~
- ~~Couplage non-maximum~~
- ~~Couplage non-parfait~~
- Grande couverture minimum

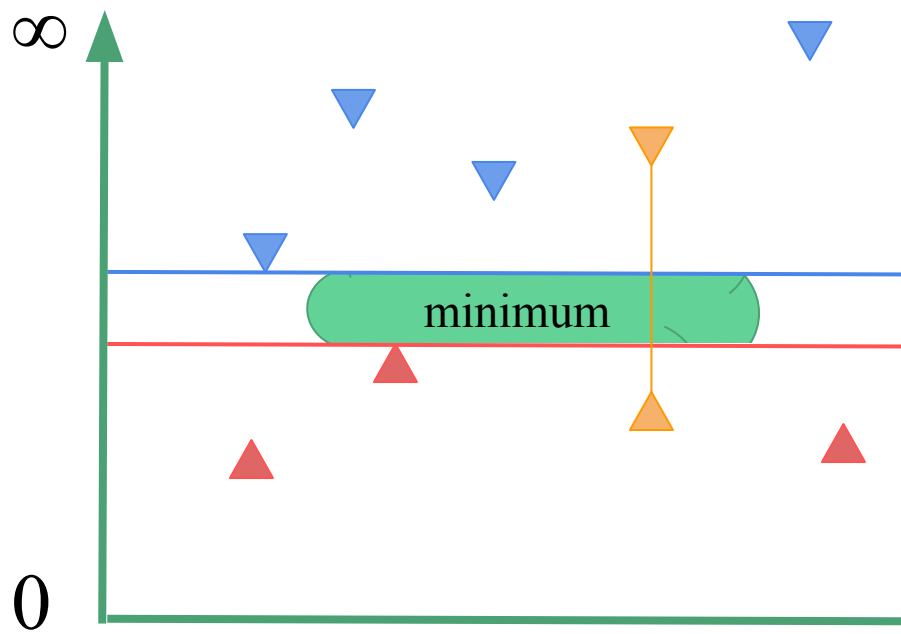


Prochaines étapes

- ▶ Caractérisation des graphes
- ▶ Autres bornes inférieures
- ▶ Autres problèmes

Des questions ?

Cas d'une minimisation difficile



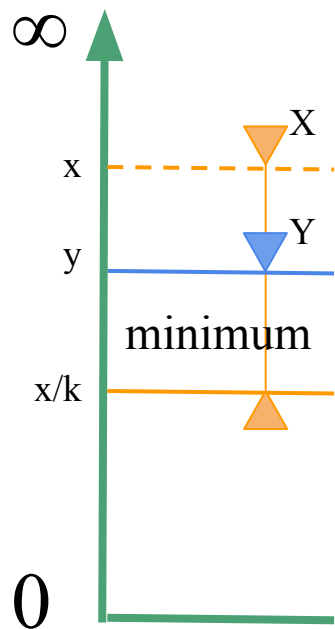
Valeurs approchées

k-approximations

Minimum long à trouver

Bornes inférieures

Certification de qualité



$$x/k \leq \text{minimum} \leq y$$

Le couple (X, Y) certifie que
 Y est au plus $y/(x/k)$ fois
plus grand que le minimum

