Перевірка несуперечності обмежень. Комп'ютерне завдання

Святослав Хмелевський, ФІ-82

26 листопада 2021 р.

Завдання: Сформулювати умову головоломки судоку як задачу пошуку розмітки на напівкільці $\langle\{0,1\},\vee,\wedge\rangle$ та реалізувати алгоритм її розв'язку.

Розв'язок: Нехай у нас є задача пошуку деякого розв'язку головоломки судоку. Її можна формально сформулювати у вигляді задачі пошуку розмітки з самоконтролем на напівкільці $\langle\{0,1\},\vee,\wedge\rangle$.

$$Z = \langle T,\ \tau \subseteq T^2,\ K,\ q : T \times K \to \{0,1\},\ g : \tau \times K^2 \to \{0,1\}\rangle$$

де $T = \{1,\ldots,9\}^2,\ \tau = \{(i_1,j_1,i_2,j_2) :\ (i_1 = i_2 \vee j_1 = j_2 \vee (\lfloor(i_1-1)/3\rfloor = \lfloor(i_2-1)/3\rfloor \wedge \lfloor(j_1-1)/3\rfloor = \lfloor(j_2-1)/3\rfloor)) \wedge (i_1 \neq i_2 \vee j_1 \neq j_2),\ i_1,j_1,i_2,j_2 = \overline{1,9}\},\ K = \{1,\ldots,9\},\ g_{tt'}(k,k') = \mathbb{1}_{k\neq k'},\ tt' \in \tau \cup \tau^{-1}$.

Вигляд q залежить від конкретної задачі судоку. В загальному вигляді: $q_t(k) = 1,\ k = \overline{1,9}$, якщо клітинка t в задачі судоку є порожньою. $q_t(k) = \mathbb{1}_{k=x},\ k = \overline{1,9}$, якщо клітинка t в судоку містить значення x, де $x \in \{1,\ldots,9\}$.

Алгоритм перетворення судоку на Z позначатимемо, як SUDOKU-Z.

Тепер задача судоку повністю представлена у потрібному для нас вигляді і її можна розв'язати, використовуючи відомі нам для цього алгоритми.

Алгоритм викреслювання 2-го порядку матиме наступний вигляд.

1. Ініціалізація:
   - 1.1 На вхід подається задача $Z = \langle T,\ \tau \subseteq T^2,\ K,\ q : T \times K \to \{0,1\},\ g : \tau \times K^2 \to \{0,1\}\rangle$
   - 1.2 $q^0 = q,\ g^0 = g,\ j = 0$.
2. Основний цикл:

2.1 $\forall t \in T,\ \forall k \in K:\ q_t^{j+1}(k) = q_t^j(k) \wedge \bigwedge\limits_{t' \in N(t)} \bigvee\limits_{k' \in K} g_{tt'}^j(k, k')$,
$N(t) = \{\tilde{t}:\ t\tilde{t} \in \tau \cup \tau^{-1}\}$.
2.2 $\forall tt' \in \tau,\ \forall k,\ k' \in K:\ g_{tt'}^{j+1}(k, k') = g_{tt'}^j(k, k') \wedge q_t^{j+1}(k) \wedge q_{t'}^{j+1}(k')$.
2.3 Якщо $g^{j+1} \neq g^j \vee q^{j+1} \neq q^j$. Тоді:
$j \leftarrow j + 1$, перехід до 2.
2.4 Якщо $g^{j+1} = g^j \wedge q^{j+1} = q^j$. Тоді:
Робота алгоритму завершена.

Далі цей алгоритм будемо позначати, як CSP-OR-AND-2.

Весь алгоритм для пошуку можливого розв'язку задачі судоку на базі алгоритму пошуку розмітки з самоконтролем на напівкільці $\langle \{0, 1\}, \vee, \wedge \rangle$ буде мати наступний вигляд.

1. Ініціалізація:
   1.1 На вхід подається задача судоку.
   1.2 Застосовуємо алгоритм SUDOKU-Z.
   1.3 Застосовуємо алгоритм CSP-OR-AND-2.
   1.4 $\widehat{T} = T$.
2. Основний цикл:
   2.1 Вибираємо $t \in \widehat{T},\ \widehat{T} \leftarrow \widehat{T} \setminus \{t\}$,
   $V = \{k:\ q_t(k) = 1,\ k \in K_t\}$.
   2.2 Вибираємо $k_t \in V,\ V \leftarrow V \setminus \{k_t\}$.
   2.3 $\forall k \in K_t \setminus \{k_t\}:\ q_t(k) = 0$.
   2.4 Застосовуємо алгоритм CSP-OR-AND-2.
   2.5 Якщо $\forall t \in T,\ \forall k \in K:\ q_t(k) = 0$. Тоді:
      2.5.1 Якщо $V \neq \varnothing$. Тоді:
      Повертаємо все до кроку 2.3, перехід до 2.2.
      2.5.2 Якщо $V = \varnothing$. Тоді:
      Задача не є інваріантною відносно оператора напівґратки.
   2.6 Якщо $\widehat{T} \neq \varnothing$. Тоді:
   Перехід до 2.1.