Контекстно-вільні граматики. Комп'ютерне завдання

Святослав Хмелевський, ФІ-82

23 грудня 2021 р.

Завдання: На вхід алгоритму подаються еталонні зображення $X_0 : P \to \{0, 1\}$, $X_1 : P \to \{0, 1\}$ цифр 0 та 1 відповідно, де $P = \{1, \dots, h\} \times \{1, \dots, w\}$ – множина пікселів (зображення мають однаковий розмір). Користувач подає на вхід бінарне зображення $X : P' \to \{0, 1\}$, де $P' = \{1, \dots, 3 \cdot h\} \times \{1, \dots, c \cdot w\}$ – множина пікселів зображення, де $c \in \mathbb{N}$ – кількість стовпчиків з цифрами у зображенні. Програма має відповідати, чи містить подане на вхід зображення коректне додавання у стовпчик. Якщо містить, то потрібно сказати, чи є у найлівішому стовпчику перенесення одиниці. Перевірка коректності має відбуватися за допомогою двовимірних контекстно-вільних граматик. Алгоритм повинен мати поліноміальну залежність часу роботи від кількості стовпців зображення.

Розв'язок: Побудова відповідної контекстно-вільної граматики.

$$I \to V_0 I,\ I \to V_1 I',\ I' \to V_0' I,\ I' \to V_1' I',$$
$$I \to \frac{A_1}{Z},\ I \to \frac{A_2}{F}\ I' \to \frac{A_3}{Z},\ Z \to 0,\ F \to 1,$$
$$V_0 \to \frac{A_1}{Z},\ V_0 \to \frac{A_2}{F},\ V_0' \to \frac{A_3}{Z},$$
$$V_1 \to \frac{A_1}{F},\ V_1' \to \frac{A_2}{Z},\ V_1' \to \frac{A_3}{F},$$
$$A_1 \to \frac{Z}{Z},\ A_2 \to \frac{Z}{F},\ A_2 \to \frac{F}{Z},\ A_3 \to \frac{F}{F}.$$

Ці правила можна представити в наступному вигляді.
$T = \{0, 1\},\ K = \{I, I', V_0, V_0', V_1, V_1', A_1, A_2, A_3, Z, F\}$,
$P_r(Z, 0) = P_r(F, 1) = 1$,
в інших випадках P_r дорівнює 0,
$P_h(V_0, I, I) = P_h(V_1, I', I) = P_h(V_0', I, I') = P_h(V_1', I', I') = 1$,
в інших випадках P_h дорівнює 0,
$P_v(A_1, Z, V_0) = P_v(A_2, F, V_0) = P_v(A_3, Z, V_0') = P_v(A_1, F, V_1) =$
$= P_v(A_2, Z, V_1') = P_v(A_3, F, V_1') = P_v(Z, Z, A_1) = P_v(Z, F, A_2) =$
$= P_v(F, Z, A_2) = P_v(F, F, A_3) = P_v(A_1, Z, I) = P_v(A_2, F, I) =$
$= P_v(A_3, Z, I') = 1$, в інших випадках P_v дорівнює 0.

Неформальний опис алгоритму на основі CYK.

1. Ініціалізація:
   1.1 На вхід подається "зображення" $x \in T^{3\times c}$.
   1.2 $\forall i = \overline{1,3},\ \forall j = \overline{1,c},\ \forall m \in Z, F:$
   $f(i,i,j,j,m) = P_r(m, x(i,j))$.
   (Всі інші значення нульові)
2. Основний цикл:
   2.1 Послідовно аналізуються всі прямокутники
   $R \in \{\langle i_1, i_2, j_1, j_2\rangle :\ i_1 \le i_2, j_1 \le j_2, i_1, i_2 \in \{1,2,3\},$
   $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, c\}\}$ (в певному ієрархічному порядку)
   і кожен символ $k \in K$.
   2.2 $f(i_1,i_2,j_1,j_2,k) \leftarrow \bigvee\limits_{j: j_1 \le j < j_2} \bigvee\limits_{k_l \in K} \bigvee\limits_{k_r \in K} (f(i_1,i_2,j_1,j,k_l) \wedge$
   $\wedge P_h(k_l,k_r,k) \wedge f(i_1,i_2,j+1,j_2,k_r))$.
   2.3 $f(i_1,i_2,j_1,j_2,k) \leftarrow f(i_1,i_2,j_1,j_2,k) \vee \bigvee\limits_{i: i_1 \le i < i_2} \bigvee\limits_{k_u \in K} \bigvee\limits_{k_d \in K} (f(i_1,i,j_1,$
   $j_2,k_u) \wedge P_v(k_u,k_d,k) \wedge f(i+1,i_2,j_1,j_2,k_d))$.
3. Результат:
   3.1 Якщо $f(1,3,1,c,I) = 1$, то:
   Додавання коректне без перенесення.
   3.2 Якщо $f(1,3,1,c,I') = 1$, то:
   Додавання коректне з перенесенням.
   3.3 Якщо $f(1,3,1,c,I) \vee f(1,3,1,c,I') = 0$, то:
   Додавання не є коректним.