Projet personnel - Introduction à l'optimisation

vincent.leclere@enpc.fr

September 14, 2017

Les sections sont largement indépendantes et de difficultés croissantes.

1 Présentation du problème et théorie

On suppose qu'un processeur doit traiter n tâches, potentiellement en parallèle. Chaque tâche $i \in [n]$ nécessitant une charge de travail totale $w_i \geq 0$, qui doit être effectuée entre l'instant d_i et l'instant f_i. On note $x_t \geq 0$ la quantité de travail effectuée à l'instant $t \in [T]$. On noteras $y_t^i \geq 0$ la quantité de travail concernant la tâche i traitée à l'instant t. Cette quantité est décidé par le gestionnaire du calculateur. On note $\varphi(x_t)$ la quantité d'énergie nécessaire au processeur à l'instant t pour traiter une charge totale $x_t = \sum_{i=1}^N y_t^i$. Finalement, à chaque instant $t \in [T]$ on souhaite que le processeur ait une charge de travail $x_t \in [\underline{x}, \overline{x}]$. Dans tout le projet on supposera qu'il existe un planning de charge réalisable $(x_t)_{t\in[T]}$.

1. On considère l'ensemble
$$X = \left\{ x \in [\underline{x}, \overline{x}]^T \quad \middle| \quad \exists y \in \mathbb{R}_+^{nT},\ \forall i \in [n],\ \sum_{t=d_i}^{f_i} y_t^i = w_i, \quad \sum_{t=1}^{d_i-1} y_t^i = 0, \quad \sum_{t=f_i+1}^{T} y_t^i = 0 \right\}$$
Justifier que X est l'ensemble des plannings de charge réalisables. Que pouvez vous dire de sa géométrie ?
2. Écrire un problème d'optimisation (P) qui a pour but de minimiser l'énergie totale dépensée pour traiter l'ensemble des tâches $i \in [N]$ en temps et en heure.
3. Si φ est convexe différentiable, montrer qu'il s'agit d'un problème d'optimisation convexe différentiable.
4. Supposons que φ soit affine, i.e. $\varphi : x \mapsto ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer la valeur d'un planning réalisable x. Un solveur linéaire est-il utile ?
5. Si φ est un polynôme de degré 2 donner une condition simple pour que le problème soit convexe.

2 Résolution du problème à l'aide de Julia

On considère $N = 10$ tâches, sur un horizon de $T = 12$ pas de temps. On suppose que $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ est un polynôme de degré deux. On choisit les paramètres suivant

- $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$
- $\mathbf{d} = [1\ 1\ 4\ 7\ 7\ 8\ 6\ 7\ 8\ 9]$
- $\mathbf{f} = [2\ 3\ 5\ 9\ 10\ 8\ 9\ 10\ 12\ 12]$
- $\underline{x} = 1$, $\overline{x} = 10$
- $\mathbf{w} = [11\ 10\ 2\ 7\ 10\ 2\ 2\ 2\ 7.5\ 7.5]$

6. Modéliser le problème (P) à l'aide de Julia / JuMP et résoudre le problème. Calculer un planning de charge optimal, ainsi que la quantité d'énergie minimum v_P pour traiter l'ensemble des tâches.
7. Pour cette question uniquement on ajoute une contrainte de rampe sur la puissance de calcul, plus précisément on souhaite que la charge de travail totale x_{t+1} à l'instant $t+1$ ne soit pas plus de 1 au dessus ou en dessous de la charge de travail totale x_t à l'instant t (la charge de travail initiale x_1 n'est pas contrainte).
   (a) quelles contraintes mathématique faut-il ajouter pour représenter cette contrainte de rampe ?
   (b) la représenter sous forme de contraintes linéaires, et l'introduire dans le problème JuMP. Calculer un planning de charge optimal ainsi que la nouvelle quantité d'énergie minimum. Comparer à la question précédente.

3 Un nouvel objectif

Dans cette section nous cherchons à minimiser la date de fin de traitement de l'ensemble des tâches.

8. Appelons $\tau \in [12]$ la date à laquelle toutes les tâches sont traitées. Proposer une méthode itérative permettant de trouver un planning de charge minimisant τ.

9. Résoudre avec JuMP ce problème sur les données numériques de la section 2.

10. Proposer une démarche permettant de trouver, parmi les planning ayant un τ minimal, un planning minimisant l'énergie totale dépensée.

4 Des approximations linéaires de (P)

Cette partie est légèrement plus difficile que les précédentes. Elle permet de dépasser le 15/20.

Le problème traité est un problème linéaire-quadratique convexe, plus difficile à résoudre qu'un problème linéaire. Nous allons construire des approximations linéaires du problème, que nous pourrons résoudre à l'aide d'un solveur linéaire (Clp). Rappelons que $\varphi : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ est supposée convexe.

11. Montrer que (P) est équivalent à $(P+)$ défini par

$$(P+) \qquad \min_{\mathbf{x}\in X, \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^T} \quad \sum_{t=1}^{T} \theta_t \qquad \text{s.c.} \quad \theta_t \geq \varphi(x_t)$$

12. Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, nous allons construire une approximation extérieure (P_k^{out}). Soit k réels $x_i \in [\underline{x}, \overline{x}]$, tels que $\underline{x} = x_1 \leq \cdots \leq x_k = \overline{x}$. On définit

$$\underline{\varphi}^k : x \mapsto \max_{j\in[k]} \{\varphi(x_j) + \varphi'(x_j)(x - x_j)\}.$$

On définit le problème (P_k^{out}) comme

$$(P_k^{out}) \qquad \min_{\mathbf{x}\in X, \theta\in\mathbb{R}^T} \quad \sum_{t=1}^{T} \theta_t \qquad \text{s.c.} \quad \theta_t \geq \underline{\varphi}^k(x_t)$$

   (a) Justifier que (P_k^{out}) est un problème linéaire. De plus montrer que si $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ est une solution admissible de (P_k^{out}), alors $\mathbf{x}$ est un planning de charge admissible.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \geq \underline{\varphi}^k(x)$.
   (c) En déduire que la valeur v_k^{out} du problème (P_k^{out}) est une borne inférieure de v_P la valeur du problème (P).
   (d) Comment déduire de la solution de (P_k^{out}) une borne supérieure de v_P ?

13. En choisissant $x_i = i$ pour $i \in [10]$ résoudre à l'aide de JuMP le problème (P_{10}^{out}). En déduire une borne inférieure et une borne supérieure de v_P.

14. Construisons une approximation intérieure (P_k^{in}).

   (a) A l'aide de la convexité trouver une fonction linéaire par morceaux $\overline{\varphi}^k$ qui majore φ sur $[\underline{x}, \overline{x}]$ et qui coïncide avec φ aux points $\underline{x} = x_1 \leq \cdots \leq x_k = \overline{x}$.
   (b) En déduire un problème linéaire (P_k^{in}) analogue à (P_k^{out}).
   (c) Comment déduire de la résolution de (P_k^{in}) deux bornes supérieures de v_P. Montrez que l'une des deux est supérieure à l'autre.

15. *(Pour aller plus loin)* En prenant des points $(x_i)_{i\in[k]}$ équirépartis sur $[\underline{x}, \overline{x}]$ calculez, à l'aide de Julia, les 4 bornes précédentes pour $k = 10$, $k = 50$ et $k = 100$. Commentez.

Le rapport est à envoyer par mail à votre chargé de TD pour le 17 Octobre 2017. L'évaluation sera faite sur le rendu complété d'un entretien avec expérimentation potentielle du modèle (apporter son ordinateur pour l'entretien).