

DM 4

Exercice 1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles à densité sur \mathbb{R}^2 tel que :

- (i) X suit une loi $\Gamma(2, \lambda)$ (de densité $f_X(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$),
 - (ii) la loi conditionnelle de Y sachant X est la loi uniforme sur le segment $[0, X]$ (ou, en d'autres termes, la densité conditionnelle de Y sachant que $X = x$ est $f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{\{0 < y < x\}}$).
1. Déterminer la densité de (X, Y) ainsi que la loi de Y .
 2. Déterminer la densité conditionnelle de X sachant Y .
 3. Calculer les quantités suivantes :
 - (a) $\mathbb{E}[XY]$ (on pourra utiliser le fait que $\mathbb{E}[X^2] = \frac{6}{\lambda^2}$),
 - (b) $\mathbb{E}[Y | X]$,
 - (c) $\mathbb{E}[X | Y]$,
 4. En utilisant la méthode de la fonction muette, déterminer la loi de $X - Y$.