Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité en optimisation convexe et différentiables

Guillaume Lecué[1]

En **optimisation convexe différentiable (OCD)**, on s'intéresse aux problèmes d'optimisation sous contrainte de la forme $\min_{x\in K} f(x)$ où U est un **ouvert convexe** de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ et K est une contrainte de la forme

$$K = \left\{ x \in U : \begin{array}{c} g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0 \\ h_1(x) \leq 0, \dots, h_l(x) \leq 0 \end{array} \right\} \tag{0.1}$$

où les $g_1, \dots, g_r : U \to \mathbb{R}$, définissant les contraintes d'égalité, sont des **fonctions affines** et les $h_1, \dots, h_l : U \to \mathbb{R}$, définissant les contraintes d'inégalité, sont des fonctions **convexes de classe $\mathcal{C}^1$**.

Étant donné que les contraintes d'égalité sont affines, on peut trouver une matrice $A \in \mathbb{R}^{r\times n}$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^r$ tels que

$$\{x \in U : g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\} = \{x \in U : Ax = b\}.$$

La contrainte K en OCD s'écrit alors sous la forme

$$K = \{x \in U : Ax = b \text{ et } h_1(x) \leq 0, \dots, h_l(x) \leq 0\} \tag{0.2}$$

où U est un convexe ouvert et $h_1, \dots, h_l$ sont convexes et de classe $\mathcal{C}^1$.

Le but de cette section est de donner des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les problèmes de la forme $\min_{x\in K} f(x)$ en OCD. On va aussi s'intéresser au problème (OCD) sans contrainte et au problème de projection sur un ensemble convexe.

Contrairement au cadre (non forcément convexe) de l'OD pour lequel on avait seulement des conditions nécessaires pour l'optimalité, ici, en OCD, on obtiendra des conditions nécessaires et suffisantes (CNS). Par exemple en (OCD) sans contrainte, être un point critique est une CNS, en OCD avec contrainte (sous hypothèse de qualification) être un point vérifiant les conditions KKT est une CNS d'optimalité du problème et, finalement, le duality gap est nul en dualité Lagrangienne sous hypothèse de qualification et donc le problème dual va permettre de nous aider à résoudre le problème primal.

1 Rappels sur la notion de convexité

Définition 1.1 *Soit C un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que C est* ***convexe*** *quand pour tout $x, y \in C$ et $0 \leq \alpha \leq 1$, on a $\alpha x + (1-\alpha)y \in C$. Soit C un ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to \mathbb{R}$. On dit que f* ***est une fonction convexe*** *quand pour tout $x, y \in C$ et $0 \leq \alpha \leq 1$ on a $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$.*

1. CREST, ENSAE. Bureau 3029, 5 avenue Henry Le Chatelier. 91 120 Palaiseau. Email : guillaume.lecue@ensae.fr.

Géométriquement, les notions de convexité d'un ensemble et d'une fonction se visualisent assez bien : un ensemble C est convexe si pour tout couples de points $x, y \in C$ le segment $[x, y]$ est dans C et pour une fonction f, dire qu'elle est convexe revient à dire que son graphe $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^2\}$ est tel que si on prend deux points dans son graphe alors le segment $[(x, f(x)), (y, f(y))]$ se trouve au dessus de son graphe.

On commence par un résultat disant que la notion de convexité est stable par passage à l'intersection. Ce résultat est utile pour définir des notions telles que "convexe engendré par un ensemble" ou encore d'enveloppe convexe d'une fonction.

Proposition 1.2 *Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$. Alors $\cap_{i\in I} C_i$ est un ensemble convexe.*

Preuve. Si $\cap_{i\in I} C_i$ est vide alors il est convexe. On suppose que $\cap_{i\in I} C_i$ est non vide. Si $x, y \in \cap_{i\in I} C_i$ et $0 \leq \alpha \leq 1$ alors, pour tout $i \in I$, comme $x, y \in C_i$ et que C_i est convexe, on a $\alpha x + (1-\alpha)y \in C_i$. Ceci étant vrai pour tout $i \in I$, on a bien $\alpha x + (1-\alpha)y \in \cap_{i\in I} C_i$ et donc $\cap_{i\in I} C_i$ est convexe. $\blacksquare$

La Proposition 1.2 dit que la propriété de convexité d'un ensemble est stable par passage à l'intersection. Ce type de résultat est particulièrement intéressant quand on veut définir des notions telle que "le plus petit ensemble convexe contenant tel ensemble". En effet, si $A \subset \mathbb{R}^n$, on définit $\mathrm{conv}(A)$ comme étant le plus petit ensemble convexe contenant A. Cette définition a bien un sens grâce à la Proposition 1.2 vu que si $\mathcal{C} = \{C \subset \mathbb{R}^n : A \subset C \text{ et } C \text{ est convexe}\}$ alors $\mathcal{C}$ est une famille d'ensembles convexes et donc $\cap_{C\in\mathcal{C}} C$ est un ensemble convexe (d'après la Proposition 1.2). Par ailleurs, $\cap_{C\in\mathcal{C}} C$ est le plus petit ensemble convexe contenant A car si $A \subset C$ et C est convexe on a $C \in \mathcal{C}$ et donc $\cap_{C\in\mathcal{C}} C \subset C$. On a donc $\mathrm{conv}(A) = \cap_{C\in\mathcal{C}} C$.

On peut définir la notion de fonction convexe à partir de la notion d'ensemble convexe quand on introduit l'épigraphe de f.

Proposition 1.3 *Soit U un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$.* ***L'épigraphe de*** *f est défini par $\mathrm{Epi}(f) = \{(x, y) \in U \times \mathbb{R} : f(x) \leq y\}$. Il y a équivalence entre :*

1) $\mathrm{Epi}(f)$ *est un ensemble convexe*

2) f *est convexe.*

Preuve. On montre *1)* implique *2)* : Soit $x, y \in U$ et $0 \leq \alpha \leq 1$. Comme l'épigraphe de f est convexe, on a $\alpha(x, f(x)) + (1-\alpha)(y, f(y)) \in \mathrm{Epi}(f)$. Ainsi, $(\alpha x + (1-\alpha)y, \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)) \in \mathrm{Epi}(f)$ et par définition de l'épigraphe, $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$.

On montre *2)* implique *1)* : Soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathrm{Epi}(f)$ et $0 \leq \alpha \leq 1$. On a

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \leq \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2$$

donc $(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) \in \mathrm{Epi}(f)$ et donc $\alpha(x_1, y_1) + (1-\alpha)(x_2, y_2) \in \mathrm{Epi}(f)$. On a donc bien que $\mathrm{Epi}(f)$ est convexe. $\blacksquare$

On donne finalement un exemple de fonction convexe qui nous sera utile en dualité Lagrangienne.

Proposition 1.4 *Soit $(L(\cdot, u))_{u\in U}$ une famille de fonction linéaires (càd pour tout $u \in U$, $x \to L(x, u)$ est une fonction linéaire). Alors $f : x \to \sup_{u\in U} L(x, u)$ est une fonction convexe.*

Preuve. Soit x, y et $\alpha \in [0,1]$. On a pour tout $u \in U$, $L(\alpha x + (1-\alpha)y, u) = \alpha L(x,u) + (1-\alpha)L(y,u)$ et donc

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1-\alpha)y) &= \sup_{u\in U} L(\alpha x + (1-\alpha)y, u) = \sup_{u\in U} (\alpha L(x,u) + (1-\alpha)L(y,u)) \\ &\leq \alpha \sup_{u\in U} L(x,u) + (1-\alpha)\sup_{u\in U} L(y,u) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y). \end{aligned}$$

En fait, il y a une réciproque à ce résultat qui est que toute fonction convexe peut s'écrire comme le sup d'une famille de fonctions linéaires. Dans le cas différentiable, on le verra dans la suite où on montrera qu'une fonction est convexe si et seulement si elle est au-dessus de ses tangentes. On pourra alors prendre le sup de la famille des tangentes pour retrouver la fonction. Dans le cas convexe mais pas forcément différentiable, cette propriété reste vraie et peut se montrer en introduisant le sous-gradient ; une notion généralisant le gradient pour les fonctions convexes mais qui n'est pas au programme de ce cours.

1.1 Fonctions convexes de $\mathbb{R}$

Pour une fonction régulière, on peut lier la notion de convexité à des propriétés portant sur ses dérivées première et seconde. C'est le but de cette section, de démontrer ces liens.

Proposition 1.5 (Lemme des trois pentes) *Soit U un ensemble convexe de $\mathbb{R}$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $x, y, z \in U$ tels que $x < y < z$ alors*

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \leq \frac{\varphi(z)-\varphi(x)}{z-x} \leq \frac{\varphi(z)-\varphi(y)}{z-y}.$$

Preuve. Comme $y \in [x,z]$, il existe $0 \leq \alpha \leq 1$ tel que $y = \alpha x + (1-\alpha)z$. On peut prendre

$$\alpha = \frac{y-z}{x-z}. \tag{1.1}$$

Par convexité de φ, on a

$$\varphi(y) = \varphi(\alpha x + (1-\alpha)z) \leq \alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(z)$$

et donc

$$\varphi(y) - \varphi(z) \leq \alpha(\varphi(x) - \varphi(z)).$$

En remplaçant α par sa valeur (1.1) dans la dernière inégalité, on obtient

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(x)}{z-x} \leq \frac{\varphi(z)-\varphi(y)}{z-y}.$$

De même, on peut écrire $y = tz + (1-t)x$ où $t = (y-x)/(z-x)$. Par convexité de φ, on a

$$\varphi(y) \leq t\varphi(z) + (1-t)\varphi(x)$$

donc $\varphi(y) - \varphi(x) \leq t(\varphi(z) - \varphi(x))$. Finalement, en utilisant que $t = (y-x)/(z-x)$ dans la dernière expression, on obtient que

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \leq \frac{\varphi(z)-\varphi(x)}{z-x}.$$

■

Le premier lien entre convexité et régularité est donné dans le résultat suivant qui dit qu'une fonction convexe définie sur un ouvert convexe est continue.

Proposition 1.6 *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors φ est continue sur U.*

Preuve. Soit $x \in U$ et $r > 0$ tel que $[x-r, x+r] \subset U$. Soit $-r < \epsilon < r$. Le Lemme des trois pentes (appliqué deux fois aux points $x - r < x < x + \epsilon$ et $x < x + \epsilon < x + r$) donne

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x-r)}{r} \leq \frac{\varphi(x+\epsilon) - \varphi(x)}{\epsilon} \leq \frac{\varphi(x+r) - \varphi(x)}{r}.$$

Comme les deux termes de gauche et droite au-dessus sont indépendant de ϵ, on peut multipliser par ϵ et faire tendre $\epsilon \to 0$ pour obtenir que $\lim_{\epsilon \to 0} \varphi(x+\epsilon) = \varphi(x)$. Alors φ est bien continue en x. ■

On peut aussi montrer que φ admet des dérivées à gauche et à droite en tout point de l'ouvert convexe U. Cependant φ peut ne pas être dérivable en tout point de U comme le montre l'exemple $t \to |t|$. La Proposition 1.6 n'est pas vraie si on ne suppose plus que U est ouvert. On peut le voir avec la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui vaut 0 sur $]0,1]$ et 1 en 0. Cette fonction est bien convexe sur $[0,1]$ mais pas continue en 0. On peut étendre cette propriété aux fonctions convexes définies sur un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ cependant elle n'est plus vraie en dimension infinie.

Proposition 1.7 *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On a équivalence entre :*

1) φ' est croissante

2) φ est convexe.

Preuve. On montre que *1)* implique *2)* : Soit $x, z \in U$ tel que $x < z$ et $0 \leq \alpha \leq 1$. On veut montrer que $\varphi(\alpha x + (1-\alpha)z) \leq \alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(z)$. On note $y = \alpha x + (1-\alpha)z$. Comme $x \leq y$ et φ' est croissante on a

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \int_x^y \varphi'(t)dt \leq \varphi'(y)(y-x) = \varphi'(y)(1-\alpha)(z-x)$$

et comme $y \leq z$ et φ' est croissante on a

$$\varphi(z) - \varphi(y) = \int_y^z \varphi'(t)dt \geq \varphi'(y)(z-y) = \varphi'(y)\alpha(z-x).$$

On obtient alors

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{(1-\alpha)(z-x)} \leq \varphi'(y) \leq \frac{\varphi(z) - \varphi(y)}{\alpha(z-x)}$$

donc

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{1-\alpha} \leq \frac{\varphi(z) - \varphi(y)}{\alpha}$$

càd

$$\varphi(\alpha x + (1-\alpha)z) = \varphi(y) \leq \alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(z).$$

On montre que *2)* implique *1)* : Soit $x, z \in U$ tels que $x \leq z$. Comme φ est convexe, elle vérifie le lemme des 3 pentes : pour tout $y \in [x, z]$,

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y-x} \overset{(a)}{\leq} \frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{z-x} \overset{(b)}{\leq} \frac{\varphi(z) - \varphi(y)}{z-y}.$$

On fait tendre $y \to x$ dans *(a)* : comme

$$\varphi'(x) = \lim_{y \to x} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x},$$

on en déduit que

$$\varphi'(x) \leq \frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{z - x}.$$

De même, on fait tendre $y \to z$ dans *(b)* pour obtenir

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{z - x} \leq \varphi'(z).$$

On conclut que $\varphi'(x) \leq \varphi'(z)$. Ceci étant vrai pour tout $x \leq z$ dans U, on a donc bien que φ' est croissante sur U. ■

Corollaire 1.8 *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Il y a équivalence entre :*

1) $\varphi''(x) \geq 0$ pour tout $x \in U$

2) φ est convexe.

Preuve. Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, on sait que φ' est croissante si et seulement si $\varphi''(x) \geq 0$ pour tout $x \in U$. On obtient donc le résultat en utilisant la Proposition 1.7. ■

1.2 Fonctions convexes de $\mathbb{R}^n$

Les résultats énoncés ci-dessus dans le cas unidimensionnel peuvent se généraliser au cas multivarié. On peut ainsi caractériser la convexité d'une fonction (multivariée) régulière en fonction de la 'croissance' (notion à définir) de son gradient et de la positivité de sa Hessienne. C'est l'objet de la première section. Dans la deuxième section, on introduit les notions de stricte et forte convexité qui nous seront utiles pour l'étude de la convergence des algorithmes de descentes de gradient.

Convexité et régularité

Proposition 1.9 *Soit U un ensemble ouvert et convexe de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$. On suppose que f est différentiable sur U. Il y a équivalence entre :*

1) f est convexe

2) pour tout $x, y \in U$, $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$ (càd f est au-dessus de ses tangentes)

3) pour tout $x, y \in U$, $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$ (càd le gradient est croissant).

Si f est deux fois différentiable, il y a équivalence entre :

1) f est convexe

4) pour tout $x \in U, \nabla^2 f(x) \succeq 0$.

Preuve. On montre que *1)* implique *2)* : Pour tout $x, y \in U$ et $0 < t \leq 1$, on a par convexité

$$f(x) - f(y) \geq \frac{f(y + t(x - y)) - f(y)}{t}$$

et donc quand $t \to 0$, on obtient $f(x) - f(y) \geq \langle \nabla f(y), x - y \rangle$.

On montre que *2)* implique *3)* : On a

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &\geq \big\langle \nabla f(x), y - x \big\rangle \\ f(x) - f(y) &\geq \big\langle \nabla f(y), x - y \big\rangle \end{aligned}$$

et donc en sommant les deux inégalités, on obtient le résultat.

On montre que *3)* implique *2)* : D'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée à l'application $g : t \in [0,1] \to f(x + t(y-x))$, il existe $t \in]0,1[$ tel que

$$g(1) = g(0) + (1-0)g'(t). \tag{1.2}$$

Pour le calcul de la dérivée de g, on peut appliquer la chain rule. En effet, on écrit $g(t) = f(h(t))$ où $h : t \to x + t(y-x)$ et donc $g'(t) = J(g)(t) = J(f \circ h)(t) = J(f)(h(t))J(h)(t) = \nabla f(h(t))^\top (y-x) = \big\langle \nabla f(x + t(y-x)), y - x \big\rangle$. Par ailleurs, $g(1) = f(y)$ et $g(0) = f(x)$, on obtient alors dans (1.2) que

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + \big\langle \nabla f(x + t(y-x)), y - x \big\rangle \\ &= f(x) + \big\langle \nabla f(x), y - x \big\rangle + \big\langle \nabla f(x + t(y-x)) - \nabla f(x), y - x \big\rangle \\ &\geq f(x) + \big\langle \nabla f(x), y - x \big\rangle \end{aligned}$$

car $\big\langle \nabla f(x + t(y-x)) - \nabla f(x), y - x \big\rangle \geq 0$.

On montre que *2)* implique *1)* : On note $x_t = x + t(y-x)$. On a

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x_t) + \big\langle \nabla f(x_t), x - x_t \big\rangle \\ f(y) &\geq f(x_t) + \big\langle \nabla f(x_t), y - x_t \big\rangle \end{aligned}$$

et comme $x - x_t = -t(y-x)$ et $y - x_t = (1-t)(y-x)$, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x_t) - t\big\langle \nabla f(x_t), y - x \big\rangle \\ f(y) &\geq f(x_t) + (1-t)\big\langle \nabla f(x_t), y - x \big\rangle. \end{aligned}$$

En multipliant la première inégalité par $(1-t)$ et la deuxième par t et en sommant, on obtient

$$(1-t)f(x) + tf(y) \geq f(x_t) = f((1-t)x + ty).$$

On montre que *1)* implique *4)* : Comme *1)* implique *3)*, on a pour tout $0 < t \leq 1$,

$$\big\langle \nabla f(x + t(y-x)) - \nabla f(x), t(y-x) \big\rangle \geq 0$$

alors, en divisant par t et en passant à la limite quand $t \to 0$, on obtient

$$\big\langle \nabla^2 f(x)(y-x), y - x \big\rangle \geq 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $x, y \in U$ et U étant ouvert, on a bien que $\nabla^2 f(x) \succeq 0$.

On montre que *4)* implique *1)* : D'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 appliquée à l'application $g : t \in [0,1] \to f(x + t(y-x))$, il existe $t \in]0,1[$ tel que

$$g(1) = g(0) + (1-0)g'(0) + \frac{(1-0)^2}{2!}g''(t). \tag{1.3}$$

On a calculé plus haut la dérivée de g : elle est donnée par $g' : t \in]0,1[\to \langle \nabla f(x+t(y-x)), y-x \rangle$. Pour le calcul de sa dérivée seconde, on utilise la continuité du produit scalaire et $\nabla^2 f = J(\nabla f)$ pour obtenir que

$$\begin{aligned}
g''(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{g'(t+h)-g(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\langle \nabla f(x+t(y-x)), y-x \rangle - \langle \nabla f(x+(t+h)(y-x)), y-x \rangle}{h}\\
&= \Big\langle \lim_{h\to 0} \frac{\nabla f(x+t(y-x)) - \nabla f(x+(t+h)(y-x))}{h}, y-x \Big\rangle\\
&= \langle \nabla^2 f(x+t(y-x))(y-x), y-x \rangle = (y-x)^\top \nabla^2 f(x+t(y-x))(y-x)
\end{aligned}$$

car $\nabla f(x+t(y-x)) - \nabla f(x+(t+h)(y-x)) = J(\nabla f)(x+t(y-x))(h(y-x)) + o(|h|)$ quand $h \to 0$. Finalement, comme $g(1) = f(y)$ et $g(0) = f(x)$, on obtient dans (1.3) que

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \frac{1}{2}(y-x)^\top \nabla^2 f(x+t(y-x))(y-x)$$

et comme $\nabla^2 f(x+t(y-x)) \succeq 0$, *2)* est vérifiée et donc *1)* aussi. ■

Dans la Proposition 1.9, on a introduit la notion de croissance du gradient au point *3)*. Dans le cas unidimensionel, cette notion est bien équivalente à la notion classique de croissance vu que pour $\varphi : U \to \mathbb{R}$ différentiable où U est un ouvert de $\mathbb{R}$, on a φ' croissante ssi pour tout $x, y \in U$, $(\varphi'(x) - \varphi'(y))(x-y) \geq 0$ (qui est bien la notion de croissance du gradient énoncée au point *3)* de la Proposition 1.9).

La Proposition 1.9 fait aussi apparaître l'idée qu'une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes (et réciproquement : seules les fonctions convexes sont au dessus de toutes leurs tangentes). En effet, dans le cas différentiable, f admet une unique tangente en $x \in U$ qui est donnée par la fonction $y \in U \to f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle$. On a donc une CNS liant convexité et tangentes : f est convexe si et seulement si elle est au-dessus de ses tangentes (c'est l'équivalence *1)* et *2)* de la Proposition 1.9). Cette propriété permet en particulier de prouver une réciproque à la Proposition 1.4 dans le cas différentiable ; on peut en effet écrire $f : U \to \mathbb{R}$ (convexe différentiable) comme la fonction maximale de ses tangentes : càd pour tout $y \in U$,

$$f(y) = \sup_{x\in U} \left(f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle \right).$$

Cette remarque est utile pour faire le lien entre enveloppe convexe d'une fonction et la transformée de Fenchel-Legendre biduale.

Convexité stricte et forte. Les exemples classiques de fonctions convexes sont $f : x \to x^2$ ou encore $f : x \to |x|$. Néanmoins, la fonction $f : x \to x^2$ semble en quelque sorte “plus convexe” que $f : x \to |x|$ qui est en fait seulement linéaire par morceau et donc sans “courbure”. Pour formaliser cette intuition, on introduit les notions de fonctions strictement et fortement convexes.

Définition 1.10 *Soit U un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$. On dit que f est **strictement convexe** quand pour tout $x \neq y \in U$ et $0 < \alpha < 1$, on a*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

*On dit que f est **fortement convexe** quand il existe $c > 0$ tel que pour tout $x, y \in U$ et $0 \leq \alpha \leq 1$, on a*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) - \frac{c\alpha(1-\alpha)}{2} \|x-y\|_2^2. \tag{1.4}$$

*On dit aussi que f est c-**convexe** ou c-**elliptique** lorsque (1.4) est satisfaite.*

La fonction $x \to x^2$ est fortement convexe alors que $x \to |x|$ ne l'est pas. La fonction $x > 0 :\to -\log(x)$ est strictement convexe mais pas fortement convexe. La stricte convexité implique l'unicité des solutions aux problèmes d'optimisation.

Proposition 1.11 *Soit U un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe. Soit K un sous-ensemble convexe de U. Le problème $\min_{x \in K} f(x)$ admet au plus une solution.*

Preuve. Soient x_1^* et x_2^* deux solutions au problème $\min_{x\in K} f(x)$. On pose $f^* = \min_{x\in K} f(x)$. Supposons que $x_1^* \neq x_2^*$. D'après la stricte convexité, on a pour tout $0 < \alpha < 1$,

$$f(\alpha x_1^* + (1-\alpha)x_2^*) < \alpha f(x_1^*) + (1-\alpha) f(x_2^*) = f^*.$$

Or $\alpha x_1^* + (1-\alpha)x_2^* \in K$ (car K est convexe) donc $f(\alpha x_1^* + (1-\alpha)x_2^*) \geq \min_{x\in K} f(x) = f^*$. C'est une contradiction, donc $x_1^* = x_2^*$. ■

La Proposition 1.11 n'implique pas l'existence d'une solution au problème $\min_{x\in K} f(x)$ seulement son unicité si elle existe. Néanmoins, si on suppose de plus que f est fortement convexe et que K est fermé alors on a existence et unicité d'une solution au problème $\min_{x\in K} f(x)$.

Proposition 1.12 *Soit U un ensemble ouvert et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction fortement convexe. Soit K un sous-ensemble de U convexe et fermé dans $\mathbb{R}^n$. Le problème $\min_{x\in K} f(x)$ admet une unique solution.*

Preuve. Pour l'unicité, on applique la Proposition 1.11 vu qu'une fonction fortement convexe et aussi strictement convexe.

Pour l'existence, si U est borné alors comme $K \subset U$ il est aussi borné et donc compact de $\mathbb{R}^n$. Comme f est convexe et U est ouvert, f est continue (voir la Proposition 1.6 qui se généralise au cas multivarié) donc par Weierstrass f atteint ses bornes sur K. On suppose maintenant que U n'est pas bornée. On montre que f est telle que

$$\lim_{x\in U, \|x\|_2 \to +\infty} f(x) = +\infty \tag{1.5}$$

car f est fortement convexe. En effet, on prends un $x_0 \in U$ et on voit que $g(x) = f(x_0 + x) - f(x_0)$ est aussi fortement convexe avec $g(0) = 0$ donc sans perte de généralité, on peut supposer que $0 \in U$ et que $f(0) = 0$. Soit $x \in U \backslash \{0\}$. Comme U est convexe, le segment $[0, x] \subset U$, en particulier, $x/2, x/4, x/8, \cdots$ sont dans U. On a par forte convexité de f (et $f(0) = 0$) que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$f(x) \geq 2f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{c}{4}\|x\|_2^2 \geq 2^k f\left(\frac{x}{2^k}\right) + \frac{c}{4}\|x\|_2^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) \geq 2^k f\left(\frac{x}{2^k}\right) + \frac{c}{4}\|x\|_2^2$$

(où on a utiliser une récurrence pour obtenir la deuxième inégalité). On se fixe un $k \in \mathbb{N}$ alors pour tout $x \in U$ tel que $\|x\|_2 = \sqrt{2^k}$ (un tel x existe car U n'est pas bornée et convexe) on a $\left\|x/2^k\right\|_2 = 2^{-k/2}$ et par continuité de f en 0 et $f(0) = 0$, pour k assez grand $|f(x/2^k)| \leq c/8$ et donc $f(x) \geq 2^k(c/4 - |f(x/2^k)|) \geq c2^k/8$. Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a bien que (1.5) est vraie. (Dans le cas où on suppose de plus que f est différentiable, on peut montrer (1.5) en utilisant la Proposition 1.14 ci-dessous qui donne que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $f(x) \geq f(0) + \langle \nabla f(0), x\rangle + (c/2)\|x\|_2^2$ et donc $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\|_2 \to +\infty$.)

Finalement, comme K est fermé dans $\mathbb{R}^n$, f est continue et satisfait (1.5), on conclut avec le Théorème 1.1 du deuxième chapitre, concernant l'existence d'une solution au problème. ■

On peut caractériser la convexité forte de la manière suivante en montrant que même si on retranche $c/2$ fois la norme ℓ_2^n au carré à f alors elle reste convexe.

Proposition 1.13 *Soit U un convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $c > 0$. Il y a équivalence entre :*
1) f est c-convexe
2) $x \in U \to f(x) - (c/2)\left\|x\right\|_2^2$ est convexe

Preuve. On montre que *1)* implique *2)* : On note $g : x \in U \to f(x) - (c/2)\left\|x\right\|_2^2$. On a pour tout $x, y \in U$ et $0 \le t \le 1$,

$$\begin{aligned}\left\|tx + (1-t)y\right\|_2^2 &= t^2\left\|x\right\|_2^2 + (1-t)^2\left\|y\right\|_2^2 + 2t(1-t)\left\langle x, y\right\rangle\\ &= t^2\left\|x\right\|_2^2 + (1-t)^2\left\|y\right\|_2^2 - t(1-t)\left(\left\|x-y\right\|_2^2 - \left\|x\right\|_2^2 - \left\|y\right\|_2^2\right)\\ &= t\left\|x\right\|_2^2 + (1-t)\left\|y\right\|_2^2 - t(1-t)\left\|x-y\right\|_2^2\end{aligned}$$

(au passage, on voit que $x \to \left\|x\right\|_2^2$ est 2-convexe) et donc

$$\begin{aligned}&g(tx + (1-t)y) - tg(x) - (1-t)g(y)\\ &\qquad = f(tx + (1-t)y) - tf(x) - (1-t)f(y) - \frac{ct(1-t)}{2}\left\|x-y\right\|_2^2 \le 0.\end{aligned} \tag{1.6}$$

On montre que *2)* implique *1)* : On note $g : x \in U \to f(x) - (c/2)\left\|x\right\|_2^2$. Le résultat s'obtient à partir de (1.6). ■

On peut caractériser la convexité forte de la manière suivante quand f a de la régularité supplémentaire.

Proposition 1.14 *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable. Soit $c > 0$. Il y a équivalence entre :*
1) f est c-convexe
2) pour tout $x, y \in U$,

$$f(x) \ge f(y) + \left\langle \nabla f(y), x - y\right\rangle + (c/2)\left\|x-y\right\|_2^2$$

3) pour tout $x, y \in U$,

$$\left\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\right\rangle \ge c\left\|x-y\right\|_2^2.$$

Si f est supposée deux fois différentiable, alors il y a équivalence entre les trois propriétés ci-dessus et
4) pour tout $x \in U$, $\nabla^2 f(x) \succeq cI_n$.

Preuve. On peut démontrer la Proposition 1.14 grâce à la Proposition 1.13 et la Proposition 1.9 appliquée à $g : x \in U \to f(x) - (c/2)\left\|x\right\|_2^2$ vu que $\nabla g(x) = \nabla f(x) - cx$ et $\nabla^2 g(x) = \nabla^2 f(x) - cI_n$. Néanmoins, on donne ci-dessous une preuve directe du résultat.

On montre que *1)* implique *2)* : Pour tout $x, y \in U$ et $0 < \alpha \le 1$, on a

$$f(x) - f(y) - \frac{c(1-\alpha)}{2}\left\|x-y\right\|_2^2 \ge \frac{f(y + \alpha(x-y)) - f(y)}{\alpha}.$$

En faisant tendre $\alpha \to 0$, on obtient,

$$f(x) - f(y) - \frac{c}{2}\left\|x-y\right\|_2^2 \ge \left\langle \nabla f(y), x - y\right\rangle.$$

On montre que *2)* implique *3)* : pour tout $x, y \in U$, on a d'après *2)*,

$$f(x) - f(y) \geq \langle \nabla f(y), x - y \rangle + (c/2) \|x - y\|_2^2$$
$$f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle + (c/2) \|x - y\|_2^2 .$$

Alors en sommant ces deux inégalités, on obtient bien le résultat.

On montre que *3)* implique *1)* : On note $g : x \in U \to f(x) - (c/2) \|x\|_2^2$. Pour tout $x, y \in U$, on a

$$\langle \nabla g(x) - \nabla g(y), x - y \rangle = \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle - c \|x - y\|_2^2 \geq 0$$

donc g est convexe et on conclut avec la Proposition 1.13.

Finalement, quand on suppose de plus que f est deux fois différentiable, comme la Hessienne de $g : x \in U \to f(x) - (c/2) \|x\|_2^2$ est $\nabla g(x) = \nabla f(x) - cI_n$ et que g est convexe si et seulement si $\nabla g(x) \succeq 0$ pour tout $x \in U$, on a bien l'équivalence entre *1)* et *4)* au vue de la Proposition 1.13.

■

On retiendra en particulier de la Proposition 1.14 que pour montrer la convexité forte d'une fonction $\mathcal{C}^2$, il suffit de calculer sa Hessienne et de montrer que sa plus petite valeur propre est plus grande que c. Cela implique bien le point *4)* de la Proposition 1.14 en considérant la décomposition en valeur propres de la Hessienne. En particulier, dans le cas bi-dimensionnel càd $n = 2$, il suffit de montrer que $\mathrm{Tr}(\nabla^2 f(x)) > 0$ et $\det(\nabla^2 f(x)) > 0$ pour avoir cette propriété.

Il est très utile d'étudier les propriétés de contraction de certaines fonctions quand on étudie la convergence d'algorithmes de points fixes comme nous le ferons plus tard. La forte convexité implique cette propriété de contraction pour une certaine fonction très utilisée par les algorithmes de descente. On rappelle qu'une fonction $F : U \to \mathbb{R}$ est une **contraction** quand elle est Lipschitzienne de constante de Lipschitz strictement plus petite que 1.

Proposition 1.15 *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction c-convexe différentiable. On suppose que ∇f est C-Lipschitzien (i.e. $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2 \leq C \|x - y\|_2$ pour tout $x, y \in U$). Alors, la fonction $F : x \in U \to x - \eta \nabla f(x)$ est Lipschitzienne de constante de Lipschitz $\sqrt{1 + \eta^2 C^2 - 2c\eta}$. En particulier, F est une contraction quand $0 < \eta \leq 2c/C^2$.*

Preuve. Comme le gradient est Lipschitzien et que f est c-convexe, d'après la Proposition 1.13, pour tout $x, y \in U$, on a

$$\begin{aligned}
&\|F(x) - F(y)\|_2^2 = \|(x - \eta \nabla f(x)) - (y - \eta \nabla f(y))\|_2^2 \\
&= \|x - y\|_2^2 + \eta^2 \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| - 2\eta \langle x - y, \nabla f(x) - \nabla f(y) \rangle \\
&\leq \left(1 + \eta^2 C^2 - 2c\eta\right) \|x - y\|_2^2 .
\end{aligned}$$

■

Remarque 1.16 *Si $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction c-convexe différentiable et ∇f est C-Lipschitzien alors d'après la Proposition 1.13, on a pour tout $x, y \in U$,*

$$c \|x - y\|_2^2 \leq \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \leq \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2 \|x - y\|_2 \leq C \|x - y\|_2^2$$

et donc $C \geq c$. En particulier, $1 + \eta^2 C^2 - 2c\eta \geq 0$ pour tout $\eta \in \mathbb{R}$.

Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une contraction alors 1) elle admet un unique point fixe x^* dans $\mathbb{R}^n$ (i.e. tel que $F(x^*) = x^*$) et 2) l'algorithme de point fixe $x_{k+1} = F(x_k)$ (et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point initial quelconque de $\mathbb{R}^n$) converge à vitesse géométrique vers x^*. En effet, pour l'unicité, on voit que si x_1^* et x_2^* sont deux points fixes et qu'on suppose qu'ils sont différents alors $\|x_1^* - x_2^*\|_2 = \|F(x_1^*) - F(x_2^*)\|_2 < \|x_1^* - x_2^*\|_2$, ce qui n'est pas possible donc $x_1^* = x_2^*$; il y a donc bien unicité. Pour l'existence, on utilise l'algorithme de point fixe. On a pour tout k, $\|x_{k+1} - x_k\|_2 = \|F(x_k) - F(x_{k-1})\|_2 \leq C\|x_k - x_{k-1}\|_2$ où $c < 1$. Ainsi par récurrence $\|x_{k+1} - x_k\|_2 \leq C^k \|x_1 - x_0\|_2$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On a donc pour tout entiers $p < q$,

$$\|x_q - x_p\|_2 \leq \sum_{k=p}^{q-1} \|x_{k+1} - x_k\|_2 \leq \left(\sum_{k=q}^{p-1} C^k\right) \|x_1 - x_0\|_2 = C^q \frac{1 - C^{p-q}}{1 - C} \|x_0 - x_1\|_2$$

et comme $0 \leq C < 1$, on en déduit que $\lim_{p,q\to+\infty} \|x_q - x_p\|_2 = 0$. La suite des itérés de l'algorithme de point fixe est donc une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^n$ (qui est complet), donc elle converge : il existe un point x^* de $\mathbb{R}^n$ tel que $x_k \to x^*$. Comme $x_k \to x^*$ et que F est continue (car Lipschitzienne), on a que $F(x_k) \to F(x^*)$, ainsi en passant à la limite dans l'égalité $x_{k+1} = F(x_k)$, on voit que $x^* = F(x^*)$. On a donc bien montré à la fois l'existence d'un point fixe pour F et la convergence de l'algorithme de point fixe $x_{k+1} = F(x_k)$ vers ce point fixe. Pour la vitesse de convergence, on voit que $\|x_{k+1} - x^*\|_2 = \|F(x_k) - x^*\|_2 \leq C\|x_k - x^*\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\|x_k - x^*\|_2 \leq C^k \|x_1 - x_0\|_2$ pour tout k, ce qui est bien une vitesse de convergence géométrique de $(x_k)_k$ vers x^*.

2 Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les problèmes d'optimisation convexes et différentiables

Dans cette section, on donne la "version OCD" du théorème d'Euler/Péano/Kantorovitch. Contrairement au cas général (sans l'hypothèse de convexité), on a ici une condition nécessaire *et suffisante* d'optimalité. C'est un des avantages théoriques de l'optimisation convexe (on verra aussi des avantages pratiques à la convexité plus tard).

2.1 Problèmes d'optimisation sans contrainte en OCD

On commence ici avec les problèmes d'optimisation sans contrainte même si ce résultat peut être obtenu comme corollaire du Théorème d'Euler/Péano/Kantorovitch de la section suivante.

Théorème 2.1 *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et différentiable. Soit $x^* \in U$. Il y a équivalence entre :*
1) $x^* \in \mathrm{argmin}_{x\in U} f(x)$
2) $\nabla f(x^*) = 0$.

Preuve. On montre que *1)* implique *2)* : On a déjà vu cette implication dans le cas général (pas forcément convexe). On sait en effet que si x^* est solution du problème $\min_{x\in U} f(x)$ alors c'est un minimum local de f et donc c'est un point critique. On donne à nouveau la preuve ici.

Comme U est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que la boule $B_2(x^*, \epsilon)$ centrée en x^* et de rayon ϵ est dans U. Soit $d \in \mathbb{R}^n$. D'un côté, pour tout $0 < \lambda < \epsilon$, on a $f(x^* + \lambda d) \geq f(x^*)$ et d'un autre côté, quand $\lambda \to 0$, $f(x^* + \lambda d) = f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), \lambda d\rangle + o(\lambda)$. On a donc quand $\lambda \to 0$, $\langle \nabla f(x^*), d\rangle + o(1) \geq 0$ donc $\langle \nabla f(x^*), d\rangle \geq 0$. Ceci étant vrai pour tout $d \in \mathbb{R}^n$, on en déduit que $\nabla f(x^*) = 0$.

On montre que *2)* implique *1)* : C'est cette réciproque qui est propre à la convexité de f. Comme f est convexe, d'après la Proposition 1.9, pour tout $y \in U$, on a $f(y) \geq f(x^*) + \left\langle \nabla f(x^*), y - x \right\rangle$. Ainsi, quand on a $\nabla f(x^*) = 0$, on a bien $f(y) \geq f(x^*)$ pour tout $y \in U$ et donc x^* est solution du problème $\min_{x \in U} f(x)$. ■

Sous hypothèse de convexité de f, le Théorème 2.1 assure bien que x^* est solution du problème $\min_{x \in U} f(x)$ si et seulement si x^* est un point critique de f. Pour trouver une solution du problème $\min_{x \in U} f(x)$, il suffit donc de chercher les points critiques de f. Néanmoins, le Théorème 2.1 n'assure pas l'existence ni l'unicité d'une solution, il se peut très bien que f n'atteigne aucun minimimum sur U ou que f atteigne son minimum en plusieurs points de U.

2.2 Problèmes d'optimisation avec contrainte en OCD

On donne ici la "version OCD" du théorème d'Euler/Pénao/Kantorovitch. On aura comme précédemment une CNS pour l'optimalité d'une solution au problème $\min_{x \in K} f(x)$.

Théorème 2.2 (Théorème d'Euler/Péano/Kantorovitch en OCD) *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et différentiable. Soit $K \subset U$ un ensemble convexe et $x^* \in K$. Il y a équivalence entre :*

1) $x^* \in \operatorname{argmin}_{x \in K} f(x)$

2) $-\nabla f(x^*) \in N_K(x^*)$

3) pour tout $y \in K$, $\left\langle \nabla f(x^*), y - x^* \right\rangle \geq 0$ (condition du premier ordre, voir Figure 2.2).

Preuve. L'équivalence entre *2)* et *3)* est immédiate vue que K est convexe et donc

$$N_K(x^*) = \{z \in \mathbb{R}^n : \left\langle z, y - x^* \right\rangle \leq 0, \forall y \in K\}.$$

On montre que *1)* implique *2)* : On connaît déjà cette implication dans le cas général. On démontre à nouveau ce résultat ici. Soit v un vecteur tangent à K en x^*. Soit $(v_k)_k$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ convergeant vers v et $(\lambda_k)_k \subset \mathbb{R}_+^*$ une suite décroissante vers 0 tels que $x^* + \lambda_k v_k \in K$ et $v = \lim_k v_k$. On a $f(x^* + \lambda_k v_k) = f(x^*) + \left\langle \nabla f(x^*), \lambda_k v_k \right\rangle + o(\lambda_k)$ quand $k \to +\infty$ (on rappelle que $(v_k)_k$ est bornée car convergente). Par ailleurs, $f(x^* + \lambda_k v_k) \geq f(x^*)$ pour tout k car $x^* + \lambda_k v_k \in K$, donc $\left\langle \nabla f(x^*), \lambda_k v_k \right\rangle + o(\lambda_k) \geq 0$ quand $k \to 0$. On a donc $\left\langle \nabla f(x^*), v \right\rangle \geq 0$. Ceci étant vrai pour tout vecteur tangent à K en x^*, on a donc bien $-\nabla f(x^*) \in (T_K(x^*))^\circ = N_K(x^*)$.

On montre que *2)* implique *1)* : Comme K est convexe, on sait que $-\nabla f(x^*) \in N_K(x^*)$ si et seulement si pour tout $y \in K$, on a $\left\langle -\nabla f(x^*), y - x^* \right\rangle \leq 0$. Par ailleurs, f est convexe donc pour tout $y \in K$, $f(y) \geq f(x^*) + \left\langle \nabla f(x^*), y - x^* \right\rangle$. On en déduit que $f(y) \geq f(x^*)$.

■

Remarque 2.3 *On peut déduire immédiatement le Théorème 2.1 du Théorème 2.2 vu que si $K = U$ alors comme U est ouvert, on a $N_K(x^*) = \{0\}$ et donc dire que $-\nabla f(x^*) \in N_K(x^*)$ est dans ce cas équivalent à dire que $\nabla f(x^*) = 0$.*

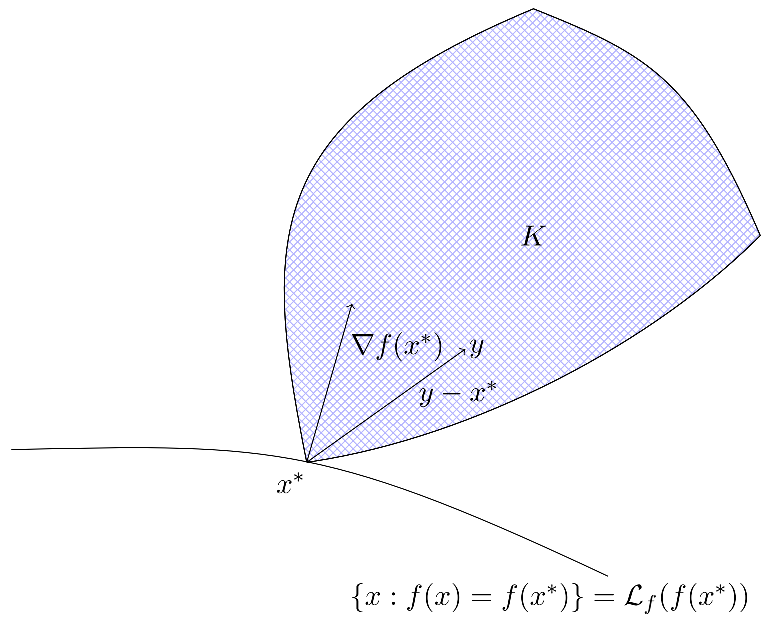

FIGURE 1 – Interprétation géométrique de la condition du premier ordre du théorème d'Euler/Péano/Kantorovitch.

2.3 Exemple : projection sur un convexe fermé

Un exemple d'application classique et très utile du théorème de EPK dans le cas convexe est celui de la projection sur un ensemble convexe fermé. On rencontrera ce problème lorsqu'on étudiera les algorithmes de descente de gradient projeté pour la résolution numérique des problèmes (OCD) sous contrainte.

Pour cela, on considère un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ convexe, fermé et non vide. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ la fonction $f : z \in \mathbb{R}^n \to (1/2)\left\|z - x\right\|_2^2$ est fortement convexe (car sa Hessienne est I_n qui vérifie bien la condition *4)* de la Proposition 1.14) et K est convexe fermé non vide donc $\min_{z\in K} f(z)$ admet une unique solution (voir Proposition 1.12). On peut donc définir la fonction

$$\mathrm{proj}_K : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & K \\ x & \longrightarrow & \mathrm{argmin}_{z\in K} \left\|z - x\right\|_2 . \end{array} \right.$$

qui est appelé **opérateur de projection sur** K.

On remarque que minimiser $f : z \in \mathbb{R}^n \to (1/2)\left\|z - x\right\|_2^2$ ou $z \in \mathbb{R}^n \to \left\|z - x\right\|_2$ est exactement la même chose (car $t \to (1/2)t^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$). Néanmoins, il est plus facile de travailler avec f car c'est une fonction quadratique (et donc le calcul de son gradient est facile et son développement à l'ordre 2 de Taylor-Young est exacte). Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, le problème $\min_{z\in K} f(z)$ entre dans le domaine d'application du Théorème d'EPK dans la cas convexe rappelé dans le Théorème 2.2 car f est convexe différentiable et K est convexe. On a donc le résultat suivant qui découle d'EPK.

Proposition 2.4 *Soit K un convexe fermé non vide alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique élément de K noté $\mathrm{proj}_K(x)$ qui minimlise la distance ℓ_2 entre x et K. De plus, il y a équivalence entre :*

1) $x^* = \mathrm{proj}_K(x)$

2) pour tout $y \in K$, $\langle y - x^*, x - x^* \rangle \leq 0$.

Preuve. On applique la condition du premier ordre du Théorème d'EPK (rappelé au Théorème 2.2) à la fonction $f : z \in \mathbb{R}^n \to (1/2)\|z-x\|_2^2$ et la contrainte K. La fonction f admettant pour gradient $\nabla f : z \to z - x$, le résultat suit. ∎

On peut donc caractériser la projection sur un ensemble convexe par la condition du premier ordre qui est ici donnée par la condition *2)* de la Proposition 2.4.

Preuve directe de la Proposition 2.4. Il est possible de montrer l'équivalence entre *1)* et *2)* de la Proposition 2.4 directement (càd sans faire appel au Théorème d'EPK). En effet, supposons *1)* vraie. Soit $y \in K$. Comme K est convexe on a $y_\alpha = x^* + \alpha(y - x^*) \in K$ pour tout $0 \le \alpha \le 1$. On a, par définition de x^*, que pour tout $0 \le \alpha \le 1$, $\|y_\alpha - x\|_2^2 \ge \|x^* - x\|_2^2$ et donc $\|y_\alpha - x^*\|_2^2 + 2\langle y_\alpha - x^*, x^* - x\rangle \ge 0$. Par construction de y_α, on a alors $\alpha\|y - x^*\|_2^2 + 2\langle y - x^*, x^* - x\rangle \ge 0$ pour tout $0 < \alpha \le 1$. Ceci étant vrai pour tout $0 < \alpha \le 1$, en faisant tendre $\alpha \to 0$, on conclut que $\langle y - x^*, x^* - x\rangle \ge 0$. Ceci étant vrai pour tout $y \in K$, on a bien montré que *2)* est vrai.

Pour la réciproque, on suppose que *2)* est vrai. On prends $y \in K$ et on voit que

$$\|y - x\|_2^2 - \|x^* - x\|_2^2 = \|y - x^*\|_2^2 + 2\langle y - x^*, x^* - x\rangle \ge 0.$$

Ce qui signifie que x^* est bien solution du problème $\min_{y \in K}\|y - x\|_2$. ∎

Exemple : projection sur un espace affine. On s'intéresse ici à l'opérateur de projection précédent dans le cas particulier où K est un sous-espace affine de la forme $K = \{y \in \mathbb{R}^n : Ay = b\}$ où $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$. On suppose que $K \neq \emptyset$, ce qui équivaut à dire que $b \in \mathrm{Im}(A)$.

L'ensemble K est bien un convexe fermé en tant que sous-espace affine en dimension finie. Comme $x^* \in K$ et que K est un sous-espace affine, on voit que $\{y - x^* : y \in K\} = \ker(A)$. Ainsi, la condition du premier ordre s'écrit ici : pour tout $h \in \ker(A)$, $\langle h, x - x^*\rangle = 0$ et donc $x - x^* \in (\ker(A))^\perp$. Par ailleurs, on a $(\ker(A))^\perp = \mathrm{Im}(A^\top)$ (en effet, $z \in \ker(A)$ si et seulement si $Az = 0$ ssi $\forall y \in \mathbb{R}^n, \langle Az, y\rangle = 0$ ssi $\forall y \in \mathbb{R}^n, \langle z, A^\top y\rangle = 0$ ssi $z \in (\mathrm{Im}(A^\top))^\perp$). On a donc $x^* = \mathrm{proj}_K(x)$ ssi $x - x^* \in \mathrm{Im}(A^\top)$ càd $x - x^* = A^\top\lambda$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}^m$.

Pour déterminer un λ tel que $x^* = x - A^\top\lambda$, on utilise la contrainte que $x^* \in K$ càd $Ax^* = b$ donc $A(x - A^\top\lambda) = b$ càd $AA^\top\lambda = Ax - b$. On aimerait pouvoir inverser $AA^\top$ pour pouvoir déterminer un tel λ. Hors, en général $AA^\top$ n'est pas inversible (en fait $\ker(AA^\top) = \ker(A)$), il y a potentiellement une infinité de solution (en λ) à l'équation $AA^\top\lambda = Ax - b$. On va donc en déterminer une et montrer ensuite que pour cette solution on a bien su caractériser la projection sur K de x grâce à la condition du premier ordre.

Pour cela, on considère l'**inverse généralisée** de $AA^\top$, notée $(AA^\top)^{(-1)}$. On rappelle sa définition : comme $AA^\top$ est une matrice symétrique positive, on peut l'écrire sous la forme $AA^\top = PDP^\top$ où $P \in O(n)$ est une matrice orthogonale et $D = \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_r, 0, \cdots, 0)$ où $\sigma_1 \ge \cdots, \ge \sigma_r > 0$. On pose $(AA^\top)^{(-1)} = PD^{(-1)}P^\top$ où $D^{(-1)} = \mathrm{diag}(\sigma_1^{-1}, \cdots, \sigma_r^{-1}, 0, \cdots, 0))$. L'inverse généralisée permet en quelque sorte d'inverser $AA^\top$ uniquement là où elle est inversible càd sur $\mathrm{Im}(AA^\top) = \mathrm{Im}(A)$. On a en effet, pour tout $z \in \mathrm{Im}(A), AA^\top(AA^\top)^{(-1)}z = z$. Pour voir cela, on montre que si $p_1, \cdots, p_r$ sont les vecteur propres de $AA^\top$ associés aux valeurs propres $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ formant les r premiers vecteurs colonne de $AA^\top$ alors $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{vect}(p_1, \ldots, p_r)$ (car $AA^\top p_j = \sigma_j p_j$ donc $p_j \in \mathrm{Im}(A)$ et comme $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(AA^\top) = r$, on a bien trouvé une base orthonormale de $\mathrm{Im}(A)$ avec $p_1, \ldots, p_r$). Si $z \in \mathrm{Im}(A)$, on peut alors trouver $a_1, \ldots a_r$ des réels tels que $z = \sum_{j=1}^r a_j p_j$. On a donc

$$(AA^\top)(AA^\top)^{(-1)}z = PDP^\top(PD^{(-1)})P^\top z = PI_rP^\top\sum_{j=1}^r a_j p_j = \sum_{j=1}^r a_j p_j = z$$

où on a utiliser le fait que $p_1, \dots, p_r$ sont les r premiers vecteurs colonnes de P et qu'ils sont orthonormaux.

On pose alors $x^* = x - A^\top (AA^\top)^{(-1)}(Ax - b)$. On a bien $x - x^* \in \mathrm{Im}(A^\top)$, donc la condition du premier ordre est vérifiée et, comme $Ax - b \in \mathrm{Im}(A)$, on a $(AA^\top)(AA^\top)^{(-1)}(Ax - b) = Ax - b$ et donc $Ax^* = Ax - Ax + b = b$ càd $x^* \in K$. Alors, en utilisant la réciproque du théorème d'Euler/Péano/Kantorovitch (càd l'implication *2)* implique *1)* ci-dessus), on a $x^* = \mathrm{proj}_K(x)$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{proj}_K(x) = x - A^\top (AA^\top)^{(-1)}(Ax - b).$$

Exemple : Théorème de séparation forte. Grâce à la Proposition 2.4, on peut démontrer ce qu'on appelle le théorème de Hahn-Banach géométrique en dimension finie : c'est un théorème de séparation forte entre un ensemble convexe fermé et un point.

Théorème 2.5 *Soit K un ensemble convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $x \notin K$. Alors il existe un hyperplan séparant fortement K et x : càd, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ et $w \in \mathbb{R}^n$ tels que*

a) pour tout $y \in K$, $\langle y, w \rangle \le \alpha - \delta$

b) $\langle w, x \rangle \ge \alpha + \delta$.

Preuve. Comme K est un convexe fermé non vide, il existe $x^* \in K$ solution du problème $\min(f(y) : y \in K)$ où $f : y \to (1/2) \|y - x\|_2^2$, c'est la projection de x sur K. On note $w = x - x^*$, $\delta = \|w\|_2^2 / 2$ et $\alpha = \langle x^*, w \rangle + \delta$. Comme $x \notin K$, on a $\delta > 0$. D'après la condition du premier ordre (voir *2)* dans la Proposition 2.4), on a pour tout $y \in K$, $\langle y - x^*, x - x^* \rangle \le 0$, càd $\langle y - x^*, w \rangle \le 0$ et donc $\langle y, w \rangle \le \langle x^*, w \rangle$. On a donc pour tout $y \in K$, $\langle y, w \rangle \le \alpha - \delta$. On a donc bien montré le point *a)*. De plus, on a $2\delta = \langle w, w \rangle = \langle x, w \rangle - \langle x^*, w \rangle$ et donc $\langle x, w \rangle = \langle x^*, w \rangle + 2\delta = \alpha + \delta$. ■

3 Conditions KKT en optimisation convexe différentiable

Pour les problèmes d'OCD la contrainte est de la forme

$$K = \{x \in U : Ax = b \text{ et } h_1(x) \le 0, \dots, h_l(x) \le 0\} \tag{3.1}$$

où U est un convexe ouvert, $A \in \mathbb{R}^{r \times n}, b \in \mathbb{R}^r$ et $h_1, \dots, h_l$ sont convexes et de classe $\mathcal{C}^1$. L'hypothèse de qualification de K en un point $x \in K$ s'écrit donc ici : K est qualifiée en x si et seulement si

$$T_K(x) = \left\{v \in \mathbb{R}^n : Av = 0, \left\langle \nabla h_j(x), v \right\rangle \le 0, \forall j \in J(x)\right\} \tag{3.2}$$

où $J(x) = \{j \in \{1, \dots, l\} : h_j(v) = 0\}$.

Pour les problèmes d'OCD, une des conditions suffisantes de qualification la plus utilisée est la condition de Slater qu'on rappelle maintenant.

Définition 3.1 *On dit que la contrainte K définie dans (3.1) pour les problèmes de type (OCD) satisfait la* ***condition de Slater*** *quand il existe $x_0 \in K$ tel que $h_j(x_0) < 0$ pour tout $j = 1, \dots, l$.*

La condition de Slater ne s'applique que dans le cas de l'OCD, càd quand les contraintes d'égalités sont affines et les contrainte d'inégalité sont convexes et $\mathcal{C}^1$. Elle est en générale assez facile d'application et permet de qualifier toute la contrainte K. Il est aussi possible de raffiné la condition de Slater dans le cas où certaine contrainte h_j sont affines. En effet, dans ce cas, on doit vérifier $h_j(x_0) < 0$ seulement pour les j tel que h_j n'est pas affine.

Proposition 3.2 *Soit K une contrainte de la forme (3.1) où $h_1, \dots, h_l : U \to \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et convexes. Si la condition de Slater est satisfaite alors la contrainte K est qualifiée.*

Sous hypothèse de qualification de K en x (càd quand (3.2) est vérifiée), le cône normal à K en x est donné par la forme général des cône tangents à un cône polyédral (vue dans les chapitres précédents), càd ici

$$N_K(x) = \left\{ A^\top \lambda + \sum_{j \in J(x)} \mu_j \nabla h_j(x) : \lambda \in \mathbb{R}^r, \mu_j \geq 0, \forall j \in J(x) \right\}. \tag{3.3}$$

On a donc tous les éléments pour appliquer le théorème d'Euler/Péano/Kantorovitch (voir Théorème 2.2) dans le cas d'une contrainte de la forme (3.1) et donc obtenir une "version OCD" du théorème de KKT faisant, cette fois-ci, apparaître une CNS pour l'optimalité d'une solution au problème $\min_{x \in K} f(x)$.

Théorème 3.3 (KKT en OCD) *Soit $f, (h_j)_{j=1}^l : U \to \mathbb{R}$ des fonctions différentiables convexes définies sur un ouvert convexe U de $\mathbb{R}^n$. On considère la contrainte K définie dans (3.1). Soit $x^* \in K$. On suppose que K est qualifiée en x^* on a alors équivalence entre :*

1) $x^* \in \operatorname{argmin}_{x \in K} f(x)$

2) Il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^r$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^l$ tels que :

i) $\nabla f(x^*) + A^\top \lambda^* + \sum_{j=1}^l \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$

ii) $\mu_j^* \geq 0$ *pour tout* $j = 1, \dots, l$

iii) $\mu_j^* h_j(x^*) = 0$ *pour tout* $j = 1, \dots, l$.

Preuve. D'après le théorème de Euler/Péano/Kantorovitch, on a *1)* est équivalent à $-\nabla f(x^*) \in N_K(x^*)$. Par ailleurs, sous l'hypothèse de qualification de K en x^*, $N_K(x^*)$ est donnée dans (3.3). Ce qui conclut la preuve. ∎

Le théorème de KKT en OCD fournit donc une CNS pour les solutions du problème $\min_{x \in K} f(x)$. On a donc obtenu en plus la réciproque de KKT dans le cadre OD grâce à l'hypothèse supplémentaire de convexité de f, $h_j, j = 1, \dots, l$ et les g_i sont affines. Par contre, le théorème de KKT ne dit rien sur les coefficients $\lambda^* \in \mathbb{R}^r$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^l$. On peut obtenir de l'information supplémentaire sur ces coefficients grâce à la dualité Lagrangienne et en particulier grâce au problème dual.

Exemple d'application de KKT en (OCD). On considère le problème d'optimisation

$$\min \left(yz + y^2 + z^2 : z \leq -1 \right) \tag{3.4}$$

On va résoudre (3.4) en utilisant le Théorème de KKT version (OCD) donné au Théorème 3.3. On pose $f : (y, z) \to yz + y^2 + z^2$, $h_1 : (y, z) \to z + 1$ et $K = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : h_1(y, z) \leq 0\}$. On vérifie en premier lieu que le **problème est de type (OCD)**. La contrainte d'égalité h_1 est affine donc convexe et $\mathcal{C}^1$. La fonction objectif f est polynomiale donc $\mathcal{C}^1$. Pour vérifier la convexité de f, on calcul sa Hessienne. On a pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla f(y, z) = \begin{pmatrix} z + 2y \\ y + 2z \end{pmatrix} \text{ et } \nabla^2 f(y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a $\operatorname{Tr}(\nabla^2 f(y, z)) = 4$ et $\det(\nabla^2 f(y, z)) = 3$. On en déduit que 3 et 1 sont les deux valeurs propres de $\nabla^2 f(y, z)$ (leur somme vaut 4 et leur produit vaut 3). On en déduit que $\nabla^2 f(y, z) \succeq I_2$

et donc, d'après la Proposition 1.14, f est fortement convexe en fait $1-$convexe (cela nous servira pour prouver l'existence d'une unique solution). Le problème (3.4) est bien de type (OCD).

Concernant **l'existence d'une solution**, étant donné que K est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et que f est fortement convexe sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, on en déduit, par la Proposition 1.12, que (3.4) admet une unique solution.

Pour vérifier la **qualification de la contrainte**, il suffit de remarquer que les contraintes (càd ici seulement h_1) sont affines. Donc la contrainte est qualifiée (en tout ces points). On peut alors **appliquer le théorème de KKT version (OCD)** (càd le Théorème 3.3) sur toute la contrainte : $(y, z) \in K$ est solution de (3.4) si et seulement si (y, z) vérifie les conditions KKT, càd il existe $\mu_1 \in \mathbb{R}$ tel que a) $\nabla f(y, z) + \mu_1 \nabla h_1(y, z) = 0$, b) $\mu_1 \geq 0$ c) $\mu_1 h_1(y, z) = 0$. On doit donc résoudre le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{c} z + 2y = 0 \\ y + 2z + \mu_1 = 0 \\ \mu_1 \geq 0 \\ \mu_1(z+1) = 0 \\ z \leq -1 \end{array} \right. \quad \text{qui est équivalent à} \quad \left\{ \begin{array}{c} z = -2y \\ 3y = \mu_1 \\ \mu_1 \geq 0 \\ \mu_1(z+1) = 0 \\ z \leq -1 \end{array} \right.$$

On voit que la complementary condition dit que soit $\mu_1 = 0$ soit $h_1(y, z) = 0$. Si $\mu_1 = 0$ alors $y = 0$ et $z = 0$, or z doit satisfaire $z \leq -1$ donc ce n'est pas possible. On a donc nécessairement $z = -1$ et donc $y = 1/2$. On vérifie que $(1/2, -1)$ est bien solution du système ci-dessus (càd que c'est un point vérifiant les conditions KKT) alors étant donné le théorème de KKT et l'existence et l'unicité de la solution à (3.4), on en déduit que $(1/2, -1)$ est l'unique solution au problème (3.4).

4 Dualité Lagrangienne en OCD

On commence par quelques rappels sur la dualité Lagrangienne. Dans la cadre de l'OCD pour une contrainte de la forme (3.1), la fonction de Lagrange s'écrit

$$\mathcal{L} : \left\{ \begin{array}{ccc} U \times (\mathbb{R}^r \times (\mathbb{R}_+)^l) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, (\lambda, \mu)) & \longrightarrow & f(x) + \langle Ax - b, \lambda \rangle + \sum_{j=1}^{l} \mu_j h_j(x). \end{array} \right. \tag{4.1}$$

Les fonctions primale φ et duale ψ sont définies pour tout $(x, (\lambda, \mu)) \in U \times (\mathbb{R}^r \times (\mathbb{R}_+)^l)$ par

$$\varphi(x) = \sup_{(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^r \times (\mathbb{R}_+)^l} \mathcal{L}(x, (\lambda, \mu)) \text{ et } \psi(\lambda, \mu) = \inf_{x \in U} \mathcal{L}(x, (\lambda, \mu)).$$

Comme d'habitude, on retrouve le problème d'origine $\min_{x \in K} f(x)$ comme problème primal $\inf_{x \in U} \varphi(x)$ vu que

$$\varphi(x) = \left\{ \begin{array}{ll} +\infty & \text{si } x \notin K \\ f(x) & \text{si } x \in K. \end{array} \right.$$

Un des objectifs de la dualité Lagrangienne est de préciser les valeurs prises par les coefficients λ^* et μ^* apparaissant dans le théorème KKT (voir Théorème 3.3) grâce au problème dual

$$\sup_{(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^r \times (\mathbb{R}_+)^l} \psi(\lambda, \mu). \tag{4.2}$$

Ce sera en effet le cas sous la condition que le duality gap est nul ou d'existence d'un point-selle pour $\mathcal{L}$. Pour cela, on donne une application du théorème du point-selle vu dans le chapitres sur la dualité Lagrangienne et du théorème de KKT.

Théorème 4.1 (Théorème de dualité Lagrangienne en OCD) *On se place dans le cadre de l'OCD pour une contrainte de la forme (3.1) où $f, (h_j)_{j=1}^l$ sont convexes et différentiables. Soit $x^* \in K$, on suppose que K est qualifiée en x^*. Il y a équivalence entre :*

1) $x^* \in \mathrm{argmin}_{x\in K} f(x)$

2) il existe une solution $(\lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^r \times (\mathbb{R}_+)^l$ du problème dual (4.2), telle que x^* minimise $\mathcal{L}(\cdot, (\lambda^*, \mu^*))$ sur U et pour tout $j = 1, \ldots, l, \mu_j^* h_j(x^*) = 0$.

Preuve. On sait qu'il y a équivalence entre

3) $(x^*, (\lambda^*, \mu^*))$ est un point selle de $\mathcal{L}$

4) x^* est solution du problème primal, (λ^*, μ^*) est solution du problème dual et le duality gap est nul.

Ce résultat est vrai sans aucune hypothèse. Par ailleurs, sous hypothèse de qualification de K en x^*, le Théorème de KKT en OCD (voir Théorème 3.3) donne l'équivalence entre :

1) $x^* \in \mathrm{argmin}_{x\in K} f(x)$

6) Il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^r$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^l$ tels que :

  i) $\nabla f(x^*) + A^\top \lambda^* + \sum_{j=1}^l \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$ (càd x^* est un point critique de $x \in U \to \mathcal{L}(x, (\lambda^*, \mu^*)))$

  ii) $\mu_j^* \geq 0$ pour tout $j = 1, \ldots, l$

  iii) $\mu_j^* h_j(x^*) = 0$ pour tout $j = 1, \ldots, l$.

Comme f et $(h_j)_j$ sont convexes et différentiables, la fonction $x \in U \to \mathcal{L}(x, (\lambda, \mu))$ est convexe et différentiable et ceci pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^r$ et $\mu \in (\mathbb{R}_+)^l$. On a donc d'après le Théorème 2.1 l'équivalence entre

i) $\nabla f(x^*) + A^\top \lambda^* + \sum_{j=1}^l \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$ (càd x^* est un point critique de $x \in U \to \mathcal{L}(x, (\lambda^*, \mu^*)))$

iv) x^* atteint le minimum de $\mathcal{L}(\cdot, (\lambda^*, \mu^*))$ sur U.

On peut alors remplacer *i)* par *iv)* dans *6)*. On a donc équivalence entre

1) $x^* \in \mathrm{argmin}_{x\in K} f(x)$

7) Il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^r$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^l$ tels que :

  iv) x^* atteint le minimum de $\mathcal{L}(\cdot, (\lambda^*, \mu^*))$ sur U.

  ii) $\mu_j^* \geq 0$ pour tout $j = 1, \ldots, l$

  iii) $\mu_j^* h_j(x^*) = 0$ pour tout $j = 1, \ldots, l$.

Par ailleurs, montrons que si *7)* est vrai alors $(x^*, (\lambda^*, \mu^*))$ est un point-selle de $\mathcal{L}$. En effet, comme *iv)* est vrai, on a pour tout $x \in U$,

$$\mathcal{L}(x^*, (\lambda^*, \mu^*)) \leq \mathcal{L}(x, (\lambda^*, \mu^*)).$$

De plus, comme $x^* \in K$, on a $Ax^* = b$ et $h_j(x^*) \leq 0, j = 1, \ldots, l$ donc pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^r \times (\mathbb{R}_+)^l$,

$$\mathcal{L}(x^*, (\lambda, \mu)) = f(x^*) + \sum_{j=1}^l \mu_j h_j(x^*) \leq f(x^*) = \mathcal{L}(x^*, (\lambda^*, \mu^*))$$

car $\sum_{j=1}^l \mu_j^* h_j(x^*) = 0$ d'après *iii)* et $Ax^* = b$ donc $f(x^*) = \mathcal{L}(x^*, (\lambda^*, \mu^*))$ est bien vérifiée. On a donc bien que $(x^*, (\lambda^*, \mu^*))$ est un point-selle de $\mathcal{L}$ càd *3)* est vraie.

Finalement, comme *3)* implique *4)*, on a bien que (λ^*, μ^*) est solution du problème dual. Par ailleurs, on a aussi montré que *1)* et *7)* sont équivalents donc d'après *iv)*, x^* atteint le minimum de $\mathcal{L}(\cdot, (\lambda^*, \mu^*))$ sur U et d'après *iii)*, $\mu_j^* h_j(x^*) = 0$ pour tout $j = 1, \ldots, l$. On a donc bien que *7)* implique *2)*; et donc *1)* implique *2)*.

Par ailleurs, l'implication "*2)* implique *7)*" étant triviale et qu'on a equivalence entre *7)* et *1)*, on a bien équivalence entre *2)* implique *1)* et donc équivalence entre *1)* et *2)*. ∎

Le Théorème 4.1 permet donc de préciser le choix des mulitplicateurs de Lagrange dans le théorème de KKT : on sait qu'ils peuvent être pris comme étant solution du problème dual.

Corollaire 4.2 *Sous les mêmes hypothèses que le Théorème 4.1. Si $x^* \in K$ est tel que K est qualifié en x^* et x^* est solution de $\min_{x\in K} f(x)$ alors*

$$\min_{x\in K} f(x) = f(x^*) = \psi(\lambda^*, \mu^*) = \max_{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^r\times(\mathbb{R}_+)^l} \psi(\lambda, \mu).$$

En particulier, on a dualité forte.

Preuve. On a vu dans la preuve du Théorème 4.1 que si x^* est solution du problème primal alors il existe (λ^*, μ^*) solution du problème dual telle que $(x^*, (\lambda^*, \mu^*))$ est un point-selle de $\mathcal{L}$. Par ailleurs, on sait d'après la Proposition 1.4 du chapitre sur la dualité Lagrangienne que si $(x^*, (\lambda^*, \mu^*))$ est un point-selle de $\mathcal{L}$ alors pour φ la fonction primal on a $\varphi(x^*) = \mathcal{L}(x^*, (\lambda^*, \mu^*)) = \psi((\lambda^*, \mu^*))$. Comme ici $x^* \in K$, on a $\varphi(x^*) = f(x^*)$. On en déduit le résultat. ■

Remarque 4.3 *En OCD, si K est qualifiée en un point solution du problème primal alors d'après Corollaire 4.2, il y a dualité forte de la fonction de Lagrange. De plus, si on a la dualité forte, par le Théorème 3.2 du chapitre sur la dualité Lagrangienne, on sait que pour n'importe quelle solution (λ^*, μ^*) au problème dual, il y a équivalence entre :*

8) x^* est solution du problème primal

7) $(x^*, (\lambda^*, \mu^*))$ vérifie :

- *i) x^* minimise $x \in U \to \mathcal{L}(\cdot, (\lambda^*, \mu^*))$ sur U,*
- *ii) $x^* \in K$,*
- *iii) $\mu_j^* h_j(x^*) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, l$.*

En particulier, si K est qualifiée et que le problème primal admet une solution (alors, en particulier K est qualifiée en une solution du problème primal et donc le dualité gap est nul), il suffit de trouver une solution (λ^*, μ^*) (on peut prendre n'importe laquelle) au problème dual et ensuite on identifie tous les x^* tels que $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, (\lambda^*, \mu^*))$, $x^* \in K$ et $\mu_j^* h_j(x^*) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, l$, pour avoir toutes les solutions au problème primal.

Par ailleurs, en OCD, on peut se soustraire à la condition de qualification car en OCD l'existence d'un point $(x^*, (\lambda^*, \mu^*))$ vérifiant les conditions KKT, càd tel que

$$x^* \in K \text{ et } \mu^* \geq 0 \tag{KKT1}$$

$$\mu_j^* h_j(x^*) = 0, \forall j = 1, \dots, l \tag{KKT2}$$

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, (\lambda^*, \mu^*)) = 0 \tag{KKT3}$$

est équivalent à montrer que $(x^*, (\lambda^*, \mu^*))$ est un point-selle de la fonction de Lagrange (c'est en effet une conséquence du Théorème 3.1 du chapitre sur la dualité Lagrangienne et de la convexité de $\mathcal{L}(\cdot, (\lambda^*, \mu^*))$ en OCD). Or on sait d'après la Proposition 1.7 de ce même chapitre que l'existence d'un point-selle pour $\mathcal{L}$ est équivalent à avoir que x^* est une solution primale, (λ^*, μ^*) une solution duale et à la dualité forte.

Il suffit donc de montrer l'existence d'un seul point $(x^*, (\lambda^*, \mu^*))$ vérifiant les conditions KKT pour assurer la dualité forte. Une fois la dualité forte établie, on peut ensuite appliquer la Remarque 4.3 pour en déduire que pour une solution duale (λ^*, μ^*) (on peut prendre n'importe laquelle), il suffit d'identifier tous les x^* tels que $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, (\lambda^*, \mu^*))$, $x^* \in K$ et $\mu_j^* h_j(x^*) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, l$, pour avoir toutes les solutions au problème primal. C'est cette approche qui permet de se soustraire à la condition de qualification en OCD et qui permet de ne chercher que les points vérifiant les conditions KKT. La stratégie permettant de trouver de tels points est décrite dans la méthodologie M3) ci-dessous.

Remarque 4.4 *Si on utilise un algorithme itératif* $(x_k, (\lambda_k, \mu_k))_k$ *de recherche de point-selle de* $\mathcal{L}$ *alors on peut utiliser le Corollaire 4.2 pour justifier le critère d'arrêt :*

$$f(x_k) - \psi(\lambda_k, \mu_k) \leq \epsilon \tag{4.3}$$

pour un certain ϵ *(par exemple* $\epsilon = 10^{-4}$*) fixé par avance. En effet, on a*

$$0 \leq f(x_k) - \min_{x \in K} f(x) \leq f(x_k) - \psi(\lambda_k, \mu_k)$$

et donc si (4.3) est vérifié alors on est sûr que x_k *approche l'optimum à* ϵ*-près sans avoir à connaître la valeur* $\min_{x \in K} f(x)$ *; c'est une conséquence de la dualité faible. On a aussi*

$$0 \leq \max_{\lambda, \mu \geq 0} \psi(\lambda, \mu) - \psi(\lambda_k, \mu_k) \leq f(x_k) - \psi(\lambda_k, \mu_k)$$

et on peut donc aussi assurer à partir de (4.3) que (λ_k, μ_k) *est aussi proche de l'optimum du problème dual à au plus* ϵ*-près. Bien sûr, on ne pourra trouver d'itération* $(x_k, (\lambda_k, \mu_k))$ *satisfaisant (4.3) uniquement si le duality gap est plus petit que* ϵ*.*

En d'autres termes, on a pour tout $x \in K$ *et* $\lambda, \mu \geq 0$*,* $\psi(\lambda, \mu) \leq \psi^* \leq \varphi^* \leq f(x)$ *où* ψ^* *(resp.* φ^**) est la valeur optimale du problème primal (resp. duale). En particulier, si on trouve un* $x_k \in K$ *et un* (λ_k, μ_k) *avec* $\mu_k \geq 0$ *tel que* $f(x_k) = \psi(\lambda_k, \mu_k)$ *alors nécessairement,* $(x_k, (\lambda_k, \mu_k))$ *est un point-selle de la fonction de Lagrange, le duality gap est nul (càd il y a dualité forte),* x_k *est solution du primal et* (λ_k, μ_k) *est solution du problème dual. Dans ce cas, on dit que* (λ_k, μ_k) *est un certificat de l'optimalité de* x_k *; on parle de* ***certificat dual****.*

5 Méthodologie d'application de KKT et de la dualité Lagrangienne en OCD

De même que pour les problèmes en OD, on peut décrire une méthodologie d'application des Théorèmes de KKT et de dualité Lagrangienne en OCD. Les principales différences ici est qu'on peut utiliser le problème dual pour caractériser les coefficients de Lagrange et qu'on a en OCD des CNS. En particulier, on n'a pas besoin de vérifier l'existence de solution quand la contrainte est qualifiée, vu qu'un point vérifiant les conditions KKT est solution en OCD.

En OCD, on peut soit utiliser la méthodologie associée au Théorème de KKT comme en OD soit on utilise une méthodologie associée à la dualité Lagrangienne. On rappelle les deux méthodes ici en commençant par la méthode associée au théorème de KKT sans dualité Lagrangienne.

M1) Méthodologie pour la résolution d'un problème d'OCD (sans dualité Lagrangienne – application du Théorème 3.3).

0) On vérifie que les fonctions $f, h_1, \ldots, h_l$ sont bien convexes et différentiables.
1) Preuve de l'existence d'une solution (par exemple, par Weiertsrass ou coercivité)
2) On cherche les points de K où la contrainte n'y est pas qualifiée (en général la condition de Slater ou des contraintes affines sont celles qu'on utilisera en OCD). On note par $E_1 \subset K$ cet ensemble.
3a) On cherche les points de K vérifiant les 3 conditions KKT. On note par $E_2 \subset K$ cet ensemble.
4) Par le théorème de KKT, si $\min_{x \in K} f(x)$ a une solution alors nécessairement elle est dans $E_1 \cup E_2$.
5) On évalue f en tous les points de $E_1 \cup E_2$ pour identifier celui ou ceux qui minimisent f.

M2) Méthodologie pour la résolution de problème OCD (avec dualité Lagrangienne et qualification de contrainte – application de la Remarque 4.3).

0) On vérifie que les fonctions $f, h_1, \dots, h_l$ sont bien convexes et différentiables.
2) On vérifie que la contrainte est qualifiée (Slater ou contraintes affines en général)
3b) On résout le problème dual : on trouve une solution (λ^*, μ^*) au problème dual et on cherche les $x^* \in U$ tels que $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, (\lambda^*, \mu^*)) = 0$, $x^* \in K$ et $\mu_j^* h_j(x^*) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, l$ (et ceci pour seulement une solution (λ^*, μ^*) du problème dual, n'importe laquelle). On note par $E_2 \subset K$ cet ensemble.
4) Par le théorème de dualité Lagrangienne (càd le théorème 4.1), l'ensemble des solutions au problème $\min_{x \in K} f(x)$ est donné exactement par E_2.

En OCD, minimiser $x \to \mathcal{L}(x, (\lambda^*, \mu^*))$ sur U est équivalent à chercher les points critiques tels que $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, (\lambda^*, \mu^*)) = 0$. Comme indiqué dans le chapitre sur la dualité Lagrangienne, en OCD, on peut aussi se passer de vérifier l'hypothèse de qualification si on arrive à montrer l'existence d'un point $(x^*, (\lambda^*, \mu^*))$ vérifiant les conditions KKT (voir *Conclusion 1* dans ce chapitre). On peut donc aussi appliquer la méthodologie suivante qui se base sur de la dualité Lagrangienne et ne nécessite pas de vérifier la contrainte de qualification.

M3) Méthodologie pour la résolution de problème OCD (avec dualité Lagrangienne et sans qualification de contrainte – application du théorème 5.2 du chapitre sur la dualité Lagrangienne).

0) On vérifie que les fonctions $f, h_1, \dots, h_l$ sont bien convexes et différentiables.
3c) On résout le problème dual : on trouve une solution (λ^*, μ^*) au problème dual et on cherche les $x^* \in U$ tels que $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, (\lambda^*, \mu^*)) = 0$, $x^* \in K$ et $\mu_j^* h_j(x^*) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, l$ (et ceci pour seulement une solution (λ^*, μ^*) du problème dual, n'importe laquelle). Si un tel x^* existe alors on sait que $(x^*, (\lambda^*, \mu^*))$ est un point-selle de la fonction de Lagrange et donc qu'on a de la dualité forte.
4) Par dualité Lagrangienne (càd le théorème 5.2 ou la *conclusion 1* du chapitre sur la dualité Lagrangienne ou la discussion après la Remarque 4.3), l'ensemble des solutions au problème $\min_{x \in K} f(x)$ est donné exactement par toutes les x^* tels que $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, (\lambda^*, \mu^*)) = 0$, $x^* \in K$ et $\mu_j^* h_j(x^*) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, l$ où (λ^*, μ^*) est une solution au problème dual (n'importe quelle solution duale identifiée en *3c)*).

La méthodologie **M3** est celle qu'on privilégiera tout le temps vu que dans les deux autres on est aussi amené à vérifier les conditions KKT qui elles permettent d'assurer (si elles admettent une solution) que le duality gap est nul et donc qui permet d'appliquer les théorèmes de dualité Lagrangienne sous hypothèse de dualité forte. Néanmoins, dans les cas où il n'y aurait pas de dualité forte mais néanmoins une solution au problème primal alors aucun point ne peut vérifier les conditions KKT (sinon, ce point serait un point-selle du Lagrangien et donc il y aurait dualité forte) dans ce cas on peut appliquer la méthode **M1**, identifier les points où la contrainte n'est pas qualifiée – càd l'ensemble E_1 – et vu que E_2 est vide, il ne restera plus qu'à chercher une solution dans E_1. Ses cas sont cependant assez pathologiques en OCD vue qu'une simple condition comme celle de Slater permet déjà d'assurer la dualité forte (voir la Section 7 sur la dualité Lagrangienne).

Exemple : On considère $s \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et $c \in \mathbb{R}^n$. On veut résoudre le problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2} \|x\|_2^2 - \langle c, x \rangle : \langle s, x \rangle \leq 0 \right). \tag{5.1}$$

0) Montrer que (5.1) est bien un problème de type (OCD) et montrer qu'il admet une unique solution.
1) Déterminer la fonction duale associée à (5.1).
2) Résoudre le problème dual (distinguer plusieurs cas selon le signe de $\langle c, s \rangle$).
3) Utiliser un argument de dualité pour résoudre (5.1).

0) On pose $f : x \to (1/2) \|x\|_2^2 - \langle c, x \rangle$ et $h_1 : x \to \langle s, x \rangle$. On a $\nabla f(x) = x - c$ et $\nabla^2 f(x) = I_n$. Donc f est fortement convexe ; elle est aussi différentiable. Comme h_1 est convexe et différentiable (car affine) et qu'il n'y a pas de contrainte d'inégalité, on est bien dans le cadre de l'OCD. Pour l'unicité, il suffit de voir que la contrainte est fermée dans $\mathbb{R}^n$ pour conclure qu'il y a bien existence et unicité d'une solution au problème (5.1) – on utilise ici le fait que la fonction objectif est fortement convexe.

1) La fonction de Lagrange est donnée par

$$\mathcal{L} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}_+) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, \mu) & \longrightarrow & \frac{1}{2} \|x\|_2^2 - \langle c, x \rangle + \mu \langle s, x \rangle. \end{array} \right.$$

La fonction duale est définie pour tout $\mu \geq 0$ par $\psi(\mu) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x, \mu)$. Pour tout $\mu \geq 0$, $x \to \mathcal{L}(x, \mu)$ est convexe (car $\nabla_x^2 \mathcal{L}(\cdot, \mu) = I_d$) donc $x_\mu^* \in \mathbb{R}^n$ minimise $\mathcal{L}(\cdot, \mu)$ sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\nabla_x \mathcal{L}(x_\mu^*, \mu) = 0$ càd $x_\mu^* - c - \mu s = 0$. Donc $x_\mu^* = c - \mu s$ est l'unique solution de $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x, \mu)$. On a alors

$$\psi : \mu \geq 0 \to \mathcal{L}(x_\mu^*, \mu) = (1/2) \|c - \mu\|_2^2 + \langle \mu s - c, c - \mu s \rangle = -(1/2) \|c - \mu s\|_2^2 .$$

2) Le problème duale est $\max_{\mu \geq 0} \psi(\mu)$ qui s'écrit ici $\max_{\mu \geq 0} [-(1/2) \|c - \mu s\|_2^2]$. On cherche donc une solution au problème $\min_{\mu \geq 0} g(\mu)$ où $g : \mu \in \mathbb{R} \to \|c - \mu s\|_2^2 = \mu^2 \|s\|_2^2 - 2\mu \langle c, s \rangle + \|c\|_2^2$. Comme g est une fonction convexe et différentiable sur $\mathbb{R}$, g atteint son minimum sur $\mathbb{R}$ en μ^* si et seulement si $g'(\mu^*) = 0$ càd $2\mu^* \|s\|_2^2 - 2\langle c, s \rangle = 0$ càd $\mu^* = \langle c, s \rangle / \|s\|_2^2$. On a donc

$$\mu^{**} = \operatorname*{argmin}_{\mu \geq 0} g(\mu) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } \langle c, s \rangle \leq 0 \\ \langle c, s \rangle / \|s\|_2^2 & \text{si } \langle c, s \rangle \geq 0. \end{array} \right. \tag{5.2}$$

On a aussi

$$\max_{\mu \geq 0} \psi(\mu) = \psi(\mu^{**}) = \left\{ \begin{array}{cl} -\|c\|_2^2 / 2 & \text{si } \langle c, s \rangle \leq 0 \\ \frac{-1}{2} \left(\|c\|_2^2 - \frac{\langle c, s \rangle^2}{\|s\|_2^2} \right) & \text{si } \langle c, s \rangle \geq 0. \end{array} \right.$$

3) On peut ici utiliser plusieurs arguments. Soit on montre l'existence d'un point (x^*, μ^{**}) vérifiant KKT. Ainsi ce point sera un point-selle du Lagrangien et donc il y a dualité forte. Alors toutes les solution x^* de (5.1) sont telles que (x^*, μ^{**}) vérifie KKT. Par ailleurs, on sait qu'il n'y a qu'une seule solution au probllème (5.1) ainsi le point x^* tel que (x^*, μ^{**}) vérifie KKT et cette unique solution. Il suffit donc dans cette approche de chercher uniquement les points vérifiant KKT pour une solution μ^{**} du dual.

L'autre approche se base sur le théorème de KKT en OCD augmenté de l'information sur les variables duales obtenue par dualité Lagrangienne (c'est le Théorème 4.1). Dans ce cas, on doit vérifier la qualification (qui est immédiate ici par affinité des contraintes). C'est cette approche qu'on utilise dans la suite même si la condition de qualification n'est pas nécessaire vue qu'on construit dans cette apporche aussi un point (x^*, μ^{**}) vérifiant KKT (qui implique donc la dualité forte comme indiqué dans la première approche).

Comme la contrainte est faite d'une seule contrainte d'inégalité affine, elle est qualifiée. On peut alors appliquer le théorème de dualité Lagrangienne (Théorème 4.1) : il y a équivalence entre

1) x^* est solution du problème (5.1)
2) il existe μ^{**} solution du problème dual tel que x^* minimise $\mathcal{L}(\cdot, \mu^{**})$ sur $\mathbb{R}^n$, $x^* \in K$ et $\mu^{**}\big\langle s, x^*\big\rangle = 0$.

Il n'y a qu'une seule solution au problème dual donnée par μ^{**} dans (5.2). Il suffit donc de chercher les x^* qui minimise $x \in \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(x, \mu^{**})$ tels que $\big\langle x^*, s\big\rangle \leq 0$ (càd $x^* \in K$) et $\mu^{**}\big\langle s, x^*\big\rangle = 0$.

Pour le calcul de la fonction duale, on a identifié les solutions au problème $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x, \mu^{**})$ qui sont données par $x^* := x^*_{\mu^{**}} = c - \mu^{**}s$ càd $x^* = c$ quand $\big\langle c, s\big\rangle \leq 0$ et $x^* = c - \big\langle c, s\big\rangle(s/\left\|s\right\|_2^2)$ quand $\big\langle c, s\big\rangle \geq 0$. Par ailleurs, $\big\langle s, x^*_{\mu^{**}}\big\rangle = \big\langle s, c\big\rangle \leq 0$ quand $\big\langle s, c\big\rangle \leq 0$ et

$$\big\langle s, x^*_{\mu^{**}}\big\rangle = \big\langle s, c - \big\langle c, s\big\rangle(s/\left\|s\right\|_2^2)\big\rangle = 0$$

quand $\big\langle s, c\big\rangle \leq 0$. On a donc bien $x^* \in K$. De plus $\mu^{**}\big\langle s, x^*\big\rangle = 0$ car $\mu^{**} = 0$ quand $\big\langle c, s\big\rangle \leq 0$ et $\big\langle s, x^*\big\rangle = 0$ quand $\big\langle s, c\big\rangle \geq 0$. On a donc bien x^* minimise $\mathcal{L}(\cdot, \mu^{**})$ sur $\mathbb{R}^n$, $x^* \in K$ et $\mu^{**}\big\langle s, x^*\big\rangle = 0$.

Ainsi par le Théorème de dualité Lagrangienne en OCD, on a montré que (5.1) admet une unique solution donnée par $x_{\mu^{**}} = c - \mu^{**}s$ où

$$\mu^{**} = \begin{cases} 0 & \text{si } \big\langle c, s\big\rangle \leq 0 \\ \big\langle c, s\big\rangle / \left\|s\right\|_2^2 & \text{si } \big\langle c, s\big\rangle \geq 0. \end{cases}$$

càd, l'unique solution au problème (5.1) est donnée par

$$x^* = x_{\mu^{**}} = \begin{cases} c & \text{si } \big\langle c, s\big\rangle \leq 0 \\ c - \big\langle c, \frac{s}{\|s\|_2}\big\rangle \left(\frac{s}{\|s\|_2}\right) & \text{si } \big\langle c, s\big\rangle \geq 0 \end{cases}$$

càd $x^* = c$ quand $\big\langle c, s\big\rangle \leq 0$ et x^* est le projeté orthogonal de c sur $\mathrm{vect}(s)^\perp$ quand $\big\langle c, s\big\rangle \geq 0$.