ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Biên soạn: GV.Đỗ Thị Tuyết Hoa

BÀI GIẢNG MÔN PHƯƠNG PHÁP TÍNH

(Dành cho sinh viên khoa Công nghệ thông tin)

(TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ)

ĐÀ NẴNG, NĂM 2007

MỤC LỤC

CHƯƠNG I NHẬP MÔN

1.1. Giới thiệu môn phương pháp tính

Phương pháp tính là bộ môn toán học có nhiệm vụ giải đến kết quả bằng số cho các bài toán, nó cung cấp các phương pháp giải cho những bài toán trong thực tế mà không có lời giải chính xác. Môn học này là cầu nối giữa toán học lý thuyết và các ứng dụng của nó trong thực tế.

Trong thời đại tin học hiện nay thì việc áp dụng các phương pháp tính càng trở nên phổ biến nhằm tăng tốc độ tính toán.

1.2. Nhiệm vụ môn học

- Tìm ra các phương pháp giải cho các bài toán gồm: phương pháp (PP) đúng và phương pháp gần đúng.

  + Phương pháp: chỉ ra kết quả dưới dạng một biểu thức giải tích cụ thể.

  + Phương pháp gần đúng: thường cho kết quả sau một quá trình tính lặp theo một quy luật nào đó, nó được áp dụng trong trường hợp bài toán không có lời giải đúng hoặc nếu có thì quá phức tạp.

- Xác định tính chất nghiệm

- Giải các bài toán về cực trị

- Xấp xỉ hàm: khi khảo sát, tính toán trên một hàm f(x) khá phức tạp, ta có thể thay hàm f(x) bởi hàm g(x) đơn giản hơn sao cho $g(x) \cong f(x)$. Việc lựa chọn g(x) được gọi là phép xấp xỉ hàm

- Đánh giá sai số : khi giải bài toán bằng phương pháp gần đúng thì sai số xuất hiện do sự sai lệch giữa giá trị nhận được với nghiệm thực của bài toán. Vì vậy ta phải đánh giá sai số để từ đó chọn ra được phương pháp tối ưu nhất

1.3. Trình tự giải bài toán trong phương pháp tính

- Khảo sát, phân tích bài toán

- Lựa chọn phương pháp dựa vào các tiêu chí sau:

  + Khối lượng tính toán ít

  + Đơn giản khi xây dựng thuật toán

  + Sai số bé

+ Khả thi

- Xây dựng thuật toán: sử dụng ngôn ngữ giả hoặc sơ đồ khối (càng mịn càng tốt)

- Viết chương trình: sử dụng ngôn ngữ lập trình (C, C++, Pascal, Matlab,…)

- Thực hiện chương trình, thử nghiệm, sửa đổi và hoàn chỉnh.

CHƯƠNG II SAI SỐ

2.1. Khái niệm

Giả sử x là số gần đúng của x* (x* : số đúng),

Khi đó $\Delta = |x - x^*|$ gọi là sai số thực sự của x

Vì không xác định được Δ nên ta xét đến 2 loại sai số sau:

- Sai số tuyệt đối: Giả sử tồn tại Δx dương đủ bé sao cho $|x - x^*| \le \Delta x$

Khi đó Δx gọi là sai số tuyệt đối của x

- Sai số tương đối : $\delta x = \dfrac{\Delta x}{|x|}$

2.2. Các loại sai số

Dựa vào nguyên nhân gây sai số, ta có các loại sau:

- Sai số giả thiết: xuất hiện do việc giả thiết bài toán đạt được một số điều kiện lý tưởng nhằm làm giảm độ phức tạp của bài toán.
- Sai số do số liệu ban đầu: xuất hiện do việc đo đạc và cung cấp giá trị đầu vào không chính xác.
- Sai số phương pháp : xuất hiện do việc giải bài toán bằng phương pháp gần đúng.
- Sai số tính toán : xuất hiện do làm tròn số trong quá trình tính toán, quá trình tính càng nhiều thì sai số tích luỹ càng lớn.

2.3. Sai số tính toán

Giả sử dùng n số gần đúng $x_i \, (i = \overline{1,n})$ để tính đại lượng y,

với $y = f(x_i) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

Trong đó : f là hàm khả vi liên tục theo các đối số x_i

Khi đó sai số của y được xác định theo công thức sau:

Sai số tuyệt đối: $\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$

Sai số tương đối: $\delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \dfrac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$

- Trường hợp f có dạng tổng: $y = f(x_i) = \pm x_1 \pm x_2 \pm \, ... \, \pm x_n$

Khi đó: $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| = 1 \quad \forall i,$ suy ra: $\boxed{\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i}$

- Trường hợp f có dạng tích:

$$y = f(x_i) = \frac{x_1 * x_2 * ... * x_k}{x_{k+1} * ... * x_n}$$

$$\ln f = \ln \frac{x_1 * x_2 * ... * x_k}{x_{k+1} * ... * x_n}$$

$$\ln f = (\ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_k) - (\ln x_{k+1} + ... + \ln x_n)$$

$\left|\frac{\partial \ln f}{\partial x_i}\right| = \frac{1}{|x_i|} \quad \forall i$ suy ra: $\delta_y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta x_i}{|x_i|} = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i$

Vậy $\boxed{\delta_y = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i}$

- Trường hợp f dạng luỹ thừa: $y = f(x) = x^{\alpha} (\alpha > 0)$

$$\ln y = \ln f = \alpha \ln x$$

$\left|\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right| = \frac{\alpha}{|x|}$ suy ra $\boxed{\delta y = \alpha . \frac{\Delta x}{|x|} = \alpha \delta x}$

Vậy $\boxed{\delta y = \alpha . \frac{\Delta x}{|x|} = \alpha \delta x}$

Ví dụ. Cho các số gần đúng: $a \approx 10.25;\ b \approx 0.324;\ \ c \approx 12.13$

Tính sai số của:

$y_1 = \frac{a^3}{b\sqrt{c}}$; $\qquad y_2 = a^3 - b\sqrt{c}$;

Giải $\delta y_1 = \delta(a^3) + \delta(b\sqrt{c}) = 3\delta a + \delta b + \delta\sqrt{c}$

$$= 3\delta a + \delta b + \delta c / 2$$

$$= 3\frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|} + \frac{1}{2}\frac{\Delta c}{|c|}$$

$$\Delta y_2 = \Delta(a^3) + \Delta(b\sqrt{c}) = |a^3|\delta(a^3) + |b\sqrt{c}|\delta(b\sqrt{c})$$

$$= 3|a^3|\delta a + |b\sqrt{c}|(\delta b + \delta c / 2)$$

$$= 3|a^3|\frac{\Delta a}{|a|} + |b\sqrt{c}|(\frac{\Delta b}{|b|} + \frac{1}{2}\frac{\Delta c}{|c|})$$

Bài tập. Cho các số gần đúng: $a \approx 1.125$; $b \approx 0.52$; $c \approx 21.4$

Tính sai số của:

$y_1 = (\sqrt[3]{a} + 1) / 2bc$ $\qquad y_2 = 3a /(b + \sqrt{c})$

$y_3 = 2bc(\sqrt[3]{a} + 1)$ $\qquad y_4 = 3a(b + \sqrt{c})$

$y_5 = 2bc(\sqrt[3]{a} - 1)$ $\qquad y_6 = 3a(b - \sqrt{c})$

CHƯƠNG III TÍNH GIÁ TRỊ HÀM

3.1. Tính giá trị đa thức. Sơ đồ Hoocner

3.1.1. Đặt vấn đề

Cho đa thức bậc n có dạng tổng quát :

$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \# 0)$

Tính giá trị đa thức p(x) khi x = c (c: giá trị cho trước)

3.1.2. Phương pháp

Áp dụng sơ đồ Hoocner nhằm làm giảm đi số phép tính nhân (chỉ thực hiện n phép nhân), phương pháp này được phân tích như sau:

$p(x) = (...((a_0x + a_1)x + a_2)x + ... + a_{n-1})x + a_n$

$p(c) = (...((a_0c + a_1)c + a_2)c + ... + a_{n-1})c + a_n$

Đặt $p_0 = a_0$

$p_1 = a_0c + a_1 = p_0c + a_1$

$p_2 = p_1c + a_2$

....

$p_n = p_{n-1}c + a_n = p(c)$

Sơ đồ Hoocner

a_0	a_1	a_2	....	a_{n-1}	a_n
	p_0*c	p_1*c	....	$p_{n-2}*c$	$p_{n-1}*c$
p_0	p_1	p_2	...	p_{n-1}	$p_n = p(c)$

Ví dụ 1. Cho $p(x) = x^6 - 5x^4 + 2x^3 - x - 1$ Tính p(-2)

Áp dụng sơ đồ Hoocner:

1	0	-5	2	0	-1	-1
	-2	4	2	-8	16	-30
1	-2	-1	4	-8	15	-31

Vậy p(-2) = -31

3.1.3. Thuật toán

Cách 1:

- Nhập vào: n, c, các hệ số a_i ($i = \overline{0,n}$)
- Xử lý: Gán $p = a_0$

  Lặp $i = 1 \rightarrow n$: $p = p * c + a_i$
- Xuất kết quả: p

Cách 2:

- Nhập vào: n, c, các hệ số a_i ($i = \overline{0,n}$)
- Xử lý: Lặp $i = 1 \rightarrow n$: $a_i = a_{i-1} * c + a_i$
- Xuất kết quả: a_n

3.1.4. Chương trình

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
main()
{  int i,n;    float   c, p, a[10];
   clrscr();
   printf(" Nhap bac da thuc: "); scanf("%d", &n);
   printf(" Nhap cac he so \n");
   for(i = 0; i<=n; i++)
   {       printf("a[%d] = ",  i);
           scanf("%f", &a[i]);
   }
   printf(" Nhap gia tri can tinh: "); scanf("%f", &c);
   p = a[0];
   for(i=1; i<=n; i++)  p = p*c + a[i];
   printf(" Gia tri cua da thuc: %.3f", p);
   getch();
}
```

3.2. Sơ đồ Hoocner tổng quát

3.2.1. Đặt vấn đề

Cho đa thức bậc n có dạng tổng quát :

$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \# 0) \qquad (1)$

Xác định các hệ số của p(y + c), trong đó y: biến mới, c: giá trị cho trước

3.2.2. Phương pháp

Giả sử: $p(y+c) = b_0y^n + b_1y^{n-1} + ... + b_{n-1}y + b_n \qquad (2)$

Như vậy ta phải xác định các hệ số $b_i \quad (i = \overline{0,n})$

- Xác định b_n

  Xét y=0, từ (2) => $p(c) = b_n$

- Xác định b_{n-1}

  $p(x) = (x-c)\, p_1(x) + p(c) \qquad (1')$

  Trong đó $p_1(x)$: đa thức bậc n-1

  $p(y + c) = y(b_0y^{n-1} + b_1y^{n-2} + ... + b_{n-2}y + b_{n-1}) + b_n$

  Đặt x=y+c ta có:

  $p(x) = (x - c)(b_0y^{n-1} + b_1y^{n-2} + ... + b_{n-2}y + b_{n-1}) + b_n \qquad (2')$

  Đồng nhất (1') & (2') suy ra:

  $p_1(x) = b_0y^{n-1} + b_1y^{n-2} + ...+ b_{n-2}y + b_{n-1}$

  Xét y = 0, $p_1(c) = b_{n-1}$

  Tương tự ta có: $b_{n-2} = p_2(c), \ldots, b_1 = p_{n-1}(c)$

  Vậy $b_{n-i} = p_i(c) \quad (i = 0\text{-->}n)$, $b_0 = a_0$

  Với $p_i(c)$ là giá trị đa thức bậc n-i tại c

  Sơ đồ Hoocner tổng quát:

a_0	a_1	a_2	....	a_{n-1}	a_n
	p_0*c	p_1*c	....	$p_{n-2}*c$	$p_{n-1}*c$
p_0	p_1	p_2	...	p_{n-1}	$p_n= p(c)=b_n$
	$p_0'*c$	$p_1'*c$	....	$p_{n-2}'*c$	
p_0	p_1'	p_2'	...	$p_{n-1}' = p_1(c)=b_{n-1}$	
…	...				

Ví dụ 2. Cho $p(x) = 2x^6 + 4x^5 - x^2 + x + 2$. Xác định p(y-1)

Áp dụng sơ đồ Hoocner tổng quát :

p(x)	2	4	0	0	-1	1	2
		-2	-2	2	-2	3	-4
$p_1(x)$	2	2	-2	2	-3	4	-2
		-2	0	2	-4	7	
$p_2(x)$	2	0	-2	4	-7	11	
		-2	2	0	-4		
$p_3(x)$	2	-2	0	4	-11		
		-2	4	-4			
$p_4(x)$	2	-4	4	0			
		-2	6				
$p_5(x)$	2	-6	10				
		-2					
$p_6(x)$	2	-8					

Vậy $p(y-1) = 2y^6 - 8y^5 + 10y^4 - 11y^2 + 11y - 2$

3.2.3. Thuật toán

- Nhập n, c, a_i $(i = \overline{0,n})$
- Lặp $k = n \to 1$

  Lặp $i = 1 \to k$: $a_i = a_{i-1} * c + a_i$
- Xuất a_i $(i = \overline{0,n})$

3.3. Khai triển hàm qua chuỗi Taylo

Hàm f(x) liên tục, khả tích tại x_0 nếu ta có thể khai triển được hàm f(x) qua chuỗi Taylor như sau:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!}$$

khi $x_0 = 0$, ta có khai triển Macloranh:

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

Ví dụ 3. Cosx $\approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

BÀI TẬP

1. Cho đa thức $p(x) = 3x^6 + 8x^3 - 2x^2 + x - 5$
    a. Tính p(3), p(2.5)
    b. Tính p(-2), p(-3)
2. Cho đa thức $p(x) = x^5 + 8x^3 - 2x^2 + x - 1$
    a. Xác định đa thức p(y+1), p(y+3)
    b. Xác định đa thức p(y-1), p(y-4)
3. Khai báo (định nghĩa) hàm trong C để tính giá trị đa thức p(x) bậc n tổng quát theo sơ đồ Hoocner
4. Viết chương trình (có sử dụng hàm ở câu 3) nhập vào 2 giá trị a, b.

    Tính p(a) + p(b)
5. Viết chương trình nhập vào 2 đa thức $p_n(x)$ bậc n, $p_m(x)$ bậc m và hai giá trị c, d. Sử dụng hàm ở câu 3 tính:
    a. $p_n(c) + p_m(c)$
    b. $p_n(c) + p_m(d)$
6. Cho đa thức p(x) bậc n. Viết chương trình xác định các hệ số của đa thức p(y+c) theo sơ đồ Hoocner tổng quát.
7. Khai báo hàm trong C để tính giá trị các hàm e^x, sinx, cosx theo khai triển Macloranh.

CHƯƠNG IV   GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH

4.1. Giới thiệu

Để tìm nghiệm gần đúng của phương trình f(x) = 0 ta tiến hành qua 2 bước:

- Tách nghiệm: xét tính chất nghiệm của phương trình, phương trình có nghiệm hay không, có bao nhiêu nghiệm, các khoảng chứa nghiệm nếu có. Đối với bước này, ta có thể dùng phương pháp đồ thị, kết hợp với các định lý mà toán học hỗ trợ.
- Chính xác hoá nghiệm: thu hẹp dần khoảng chứa nghiệm để hội tụ được đến giá trị nghiệm gần đúng với độ chính xác cho phép. Trong bước này ta có thể áp dụng một trong các phương pháp:

  - Phương pháp chia đôi
  - Phương pháp lặp
  - Phương pháp tiếp tuyến
  - Phương pháp dây cung

4.2. Tách nghiệm

*** Phương pháp đồ thị:**

Trường hợp hàm f(x) đơn giản

- Vẽ đồ thị f(x)

- Nghiệm phương trình là hoành độ giao điểm của f(x) với trục x, từ đó suy ra số nghiệm, khoảng nghiệm.

Trường hợp f(x) phức tạp

- Biến đổi tương đương f(x)=0 <=> g(x) = h(x)

- Vẽ đồ thị của g(x), h(x)

- Hoành độ giao điểm của g(x) và h(x) là nghiệm phương trình, từ đó suy ra số nghiệm, khoảng nghiệm.

* ***Định lý 1:***

Giả sử f(x) liên tục và trái dấu trên (a,b). Khi đó trên (a,b) tồn tại một số lẻ nghiệm thực của phương trình f(x)=0. Nghiệm là duy nhất nếu f’(x) tồn tại và không đổi dấu trên (a,b).

Ví dụ 1. Tách nghiệm cho phương trình: $x^3 - x + 5 = 0$

<u>Giải:</u> $f(x) = x^3 - x + 5$

$f'(x) = 3x^2 - 1$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1/\sqrt{3}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$y_{CĐ}>0$	↘	$y_{CT}>0$	↗	$+\infty$

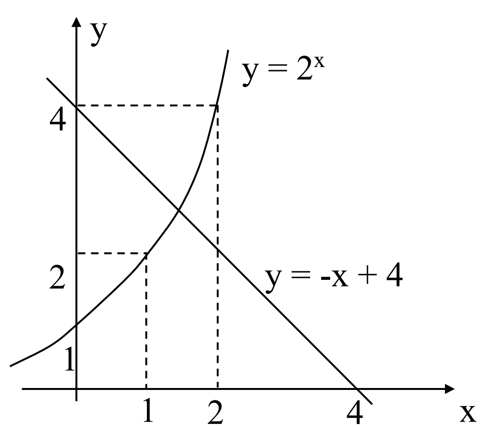
Từ bảng biến thiên, phương trình có 1 nghiệm $x < -1/\sqrt{3}$

$f(-1) * f(-2) < 0$, vậy phương trình trên có 1 nghiệm $x \in (-2, -1)$

Ví dụ 2. Tách nghiệm cho phương trình sau: $2^x + x - 4 = 0$

<u>Giải:</u> $2^x + x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2^x = -x + 4$

Áp dụng phương pháp đồ thị:



Từ đồ thị suy ra: Phương trình có 1 nghiệm $x \in (1, 2)$

*** *Định lý 2:*** (Sai số)

Giả sử α là nghiệm đúng và x là nghiệm gần đúng của phương trình $f(x)=0$, cùng nằm trong khoảng nghiệm [a, b] và $f'(x) \geq m \geq 0$ khi $a \leq x \leq b$.

Khi đó $|x - \alpha| \leq \dfrac{|f(x)|}{m}$

Ví dụ 3. Cho nghiệm gần đúng của phương trình $x^4 - x - 1 = 0$ là 1.22. Hãy ước lượng sai số tuyệt đối là bao nhiêu?

Giải:

$f(x) = f(1.22) = 1.22^4 - 1.22 - 1 = -0,0047 < 0$

$f(1.23) = 0.588 > 0$

→ nghiệm phương trình $x \in (1.22, 1.23)$

$f'(x) = 4x^3 - 1 \geq 4*1.22^3 - 1 = 6.624 = m \quad \forall x \in (1.22, 1.23)$

Theo định lý 2 : $\Delta x = 0.0047/6.624 = 0.0008$ (vç $|x - \alpha| \leq 0.008$)

3.3. Tách nghiệm cho phương trình đại số

Xét phương trình đại số: $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ (1)

*** *Định lý 3:***

Cho phương trình (1) có $m_1 = \max\{|a_i|\} \quad i = \overline{1,n}$

$m_2 = \max\{|a_i|\} \quad i = \overline{0,n-1}$

Khi đó mọi nghiệm x của phương trình đều thoả mãn:

$$x_1 = \frac{|a_n|}{m_2 + |a_n|} \leq |x| \leq 1 + \frac{m_1}{|a_0|} = x_2$$

*** *Định lý 4:***

Cho phương trình (1) có $a_0 > 0$, a_m là hệ số **âm** đầu tiên. Khi đó mọi nghiệm **dương** của phương trình đều $\leq N = 1 + \sqrt[m]{a/a_0}$, với $a = \max\{|a_i|\}$ sao cho $a_i < 0$, $i = \overline{0,n}$.

Ví dụ 4. Cho phương trình: $5x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 6x + 9 = 0$

Tìm cận trên nghiệm dương của phương trình trên

Giải: Ta có $a_2 = -3$ là hệ số âm đầu tiên, nên $m = 2$

$a = \max(3, 6) = 6$

Vậy cận trên của nghiệm dương: $N = 1 + \sqrt{6/5}$

*** *Định lý 5:***

Cho phương trình (1), xét các trường hợp:

$\varphi_1(x) = x^n f(1/x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$

$\varphi_2(x) = f(-x) = (-1)^n (a_0x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^na_n)$

$\varphi_3(x) = x^n f(-1/x) = (-1)^n (a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} - \ldots + (-1)^na_0)$

Giả sử N_0, N_1, N_2, N_3 là cận trên các nghiệm dương của các đa thức f(x), $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$. Khi đó mọi nghiệm dương của phương trình (1) đều nằm trong khoảng **$[1/N_1, N_0]$** và mọi nghiệm âm đều nằm trong khoảng **$[-N_2, -1/N_3]$**

Ví dụ 5. Xét phương trình

$3x^2 + 2x - 5 = 0 \quad \rightarrow N_0 = 1 + \sqrt{5/3}$ (định lý 4)

$\varphi_1(x) = 3 + 2x - 5x^2 \rightarrow N_1$ không tồn tại ($a_0 < 0$)

$\varphi_2(x) = 3x^2 - 2x - 5 \rightarrow N_2 = 1 + 5/3$ (định lý 4)

$\varphi_3(x) = 3 - 2x - 5x^2 \rightarrow N_3$ không tồn tại ($a_0 < 0$)

Vậy: mọi nghiệm dương $x < 1 + \sqrt{5/3}$

mọi nghiệm âm $x > -(1 + 5/3) = -8/3$

4.4. Chính xác hoá nghiệm

4.4.1. Phương pháp chia đôi

a. Ý tưởng

Cho phương trình f(x) = 0, f(x) liên tục và trái dấu tại 2 đầu [a,b]. Giả sử f(a) < 0, f(b) > 0 (nếu ngược lại thì xét –f(x)=0). Theo định lý 1, trên [a,b] phương trình có ít nhất 1 nghiệm μ.

Cách tìm nghiệm μ:

Đặt $[a_0, b_0] = [a, b]$ và lập các khoảng lồng nhau $[a_i, b_i]$ (i=1, 2, 3, …)

$$[a_i, b_i] = \begin{cases} [a_{i-1}, (a_{i-1}+b_{i-1})/2] & \text{nếu } f((a_{i-1}+b_{i-1})/2) > 0 \\ [(a_{i-1}+b_{i-1})/2, b_i] & \text{nếu } f((a_{i-1}+b_{i-1})/2) < 0 \end{cases}$$

Như vậy:

- Hoặc nhận được nghiệm đúng ở một bước nào đó:

$\mu = (a_{i-1}+b_{i-1})/2$ nếu $f((a_{i-1}+b_{i-1})/2) = 0$

- Hoặc nhận được 2 dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$, trong đó:

$\{a_n\}$: là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên

$\{b_n\}$: là dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới nên $\exists \lim\limits_{n \to \alpha} a_n = \lim b_n = \mu$ là nghiệm phương trình

Ví dụ 6. Tìm nghiệm phương trình: $2^x + x - 4 = 0$ bằng ppháp chia đôi

Giải:

- Tách nghiệm: phương trình có 1 nghiệm $x \in (1,2)$
- Chính xác hoá nghiệm: áp dụng phương pháp chia đôi (f(1)=-1< 0)

Bảng kết quả:

a_n	b_n	$f(\frac{a_n + b_n}{2})$
1	2	+
	1.5	-
1.25		-
1.375		+
	1.438	+
	1.406	+
	1.391	-
1.383		+
	1.387	-
1.385		-
1.386	1.387	

$\lim\limits_{n \to 10} a_n = \lim\limits_{n \to 10} b_n = 1.386$

Kết luận: Nghiệm của phương trình: $x \approx 1.386$

b. Thuật toán

- Khai báo hàm f(x) (hàm đa thức, hàm siêu việt)
- Nhập a, b sao cho f(a)<0 và f(b)>0
- Lặp

  c = (a+b)/2

  nếu f(c) > 0 → b = c

  ngược lại a = c

  trong khi ($|f(c)| > \varepsilon$) /* $|a - b| > \varepsilon$ và f(c) != 0 */
- Xuất nghiệm: c

4.4.2. Phương pháp lặp

a. Ý tưởng

Biến đổi tương đương: f(x) = 0 <=> x = g(x)

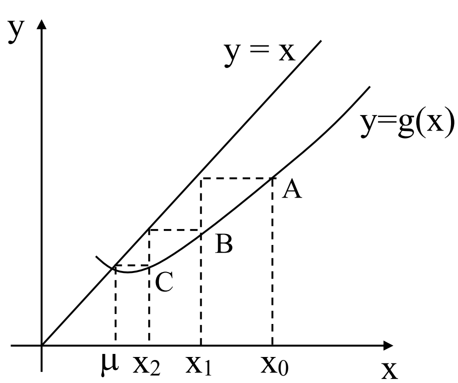
Chọn giá trị ban đầu x_0 ∈khoảng nghiệm (a, b),

tính $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, … , $x_k = g(x_{k-1})$

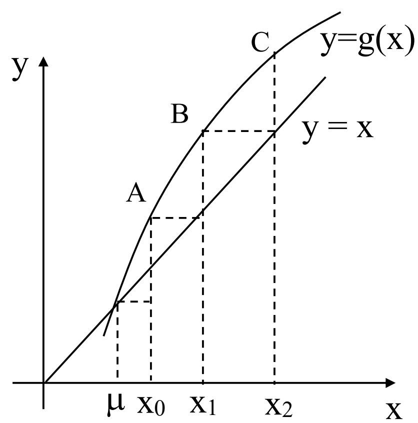
Như vậy ta nhận được dãy $\{x_n\}$, nếu dãy này hội tụ thì tồn tại giới hạn
$\lim_{n\to\infty} x_n = \eta$ (là nghiệm gần đúng của phương trình)

b. Ý nghĩa hình học

Hoành độ giao điểm của 2 đồ thị y=x và y=g(x) là nghiệm phương trình x=g(x) (cũng là nghiệm phương trình f(x)=0)



Hình a



Hình b

Trường hợp hình a: hội tụ đến nghiệm μ

Trường hợp hình b: không hội tụ đến nghiệm μ (phân ly nghiệm)

Sau đây ta xét định lý về điều kiện hôi tụ đến nghiệm sau một quá trình lặp

Định lý (điều kiện đủ)

Giả sử hàm g(x) xác định, khả vi trên khoảng nghiệm [a,b] và mọi giá trị g(x) đều thuộc [a,b]. Khi đó nếu ∃ số q sao cho $|\mathbf{g'(x)}| \leq \mathbf{q<1}$ ∀x (a,b) thì:

+ Quá trình lặp hội tụ đến nghiệm không phụ thuộc vào $x_0 \in [a,b]$

+ Giới hạn $\lim_{n\to\infty} x_n = \eta$ là nghiệm duy nhất trên (a,b)

Lưu ý:

- Định lý đúng nếu hàm g(x) xác định và khả vi với $\forall x \in R$ mà điều kiện $g^{'}(x)$ thoả mãn.

- Trong trường hợp tổng quát, để nhận được xấp xỉ x_n với độ chính xác ε cho trước, ta tiến hành phép lặp cho đến khi 2 xấp xỉ liên tiếp thoả mãn:

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon$$

Ví dụ 7. Tìm nghiệm: $x^3 - x - 1 = 0$ bằng phương pháp lặp

Giải: - Tách nghiệm: phương trình có một nghiệm $\in (1,2)$

- Chính xác hoá nghiệm:

$$x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = x^3 - 1; \quad x = \frac{x+1}{x^2}; \quad x = \sqrt[3]{x+1}$$

Chọn $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$

$$g'(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{(x+1)^2}} < 1 \quad \forall x \in (1,2)$$

Áp dụng phương pháp lặp (thỏa mãn định lý điều kiện đủ)

Chọn $x_0 = 1$ ta có bảng giá trị sau:

x	$g(x) = \sqrt[3]{x+1}$
1	1.260
1.260	1.312
1.312	1.322
1.322	1.324
1.324	1.325
1.325	1.325

Nghiệm phương trình $x \approx 1.325$ (vì $\left|x_4 - x_5\right| < \varepsilon = 10^{-3}$)

c. Thuật toán

- Khai báo hàm g(x)
- Nhập x
- Lặp: $y = x$

  $x = g(y)$

  trong khi $\left|x - y\right| > \varepsilon$
- Xuất nghiệm: x (hoặc y)

4.4.3. Phương pháp tiếp tuyến

a. Ý tưởng

Chọn $x_0 \in$ khoảng nghiệm (a, b)

Tiếp tuyến tại A_0 (x_0, $f(x_0)$) cắt trục x tại điểm có hoành độ x_1,

Tiếp tuyến tại A_1 (x_1, $f(x_1)$) cắt trục x tại điểm có hoành độ x_2, …,

Tiếp tuyến tại A_k (x_k, $f(x_k)$) cắt trục x tại điểm có hoành độ x_{k+1}, …

Cứ tiếp tục quá trình trên ta có thể tiến dần đến nghiệm μ của phương trình.

* Xây dựng công thức lặp:

Phương trình tiếp tuyến tại A_k (x_k, $f(x_k)$)

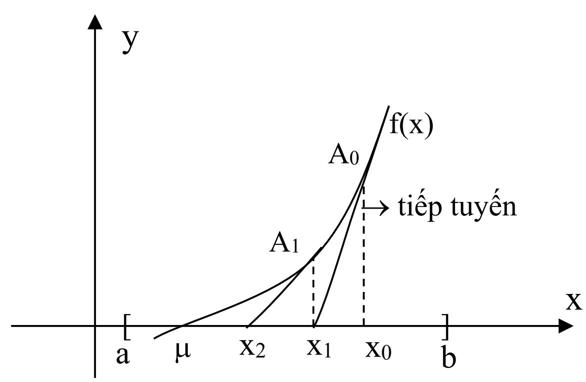
$$y - f(x_k) = f'(x_k)*(x - x_k)$$

Tiếp tuyến cắt trục x tại điểm có toạ độ (x_{k+1}, 0)

Do vậy: $0 - f(x_k) = f'(x_k)*(x_{k+1} - x_k)$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

b. Ý nghĩa hình học



Định lý (điều kiện hội tụ theo Furiê_điều kiện đủ)

Giả sử [a,b] là khoảng nghiệm của phương trình f(x)=0. Đạo hàm f'(x), f''(x) liên tục, không đổi dấu, không triệt tiêu trên [a,b]. Khi đó ta chọn xấp xỉ nghiệm ban đầu $x_0 \in$[a,b] sao cho **$f(x_0)*f''(x_0) > 0$** thì quá trình lặp sẽ hội tụ **nhanh** đến nghiệm.

Ví dụ 8. Giải phương trình: $x^3 + x - 5 = 0$ bằng phương pháp tiếp tuyến

<u>Giải:</u> - Tách nghiệm:

$f(x) = x^3 + x - 5$

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \ \forall x$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Phương trình trên có 1 nghiệm duy nhất

$f(1)* f(2) = (-3)*5 < 0$

Vậy phương trình có 1 nghiệm duy nhất $x \in (1, 2)$

- Chính xác hoá nghiệm:

$f''(x) = 6x > 0 \ \forall x \in (1, 2)$

$f'(x) > 0 \ \forall x$

Áp dụng phương pháp tiếp tuyến (thoả mãn điều kiện hội tụ Furiê).
Chọn với $x_0 = 2$ (vì $f(2)*f''(2) > 0$) ta có bảng kết quả sau:

x	f(x)/f'(x)
2	0.385
1.615	0.094
1.521	0.005
1.516	0.000
1.516	

Vậy nghiệm $x \approx 1.516$

c. Thuật toán

- Khai báo hàm f(x), fdh(x)
- Nhập x
- Lặp y= x

  x = y – f(y)/fdh(y)

  trong khi $|x - y| > \varepsilon$
- Xuất nghiệm: x (hoặc y)

4.4.4. Phương pháp dây cung

a. Ý tưởng

Giả sử [a, b] là khoảng nghiệm phương trình f(x)=0. Gọi A, B là 2 điểm trên đồ thị f(x) có hoành độ tương ứng là a, b. Phương trình đường thẳng qua 2 điểm A(a, f(a)), B(b, f(b)) có dạng:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}$$

Dây cung AB cắt trục x tại điểm có toạ độ $(x_1, 0)$

Do đó: $$\frac{0-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x_1-a}{b-a}$$

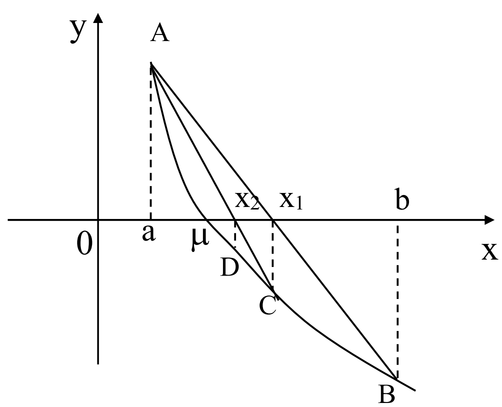
$$x_1=a-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}$$

Nếu $f(a)*f(x_1)<0$, thay $b=x_1$ ta có khoảng nghiệm mới là (a, x_1)

Nếu $f(b)*f(x_1)<0$, thay $a=x_1$ ta có khoảng nghiệm mới là (x_1, b)

Tiếp tục áp dụng phương pháp dây cung vào khoảng nghiệm mới ta được giá trị x_2. Lại tiếp tục như thế ta nhận được các giá trị x_3, x_4, … càng tiến gần với giá trị nghiệm phương trình.

b. Ý nghĩa hình học



Ví dụ 9. Giải phương trình $2^x + x - 4 = 0$ bằng phương pháp dây cung

<u>Giải:</u>

- Tách nghiệm: Phương trình có 1 nghiệm $x \in (1, 2)$
- Chính xác hoá nghiệm:

$f(1) = -1 < 0,\quad f(2) = 2 > 0$

$$x=1-\frac{(2-1)(-1)}{2-(-1)}=1.333$$

$f(x) = f(1.333) = -0.147<0$

Bảng kết quả:

a	b	x	f(x)
1	2	1.333	-0.147
1.333		1.379	-0.020
1.379		1.385	-0.003
1.385		1.386	-0.000
1.386		1.386	

Vậy nghiệm phương trình: $x \approx 1.386$

c. Thuật toán

- Khai báo hàm f(x)
- Nhập a, b
- Tính $x = a – (b-a)f(a) / (f(b)-f(a))$
- Nếu $f(x)*f(a) <0$

    Lặp $b = x$

    $x = a – (b-a)f(a) / (f(b)-f(a))$

    trong khi $|x - b| > \varepsilon$

  Ngược lại

    Lặp $a = x$

    $x = a – (b-a)f(a) / (f(b)-f(a))$

    trong khi $|x - a| > \varepsilon$

- Xuất nghiệm: x

BÀI TẬP

1. Tìm nghiệm gần đúng các phương trình sau bằng phương pháp chia đôi và phương pháp dây cung với sai số không quá 10^{-3}:

    a. $x^3 – x + 5 = 0$ b. $x^3 – x – 1 = 0$

    c. $\sin x – x + 1/4 = 0$ d. $x^4 – 4x – 1= 0$

    e. $x^3 + x – 5 = 0$ f. $e^x + x – 2 = 0$

2. Tìm nghiệm gần đúng các phương trình:

    a. $e^x – 10x + 7 = 0$ b. $x^3 + x – 5 = 0$

    c. $2^x + x - 4 = 0$ d. $e^x + x + 1 = 0$

    bằng phương pháp tiếp tuyến với sai số không quá 10^{-3}

3. Tìm nghiệm gần đúng các phương trình:

    a. $x^3 + 5x - 2 = 0$ b. $2^x + x – 5 = 0$

    c. $\cos 2x + x – 5 = 0$ d. $\ln x + x + 1 = 0$

4. Dùng phương pháp lặp tìm nghiệm dương cho phương trình

    $x^3 – x – 1000 = 0$ với sai số không quá 10^{-3}

5. Tìm nghiệm dương cho phương trình: $x^3 + x^2 – 2x – 5 = 0$
6. Tìm nghiệm âm cho phương trình: $x^4 - 3x^2 + 75x – 1000 = 0$
7. Viết chương trình tìm nghiệm cho phương trình đại số có dạng tổng quát:

    $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$

    a. Áp dụng phương pháp chia đôi
    b. Áp dụng phương pháp dây cung

8. Viết chương trình tìm nghiệm gần đúng cho phương trình siêu việt, ví dụ: $e^x – 10x + 7 = 0$

    a. Áp dụng phương pháp chia đôi
    b. Áp dụng phương pháp tiếp tuyến
    c. Áp dụng phương pháp dây cung

9. Viết chương trình tìm nghiệm gần đúng cho phương trình: $x^3 - x - 1= 0$ bằng phương pháp lặp
10. Viết chương trình xác định giá trị x_1, x_2 theo định lý 3.
11. Viết chương trình tìm cận trên của nghiệm dương phương trình đại số theo định lý 4.

CHƯƠNG V GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

5.1. Giới thiệu

Cho hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2n+1} \\ \ldots\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{nn+1} \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có thể được cho bởi ma trận:

$$A_{nn+1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ \ldots. & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{pmatrix}$$

Vấn đề: Tìm vectơ nghiệm $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

**** Phương pháp:***

- Phương pháp đúng (krame, gauss, khai căn): Đặc điểm của các phương pháp này là sau một số hữu hạn các bước tính, ta nhận được nghiệm đúng nếu trong quá trình tính toán không làm tròn số.

- Phương pháp gần đúng (gauss siedel, giảm dư): Thông thường ta cho ẩn số một giá trị ban đầu, từ giá trị này tính giá trị nghiệm gần đúng tốt hơn theo một qui tắc nào đó. Quá trình này được lặp lại nhiều lần và với một số điều kiện nhất định, ta nhận được nghiệm gần đúng.

5.2. Phương pháp Krame

- Khai báo hàm **Dt** tính định thức ma trận vuông cấp n

- Nhập n, a_{ij} ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, n+1}$)

- d = Dt (A)

- Xét + d = 0

  + d # 0 {d_i = Dt(A_i) ; $x_i = d_i/d$ }

5.3. Phương pháp Gauss

5.3.1. Nội dung phương pháp

- Biến đổi Ma trận A về ma trận tam giác trên

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ \dots\dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & a'_{2n+1} \\ \dots\dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} & a'_{nn+1} \end{pmatrix}$$

Cách biến đổi A → A': Thực hiện n-1 lần biến đổi

Lần biến đổi thứ i (làm cho $a_{ji} = 0$; $j = i + 1 \rightarrow n$) bằng cách:

dòng j = dòng j + dòng i * m ($m = -a_{ji} / a_{ii}$)

- Tìm nghiệm theo quá trình ngược: $x_n \rightarrow x_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow x_1$

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{array}{r} \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & 8 \\ -2 & 0 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 5/3 \\ 4/3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & -7 & -8 \\ 0 & \mathbf{5} & 1 & 7 & 13 \\ 0 & 4 & 3 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \frac{-17}{13} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 13/3 & -14/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 17/3 & -7/3 & 10/3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 13/3 & -14/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 49/13 & 49/13 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_4 = 1$; $x_3 = 1$; $x_2 = 1$; $x_1 = 1$

Vậy nghiệm hệ phương trình $\vec{x} = (1, 1, 1, 1)$

5.3.2. Thuật toán

- Nhập n, a_{ij} $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n+1})$ (nhập trực tiếp hoặc từ file)

- Biến đổi A $\to$ A' (ma trận tam giác trên)

Lặp i = 1 $\to$ n -1

+ Nếu $a_{ii} = 0 \to$
  - Tìm j sao cho a_{ji} # 0 , $j = i+1 \to n$
  - Nếu j<=n thì hoán đổi dòng i và dòng j cho nhau ngược lại thì kết thúc (vì dữ liệu ko hợp lệ)

+ Lặp $j = i + 1 \to n$
  - $m = -a_{ji} / a_{ii}$
  - Lặp $k = i \to n + 1$ $\quad a_{jk} = a_{jk} + a_{ik} * m$

- Tìm nghiệm

$$x_i = \left(a_{in+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j\right) / a_{ii} \quad (i = n \to 1)$$

Lặp $i = n \to 1$
- $s = 0$
- lặp $j = i + 1 \to n$ $\quad s = s + a_{ij} * x_j$
- $x_i = (a_{in+1} - s)/a_{ii}$

- Xuất nghiệm: x_i $(i=1 \to n)$

5.4. Phương pháp lặp Gauss - Siedel (tự sửa sai)

5.4.1. Nội dung phương pháp

Biến đổi hệ phương trình về dạng: $\vec{x} = B\vec{x} + \vec{g}$

$\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$; $\quad \vec{g} = (g_1, g_2, ..., g_n)$; $\quad B = \{b_{ij}\}_n$

Cách biến đổi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = a_{1n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = a_{2n+1} \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = a_{nn+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = (a_{1n+1} - \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j) / a_{11} (j \neq 1) \\ .... \\ x_n = (a_{nn+1} - \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j) / a_{nn} (j \neq n) \end{cases}$$

Tổng quát:

$$x_i = (a_{in+1} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)/a_{ii}\,(j \neq i) \quad (*) \quad (i=1 \rightarrow n)$$

Cho hệ phương trình xấp xỉ nghiệm ban đầu: $\vec{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$

Thay $\overrightarrow{x_0}$ vào (*) để tính: $\vec{x}_1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1)$

$$x_i^1 = (a_{in+1} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0)/a_{ii}\,(j \neq i)$$

Tương tự, tính $\vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots$

Tổng quát: $x_i^{k+1} = (a_{in+1} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^k)/a_{ii}\,(j \neq i)$

Quá trình lặp sẽ dừng khi thoả mãn **tiêu chuẩn hội tụ** tuyệt đối:

$$\left|x_i^{k+1} - x_i^k\right| < \varepsilon \quad (\forall i = \overline{1,n})$$

Khi đó $\vec{x}_k = (x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$ là nghiệm gần đúng của hệ phương trình

Điều kiện hội tụ:

Hệ phương trình có ma trận lặp B thoả mãn:

$$r_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} \left|b_{ij}\right| < 1$$

hoặc $r_2 = \max_j \sum_{i=1}^{n} \left|b_{ij}\right| < 1$

hoặc $r_3 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1} b_{ij}^2 < 1$

thì quá trình sẽ hội tụ đến nghiệm.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình bằng phương pháp `Gauss - Siedel`

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 10 & 2 & 12 \\ 1 & 1 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -0.2x_2 - 0.1x_3 + 1 \\ x_2 = -0.1x_1 - 0.2x_3 + 1.2 \\ x_3 = -0.1x_1 - 0.1x_2 + 0.8 \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.2 \\ -0.1 & -0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{g} = (1, 1.2,\ 0.8)$

Do $r_1 = \max_i \sum_{j=1}^{3} |b_{ij}| = 0.3 < 1$ thoả mãn điều kiện hội tụ

Áp dụng Phương pháp Gauss - Siedel:

Chọn $\overrightarrow{x}_0 = (0, 0, 0)$ thay vào có $\overrightarrow{x}_1 = (1,\ 1.2,\ 0.8)$

Tương tự tính $\overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{x}_3 \ldots$

Bảng kết quả:

x_1	x_2	x_3
1	1.2	0.8
0.68	0.94	0.58
0.754	1.016	0.638
0.733	0.997	0.623
0.738	1.002	0.627
0.737	1.001	0.626
0.737	1.001	0.626

Nghiệm hệ phương trình: $\overrightarrow{x} = (0.737,\ 1.001,\ 0.626)$

Vì $|x_i^7 - x_i^6| < 10^{-3} \quad \forall i = \overline{1,3}$

5.4.2. Thuật toán

- Nhập n, a_{ij} ($i=1 \to n$, $j=1 \to n+1$)
- Nhập xấp xỉ nghiệm ban đầu: x_i ($i = 1 \to n$)
- Lặp

```
t = 0 /* cho thoat */
lap i = 1 → n
  { s = 0
    lap j = 1 → n do
        if (j ≠ i)  s = s + aij * xj
    yi = (ain+1 - s ) / aii
    if ( | yi – xi | > = ε )    t =1 /* cho lap */
```

$x_i = y_i$ }

trong khi (t)

- Xuất nghiệm: x_i hoặc y_i ($i = 1 \rightarrow n$)

5.5. Phương pháp giảm dư

5.5.1. Nội dung phương pháp

Biến đổi hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} a_{1n+1} - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n = 0 \\ a_{2n+1} - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - ... - a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{nn+1} - a_{n1}x_2 - a_{n2}x_2 - ... - a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Chia dòng i cho a_{ii} # 0

$$\begin{cases} b_{1n+1} - b_{12}x_2 - b_{13}x_2 - ... - x_1 = 0 \\ b_{2n+1} - b_{21}x_1 - b_{23}x_3 - ... - x_2 = 0 \\ .... \\ b_{nn+1} - b_{n1}x_1 - b_{n2}x_2 - ... - x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Cho vectơ nghiệm ban đầu $\vec{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$

Vì $\vec{x}_0$ không phải là nghiệm nên:

$$\begin{cases} b_{1n+1} - b_{12}x_2^0 - b_{13}x_3^0 - ... - x_1^0 = R_1^0 \\ b_{2n+1} - b_{21}x_1^0 - b_{23}x_3^0 - ... - x_2^0 = R_2^0 \\ .... \\ b_{nn+1} - b_{n1}x_1^0 - b_{n2}x_2^0 - ... - x_n^0 = R_n^0 \end{cases}$$

$R_1^0, R_2^0, ..., R_n^0$ là các số dư do sự sai khác giữa $\vec{x}_0$ với nghiệm thực của hệ phương trình

Tìm $R_s^0 = \max\{|R_1^0|, |R_2^0|, ... |R_n^0|\}$ và làm triệt tiêu phần tử đó bằng cách cho x_s một số gia $\delta x_s = R_s^0$, nghĩa là $x_s^1 = x_s^0 + R_s^0$

Tính lại các số dư :

$R_s^1 = 0$

$R_i^1 = R_i^0 - b_{is} * \delta x_s = R_i^0 - b_{is} * R_s^0$ ($i = 1 \rightarrow n$)

Cứ tiếp tục quá trình lặp trên đến khi thỏa mãn: $|R_i^k| < \varepsilon$ ($\forall i = 1 \rightarrow n$)

Khi đó: $\vec{x}_k = (x_1^k, x_2^k, ... x_n^k)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{pmatrix} 10 & -2 & -2 & 6 \\ -2 & 10 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -10 & -8 \end{pmatrix}$$

<u>Giải:</u> Biến đổi về hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} 0.6 + 0.2\,x_2 + 0.2x_3 - x_1 = 0 \\ 0.7 + 0.2\,x_1 + 0.1x_3 - x_2 = 0 \\ 0.8 + 0.1\,x_1 + 0.1x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Cho $\vec{x}_0 = (0,0,0) \rightarrow \vec{R}_0 = (0.6,\ 0.7,\ 0.8)$

$$R_3^0 = \max\{|R_i^0|\} = 0.8 \quad (\forall i = \overline{1,3})$$

$$x_3^1 = x_3^0 + R_3^0 = 0.8$$

$$R_2^1 = R_2^0 - b_{23} * R_3^0 = 0.7 - (-0.1) * 0.8 = 0.78$$

$$R_1^1 = R_1^0 - b_{13} * R_3^0 = 0.6 - (-0.2) * 0.8 = 0.76$$

$$\vec{R}_1 = (0.76,\ 0.78,\ 0)$$

Tương tự ta có bảng kết quả:

x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	R_3
0	0	0	0.6	0.7	0.8
		0.8	0.76	0.78	0
	0.78		0.92	0	0.08
0.92			0	0.18	0.17
	0.96		0.04	0	0.19
		0.99	0.07	0.02	0
0.99			0	0.03	0.01
	0.99		0.01	0	0.01
		1	0.01	0	0
1			0	0.01	0
	1		0	0	0

Vậy nghiệm hệ phương trình $\vec{x} = (1, 1, 1)$

5.5.2. Thuật toán

- Nhập n, a_{ij}, x_i

- Biến đổi hệ phương trình (1) về dạng (2)

```
for (i=1, i<= n, i++)
  {  t = a[i,i]
     for (j=1, j<=n+1; j ++)    a[i,j] = a [i,j]/t
  }
```

- Tính r[i] ban đầu (i = 1→n)

```
for  i = 1 → n  do
   { r[i] =a [i, n+1]
     for  j = 1 → n  do r[i] = r [i] - a[i,j] * x [j]  }
```

- Lap

```
t = 0  /* cho thoat*/
/* Tìm rs = max {|r[i]|} (i = 1→n)  & tính lại xs*/
   max = |r[1]|;  k =1
   for  i = 2 → n  do
      if   (max <  |r[i]| )  { max = |r[i];   k= i }
   x [k] = x [k] + r[k]
/* Tính lại R[i] kiểm tra khả năng lặp tiếp theo */
   d = r[k]
   for  i =1 → n
      {  r[i] = r[i] - a[i, k] * d
         if  (|r[i]|  ≥ ε)  thi  t =1   /* cho lap*/
      }
```

trong khi   (t)

- Xuất nghiệm: x[i] (i = 1→n)

Lưu ý:

- Phương pháp chỉ thực hiện được khi a_{ii} # 0, nếu không phảI đổi dòng

- Quá trình hội tụ không phụ thuộc vào x_0 mà chỉ phụ thuộc vào bản chất của hệ phương trình.

- Mọi hệ phương trình có giá trị riêng $\lambda \geq 1$ đều hội tụ đến nghiệm một cách nhanh chóng.

- Nếu các phần tử a_{ii} càng lớn hơn các phần tử trên dòng bao nhiêu thì quá trình hội tụ càng nhanh.

BÀI TẬP

1. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss

   a.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   b.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   c.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 7 & 15 \\ 2 & -5 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

   d.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss Siedel

   a.

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -15 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 20 & 7 \end{pmatrix}$$

   b.

$$\begin{pmatrix} 15 & 2 & 8 & 2 \\ 3 & -10 & -2 & 9 \\ 5 & 3 & 20 & 12 \end{pmatrix}$$

3. Viết chương trình giải hệ đại số tuyến tính bằng phương pháp Gauss
    a. Nhập dữ liệu trực tiếp
    b. Nhập dữ liệu thông qua file
4. Viết chương trình giải hệ đại số tuyến tính bằng phương pháp lặp Gauss Siedel
    a. Nhập dữ liệu trực tiếp
    b. Nhập dữ liệu thông qua file
5. Viết chương trình giải hệ đại số tuyến tính bằng phương pháp giảm dư
    a. Nhập dữ liệu trực tiếp
    b. Nhập dữ liệu thông qua file

CHƯƠNG VI TÌM GIÁ TRỊ RIÊNG - VECTƠ RIÊNG

6.1. Giới thiệu

Cho ma trận vuông cấp n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Tìm giá trị riêng, Vectơ riêng $\vec{x}$ của ma trận A

Nghĩa là: tìm λ và $\vec{x}$ sao cho :

$\det(A - \lambda E) = 0$ (E : Ma trận đơn vị)

$(A - \lambda E)\vec{x} = 0$

Để tránh việc khai triển định thức (đòi hỏi số phép tính lớn) khi tìm λ ta có thể áp dụng phương pháp Đanhilepski. Ở phương pháp này ta chỉ cần tìm ma trận P sao cho P đồng dạng với ma trận A và P có dạng ma trận Phơrêbemit.

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Khi đó giá trị riêng của ma trận P cũng là giá trị riêng của ma trận A.

6.2. Ma trận đồng dạng

6.2.1. Định nghĩa

Ma trận B gọi là đồng dạng với ma trận A ($B \sim A$) nếu tồn tại ma trận không suy biến M ($\det(M) \neq 0$) sao cho $B = M^{-1} A M$

6.2.2. Tính chất:

$A \sim B \Rightarrow B \sim A$

$A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$A \sim B \Rightarrow$ giá trị riêng λ của A và B trùng nhau.

6.3. Tìm giá trị riêng bằng phương pháp Đanhilepski

6.3.1. Nội dung phương pháp

Thực hiện n-1 lần biến đổi:

* Lần biến đổi 1: Tìm M^{-1}, M sao cho $A_1 = M^{-1} A M \sim A$

và dòng n của A_1 có dạng của ma trận P (0 0 0 ... 1 0)

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad M^{-1}_{n-1j} = a_{nj}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn-1}} & \frac{-a_{n2}}{a_{nn-1}} & & \frac{1}{a_{nn-1}} & \frac{-a_{nn}}{a_{nn-1}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{n-1j} = \begin{cases} \dfrac{1}{a_{nn-1}} & \text{nếu } j = n-1 \\ \dfrac{-a_{nj}}{a_{nn-1}} & \text{nếu } j \# n-1 \end{cases}$$

$A_1 = M^{-1} A M \sim A$

* Lần biến đổi 2: Chọn M_{-1}, M sao cho $A_2 = M_{-1} A_1 M \sim A_1$

và 2 dòng n, n-1 của A_2 có dạng của ma trận P.

$A_2 \sim A_1$, $A_1 \sim A$ => $A_2 \sim A$ (tính chất)

…. …

* Lần biến đổi thứ n-1

Ta nhận được ma trận $A_{n-1} \sim A$ và A_{n-1} chính là ma trận P cần tìm.

Khi đó định thức:

$$\det(P-\lambda E) = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \dots - p_{n-1}\lambda - p_n)$$

$\det(p-\lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \dots - p_{n-1}\lambda - p_n = 0$

Giải phương trình, suy ra λ

Ví dụ 1. Tìm giá trị riêng của ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix} \quad n = 3$$

ta tìm:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & P_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lần 1: Chọn

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = M^{-1}A\,M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ \boxed{1} & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lần 2: Chọn

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = M^{-1}A_1M = \begin{pmatrix} 7 & -14 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

Giá trị riêng λ là nghiệm phương trình: $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-4) = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda = 2; \lambda=1; \lambda=4$

6.3.2. Thuật toán

- Nhập n, a_{ij} (i,j = 1→n)
- Khai báo hàm nhân 2 ma trận vuông cấp n

  (C = A x B => $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times b_{kj}$)
- Lặp k = n -1 → 1 (phần tử biến đổi : $a_{k+1\ k}$)

```
/* Tính 2 ma trận M, M1 (M1 la ma tran nghich dao cua M) */
     for i = 1 → n
        for j = 1  n
           if  i ≠ k
                 if  i = j   {M[i,j] = 1;  M1[i,j]  = 1 }
                 else        {M[i,j] = 0; M1[i,j]  = 0 }
           else  { M1[i,j]  = a[k+1,j]
                   if  (j = k)      M[i,j] = 1/a[k+1,k]
                   else    M[i,j]  = - a[k+1,j]/a[k+1,k]  }
/* Gọi hàm nhân 2 lần  */
      Lần 1 : vào A, M;   ra  B
      Lần 2 : vào M1; B;   ra A
```

- Xuất a_{ij} (i,j = 1→n)

❖ Thuật toán nhân 2 ma trận vuông cấp n: c = a*b

```
for (i=1, i < = n; i++)
 for (j=1; j< = n; j++)  {
    c[i] [j] = 0
    for (k=1;  k < = n; k++)   c[i] [j] + = a [i] [k] * b [k] [j]
 }
```

6.4. Tìm vectơ riêng bằng phương pháp Đanhilepski

6.4.1. Xây dựng công thức

Gọi $\vec{y}$ là vectơ riêng của ma trận P ~ A

Ta có: $(P - \lambda E)\vec{y} = 0$

$P\vec{y} = \lambda E\vec{y}$

$M^{-1} A . M . \vec{y} = \lambda E\vec{y}$

Nhân 2 vế cho M:

$M\ M^{-1} A\ M\ \vec{y} = M\lambda E\vec{y}$

$A\ M\ \vec{y} = \lambda\ E\ M\vec{y}$

Đặt $\vec{x} = M\vec{y}$

$A\ \vec{x} = \lambda E\vec{x}$

$(A - \lambda E)\ \vec{x} = 0$

Vậy $\vec{x} = M\vec{y}$ là vectơ riêng của A

$P = M_{n-1}^{-1}.M_{n-2}^{-1}...M_{1}^{-1}.A.M_{1}.M_{2}.M_{n-1}$

M_i: Ma trận M xác định được ở lần biến đổi thứ i

và $M = M_1\ M_2\ ...\ M_{n-1}$

Xác định $\vec{y}$

$(P-\lambda E)\vec{y} = 0$

$$\begin{pmatrix} p_1 - \lambda & p_2 & ... & p_{n-1} & p_n \\ 1 & \lambda & ... & 0 & 0 \\ ...... & & & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} (p_1 - \lambda)y_1 + p_2y_2 + \ ... + p_{n-1}y_{n-1} + p_ny_n = 0 \\ y_1 - \ \lambda y_2 = 0 \\ ..... \\ y_{n-1} - \lambda y_n = 0 \end{cases}$$

cho: $y_n = 1 \Rightarrow\ y_{n-1} = \lambda$,

$y_{n-2} = \lambda\ y_{n-1} = \lambda^{2}$, ... , $y_1 = \lambda^{n-1}$

Vậy $\vec{y} = (\lambda^{n-1}, \lambda^{n-2}, \dots, \lambda^2, \lambda, 1)$

Ví dụ 2. Tìm vectơ riêng của A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Giải:</u> Gọi $\vec{y}$ là vectơ riêng của ma trận P ~ A

Ở ví dụ 1 ta có:

$\lambda_1 = 2 \Rightarrow \vec{y}_1 = (4, 2, 1)$

$\lambda_2 = 1 \Rightarrow \vec{y}_2 = (1, 1, 1)$

$\lambda_3 = 4 \Rightarrow \vec{y}_3 = (16, 4, 1)$

Tìm M:

$$M = M_1 M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{x} = M\,\vec{y}$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vậy vectơ riêng của A:

$\vec{x}_1 = (-1, 0, 1)$; $\vec{x}_2 = (1, -1, 1)$; $\vec{x}_3 = (1, 2, 1)$

6.4.2. Thuật toán

Bổ sung thêm lệnh trong thuật toán tìm trị riêng như sau:

- Nhập …

- Khởi tạo B1 = E

- Lặp k = n-1 $\rightarrow$ 1

    /* Tính 2 ma trận M, M1 */

    /* Gọi hàm nhân 3 lần */

        Lần 1: vào A, M; ra B

        Lần 2: vào M1, B; ra A

        Lần 3: vào B1, M; ra B

        /* Gán lại ma trận B1=B */

- Xuất a_{ij}, b_{ij}

CHƯƠNG VII NỘI SUY VÀ PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG BÉ NHẤT

7.1. Giới thiệu

Trong toán học ta thường gặp các bài toán liên quan đến khảo sát và tính giá trị các hàm y = f(x) nào đó. Tuy nhiên trong thực tế có trường hợp ta không xác định được biểu thức của hàm f(x) mà chỉ nhận được các giá trị rời rạc: $y_0, y_1, ..., y_n$ tại các điểm tương ứng $x_0, x_1, ..., x_n$.

Vấn đề đặt ra là làm sao để xác định giá trị của hàm tại các điểm còn lại.

Ta phải xây dựng hàm φ (x) sao cho:

$\varphi(x_i) = y_i = f(x_i)$ với $i = \overline{0,n}$

$\varphi(x) \approx f(x)$ $\forall x$ thuộc [a, b] và $x \neq x_i$ cho trước

- Bài toán xây dựng hàm φ (x) gọi là bài toán nội suy
- Hàm φ (x) gọi là hàm nội suy của f(x) trên $[a, b] = [x_0, x_n]$
- Các điểm x_i ($i = \overline{0,n}$) gọi là các mốc nội suy

Hàm nội suy cũng được áp dụng trong trường hợp đã xác định được biểu thức của f(x) nhưng nó quá phức tạp trong việc khảo sát, tính toán. Khi đó ta tìm hàm nội suy xấp xỉ với nó để đơn giản phân tích và khảo sát hơn. Trong trường hợp đó ta chọn n+1 điểm bất kỳ làm mốc nội suy và tính giá trị tại các điểm đó, từ đó xây dựng được hàm nội suy.

Để xây dựng hàm φ (x) ta có thể áp dụng : Công thức nội suy Lagrange, công thức Newton,….

Trường hợp bài toán cho trước dạng của biểu thức f(x) thì áp dụng phương pháp bình phương bé nhất.

Trường hợp tổng quát: hàm nội suy φ(x) không chỉ thoả mãn giá trị hàm tại mốc nội suy mà còn thoả mãn giá trị đạo hàm các cấp tại mốc đó.

$\varphi'(x_0) = f'(x_0)$; $\varphi'(x_1) = f'(x_1)$; … … $\varphi'(x_n) = f'(x_n)$

$\varphi''(x_0) = f''(x_0)$; $\varphi''(x_1) = f''(x_1)$; … … $\varphi''(x_n) = f''(x_n)$

… … …

$\varphi^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$; $\varphi^{(k)}(x_1) = f^{(k)}(x_1)$; … … $\varphi^{(k)}(x_n) = f^{(k)}(x_n)$

Nghĩa là ta tìm hàm nội suy của f(x) thỏa mãn bảng giá trị sau:

x_i	x_0	x_1	...	x_n
$y_i = f(x_i)$	y_0	y_1	...	y_n
$y'_i = f'(x_i)$	y'_0	y'_1	...	y'_n
$y''_i = f''(x_i)$	y''_0	y''_1	...	y''_n
…	…	…	…	…

Trong trường hợp này ta áp dụng công thức nội suy Hecmit.

7.2. Đa thức nội suy Lagrange

Giả sử f(x) nhận giá trị y_i tại các điểm tương ứng x_i ($i = \overline{0, n}$), khi đó đa thức nội suy Lagrange của f(x) là đa thức bậc n và được xác định theo công thức sau:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i p_n^i(x)$$

$$p_n^i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)} = \frac{TS(x)}{MS}$$

Đặt $W(x) = (x - x_0)(x - x_1)... (x - x_n)$

Suy ra: $TS(x) = \dfrac{W(x)}{x - x_i}$; $MS = W'(x_i)$

$$L_n(x) = W(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(x - x_i)W'(x_i)}$$

Ví dụ 1. Cho hàm f(x) thoả mãn:

x_i	0	1	2	4
$f(x_i)$	2	3	-1	0

Tìm hàm nội suy của f(x), tính f(3) và f(2.5)

Giải:

Cách 1: W(x) = x (x - 1) (x - 2) (x - 4)

W’(0) = (0-1) (0-2)(0-4) = -8

W’(1) = (1)(1-2) (1-4) = 3

W’(2) = (2)(2-1)(2-4) = -4

$W'(4) = (4)\ (4-1)(4-2) = 24$

$L_3(x) = x(x-1)(x-2)(x-4)\left(\frac{2}{x(-8)} + \frac{3}{3(x-1)} + \frac{1}{4(x-2)}\right)$

$= \frac{1}{4}(x-4)(-(x-1)(x-2)+4x(x-2)+x(x-1))$

$= \frac{1}{4}(x-4)(4x^2-6x-2)$

$= \frac{1}{2}(x-4)(2x^2-3x-1)$

Cách 2:

$L_3(x) = 2\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(-1)(-2)(-4)} + 3\frac{x(x-2)(x-4)}{1(-1)(-3)} - 1\frac{x(x-1)(x-4)}{2(1)(-2)}$

$= \frac{1}{4}(x-4)(4x^2-6x-2) = \frac{1}{2}(x-4)(2x^2-3x-1)$

$f(3) \approx L_3(3) = (3 - 4)(4*3^2 - 6*3 - 2)/4 = -4$

$f(2.5) \approx L_3(2.5) = (2.5 - 4)(4*2.5^2 - 6*2.5 - 2)/4 = -3$

7.3. Đa thức nội suy Lagrange với các mối cách đều

Giả sử hàm f(x) nhận giá trị y_i tại các điểm tương ứng x_i ($i = \overline{0,n}$) cách đều một khoảng h.

Đặt $t = \frac{x - x_0}{h}$, khi đó:

$x - x_0 = h*t$	$x_i - x_0 = h*i$
$x - x_1 = h(t - 1)$	$x_i - x_1 = h(i-1)$
...	...
$x - x_{i-1} = h(t - (i-1))$	$x_i - x_{i-1} = h$
$x - x_{i+1} = h(t - (i+1))$	$x_i - x_{i+1} = -h$
...	...
$x - x_n = h(t - n)$	$x_i - x_n = -h(n - i)$

$$p_n^i(x_0 + ht) = \frac{t(t-1)...(t-(i-1)(t-(i+1))...(t-n)}{i(i-1)...1(-1)^{n-i}(1)(2)...(n-i)}$$

$$= \frac{t(t-1)...(t-n)}{(t-i)(i!)(n-i)!\,(-1)^{n-i}}$$

$$L_n(x_0 + ht) = t(t-1)\ ...\ (t-n)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i(-1)^{n-i}}{(t-i)(i!)(n-i)!}$$

$$L_n(x_0 + ht) = \frac{t(t-1)...(t-n)}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}y_i c_n^i}{t-i}$$

Ví dụ 2. Tìm hàm nội suy của f(x) thoả mãn:

x_i	0	2	4
$f(x_i)$	5	-2	1

Giải:

Cách 1:

$W(x) = x(x-2)(x-4)$

$W'(0) = (0-2)(0-4) = -8$

$W'(2) = (2-0)(2-4) = -4$

$W'(4) = (4-0)(4-2) = 8$

$$L_2(x) = x(x-2)(x-4)\left(\frac{5}{8(x-0)} - \frac{2}{(x-2)(-4)} + \frac{1}{(x-4).8}\right)$$

$$= \frac{1}{8}x(x-2)(x-4) + \left(\frac{5}{4x} - \frac{2}{(x-2)} + \frac{1}{4(x-4)}\right)$$

$$= \frac{1}{8}(5(x-2)(x-4) + 4x(x-4) + x(x-2))$$

$$= \frac{1}{8}(10x^2 - 48x + 40) = \frac{1}{4}(5x^2 - 24x + 20)$$

Cách 2:

$$L_2(2t) = \frac{t(t-1)(t-2)}{2!}\left(\frac{5C_2^0}{t-0} - \frac{-2C_2^1}{t-1} + \frac{1.C_2^2}{t-2}\right)$$

$$= \frac{t(t-1)(t-2)}{2}\left(\frac{5}{t} + \frac{4}{t-1} + \frac{1}{t-2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(5(t^2-1)(t-2) + 4t(t-2) + t(t-1))$$

$$= \frac{1}{2}(10t^2 - 24t + 10) = 5t^2 - 12t + 5$$

Vậy $L_2(x) = \frac{5}{4}x^2 - 6x + 5$

7.4. Bảng nội suy Ayken

Khi tính giá trị của hàm tại một điểm x=c nào đó bất kỳ mà không cần phải xác định biểu thức của f(x). Khi đó ta có thể áp dụng bảng nội suy Ayken như sau

7.4.1. Xây dựng bảng nội suy Ayken

$c-x_0$	x_0-x_1	x_0-x_2	…	x_0-x_n	d_0
x_1-x_0	$c-x_1$	x_1-x_2	…	x_1-x_n	d_1
x_2-x_0	x_2-x_1	$c-x_2$	…	x_2-x_n	d_2
…	…		…	…	…
x_n-x_0	x_n-x_1	x_n-x_2	…	$c-x_n$	d_n

$W(c) = (c- x_0)(c- x_1)\ldots(c- x_n)$: Tích các phần tử trên đường chéo

$W'(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots (x_i - x_{i-1}) (x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)$

$(c - x_i) W'(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots (x_i - x_{i-1}) (c- x_i)(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)$

$d_i = (c-x_i) W'(x_i)$: Tích các phần tử trên dòng i (i=0,1, …,n)

$$f(c) \approx L_n(c) = W(c).\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{(c - x_i)W'(x_i)}$$

$$f(c) \approx W(c)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{d_i}$$

Ví dụ 3. Tính f (3.5) khi biết f(x) thoả mãn

x_i	1	2	3	4	5
y_i	3	2	7	-1	0

Giải Xây dựng bảng nội suy Ayken

2.5	-1	-2	-3	-4	60
1	1.5	-1	-2	-3	-9
2	1	0.5	-1	-2	2
3	2	1	-0.5	-1	3
4	3	2	1	-1.5	-36

W(3.5) = 1.40625

$f(3.5) \approx L_4(3.5) = (\frac{1}{20} - \frac{2}{9} + \frac{7}{2} - \frac{1}{3})*1.40625 = 4.210938$

7.4.2. Thuật toán

- Nhập: n, x_i, y_i ($i = 0 \rightarrow n$), c
- w = 1; s = 0;
- Lặp $i = 0 \rightarrow n$

  { $w = w*(c - x_i)$

  $d = c - x_i$

  Lặp $j = 0 \rightarrow n$

  Nếu j != i thì $d = d * (x_i - x_j)$

  $s = s + y_i/d$ }
- Xuất kết qủa: w*s

7.5. Bảng nội suy Ayken (dạng 2)

Xét hàm nội suy của 2 điểm: x_0, x_1

$$L_{01} = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$= \frac{y_0(x_1 - x) - y_1(x_0 - x)}{x_1 - x_0}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0}$$

Hàm nội suy của hai điểm: x_0, x_i

$$L_{0i}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_i & x_i - x \end{vmatrix}}{x_i - x_0}$$

Xét hàm p(x) có dạng:

$$p(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{01}(x) & x_1 - x \\ L_{0i}(x) & x_i - x \end{vmatrix}}{x_i - x_1}$$

$$p(x_0) = \frac{L_{01}(x_0)(x_i - x_0) - L_{0i}(x_0)(x_1 - x_0)}{x_i - x_1} = \frac{y_0(x_i - x_1)}{x_i - x_1} = y_0$$

$$P(x_1) = \frac{y_1(x_i - x_1)}{x_i - x_1} = y_1$$

$$P(x_i) = \frac{-y_1(x_1 - x_i)}{x_i - x_1} = y_i$$

Vậy p(x) là hàm $L_{01i}(x)$ nội suy của 3 điểm: x_0, x_1, x_i

Hàm nội suy tổng quát của n+1 điểm: $x_0, x_1, ..., x_n$

$$L_{012...n}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{012...n-2\,n-1}(x) & x_{n-1} - x \\ L_{012...n-2\,n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}}{x_n - x_{n-1}}$$

Bảng Nội suy Ayken (dạng 2)

x_i	y_i	$L_{0i}(x)$	$L_{01i}(x)$	$L_{012i}(x)$	...	$L_{012...n}(x)$	$x_i - x$
x_0	y_0						$x_0 - x$
x_1	y_1	$L_{01}(x)$					$x_1 - x$
x_2	y_2	$L_{02}(x)$	$L_{012}(x)$				$x_2 - x$
x_3	y_3	$L_{03}(x)$	$L_{013}(x)$	$L_{0123}(x)$			
....	....	...	…	…			...
x_n	y_n	$L_{0n}(x)$	$L_{01n}(x)$	$L_{012n}(x)$	...	$L_{012...n}(x)$	$x_n - x$

Ví dụ 4. Cho f(x) thoả mãn:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2	4	5	7	8

Tính f (2.5)

<u>Giải:</u> Áp dụng bảng Ayken (dạng 2)

x_i	y_i	$L_{0i}(x)$	$L_{01i}(x)$	$L_{012i}(x)$	$L_{0123i}(x)$	x_i - x
1	2					-1.5
2	4	5				-0.5
3	5	4.25	4.625			0.5
4	7	4.5	4.875	4.5		1.5
5	8	4.25	4.875	4.562	4.407	2.5

Vậy $f(2.5) \approx L_{01234}(2.5) = 4.407$

Chú thích : $L_{01}(-2.5) = (2(-0.5) - 4(-1.5)) / (2-1) = 5$

7.6. Nội suy Newton

7.6.1. Sai phân

a. Khái niệm

Cho hàm f(x) và h là hằng số, khi đó:

$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$ được gọi là sai phân cấp 1 đối với bước h.

$\Delta^2 f(x) = \Delta[\Delta f(x)]$: sai phân cấp 2

Tổng quát: $\Delta^k f(x) = \Delta[\Delta^{k-1} f(x)]$: sai phân cấp k

b. Bảng sai phân

Giả sử hàm f(x) nhận giá trị y_i tại các điểm tương ứng x_i cách đều nhau một khoảng h, ($i=0 \rightarrow n$). Khi đó giá trị sai phân các cấp của hàm f(x) tại các điểm x_i được xác định trong bảng sai phân như sau:

$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	…	$\Delta^n f(x_i)$
y_0					
y_1	$\Delta f(x_0)$				
y_2	$\Delta f(x_1)$	$\Delta^2 f(x_0)$			
y_3	$\Delta f(x_2)$	$\Delta^2 f(x_1)$	$\Delta f^3(x_0)$		
....	...	…	…	…	
y_n	$\Delta f(x_{n-1})$	…	…	…	$\Delta^n f(x_0)$

c. Thuật toán in ra bảng sai phân

Dùng ma trận a lưu các giá trị của bảng sai phân

- Nhập n, y_i (i=0→n)
- Gán giá trị y_i cho a[i][0] (i=0→n)
- Tính giá trị các phần tử còn lại trong nửa dưới của ma trận a
- Xuất nửa dưới của ma trận a

7.6.2. Công thức nội suy Newton

Giả sử hàm f(x) nhận giá trị y_i tại các mốc x_i cách đều một khoảng h, (i=0→n). Khi đó hàm nội suy Newton là một đa thức bậc n được xác định như sau:

$L_n(x) = C_o\varphi_0(x) + C_1\varphi_1(x) + ... + C_n\varphi_n(x)$ **(*)**

Trong đó: $\varphi_0(x) = 1$;

$$\varphi_1(x) = \frac{x - x_0}{h} \quad ; \quad \varphi_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{h^2 2!};$$

….

$$\varphi_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})}{h^n n!}$$

Lớp các hàm $\varphi_i(x)$ có tính chất sau:

- $\varphi_i(x_0) = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$
- $\Delta\varphi_k(x) = \varphi_{k-1}(x)$

*** Xác định các hệ số C_i** $(i=\overline{0,n})$

Sai phân cấp 1 của $L_n(x)$:

$\Delta L_n(x) = C_0\Delta\varphi_0(x) + C_1\Delta\varphi_1(x) + C_2\Delta\varphi_2(x) + ... + C_n\Delta\varphi_n(x)$ **(1)**

$= C_1\varphi_0(x) + C_2\varphi_1(x) + ... + C_n\varphi_{n-1}(x)$

Sai phân cấp 2 của $L_n(x)$:

$\Delta^2 L_n(x) = C_1\Delta\varphi_0(x) + C_2\Delta\varphi_1(x) + ...+ C_n\Delta\varphi_{n-1}(x)$ **(2)**

$= C_2\varphi_0(x) + C_3\varphi_1(x) + ... + C_n\varphi_{n-2}(x)$

... … …

Sai phân cấp n của $L_n(x)$:

$\Delta^n L_n(x) = C_n\varphi_0(x) = C_n$ **(n)**

Thay $x = x_0$ vào (*), (1), (2), ..., (n) ta được:

$C_0 = L_n(x_0)$; $C_1 = \Delta L_n(x_0)$; $C_2 = \Delta^2 L_n(x_0)$; ... ; $C_n = \Delta^n L_n(x_0)$

Vì $L_n(x) \approx f(x)$ nên:

$L_n(x_0) \approx f(x_0)$; $\Delta L_n(x_0) \approx \Delta f(x_0)$;

$\Delta^2 L_n(x_0) \approx \Delta^2 f(x_0)$; … ; $\Delta^n L_n(x_0) \approx \Delta^n f(x_0)$

Vậy :

$$L_n(x) \approx f(x_0) + \Delta f(x_0)\frac{x-x_0}{h} + \Delta^2 f(x_0)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2 2!}$$
$$+ ... + \Delta^n f(x_0)\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})}{h^n n!}$$

Ví dụ 5. Xây dựng hàm nội suy Newton của f(x) thoả mãn:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2	4	5	7	8

<u>Giải:</u> Lập bảng sai phân:

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
1	2				
2	4	2			
3	5	1	-1		
4	7	2	1	2	
5	8	1	-1	-2	-4

Hàm nội suy Newton:

$$L_4(x) \approx 2 + 2\frac{x - x_0}{1} - \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!} + 2\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!}$$
$$-4\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{4!}$$

$$L_4(x) \approx 2 + 2\frac{x - 1}{1} - \frac{(x - 1)(x - 2)}{2!} + 2\frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}{3!}$$
$$-4\frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)}{4!}$$

7.7. Nội suy tổng quát (Nội suy Hecmit)

Xây dựng hàm nội suy của f(x) thoả mãn giá trị hàm và giá trị đạo hàm các cấp theo bảng giá trị sau:

x_i	x_0	x_1	...	x_n
$y_i = f(x_i)$	y_0	y_1	...	y_n
$y_i' = f'(x_i)$	y_0'	y_1'	...	y_n'
$y_i'' = f''(x_i)$	y_0''	y_1''	...	y_n''
...	…	…		…
$y_i^{(k)} = f^{(k)}(x_i)$	$y_0^{(k)}$	$y_1^{(k)}$		$y_n^{(k)}$

Giả sử hàm nội suy cần tìm là đa thức bậc m: $H_m(x)$

$m = n + \sum_{i=1}^{k} s_i$ (S_i : số giả thiết cho ở đạo hàm cấp i)

$H_m(x) = L_n(x) + W(x)\, H_p(x)$

(vì $H_m(x_i) = L_n(x_i) + W(x_i)\, H_p(x_i) = y_i$)

Với: $W(x) = (x-x_0)(x-x_1)....(x-x_n)$, $p = m - (n + 1)$

Đạo hàm cấp 1:

$H'_m(x) = L_n'(x) + W(x)\, H'_p(x) + W'(x)H_p(x)$

Xét tại các điểm x_i:

$H'_m(x_i) = L_n'(x_i) + W(x_i)\, H'_p(x_i) + W'(x_i)H_p(x_i) = y'_i$

Vì $W(x_i) = 0$, $L_n'(x_i)$, $W'(x_i)$ và y_i đã biết nên tính được giá trị của $H_p(x_i)$

Đạo hàm cấp 2:

$H_m''(x) = L_n''(x) + 2W'(x)\, H_p'(x) + W''(x)\, H_p(x) + W(x)H_p''(x)$

Xét tại các điểm x_i:

$H_m''(x_i) = L_n''(x_i) + 2W'(x_i)\, H_p'(x_i) + W''(x_i)\, H_p(x_i) + \underbrace{W(x_i)H_p''(x_i)}_{0} = y_i''$

Suy ra tính được giá trị của $H_p'(x_i)$

Tương tự: Đạo hàm đến cấp k suy ra $H_p^{(k-1)}(x_i)$

Ta xây dựng hàm $H_p(x)$ thoả mãn:

x_i	x_0	x_1	...	x_n
$H_p(x_i)$	h_0	h_1	...	h_n
$H_p'(x_i)$	h'_0	h'_1	...	h'_n
...				
$H_p^{(k-1)}(x_i)$	$h_0^{(k-1)}$	$h_1^{(k-1)}$	...	$h_n^{(k-1)}$

Về bản chất, bài toán tìm hàm $H_p(x)$ hoàn toàn giống bài toán tìm hàm $H_m(x)$. Tuy nhiên ở đây bậc của nó giảm đi (n+1) và giả thiết về đạo hàm giảm đi một cấp.

Tiếp tục giải tương tự như trên, cuối cùng đưa về bài toán tìm hàm nội suy Lagrange (không còn đạo hàm). Sau đó thay ngược kết quả ta được hàm nội suy Hecmit cần tìm $H_m(x)$.

Ví dụ 6. Tìm hàm nội suy của hàm f(x) thoả mãn:

x_i	0	1	3
$f(x_i)$	4	2	0
$f'(x_i)$	5	-3	

<u>Giải:</u> Hàm nội suy cần tìm là đa thức $H_4(x)$

$H_4(x) = L_2(x) + W(x)\,H_1(x)$

$W(x) = x(x-1)(x-3) = x^3 - 4x^2 + 3x$

$$L_2(x) = \frac{4(x-1)(x-3)}{3} + 2\frac{x(x-3)}{-2}$$

$$= \frac{1}{3}(x^2 - 7x + 12)$$

$$H'_4(x) = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3} + (3x^2 - 8x + 3)H_1(x) + W(x)\,H'_1(x)$$

$$H'_4(0) = -\frac{7}{3} + 3H_1(0) = 5 \Rightarrow H_1(0) = \frac{22}{9}$$

$$H'_4(1) = -\frac{5}{3} - 2H_1(1) = -3 \Rightarrow H_1(1) = \frac{2}{3}$$

Tìm hàm $H_1(x)$ thoả mãn:

x_i	0	1
$H_1(x_i)$	22/9	2/3

$$H_1(x) = \frac{22}{9}\frac{(x-1)}{(0-1)} + \frac{2}{3}\frac{(x-0)}{(1-0)} = \frac{-16x+22}{9}$$

Vậy $H_4(x) = (x^2 - 7x + 12)/3 + x(x-1)(x-3)(-16x+22)/9$

7.8. Phương pháp bình phương bé nhất

Giả sử có 2 đại lượng (vật lý, hoá học, …) x và y có liên hệ phụ thuộc nhau theo một trong các dạng đã biết sau:

$$\left.\begin{array}{l} - y = a + bx \\ - y = a + bx + cx^2 \\ - y = a + b\cos x + c\sin x \end{array}\right\} \text{Tuyến tính}$$

$$\left.\begin{array}{l} - y = ae^{bx} \\ - y = ax^b \end{array}\right\} \text{Phi tuyến tính}$$

nhưng chưa xác định được giá trị của các tham số a, b, c. Để xác định được các tham số này, ta tìm cách tính một số cặp giá trị tương ứng (x_i, y_i), với i=1, 2, 3, …n bằng thực nghiệm, sau đó áp dụng phương pháp bình phương bé nhất.

➢ **Trường hợp: y = a + bx**

Gọi ε_i sai số tại các điểm x_i

$$\varepsilon_i = y_i - a - bx_i$$

Khi đó tổng bình phương các sai số: $S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$

Mục đích của phương pháp này là xác định a, b sao cho S là bé nhất. Như vậy a, b là nghiệm hệ phương trình:

$$1 \begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

Ta có: $S = \Sigma(y_i^2 + a^2 + b^2x_i^2 - 2ay_i - 2bx_iy_i + 2abx_i)$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n}(2a - 2y_i + 2bx_i)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n}(2bx_i^2 - 2x_i y_i + 2ax_i)$$

$$1 \Leftrightarrow \begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: a, b

➢ **Trường hợp y = a + bx + cx²**

Gọi ε_i sai số tại các điểm x_i

$\varepsilon_i = y_i - a - bx_i - cx_i^2$

Khi đó tổng bình phương các sai số: $S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$

Các hệ số a, b, c xác định sao cho S là bé nhất. Như vậy a, b, c là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial c} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i 4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được a, b, c

➢ **Trường hợp: $y = ae^{bx}$**

Lấy Logarit cơ số e hai vế: Lny = lna + bx

Đặt Y = lny; A = lna; B = b; X = x

Ta đưa về dạng: $Y = A + BX$

Giải hệ phương trình ta được A, B => $a = e^A$, $b=B$

- **Trường hợp $y = ax^b$**

Lấy Logarit cơ số 10 (hoặc cơ số e) hai vế:

$Lgy = lga + blgx$

Đặt $Y = lgy$; $A = lga$; $B = b$; $X = lgx$

Ta đưa về dạng: $Y = A + BX$

Giải hệ phương trình ta được A, B => $a = 10^A$, $b=B$

Ví dụ 7. Cho biết các cặp giá trị của x và y theo bảng sau:

x_i	0.65	0.75	0.85	0.95	1.15
y_i	0.96	1.06	1.17	1.29	1.58

Lập công thức thực nghiệm của y dạng ae^{bx}

Giải: Ta có: $y = ae^{bx}$

Lấy Logarit cơ số e hai vế: $Lny = lna + bx$

Đặt $Y = lny$; $A = lna$; $B = b$; $X = x$

Ta đưa về dạng: $Y = A + BX$

$X_i = x_i$	0.65	0.75	0.85	0.95	1.15
$Y_i = lny_i$	-0.04	0.06	0.18	0.25	0.46

ΣX_i	ΣX_i^2	ΣX_iY_i	ΣY_i
4.35	3.93	0.92	0.89

Phương pháp bình phương bé nhất: A, B là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} nA + B\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ A\sum_{i=1}^{n} X_i + B\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5A + 4.35B = 0.89 \\ 4.35A + 3.93B = 0.92 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: $A = -0.69$, $B = 1$

Suy ra: $a = e^A = 1/2$, $b = B = 1$

Vậy $f(x) = \frac{1}{2} e^{x}$

BÀI TẬP

1. Cho hàm f(x) thoả mãn:

x	1	3	4
f(x)	5	-2	1

   Tìm hàm nội suy của f(x), tính gần đúng: f(2) và f(3.5)

2. Cho hàm f(x) thoả mãn:

x	0	1	3	4
f(x)	1	3	-5	0

   Tìm hàm nội suy của f(x), tính gần đúng: f(2) và f(0.5)

3. Cho hàm f(x) thoả mãn:

x	0	2	4	6
f(x)	3	1	-2	0

   Xây dựng hàm nội suy của f(x) theo 4 cách

4. Xây dựng hàm nội suy Lagrange của f(x) thoả mãn:

   a.

x	0	3	6	9
f(x)	1	-1	2	0

   b.

x	1	3	5	7
f(x)	1	-1	2	0

5. Dùng bảng nội suy Ayken dạng 2 tính gần đúng f(2), f(4.5) khi biết f(x) thoả mãn:

   a.

x	0	1	3	5	6
f(x)	2	3	5	8	9

b.

x	0	1	3	5
f(x)	2	3	5	8

c.

x	1	2	3	4	5
f(x)	6	3	9	2	1

6. Xây dựng hàm nội suy Newton của f(x) thoả mãn:

a.

x	1	3	5	7
f(x)	1	-4	3	0

b.

x	0	1	2	3	4
f(x)	1	4	5	3	8

7. Cho trước giá trị hàm tại n+1 mốc nội suy $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Viết chương trình tính gần đúng giá trị hàm tại 1 điểm bất kỳ thuộc $[x_0, x_n]$ bằng công thức nội suy Ayken
8. Lập trình in ra bảng sai phân
9. Cho hàm f(x) thoả mãn:

x	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	4.243	5.196	6	6.708	7.348	7.937	8.485

   a. Tính gần đúng f(2.5), f(3.5), f(6.5)
   b. Xác định biểu thức f(x) dạng ax^b

10. Cho hàm f(x) thoả mãn:

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	3.3	5.4	8.96	14.78	24.36	40.17

   a. Tính gần đúng f(1.5), f(3.5), f(5.5)
   b. Xác định biểu thức f(x) dạng ae^{bx}

11. Xây dựng hàm nội suy Hecmit của f(x) thoả mãn:

a.

x	0	1	3
f(x)	7	2	4
f'(x)	10	5	

b.

x	0	1	3
f(x)	7	2	4
f'(x)	10	5	3

c.

x	0	1	2
f(x)	2	-3	9
f'(x)	10		
f''(x)	5		

d.

x	0	1	2
f(x)	2	-5	0
f'(x)	10	4	
f''(x)	3		

e.

x	0	1	2
f(x)	1	2	129
f'(x)	0	7	448
f''(x)	0		1344

CHƯƠNG VIII   TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

8.1. Giới thiệu

Xét hàm số f(x) liên tục trên [a,b], nếu xác định được nguyên hàm F(x) ta tính được tích phân xác định theo công thức:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Nhưng trong đa số các trường hợp thì không tìm được nguyên hàm hoặc chưa biết được biểu thức của f(x) mà chỉ nhận được các giá trị của nó tại những điểm rời rạc. Trong trường hợp như vậy, ta có thể sử dụng các công thức gần đúng sau để tính tích phân:

- Công thức hình thang.
- Công thức Parabol
- Công thức Newton _Cotet

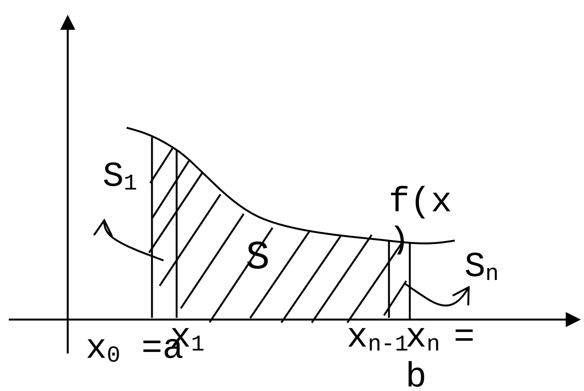
8.2. Công thức hình thang

8.2.1. Xây dựng công thức

Chia [a, b] thành n đoạn bằng nhau với khoảng cách h = (b - a)/n theo các điểm chia: x_0=a, x_1=a+h, ..., x_n = b

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx = S$$

S là diện tích giới hạn bởi đường cong f(x), x=a, x=b, và trục x



Xét trên [x_0, x_1], ta xem đường cong f(x) là đường thẳng

$$S_1 \approx S_{hthang} = \frac{1}{2}h(y_0 + y_1)$$

Tương tự:

$$S_2 \approx \frac{1}{2}h(y_1 + y_2)$$

... … …

$$S_n \approx \frac{1}{2}h(y_{n-1} + y_n)$$

Vậy: $$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} + \frac{y_n}{2})}$$

8.2.2. Thuật toán

- Khai báo hàm f(x)
- Nhập a, b, n
- Tính h = (b-a)/n,   J = (f(a) + f(b))/2
- Lặp i = 1→ n-1 : J+ = f(a+i*h)
- Xuất kết quả : h*J

8.3. Công thức Parabol

8.3.1. Xây dựng công thức

Chia [a, b] thành 2n đoạn bằng nhau với khoảng cách h = (b - a)/2n theo các điểm chia: x_0=a, x_1=a+h, ..., x_{2n} = b

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + ... + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$$

Xét trên [x_0, x_2] xem đường cong f(x) là Parabol (nội suy bậc 2 của 3 điểm x_0, x_1, x_2)

$$f(x) \approx L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} +$$
$$+ y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} L_2(x)dx$$

Thay $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a+2h$ vào, ta có:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Tương tự:

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_2)$$

Vậy: $\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + ... + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})}$

8.3.2. Thuật toán

- Khai báo hàm f(x)
- Nhập a, b, n
- Tính h = (b-a)/2n, J = f(a) + f(b)
- Lặp i = 1→ 2n-1

  if (i%2) J+ = 4*f(a+i*h)

  else J+ = 2*f(a+i*h)
- Xuất kết quả : h*J /3

Ví dụ. Tính $J = \int_1^5 \frac{dx}{1+x^2}$ theo 3 cách

<u>Giải</u>

Cách 1: $J = \text{arctg}x\Big|_1^5 = \text{arctg}5 - \Pi/4 \approx 0.588$

Cách 2: chia [1, 5] thành 4 đoạn bằng nhau (h=1) với các điểm chia

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1/2	1/5	1/10	1/17	1/26

Công thức hình thang:

$J \approx (1/2 + 2/5 + 2/10 + 2/17 + 1/26)/2 \approx 0.628$

Cách 3: Công thức Parabol:

$J \approx (1/2 + 4/5 + 2/10 + 4/17 + 1/26)/3 \approx 0.591$

8.4. Công thức Newton-Cotet

Chia [a, b] thành n đoạn bằng nhau với khoảng cách h = (b - a)/n. Các điểm chia: $x_0=a$; $x_1 = a + h$, ..., $x_n = b$.

Đặt x = a + (b - a)t => dx = (b - a) dt

x_i	a	a+h	a + 2h	...	b
t_i	0	1/n	2/n	...	1

Khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t)dt = (b-a)\int_0^1 \Phi(t)dt$$

Với $\phi(t) = f(a + (b - a)t$

Xem $\phi(t)$ là hàm nội suy Lagrange của n + 1 điểm: $t_0, t_1, ..., t_n$

t_i	0	1/n	2/n	...	1
$\phi(t)$	y_0	y_1	y_2	...	y_n

$$\Phi(t) \approx L_n(t) = y_0 \frac{(t-\frac{1}{n})(t-\frac{2}{n})...(t-1)}{(-\frac{1}{n})(-\frac{2}{n})...(-1)} + y_1 \frac{(t-0)(t-\frac{2}{n})...(t-1)}{(\frac{1}{n}-0)(\frac{1}{n}-\frac{2}{n})...(\frac{1}{n}-1)} + ...$$

$$+ y_n \frac{(t-0)(t-\frac{1}{n})...(t-\frac{n-1}{n})}{(1-0)(1-\frac{1}{n})...(1-\frac{n-1}{n})}$$

Khi đó: $\int_0^1 \Phi(t)dt \approx \int_0^1 L_n(t)dt$

Đặt $P_n^i = \int_0^1 \frac{(t-0)(t-\frac{1}{n})...(t-\frac{i-1}{n})(t-\frac{i+1}{n})...(t-1)}{(\frac{i}{n}-0)(\frac{i}{n}-\frac{1}{n})...(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n})(\frac{i}{n}-\frac{i+1}{n})...(\frac{i}{n}-1)}dt$

Vậy: $$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} y_i p_n^i}$$

Xét n = 1 (h = b-a)

$$P_1^0 = \int_0^1 \frac{t-1}{0-1}dt = \frac{1}{2}\ ; \qquad P_1^1 = \int_0^1 \frac{t-0}{1-0}dt = \frac{1}{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)(\frac{y_0}{2} + \frac{y_1}{2}) = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) \rightarrow \text{Công thức hình thang}$$

Lưu ý: Giá trị của P_n^i có thể tra trong bảng sau:

n	P_n^i					
1	1/2	1/2				
2	1/6	4/6	1/6			
3	1/8	3/8	3/8	1/8		
4	9/71	16/45	2/15	16/45	9/70	
5	19/288	25/95	25/144	25/144	25/95	19/288
…	…	…	…	…	…	…

BÀI TẬP

1. Tính gần đúng các biểu thức sau theo 3 cách:

   a. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$ b. $\int_1^5 \frac{tgx+3}{2\sqrt{x}}dx$

   c. $\int_2^8 (\ln(x+5)-x^2)dx$ d. $\int_5^{10} (arctg(x+5)+3x)dx$

   e. $\int_1^{10} \frac{\ln(x+1)}{x}dx$ f. $\int_1^{10} \frac{e^x}{x+1}dx$

2. Cho hàm f(x) có giá trị tương ứng trong bảng sau:

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
f(x)	0.91	1.49	2.46	4.06	6.69	11.04	18.2	30.01	49.47

   Tính gần đúng :

   a. Tích phân xác định của f(x) trên [1, 4]
   b. Tích phân xác định của f(x) trên [2, 5]
   c. Tích phân xác định của f(x) trên [1, 4.5]
   d. Tích phân xác định của f(x) trên [1.5, 5]

3. Khai báo hàm trong C để tính gần đúng tích phân xác định của hàm f(x) trên [a, b] (dùng đối kiểu con trỏ hàm)

   a. Dùng công thức hình thang
   b. Dùng công thức Parabol
   c. Dùng công thức Newton-cotet

4. Viết chương trình tính gần đúng tích phân xác định trên [a, b] của một hàm f(x) cụ thể (sử dụng các hàm đã khai báo trong câu 3). So sánh các kết quả, nhận xét.

MỘT SỐ CHƯƠNG TRÌNH THAM KHẢO

1. Chương trình tìm nghiệm gần đúng của phương trình: e^x–10x+7=0 bằng phương pháp tiếp tuyến

```
# include  "conio.h"
# include  "math.h"
# define    eps  1e-3
float  f(float x)
{
        return   exp(x) - 10*x+7;
}
float  fdh(float x)
{
        return   exp(x) - 10;
}

main()
{   float  a,b; char tt;
    while (1)
         {      printf("\nNhap xap xi ban dau: "); scanf("%f",&a);

                do
                {       b = a;
                        a = b - f(b)/fdh(b);
                }
                while  (fabs(a-b) >= eps );

                printf("\n Nghiem phtrinh: %.3f", a);
                printf("\n Ban muon tiep tuc ko(c/k)? ");
                tt = getch();
                if  (tt=='k' || tt=='K')   break;
        }
}
```

2. Chương trình tìm nghiệm gần đúng cho phương trình đại số bậc n bằng phương pháp chia đôi

```
# include   <stdio.h>
# include   <conio.h>
# include   <math.h>
# define    eps 1e-3
void  nhap(float *a, int n)
{       int i;
        for (i=0;i<=n; ++i) scanf("%f", a+i);
}

float  f(float *a, int n, float x)
{  float p; int i;
   p = a[0];
   for (i=1; i<=n; i++)  p = p*x + a[i];
   return p;
}

void  main()
{       float  a,b,c;  char tt;
        float d[10];  int n;
        printf("\n Nhap bac phuong trinh: ");  scanf("%d", &n);
        printf("\n Nhap cac he so cua phuong trinh bac %d: ", n);
        nhap(d,n);
        while (1)
        {       printf("\n Nhap khoang nghiem: "); scanf("%f%f", &a, &b);
                if  (f(d,n,a)*f(d,n,b)<0)
                {       do
                        {       c = (a+b)/2;
                                if  (f(d,n,b)*f(d,n,c)>0)   b=c;
                                else  a=c;
                        }
                        while  (fabs(a-b) >= 1e-3 && f(d,n,c)!=0);
                        printf("\n\n Nghiem phtrinh: %.3f", c);
                }
                else
                        printf(" ( %f, %f) khong phai la khoang nghiem", a, b);
```

```
            printf("\n\n Ban tiep tuc ko(c/k)?");
        tt = getch();
        if  (tt!='c')   break;
    }
}
```

3. Giải hệ đại số tuyến tính bằng phương pháp Gauss

```
# include  <stdio.h>
# include  "conio.h"
# include  "math.h"
# define    max 10

/* Ham nhap mang a(n,n+1)*/
void  nhapmt(float a[][max], int n)
{       int   i,j;   float  x;
        for (i=1; i<=n; i++)
                for (j=1; j<=n+1; j++)
                {       printf(" pt[%d%d] = ", i, j);
                        scanf("%f",&x);   a[i][j] = x;
                }
}

/* Ham xuat mang a(n,n+1)*/
void  xuatmt(float a[][max], int n)
{       int  i, j;
        for (i=1;i<=n; i++)
        {       printf("\n");
                for (j=1;j<=n+1;j++)  printf("%8.3f   ", a[i][j]);
        }
}

void  hoandoi(float *a, float *b)
{       float  t;
        t = *a;  *a = *b; *b = t;
}
```

```
void  doidong(float a[][max], int n, int p, int q)
{       int  k;
        if  (p<=n && q<=n && p!=q)
                for (k=1; k<=n+1; k++)  hoandoi(&a[p][k], &a[q][k]);

}

void main()
{       float  a[max][max];
        float  x[max], m, s;
        char  tt;   int n, i, j, k;
        while (1)
        {       printf("\n\n Nhap n = "); scanf("%d", &n);
                printf("\n\n Nhap he so cua he phuong trinh:\n");  nhapmt(a, n);
                printf("\n\n He phtrinh da cho: ");   xuatmt(a, n);

                /* bien doi A ve ma tran tam giac tren */
                for(i=1; i<n; i++)
                {       if  (a[i][i]==0)
                        {       for (k=2; k<=n; k++)
                                        if  (a[k][i]!=0)  break;
                                doidong(a, n, i, k);
                                if  (k>n)  return;
                        }

                        for(j=i+1; j<=n; j++)
                        {       m = -a[j][i]/a[i][i];
                                for (k=i; k<=n+1; k++)  a[j][k]+=a[i][k]*m;
                        }
                }

                printf("\n\n He phtrinh sau khi bien doi:");  xuatmt(a, n);

                /* tim nghiem theo qua trinh nguoc */
                for(i=n; i>=1; i--)
                {       s=a[i][n+1];
                        for (k=i+1; k<=n; k++)   s-=a[i][k]*x[k];
                        if  (a[i][i]!=0)   x[i] = s/a[i][i];
```

```
        }
        printf("\n\n Nghiem he phtrinh:  ");
        for(i=1; i<=n; i++) printf("%.3f   ", x[i]);

        printf("\n\n Ban tiep tuc ko(c/k)? ");
        tt = getch();
        if  (tt!='c')  break;
    }
}
```

4. Giải hệ đại số tuyến tính bằng phương pháp Gauss Sediel

```
/* File  sediel.txt  chua bac va cac he so cua he phtrinh */
# include  <stdio.h>
# include  "conio.h"
# include  "math.h"
# define    eps 1e-3
# define    max 10

/* Ham xuat mang a(n,n+1)*/
void  xuatmt(int a[][max], int n)
{       int  i, j;
        for (i=1; i<=n; i++)
        {       printf("\n");
                for (j=1; j<=n+1; j++) printf("%5d", a[i][j]);
        }
}

/* Nhap day n phan tu */
void  nhap(float *a, int n)
{       int i;
        for (i=1; i<=n; i++) scanf("%f", a+i);
}

/* Xuat day n phan tu */
void  xuat(float a[], int n)
```

```
{       int i;
        for (i=1; i<=n; i++) printf("%8.3f", a[i]);
}

void  main()
{   int    a[max][max];
    float  x[max], y[max];
    int    n, i, j, lap, dem;
    FILE   *f;    char  tt;

    f = fopen("sediel.txt", "r");   /* mo file de doc so lieu */
    fscanf(f, "%d", &n);
    for (i=1; i<=n; i++)
        for (j=1; j<=n+1; j++)
            if (!feof(f)) fscanf(f, "%d", &a[i][j]);
            else
            {    printf("\n So lieu ko hop le");
                 getch();  return;
            }
    fclose(f);
    printf("\n Cac he so cua he phuong trinh:\n");
    xuatmt(a, n);

    while (1)
    {    printf("\n\n Nhap xap xi nghiem ban dau : ");
         nhap(x, n);
         dem = 0;
         do
         {       lap=0;  dem++;
                 for(i=1; i<=n; i++)
                 {       float  s=0;
                         for (j=1; j<=n; j++)
                                 if (j!=i)  s+=a[i][j]*x[j];
                         y[i] = a[i][n+1] - s ;
                         if (a[i][i]!=0)  y[i] = y[i]/a[i][i];
                         else   return;   /* ket thuc chuong trinh */
                         if  (fabs(x[i]-y[i])>eps && dem<30)  lap=1;
                 }
```

```
            for (i=1; i<=n; i++)   x[i] = y[i];
        }
        while (lap);
        if  (dem<30)
        {       printf("\n Nghiem cua he phuong trinh : ");
                xuat(y,n);
        }
        else  printf(" \n He phtrinh ko giai duoc bang phuong phap nay");

        printf("\n\n Ban tiep tuc ko(c/k)?");
        tt=getch();
        if (tt!='c') break;
    }
}
```

5. Tính giá trị hàm sử dụng bảng nội suy Ayken

```
# include  <stdio.h>
# include  "conio.h"
void  nhap(float *a, int n)
{ int  i;
        for (i=0; i<=n; i++)  scanf("%f", a+i);
}
void  main()
{       int  i, j, n;   char tt;
        float  d, t, w, s;
        float  x[10], y[10];
        printf("\n Nhap n = "); scanf("%d", &n);
        printf(" Nhap %d moc noi suy: ", n+1);
        nhap(x, n);
        printf("\n Nhap gia tri ham tai cac moc noi suy tuong ung: ");
        nhap(y, n);
        while (1)
        {       printf("\n Nhap gia tri can tinh:");  scanf("%f", &t);
                w = 1;   s = 0;
                for (i=0; i<=n; i++)
```

```
                {       w*=t-x[i];
                        d = t-x[i];
                        for (j=0; j<=n; j++)
                                if (j!=i) d*=x[i]-x[j];
                        s+=y[i]/d;
                }
                printf("\n Gia tri ham: f(%f) = %f", t, w*s);
                printf("\n\n Ban tiep tuc ko(c/k)?");
                tt = getch();
                if  (tt!='c')   break;
        }
}
```

6. Chương trình in bảng sai phân

```
# include  <stdio.h>
# include  <conio.h>
# define   max  10
void  nhap(float *a, int n, char ten);
void  main()
{  char   tt;    int   n, i, j;
   float  a[max][max],  y[10];
   while  (1)
   {   printf("\n Nhap n : ");  scanf("%d", &n);
       printf("\n Nhap gia tri ham tai %d moc noi suy: \n", n+1);
       nhap(y, n, 'y');
       for (i=0; i<=n; i++)  a[i][0] = y[i];
       for (i=1; i<=n; i++)
               for (j=1; j<=i; j++)  a[i][j] = a[i][j-1] - a[i-1][j-1];

       printf("\n Bang sai phan:\n\n");
       for (i=0; i<=n; i++)
       {       for (j=0; j<=i; j++)  printf("%10.3f", a[i][j]);
               printf("\n");
       }
       printf("\n\n Ban tiep tuc ko(c/k)?");
       tt = getch();
```

```
        if  (tt!='c')  break;
    }
}
void  nhap(float *a, int n, char ten)
{       int  i;
        for (i=0; i<=n; ++i)
        {       printf(" %c[%d]=", ten, i);
                scanf("%f", a+i);
        }
}
```

7. Chương trình tính gần đúng tích phân xác định

```
# include  <stdio.h>
# include  "conio.h"
# include  "math.h"
# define   PI 3.14159
float  d[10];  int n;
double  g(double x)
{
        return 1/(1+x*x);
}
double  tp(double (*f)(double), float a, float b)
{       int   n = 100,  i;
        float  s,  h = (b-a)/n;
        s = (f(a) + f(b))/2;
        for (i=1; i<n; i++)  s+=f(a+i*h);
        return  s*h;
}

void  nhap(float *a, int *n)
{       int i;
        printf("\n Nhap bac da thuc: ");  scanf("%d", n);
        printf("\n Nhap he so cua ham da thuc:\n");
        for (i=0; i<=*n; ++i)
        {       printf(" a[%d]=", i);
```

```
            scanf("%f", a+i);
        }
}

double  f(double x)
{       float   p = d[0];   int i;
        for(i=1; i<=n; i++)  p = p*x+d[i];
        return p;
}

main()
{       float  a, b;
        char  tt;
        while (1)
        {       printf("\n Nhap can de tinh tich phan: ");
                printf("\n a = ");   scanf("%f", &a);
                printf("\n b = ");   scanf("%f", &b);
                printf("\n S1 = %.3f",  tp(sin, 0, PI));
                printf("\n S2 = %.3f",  tp(cos, 0, PI/2));
                printf("\n S3 = %.3f",  tp(g, a, b));
                nhap(d, &n);
                printf("\n S4 = %.3f",  tp(f, a, b));

                printf("\n\n Ban tiep tuc ko(c/k)?");
                tt = getch();
                if  (tt!='c')  break;
        }
}
```

TÀI LI ỆU THAM KHẢO

[1] Đặng Quốc Lương, *Phương pháp tính trong kỹ thuật*, Nhà xuất bản xây dựng Hà nội, 2001

[2] Phan Văn Hạp, *Giáo trình Cơ sở phương pháp tính* tập I,II. Trường ĐH Tổng hợp Hà nội, 1990

[3] Cao quyết Thắng, *Phương pháp tính và Lập trình Turbo Pascal.* Nhà XB giáo dục, 1998

[4] Tạ Văn Đĩnh, *Phương pháp tính.* Nhà XB giáo dục, 1994

[5] Dương Thủy Vỹ, *Phương pháp tính*. Nhà XB khoa học & kỹ thuật, 2001

[6] Phan Văn Hạp, *Bài tập phương pháp tính và lập chương trình cho máy tính điện tử*. Nhà XB đại học và trung học chuyên nghiệp, 1978

[7] Ralston A, *A first course in numberical analysis*. McGraw – Hill, NewYork, 1965