

# Vindturbiners respons på bølger

## *MEKSP100*

SIMON LEDERHILGER

2. juni 2025

# Omfang

- ▶ MA1: *Numerisk beregning av addert masse i et ubegrenset fluid*
- ▶ MA2: *Kreftene og reponsen til et hivende rektangel*
- ▶ MA3: *Forankringsdynamikken til en flytende vindturbin*

MA1 og MA2 er tatt fra MEK4420—*Marin hydrodynamikk*, og MA3 var utarbeidet av emneavnsvarlig Tor Anders NYGAARD. Pensum er teorigrunnlaget for de tre rapportene. Forkunnskaper er MEK4410 og MAT-MEK4270, og arbeidet bygger på bacheloroppgaven.

# Potensialteori

Vi antar  $\mathbf{u} = \nabla\phi$ , fra NAVIER-STOKES har vi nå  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  at

$$\varrho D_t \mathbf{u} = -\nabla p,$$

fordi  $\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$ , og  $\nabla \times \nabla\phi \equiv \mathbf{0}$ .

Fra dette får vi BERNOULLIS lineariserte likning  $p = -\varrho \partial_t \phi$ .

Egenskapen at  $\phi$  er harmonisk tyder til at vi bør bruke kompleks analyse.

# Kompleks analyse

Vi skriver  $\mathbf{u}(\mathcal{Z}) = u + iv$ , slik at  $\mathbf{u}^* = \partial_{\mathcal{Z}}\Psi$ .<sup>1</sup> Skalarproduktet, tangetialvektoren, og normalvektoren er definert her med hensyn på en stykkevis glatt JORDAN-kurve.<sup>2</sup> Fra definisjonen av trykkraft  $\mathbf{P}$  og moment  $\mathbf{M}$  har vi at de kan uttrykkes henholdsvis

$$\mathbf{P} = \oint_S p \hat{\mathbf{n}} \, dS = -\varrho \partial_t U \oint_S \phi \hat{\mathbf{n}} \, dS,$$

$$\mathbf{M} = \oint_S p \mathbf{x} \times \hat{\mathbf{n}} \, dS = -\varrho \partial_t U \oint_S \phi \mathbf{x} \times \hat{\mathbf{n}} \, dS,$$

i vektornotasjon for enkelhets skyld.

---

<sup>1</sup>Her er  $\Psi = \phi + i\psi$ , og  $\mathcal{Z} = x + iy$ .

<sup>2</sup>[3] MARKUŠEVIČ, pp.175–176

# Addert masse

Vi noterer at  $\partial_t U$  er en akselerasjon. Etter NEWTON, kaller vi det følgende uttrykket heuristisk dermed *addert masse*.

$$\mathfrak{m} = -\varrho \operatorname{Re} \oint_S \phi \hat{\mathbf{n}} \, dS.$$

Beveger vi et legeme med hastighet  $\mathbf{U}$ , sier vi potensialet til fluidet er  $\Phi(t; \mathbf{x}) = U_i(t) \phi_i(\mathbf{x})$ .

$$\partial_{\hat{\mathbf{n}}} \Phi = \mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad \text{på } S,$$

$$|\nabla \phi| = 0, \quad \text{i uendelig.}$$

På grunn av dekomposisjonen av  $\Phi$ , kan vi heller skrive

$$\partial_{\hat{\mathbf{n}}} \phi_i = \hat{n}_i, \quad \text{på } S.$$

# GREEN-funksjoner

En GREEN-funksjon er harmonisk utenom i ett punkt  $\mathfrak{H}\mathfrak{C}$ , slik at

$$\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathfrak{H}\mathfrak{C}).$$

Vi finner ved regning at

$$\int_{\partial\Omega} (\phi \partial_{\hat{n}} G - G \partial_{\hat{n}} \phi) dS = 0,$$

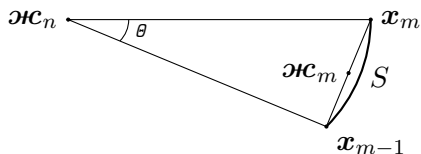
når  $\mathfrak{H}\mathfrak{C} \notin \Omega \cup \partial\Omega$ , og  $\phi$  er harmonisk. Vi setter  $r = |\mathbf{x} - \mathfrak{H}\mathfrak{C}|$ , slik at  $G(\mathbf{x}) = \ln r$ , og for fluidpotensialet i en mode  $j$ , vil

$$\int_S (\phi_j \partial_{\hat{n}} \ln r - \hat{n}_j \ln r) dS = \pi \phi_j(\mathfrak{H}\mathfrak{C}),$$

hvor  $S$  er randa til legemet i bevegelse, og  $\mathfrak{H}\mathfrak{C} \in S$ .

# Randelementmetoden

Vi velger  $N$  kollokasjonspunkter for et lukket legeme, og løser integrallikningen i midtpunktene mellom disse.



Randelementmetoden er gitt ved følgende.

- ▶ Randa tilnærmes med lineære randelementer  $\{S_1, \dots, S_N\}$
- ▶ På  $S_m$  vil potensialet være konstant likt  $\phi(x_m)$
- ▶ Potensialet løses ved invertering av systemet  $\theta\phi = h$

# Problemer med randelementmetoden

Unøyaktigheter oppstår i følgende.

- ▶ Oppdelingen av  $S$  i lineære elementer
- ▶ Antagelsen at  $\phi$  er konstant over elementene
- ▶ Utregning av  $\theta$  og  $h$

Dessuten er normalvektoren ikke definert i hjørner, så potensialet vil være diskontinuerlig i så fall.

Metoden er ofte på sitt beste  $O(N^3)$ , som er veldig tregt.<sup>3</sup>

Relevant problemstilling:

Hva kan vi gjøre for å kutte ned på unøyaktigheten?

---

<sup>3</sup>[9] WENDLAND p.136

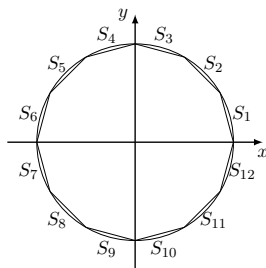


# Diskretisering av integrallikningen

Vi diskretiserer henholdsvis integralene

$$\int_S \phi \partial_{\hat{n}} \ln r \, dS \approx \sum_{m=1}^N \phi_m \int_{S_m} \partial_{\hat{n}} \ln r \, dS;$$

$$\int_S \ln r \partial_{\hat{n}} \phi \, dS \approx \sum_{m=1}^N \partial_{\hat{n}} \phi_m \int_{S_m} \ln r \, dS.$$



# Logaritmisk gradient

For en JORDAN-kurve parametrisert ved  $\lambda(s)$ , vil  $\hat{\mathbf{n}}$  parametriseres av

$$\nu(s) = -\lambda'(s)i = \frac{dy}{ds} - i\frac{dx}{ds},$$

og skalarproduktet ved  $\operatorname{Re}(\mathbf{u}^*\nu(s))$ , som tilsvarer  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}$ .<sup>4</sup> Variabelen  $s$  vil omslutte legemet, så vi har for hvert randelement at

$$\int_{S_m} \partial_{\hat{\mathbf{n}}} \ln r \, dS = \operatorname{Re} \int_{\mathbf{x}_{m-1}}^{\mathbf{x}_m} \frac{i}{\mathcal{J} - \mathcal{H}\mathcal{C}_n} \, d\mathcal{J} = \arg \left( \frac{\mathbf{x}_{m-1} - \mathcal{H}\mathcal{C}_n}{\mathbf{x}_m - \mathcal{H}\mathcal{C}_n} \right).$$

Dette kan skrives om med cosinusregelen eller projeksjon:

$$\Theta = -\arccos \left( \frac{(\mathbf{x}_m - \mathcal{H}\mathcal{C}_n) \cdot (\mathbf{x}_{m-1} - \mathcal{H}\mathcal{C}_n)}{|\mathbf{x}_m - \mathcal{H}\mathcal{C}_n| |\mathbf{x}_{m-1} - \mathcal{H}\mathcal{C}_n|} \right).$$

---

<sup>4</sup>[3] MARKUŠEVIČ, p.175. Dette kan utvides til ikke-JORDAN-kurver og

# GAUSS–LEGENDRE-kvadratur

Vi kan tilnærme logaritme-integralet på følgende vis.

$$\int_{\mathbf{x}_{m-1}}^{\mathbf{x}_m} y(x) \, dx \approx \sum_{k=1}^K w_k \eta(\xi_k),$$

hvor

$$x = \frac{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1}|}{2} \xi + \frac{|\mathbf{x}_m + \mathbf{x}_{m-1}|}{2}, \quad \eta(\xi) = \frac{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1}|}{2} y(x),$$

og

$$w_k = \frac{2}{(1 - \xi_k^2)(P'_K(\xi_k))^2}, \quad P_K(\xi_k) = 0.$$

Integralet av logaritmen kaller vi  $\mathbf{h}_m$ .

# MA1: Numerisk beregning av addert masse

På tre forskjellige legemer:

- ▶ Sirkel
- ▶ Ellipse
- ▶ Kvadrat

Addert masse finnes ved å integrere potensialet ganger elementnormalen, over alle randelementene.

Programmeringsmessig, lagde jeg klassen `IntegralEquation` i Python. Denne ble importert til programmene `ellipse.py` og `square.py`, som definerte kollokasjonspunktene og plottet resultatene når klassen ble kalt.

# Sirkelen

Sirkelen finner vi enkelt potensialet på, så her kan vi kjapt sammenlikne utregnet potensial med det analytiske.  $L^2$ -feilen blir 5% allerede ved  $N = 100$ .

Vi har at

$$\phi = \frac{a^2 U \cos \theta}{r}, \quad q^2 = \frac{a^4 U^2}{r^4},$$

og finner den kinetiske energien til fluidet

$$T_{\text{fluid}} = \frac{\rho}{2} \int_a^\infty \int_0^{2\pi} q^2 r \, d\theta \, dr = \frac{\pi \rho a^2 U^2}{2}.$$

Vi bruker innsikten at  $T_{\text{total}} = 1/2(m + \rho k A)U^2$ , altså at det kreves mer energi å forflytte et legeme i et fluid.

$k$  er *tregetskoeffisienten*. Addert masse  $m_{11} = \rho k A$  er altså ikke bare avhengig av omsluttet areal, men også form i forhold til forflytning.

# Resultat

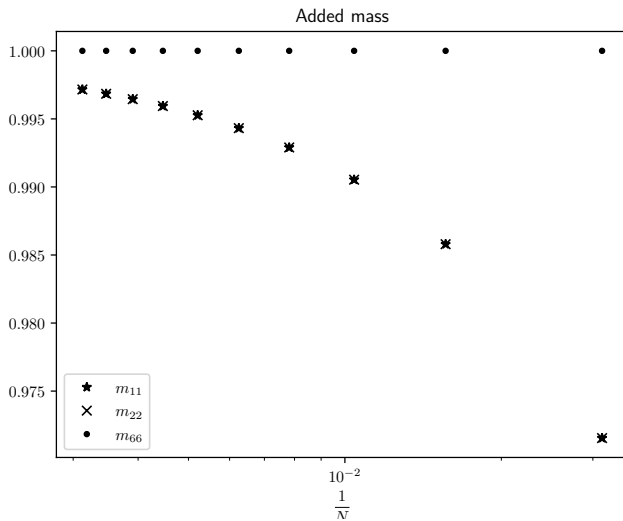


Figure: Her plottes utregnet som andel av teoretisk verdi.

# Ellipsen

Potensialet er gitt ved<sup>5</sup>

$$\phi = U \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} (b \cos \alpha \cos \eta + a \sin \alpha \sin \eta) \exp(-\xi) - \frac{\Gamma \eta}{2\pi},$$

hvor  $\xi + i\eta$  er elliptiske koordinater,  $\Gamma$  er sirkulasjonen, og  $\alpha$  er angripsvinkelen.

Når det er ingen sirkulasjon, har vi

$$T = \frac{\pi \rho U^2}{2} (b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha).$$

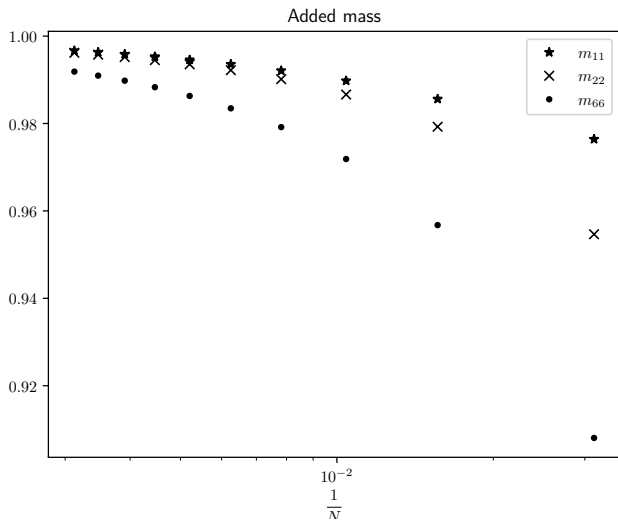
Når det er sirkulasjon, men ingen forflytning, har vi

$$T = \frac{\pi \rho \omega^2}{16} (a^2 - b^2)^2.$$

---

<sup>5</sup>[1] KENNARD, sect.84

# Resultat





# Kvadratet

For kvadratet, gir KENNARD ingen utledning for  $m_{11}$ , og nevner ikke  $m_{66}$ , men disse gis henholdsvis av TAYLOR<sup>6</sup> og NEWMAN.<sup>7</sup>

For et kvadrat, vil selvfølgelig  $m_{11} = m_{22}$ , og de vil være gitt ved

$$m_{11} = 8(K^2/\pi - 1/2)\rho a^2.$$

For  $m_{66}$  finnes det ikke enda en kortfattet analytisk løsning, så vi får nøye oss med

$$m_{66} \approx 0.72457\rho a^4.$$

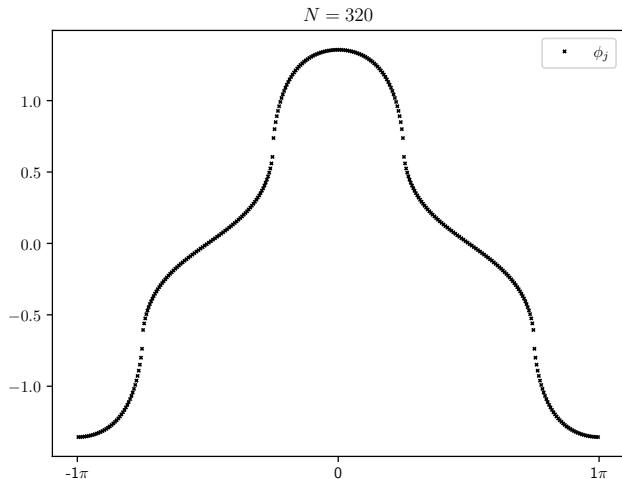
---

<sup>6</sup>[7] TAYLOR (1930)

<sup>7</sup>[4] NEWMAN (1978)

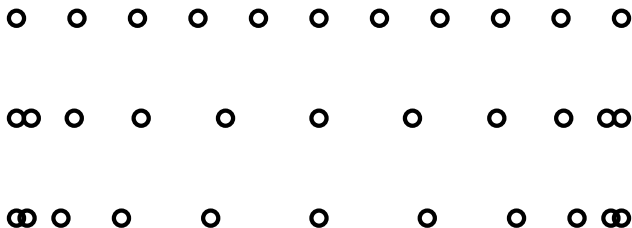
# Problemer med naiv diskretisering

Ved å diskretisere kvadratet direkte, og unngå å legge midtpunkter i hjørnene, får vi følgende potensial i første mode.



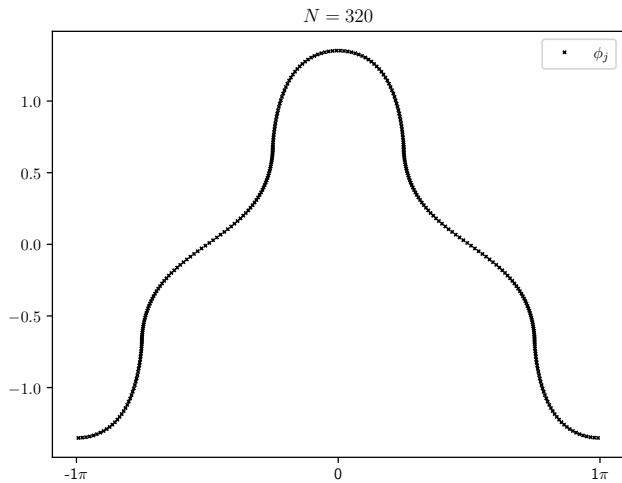
# Diskretisering av kvadratet

Vi bør åpenbart forbedre oppløsning i hjørnene.

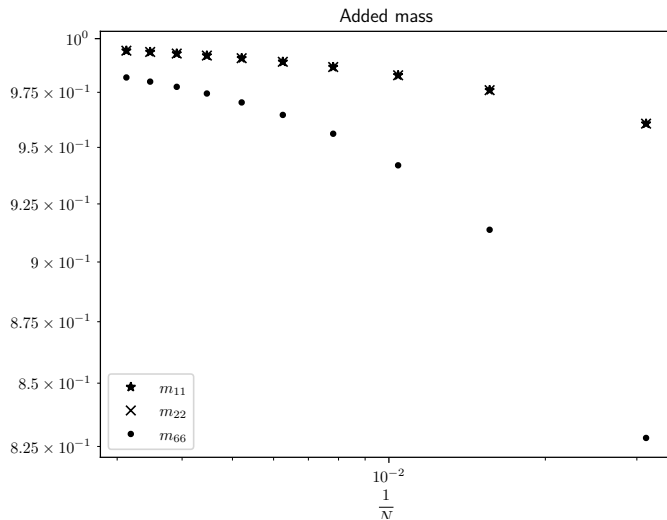


$$U_n = -\cos\left(\frac{\pi n}{N-1}\right), \quad J_n = -\text{cd}\left(\frac{2Kn}{N-1}\right)$$

# Resultat av JACOBI-noder



# Resultat



## MA2: Kreftene på og responsen til et rektangel i hiv

Et legeme formet som et rektangel flyter på havoverflaten, med lengde  $L$  og dypgang  $D$ . Programmeringsmessig måtte derfor klassen `IntegralEquation` tilpasses til en ny GREEN-funksjon. Dypgangen ble satt til 1, og lengden ble satt til 0.1, 1, 2, og 10. På disse skulle følgende finnes:

- ▶ Radiasjons- og diffraksjonspotensial
- ▶ Addert masse
- ▶ Eksitasjonskraft
- ▶ Hivsutslag

Jeg viser bare eksitasjon og utslag, da det er disse som er interessante.

Som forberedelse til MA3, ble én oppgave fra NEWMANs bok gjort.<sup>8</sup>

---

<sup>8</sup>[5] NEWMAN, p.337

# Bølgeteori

Fra den kinematiske grensebetingelsen  $D_t\eta = \partial_y\Phi$  får vi av den lineariserte BERNOULLI-likningen, den dynamiske grensebetingelsen

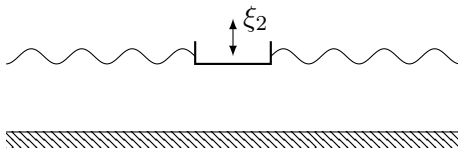
$$\partial_t^2\Phi = -g\partial_y\Phi.$$

Vi ønsker å se hvordan en slik inkommende bølge påvirker et flytende legeme. Først antar vi at legemet bare svinger opp og ned. Da har vi også en kinematisk randbetingelse på legemet,

$$\hat{n} \cdot \mathbf{u}_B = \hat{n} \cdot \nabla\Phi_R, \quad \mathbf{u}_B = \partial_t\xi_2\hat{\mathbf{j}}.$$

Vi sier at

$$\Phi_R = \text{Re} (i\omega\hat{\xi}_2\phi_2 \exp(i\omega t)).$$



# Radiasjonsdemping

Fra BERNOULLIS likning, får vi at trykket er gitt ved  $p = i\rho\omega\hat{\xi}_2\phi_2$ , så kraften kan dekomponeres i reell og imaginær del. Vi får da et nytt ledd i radiasjonsdempingstensoren

$$\mathbf{r} = -\rho \operatorname{Im} \int_S \phi \hat{\mathbf{n}} \, dS.$$

Tolkningen av at denne står for et imaginært bidrag er at den vil være ute av fase med akselerasjonen, men i fase med hastigheten. Dempingen beskriver altså energien tapt når legemet produserer bølger, som vi kan tilnærme med

$$r_{22} = \frac{\rho\omega}{2} \left( |A_2^\infty|^2 + |A_2^{-\infty}|^2 \right),$$

$$A_2^{\pm\infty} = \mp \int_{S_B} (\kappa\phi_2 \hat{\mathbf{n}}^* + i\hat{n}_2) e^{\kappa(y \pm ix)} \, dS.$$



# Innkommende, diffraktive, og radiative bølger

Vi antar en innkommende bølge

$$\phi_0 = \frac{ig}{\omega} \exp(\kappa(y - ix)), \quad \omega^2 = \kappa g.$$

Istedenfor å bare la legemet svinge, holder vi det fast, og ser hva som skjer med de innkomende bølgene:

$$-\pi\phi_D + \int_{S_B} \phi_D \partial_{\hat{n}} G \, dS = -2\pi\phi_0,$$

$$\Phi_D = \text{Re} (A(\phi_0 + \phi_7) \exp(i\omega t)).$$

Det diffraktive potensialet her gir oss altså den innkommende bølgen  $\phi_0$ , og det transmitterte-reflekterte potensialet  $\phi_7$ . Det at legemet holdes stille gir oss impermeabilitetsrandbetingelsen at  $\partial_{\hat{n}}\phi_0 = -\partial_{\hat{n}}\phi_7$ . Hele bølgesystemet når vi tillater legemet å bevege seg kan da gis ved  $\Phi = \Phi_R + \Phi_D$ .

# GREEN-funksjon

GREEN-funksjonen for dypvann er gitt ved<sup>9</sup>


$$G = \ln \frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mathcal{H}}|}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mathcal{H}}^*|} + \operatorname{Re}(f_1) + i \operatorname{Re}(f_2);$$

$$f_1 = -2(E_1(\mathcal{Z}) + \ln(\mathcal{Z}) - \ln(-\mathcal{Z})) \exp \mathcal{Z}, \quad f_2 = 2\pi \exp \mathcal{Z},$$

hvor  $\mathcal{Z} = i\kappa(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mathcal{H}}^*)$  og  $\kappa$  er bølgetallet til den innkommende bølgen.

Nå kan  $\phi_j$  være kompleks.

---

<sup>9</sup>[8] WEHAUSEN & LAITONE, eq.3.28, p.481,  $\Gamma = 0$ ,  $Q = 2\pi$ . 

# Eksitasjon

Fra BERNOULLIS likning får vi at diffraksjonspotensialet forårsaker en kraft

$$Y = -i\omega\rho \int_{S_B} \phi_D \hat{n}_2 \, dS.$$

Det finnes en del forskjellige måter å tilnærme denne kraften. FROUDE–KRYLOV-kraften er gitt ved å anta at  $\phi_7$  ikke bidrar til trykkfeltet,

$$Y^{\text{FK}} = -i\omega\rho \int_{S_B} \phi_0 \hat{n}_2 \, dS.$$

Vi har HASKINDS første relasjon, ved GREENS teorem at

$$Y^{\text{H1}} = -i\omega\rho \int_{S_B} (\phi_0 \partial_{\hat{n}} \phi_2 - \phi_2 \partial_{\hat{n}} \phi_0) \, dS,$$

og HASKINDS andre relasjon at

$$Y^{\text{H2}} = i\rho\omega \int_{S_L} (\phi_0 \partial_{\hat{n}} \phi_2 - \phi_2 \partial_{\hat{n}} \phi_0) \, dS = i\rho g A_2^{-\infty}.$$

# Sammenlikning av tilnærmingene

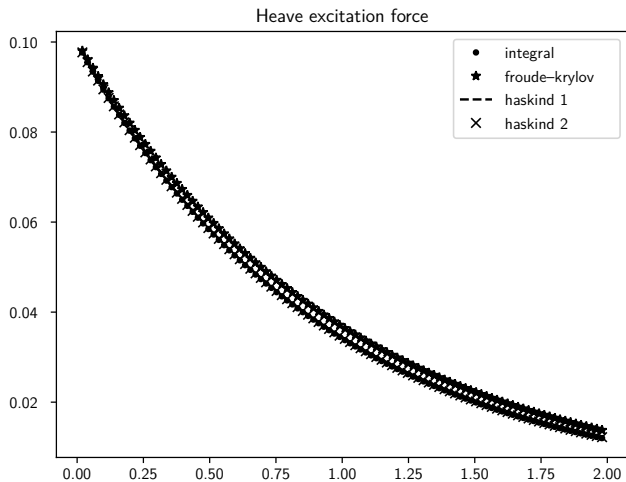


Figure: Her er  $L/D = 0.1$ , og horisontalaksen  $\kappa D$ .

# Sammenlikning av tilnærmingene

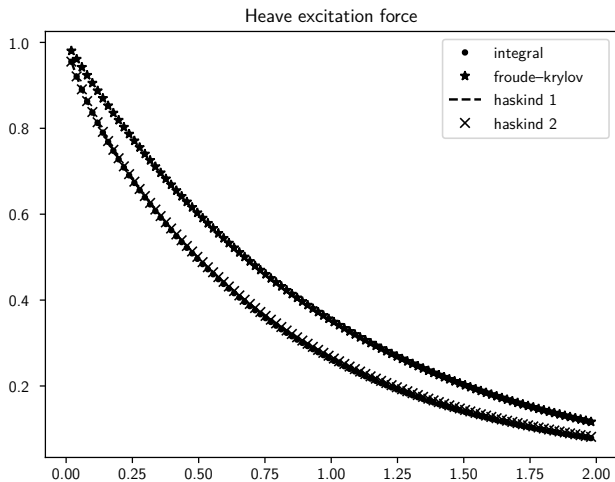


Figure:  $L/D = 1$

# Sammenlikning av tilnærmingene

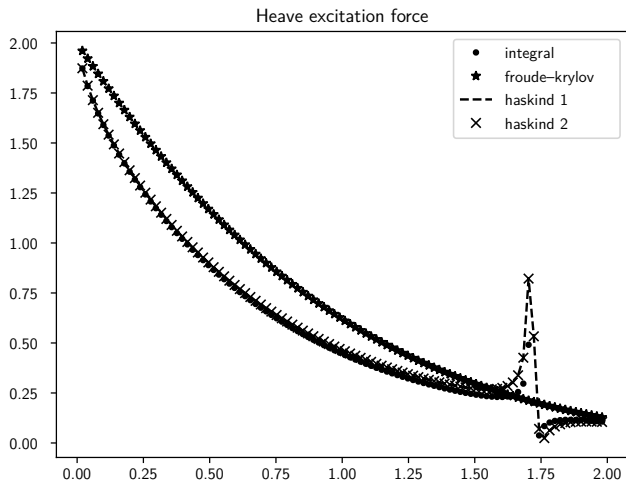


Figure:  $L/D = 2$

# Sammenlikning av tilnærmingene

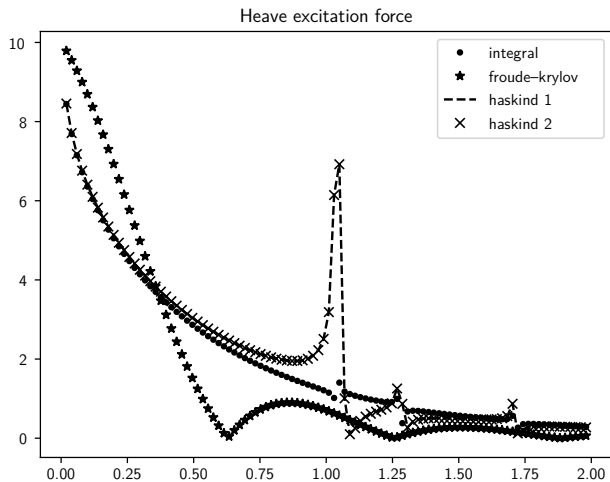


Figure:  $L/D = 10$

# Frekvenser

Hvor eksitasjonskraften får en diskontinuitet er der FREDHOLM-integrallikningen har en irregulær frekvens. Kort fortalt, er dette hvor GREEN-funksjonen har randbetingelser som ikke samsvarer.<sup>10</sup>

Hvis vi antar at summen av kreftene på legemet resulterer i hiveksitasjonen, vil

$$\frac{\hat{\xi}_2}{A} = \frac{Y}{c_{22} - \omega^2(m + m_{22}) + i\omega r_{22}}, \quad c_{22} = \rho g S.$$

Vi noterer at om et legeme flyter, må massen til legemet være likt massen til vannet det forflytter— $m = \rho LD$ . Om vi nå ser bort fra demping, og antar de hydrostatiske og treghetskreftene er like, vil

$$\omega^2 = \frac{g}{D \left(1 + \frac{m_{22}}{\rho LD}\right)}.$$

---

<sup>10</sup>[2] LEE *et al.* (1996)



# Resultater, utslag i hiv

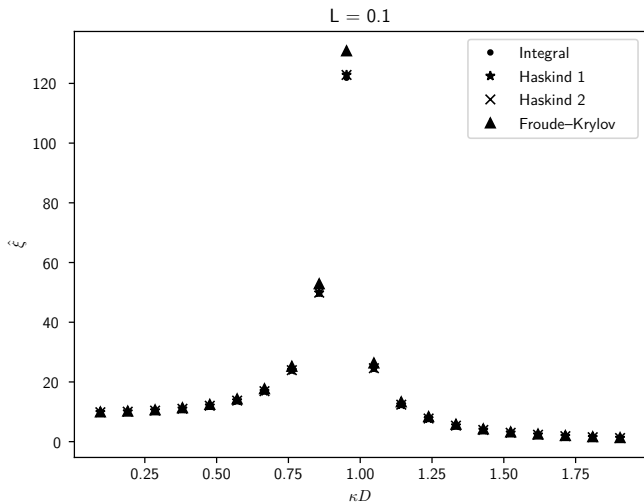


Figure:  $L/D = 0.1$

# Resultater, utslag i hiv

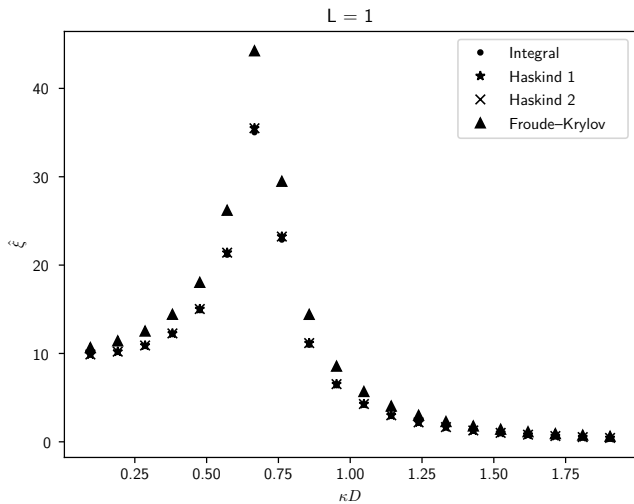


Figure:  $L/D = 1$

# Resultater, utslag i hiv

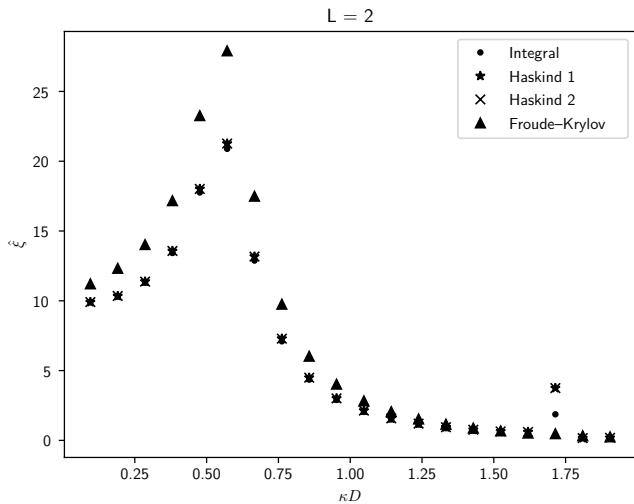


Figure:  $L/D = 2$

# Resultater, utslag i hiv

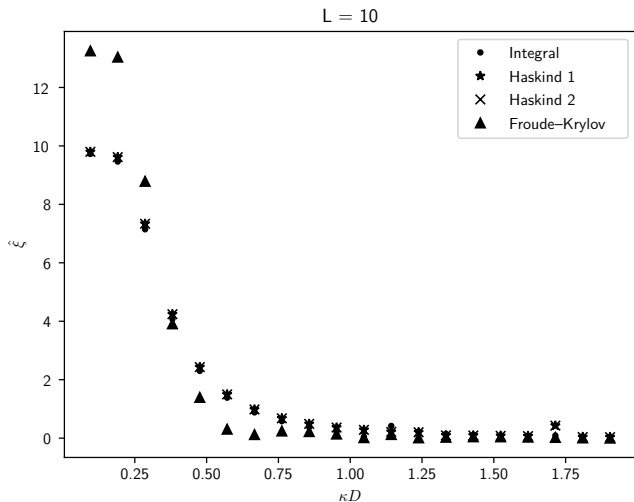


Figure:  $L/D = 10$

# Krefter på en sparbøye

En sirkulær sparbøye med dypgang  $D$  og diameter  $d$  flyter fritt. Regn ut de hydrostatiske gjenopprettende kreftene og momentene. Tilnærm den naturlige frekvensen i hiv, ved å anta at bøyen er såpass tynn at addert masse og demping kan neglisjeres i forhold til sparbøyens masse. Tilnærm også FROUDE–KRYLOV-eksitasjonskraften og deretter demping fra stasjonær fase-approksimasjonen.

# Hydrostatikk

Si oppdriftssenter og tyngdesenter henholdsvis er  $y_B$  og  $y_G$ . Fortrengt volum er gitt ved  $V = S \times D$ , hvor  $S = \pi d^2/4$  er vannlinjearealet til bøyen. De hydrostatiske gjenopprettende kreftene er gitt ved

$$c_{22} = \rho g S$$

$$c_{44} = \rho g S_{33} + \rho g V (y_B - y_G), \quad c_{66} = \rho g S_{11} + \rho g V (y_B - y_G).$$

Her er

$$S_{11} = \int_{S_B} x^2 dS = \int_0^{d/2} \int_0^{2\pi} r^3 \cos^2 \theta d\theta dr,$$

$$S_{33} = \int_{S_B} z^2 dS = \int_0^{d/2} \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2 \theta d\theta dr.$$

Vi har altså

$$c_{22} = \frac{\pi \rho g d^2}{4}, \quad c_{44} = c_{66} = \frac{\pi \rho g d^4}{64} + \frac{\pi \rho g D d^2 (y_B - y_G)}{4}.$$

# Naturlig frekvens

Vi vet at vi får den naturlige frekvensen når  $\hat{\xi}/A$  er singulær, som betyr at

$$c_{22} - \omega_n^2 m = 0.$$

Siden bøyen flyter, må dens masse være  $m = \rho V$ . Altså,

$$m = \frac{\pi \rho D d^2}{4}, \quad c_{22} = \frac{\pi \rho g d^2}{4}.$$

Da får vi

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{D}}.$$

Enhetene er  $s^{-1}$ , som er et godt tegn.

# Eksitasjonskraft og demping

FROUDE–KRYLOV-kraften får vi som sagt fra

$$Y^{\text{FK}} = -i\omega\rho \int_{S_B} \phi_0 \hat{n}_2 \, dS, \quad \phi_0 = ig/\omega \exp(\kappa(y - ix)).$$

Ser vi for oss sparen, innser vi at selv om  $S_B$  består av et sylinderskall og en bunnplate, vil normalvektoren kun samsvare med bunnplaten. Vi trenger derfor ikke integrere over sylinderskallet:

$$Y^{\text{FK}} = -i\rho e^{-\kappa D} \int_{|z| \leq d/2} e^{-i\kappa x} \, dz = \frac{\pi \rho g d^2 e^{-\kappa D}}{4}.$$

Vi kan nå bruke at<sup>11</sup>

$$r_{22} = \frac{|Y^{\text{FK}}|^2}{2\rho g c_g} = \frac{\omega \rho \pi^2 d^4}{16} \exp(-2\kappa D), \quad c_g = \partial_k \omega.$$

---

<sup>11</sup>[5] NEWMAN, eq.174, p.316



# MA3: Forankringsdynamikken til en flytende vindturbin

En stor problemstilling for flytende vind er høye kostnader knyttet til forankring. Vi ønsker å forankre en sparbøye med fiberrep med en slik ankerradius at de elastiske frekvensene overstiger de for vind i jag og bølger i hiv. Derfor skal følgende temaer presenteres:

- ▶ HOOKEs lov
- ▶ Forankringssystemer
- ▶ Ankerradius for forskjellige turbiner

# HOOKES lov

Vi husker følgende uttrykk for bevegelseslikningen for et fjærmassesystem.

$$X = m\partial_t^2\xi = -k\xi, \quad \xi(t) = \hat{\xi} \sin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{k/m}$$

Vi går ikke veldig i dybden på elastisitet, men vi noterer oss at HOOKES lov også kan formuleres med hensyn på strekkspenning  $\mathfrak{P}$  og tøyning  $\varepsilon$ .<sup>12</sup>

$$\mathfrak{P} = \varepsilon E, \quad L\varepsilon = \xi,$$

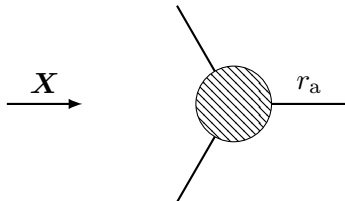
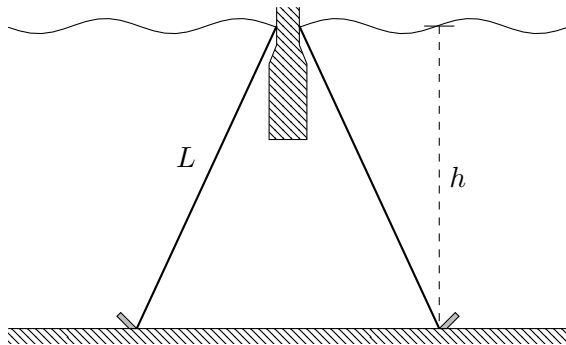
hvor  $E$  er YOUNGS modul, en empirisk verdi, og spenningen er definert til å være kraften per flateareal. Vi har altså at den effektive fjærstivheten kan gis ved

$$k = \frac{EA}{L} \cos \alpha.$$

---

<sup>12</sup>[6] SOKOLNIKOFF, p.68

# Forankringssystemer



## Addert masse

Massen vi ser på i forankringssystemet er  $m + m_{11}$  i jag, og  $m + m_{22}$  i hiv. I jag tilnærmer vi den adderte massen å være fortrengt vannmasse. I hiv kan vi regne den ut. Ved å bruke oblate sfæroidiske koordinater,<sup>13</sup> kan vi finne den kinetiske energien til en sirkulær disk med radius  $a$  som beveger seg perpendikulært til flaten,

$$T = \frac{k' m_{22} U^2}{2} = \frac{4 \rho a^3 U^2}{3}, \quad k' = \frac{2}{\pi}.$$

For sparbøyen, vil denne platen tilsvare bunnflaten, hvor baksiden ikke vil kunne opptas av fluid, som betyr at vi må halvere den adderte massen,

$$m_{22} = \frac{2 \pi \rho r_2^3}{3}.$$

---

<sup>13</sup>[1] KENNARD, pp.356–361

# Egenperioder

Vi har dermed

$$k_{\text{jag}} = \frac{2EA}{L} \cos^2 \alpha, \quad k_{\text{hiv}} = \frac{3EA}{L} \cos \alpha \sin \alpha + c_{22}$$

hvor  $\alpha = \arcsin(h/L)$ . Periodene er gitt ved

$$T_{\text{jag}} = 2\pi \sqrt{\frac{m + m_{11}}{k_{\text{jag}}}}, \quad T_{\text{hiv}} = 2\pi \sqrt{\frac{m + m_{22}}{k_{\text{hiv}}}}$$

Vi har lyst til å finne en ankerradius  $r_a$  som gir egenperioder lenger enn 40 s i jag, og 20 s i hiv.

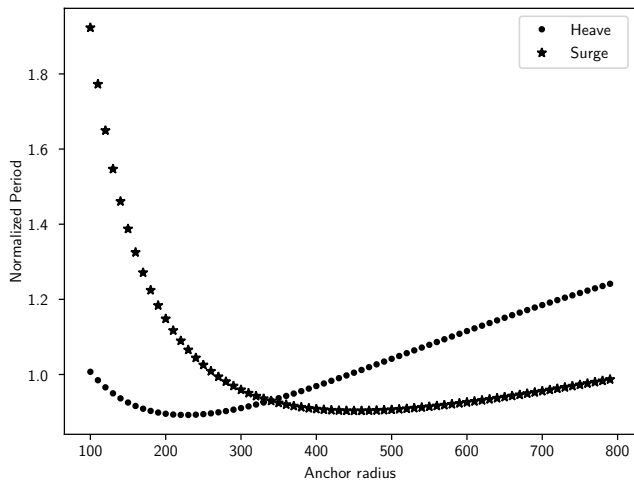
## Første case

Vi har en sparvindturbin med masse  $m = 2.3864 \times 10^7 \text{ kg}$ , øvre radius  $r_1 = 5 \text{ m}$ , og nedre radius  $r_2 = 9 \text{ m}$ . Havdybden er  $320 \text{ m}$ . Vi er gitt  $EA = 6 \times 10^8 \text{ kg m s}^{-2}$  for et polyesterrep. Vi søker gjennom ankerradiuser, og finner at ved  $r_a = 100 \text{ m}$ , har vi

$$k_{\text{jag}} = 2.32 \times 10^6 \text{ kg s}^{-2}, \quad k_{\text{hiv}} = 3.18 \times 10^5 \text{ kg s}^{-2};$$

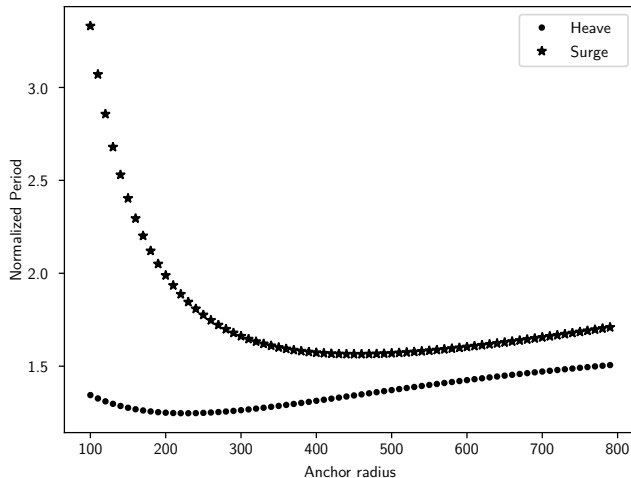
$$T_{\text{jag}} = 76.92 \text{ s}, \quad T_{\text{hiv}} = 20.14 \text{ s}.$$

# Resultater



# Andre case

Vi prøver nå nylon i stedet, som har  $EA = 2 \times 10^8 \text{ kg m s}^{-2}$ .





- [1] KENNARD, Earle H. *Irrotational Flow of Frictionless Fluids, Mostly of Invariable Density*. U.S. Government Printing Office, 1967.
- [2] LEE, Chang Ho, NEWMAN, John Nicholas, and ZHU, X. “An Extended Boundary Integral Equation Method for the Removal of Irregular Frequency Effects”. In: *International journal for numerical methods in fluids* 23 (1996), pp. 637–660.
- [3] MARKUŠEVIČ, Aleksey Ivanovič (МАРКУШЕВИЧ). *Theory of Functions of a Complex Variable, Volume II*. Ed. by Richard A. SILVERMAN. Prentice-Hall, inc., 1965.
- [4] NEWMAN, John Nicholas. “Added Moment of Inertia of Two-dimensional Cylinders”. In: *Journal of Ship Research* 23.1 (1979).
- [5] NEWMAN, John Nicholas. *Marine Hydrodynamics*. The MIT press, 2018.

- [6] SOKOLNIKOFF, Ivan Stephan. *Mathematical Theory of Elasticity*. McGraw–Hill Book Company, Inc., 1956.
- [7] TAYLOR, J. Lockwood. “Some Hydrodynamical Inertia Coefficients”. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 9:55 (1930), pp. 161–183.
- [8] WEHAUSEN, John V. and LAITONE, Edmund V. “Surface Waves”. In: *Encyclopedia of Physics*. Ed. by Siegfried FLÜGGE. Vol. IX. Springer-Verlag, 1960.
- [9] WENDLAND, W. L. “Boundary Element Methods and their Asymptotic Convergence”. In: *Theoretical Acoustics and Numerical Techniques*. Ed. by P. FILIPPI. Springer-Verlag, 1983.