Vindturbiners respons på bølger

MEKSP100

Simon Lederhilger

2. juni 2025

Omfang

- MA1: *Numerisk beregning av addert masse i et ubegrenset fluid*
- MA2: *Kreftene og reponsen til et hivende rektangel*
- MA3: *Forankringsdynamikken til en flytende vindturbin*

MA1 og MA2 er tatt fra MEK4420—*Marin hydrodynamikk*, og MA3 var utarbeidet av emneavnsvarlig Tor Anders NYGAARD. Pensum er teorigrunnlaget for de tre rapportene. Forkunnskaper er MEK4410 og MAT-MEK4270, og arbeidet bygger på bacheloroppgaven.

Potensialteori

Vi antar $\boldsymbol{u} = \nabla\phi$, fra NAVIER–STOKES har vi når $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ at

$$\varrho \mathrm{D}_t \boldsymbol{u} = -\nabla p,$$

fordi $\nabla^2 \boldsymbol{u} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u})$, og $\nabla \times \nabla\phi \equiv \mathbf{0}$.

Fra dette får vi BERNOULLIs lineariserte likning $p = -\varrho \partial_t \phi$.

Egenskapen at ϕ er harmonisk tyder til at vi bør bruke kompleks analyse.

Kompleks analyse

Vi skriver $\boldsymbol{u}(\mathfrak{z}) = u + iv$, slik at $\boldsymbol{u}^* = \partial_\mathfrak{z}\Psi$.[1] Skalarproduktet, tangetialvektoren, og normalvektoren er definert her med hensyn på en stykkevis glatt JORDAN-kurve.[2] Fra definisjonen av trykkraft $\boldsymbol{P}$ og moment $\boldsymbol{M}$ har vi at de kan uttrykkes henholdsvis

$$\boldsymbol{P} = \oint_S p\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = -\varrho\partial_t U \oint_S \phi\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S,$$

$$\boldsymbol{M} = \oint_S p\boldsymbol{x}\times\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = -\varrho\partial_t U \oint_S \phi\boldsymbol{x}\times\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S,$$

i vektornotasjon for enkelhets skyld.

[1] Her er $\Psi = \phi + i\psi$, og $\mathfrak{z} = x + iy$.

[2] [3] MARKUŠEVIČ, pp.175–176

Addert masse

Vi noterer at $\partial_t U$ er en akselerasjon. Etter Newton, kaller vi det følgende uttrykket heuristisk dermed *addert masse*.

$$\mathfrak{m} = -\varrho \operatorname{Re} \oint_S \phi \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S.$$

Beveger vi et legeme med hastighet $\boldsymbol{U}$, sier vi potensialet til fluidet er $\Phi(t; \boldsymbol{x}) = U_i(t)\phi_i(\boldsymbol{x})$.

$$\partial_{\hat{\boldsymbol{n}}} \Phi = \boldsymbol{U} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}, \qquad \text{på } S,$$

$$|\nabla \phi| = 0, \qquad \text{i uendelig.}$$

På grunn av dekomposisjonen av Φ, kan vi heller skrive

$$\partial_{\hat{\boldsymbol{n}}} \phi_i = \hat{n}_i, \qquad \text{på } S.$$

Green-funksjoner

En Green-funksjon er harmonisk utenom i ett punkt $\boldsymbol{\varkappa}$, slik at

$$\nabla^2 \mathrm{G} = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\varkappa}).$$

Vi finner ved regning at

$$\int_{\partial\Omega} (\phi \partial_{\hat{\boldsymbol{n}}} \mathrm{G} - \mathrm{G}\, \partial_{\hat{\boldsymbol{n}}} \phi)\, \mathrm{d}S = 0,$$

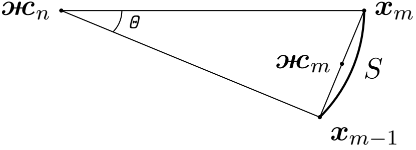
når $\boldsymbol{\varkappa} \notin \Omega \cup \partial\Omega$, og ϕ er harmonisk. Vi setter $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\varkappa}|$, slik at $\mathrm{G}(\boldsymbol{x}) = \ln r$, og for fluidpotensialet i en mode j, vil

$$\int_S (\phi_j \partial_{\hat{\boldsymbol{n}}} \ln r - \hat{n}_j \ln r)\, \mathrm{d}S = \pi \phi_j(\boldsymbol{\varkappa}),$$

hvor S er randa til legemet i bevegelse, og $\boldsymbol{\varkappa} \in S$.

Randelementmetoden

Vi velger N kollokasjonspunkter for et lukket legeme, og løser integrallikningen i midtpunktene mellom disse.



Randelementmetoden er gitt ved følgende.

- Randa tilnærmes med lineære randelementer $\{S_1, \ldots, S_N\}$
- På S_m vil potensialet være konstant likt $\phi(\boldsymbol{\varkappa}_m)$
- Potensialet løses ved invertering av systemet $\boldsymbol{\Theta}\phi = \mathtt{h}$

Problemer med randelementmetoden

Unøyaktigheter oppstår i følgende.

- Oppdelingen av S i lineære elementer
- Antagelsen at ϕ er konstant over elementene
- Utregning av $\boldsymbol{\Theta}$ og $\mathtt{h}$

Dessuten er normalvektoren ikke definert i hjørner, så potensialet vil være diskontinuerlig i så fall.

Metoden er ofte på sitt beste $O(N^3)$, som er veldig tregt.[3]

Relevant problemstilling:
Hva kan vi gjøre for å kutte ned på unøyaktigheten?

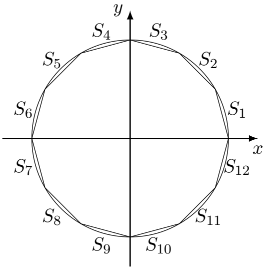
[3] [9] Wendland p.136

Diskretisering av integrallikningen

Vi diskretiserer henholdsvis integralene

$$\int_S \phi \partial_{\hat{\boldsymbol{n}}} \ln r \, \mathrm{d}S \approx \sum_{m=1}^{N} \phi_m \int_{S_m} \partial_{\hat{\boldsymbol{n}}} \ln r \, \mathrm{d}S;$$

$$\int_S \ln r \partial_{\hat{\boldsymbol{n}}} \phi \, \mathrm{d}S \approx \sum_{m=1}^{N} \partial_{\hat{\boldsymbol{n}}} \phi_m \int_{S_m} \ln r \, \mathrm{d}S.$$



Logaritmisk gradient

For en JORDAN-kurve parametrisert ved $\lambda(s)$, vil $\hat{\boldsymbol{n}}$ parametriseres av

$$\nu(s) = -\lambda'(s)i = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - i\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},$$

og skalarproduktet ved $\mathrm{Re}(\boldsymbol{u}^*\nu(s))$, som tilsvarer $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{u}$.[4] Varaibelen s vil omslutte legemet, så vi har for hvert randelement at

$$\int_{S_m} \partial_{\hat{\boldsymbol{n}}} \ln r \,\mathrm{d}S = \mathrm{Re} \int_{\boldsymbol{x}_{m-1}}^{\boldsymbol{x}_m} \frac{i}{\mathfrak{z} - \boldsymbol{\varkappa}_n} \,\mathrm{d}\mathfrak{z} = \arg\left(\frac{\boldsymbol{x}_{m-1} - \boldsymbol{\varkappa}_n}{\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{\varkappa}_n}\right).$$

Dette kan skrives om med cosinusregelen eller projeksjon:

$$\boldsymbol{\Theta} = -\arccos\left(\frac{(\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{\varkappa}_n) \cdot (\boldsymbol{x}_{m-1} - \boldsymbol{\varkappa}_n)}{|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{\varkappa}_n||\boldsymbol{x}_{m-1} - \boldsymbol{\varkappa}_n|}\right).$$

[4] [3] MARKUŠEVIČ, p.175. Dette kan utvides til ikke-JORDAN-kurver og.

Gauss–Legendre-kvadratur

Vi kan tilnærme logaritme-integralet på følgende vis.

$$\int_{\boldsymbol{x}_{m-1}}^{\boldsymbol{x}_m} y(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{K} w_k \eta(\xi_k),$$

hvor

$$x = \frac{|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_{m-1}|}{2}\xi + \frac{|\boldsymbol{x}_m + \boldsymbol{x}_{m-1}|}{2}, \quad \eta(\xi) = \frac{|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_{m-1}|}{2} y(x),$$

og

$$w_k = \frac{2}{(1-{\xi_k}^2)\big(\mathrm{P}'_K(\xi_k)\big)^2}, \qquad \mathrm{P}_K(\xi_k) = 0.$$

Integralet av logaritmen kaller vi $\mathtt{h}_m$.

MA1: Numerisk beregning av addert masse

På tre forskjellige legemer:

- Sirkel
- Ellipse
- Kvadrat

Addert masse finnes ved å integrere potensialet ganger elementnormalen, over alle randelementene.

Programmeringsmessig, lagde jeg klassen `IntegralEquation` i Python. Denne ble importert til programmene `ellipse.py` og `square.py`, som definerte kollokasjonspunktene og plottet resultatene når klassen ble kalt.

Sirkelen

Sirkelen finner vi enkelt potensialet på, så her kan vi kjapt sammenlikne utregnet potensial med det analytiske. L^2-feilen blir 5% allerede ved $N = 100$.
Vi har at

$$\phi = \frac{a^2 U \cos\theta}{r}, \qquad q^2 = \frac{a^4 U^2}{r^4},$$

og finner den kinetiske energien til fluidet

$$T_{\text{fluid}} = \frac{\varrho}{2} \int_a^\infty \int_0^{2\pi} q^2 r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r = \frac{\pi \varrho a^2 U^2}{2}.$$

Vi bruker innsikten at $T_{\text{total}} = {}^1\!/_2(m + \varrho k A)U^2$, altså at det kreves mer energi å forflytte et legeme i et fluid.

k er *treghetskoeffisienten*. Addert masse $m_{11} = \varrho k A$ er altså ikke bare avhengig av omsluttet areal, men også form i forhold til forflytning.

Resultat

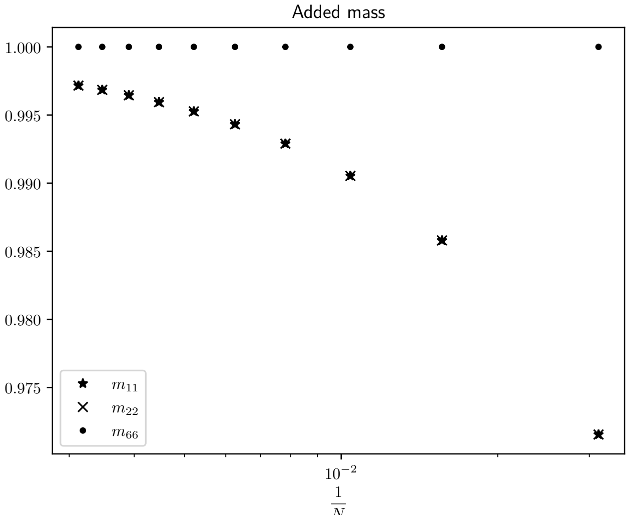


Figure: Her plottes utregnet som andel av teoretisk verdi.

Ellipsen

Potensialet er gitt ved[5]

$$\phi = U\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\left(b\cos\alpha\cos\eta + a\sin\alpha\sin\eta\right)\exp(-\xi) - \frac{\Gamma\eta}{2\pi},$$

hvor $\xi + i\eta$ er elliptiske koordinater, Γ er sirkulasjonen, og α er angripsvinkelen.
Når det er ingen sirkulasjon, har vi

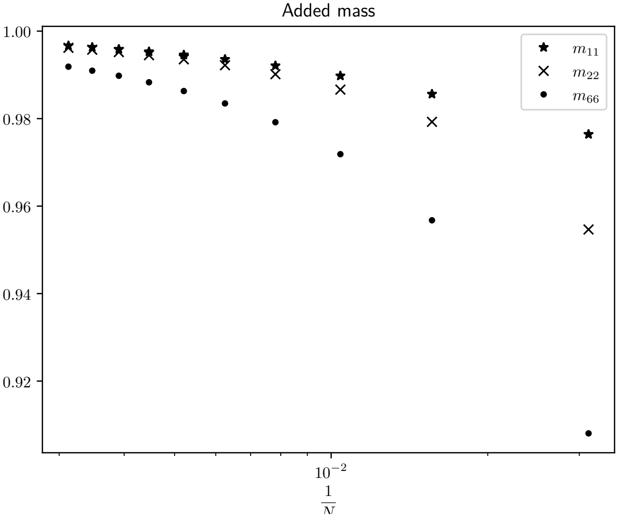
$$T = \frac{\pi\varrho U^2}{2}\left(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha\right).$$

Når det er sirkulasjon, men ingen forflytning, har vi

$$T = \frac{\pi\varrho\omega^2}{16}\left(a^2 - b^2\right)^2.$$

[5] [1] Kennard, sect.84

Resultat



Kvadratet

For kvadratet, gir KENNARD ingen utledning for m_{11}, og nevner ikke m_{66}, men disse gis henholdsvis av TAYLOR[6] og NEWMAN.[7]

For et kvadrat, vil selvfølgelig $m_{11} = m_{22}$, og de vil være gitt ved

$$m_{11} = 8\left(K^2/\pi - 1/2\right)\varrho a^2.$$

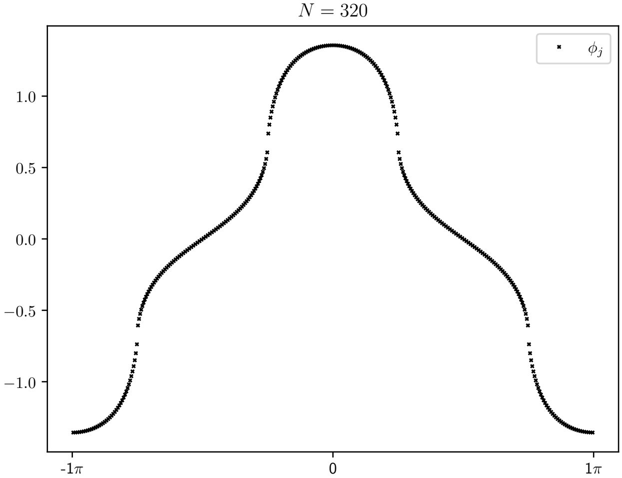
For m_{66} finnes det ikke enda en kortfattet analytisk løsning, så vi får nøye oss med

$$m_{66} \approx 0.72457\varrho a^4.$$

[6] [7] TAYLOR (1930)
[7] [4] NEWMAN (1978)

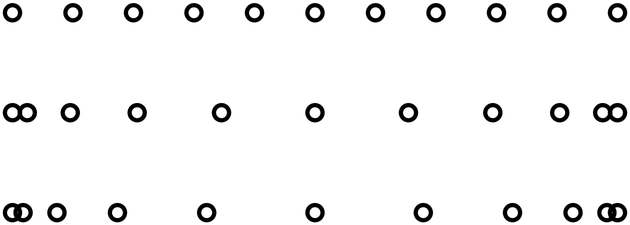
Problemer med naiv diskretisering

Ved å diskretisere kvadratet direkte, og unngå å legge midtpunkter i hjørnene, får vi følgende potensial i første mode.



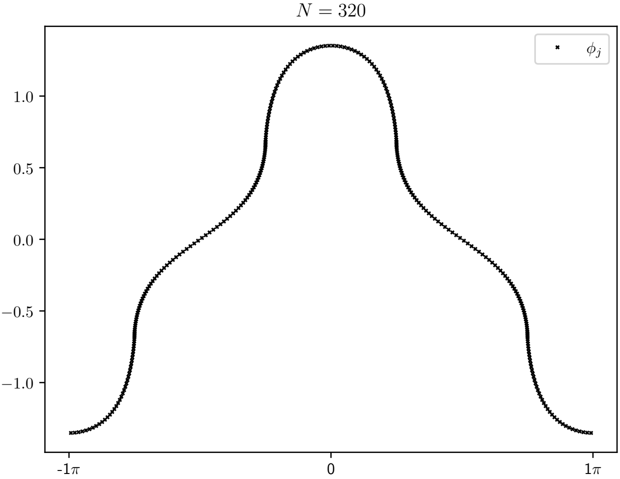
Diskretisering av kvadratet

Vi bør åpenbart forbedre oppløsning i hjørnene.

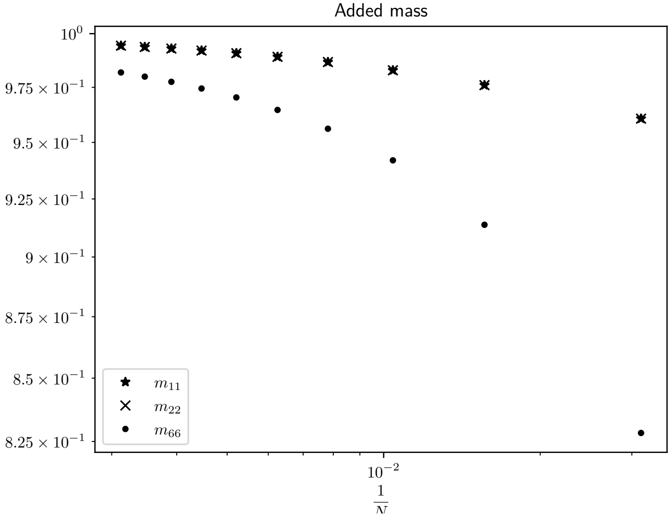


$$Ч_n = -\cos\left(\frac{\pi n}{N-1}\right), \qquad J_n = -\mathrm{cd}\left(\frac{2Kn}{N-1}\right)$$

Resultat av JACOBI-noder



Resultat



Added mass
10^0
9.75×10^{-1}
9.5×10^{-1}
9.25×10^{-1}
9×10^{-1}
8.75×10^{-1}
8.5×10^{-1}
8.25×10^{-1}
10^{-2}
$\frac{1}{N}$
m_{11}
m_{22}
m_{66}

MA2: Kreftene på og responsen til et rektangel i hiv

Et legeme formet som et rektangel flyter på havoverflaten, med lengde L og dypgang D. Programmeringsmessig måtte derfor klassen `IntegralEquation` tilpasses til en ny GREEN-funksjon. Dypgangen ble satt til 1, og lengden ble satt til 0.1, 1, 2, og 10. På disse skulle følgende finnes:

- Radiasjons- og diffraksjonspotensial
- Addert masse
- Eksitasjonskraft
- Hivsutslag

Jeg viser bare eksitasjon og utslag, da det er disse som er interessante.

Som forberedelse til MA3, ble én oppgave fra NEWMANs bok gjort.[8]

[8] [5] NEWMAN, p.337

Bølgeteori

Fra den kinematiske grensebetingelsen $\mathrm{D}_t \eta = \partial_y \Phi$ får vi av den lineariserte BERNOULLI-likningen, den dynamiske grensebetingelsen

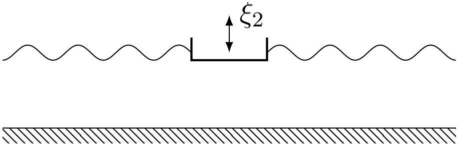
$$\partial_t^2 \Phi = -\mathrm{g} \partial_y \Phi.$$

Vi ønsker å se hvordan en slik inkommende bølge påvirker et flytende legeme. Først antar vi at legemet bare svinger opp og ned. Da har vi også en kinematisk randbetingelse på legemet,

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{B}} = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla \Phi_{\mathrm{R}}, \qquad \boldsymbol{u}_{\mathrm{B}} = \partial_t \xi_2 \hat{\boldsymbol{\jmath}}.$$

Vi sier at

$$\Phi_{\mathrm{R}} = \operatorname{Re}\left(i\omega \hat{\xi}_2 \phi_2 \exp\left(i\omega t\right)\right).$$



Radiasjonsdemping

Fra Bernoullis likning, får vi at trykket er gitt ved $p = i\varrho\omega\hat{\xi}_2\phi_2$, så kraften kan dekomponeres i reell og imaginær del. Vi får da et nytt ledd i radiasjonsdempingstensoren

$$\mathfrak{r} = -\varrho \operatorname{Im} \int_S \phi \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S.$$

Tolkningen av at denne står for et imaginært bidrag er at den vil være ute av fase med akselerasjonen, men i fase med hastigheten. Dempingen beskriver altså energien tapt når legemet produserer bølger, som vi kan tilnærme med

$$r_{22} = \frac{\varrho\omega}{2}\left(\left|A_2^{\infty}\right|^2 + \left|A_2^{-\infty}\right|^2\right),$$

$$A_2^{\pm\infty} = \mp \int_{S_{\mathrm{B}}} (\kappa\phi_2\hat{\boldsymbol{n}}^* + i\hat{n}_2)e^{\kappa(y \pm ix)} \, \mathrm{d}S.$$

Innkommende, diffraktive, og radiative bølger

Vi antar en innkommende bølge

$$\phi_0 = \frac{ig}{\omega} \exp\big(\kappa(y - ix)\big), \qquad \omega^2 = \kappa g.$$

Istedenfor å bare la legemet svinge, holder vi det fast, og ser hva som skjer med de innkomende bølgene:

$$-\pi\phi_{\mathrm{D}} + \int_{S_{\mathrm{B}}} \phi_{\mathrm{D}} \partial_{\hat{\boldsymbol{n}}} \,\mathrm{G}\; \mathrm{d}S = -2\pi\phi_0,$$

$$\Phi_{\mathrm{D}} = \mathrm{Re}\,\big(A(\phi_0 + \phi_7)\exp(i\omega t)\big).$$

Det diffraktive potensialet her gir oss altså den innkommende bølgen ϕ_0, og det transmitterte-reflekterte potensialet ϕ_7. Det at legemet holdes stille gir oss impermeabilitetsrandbetingelsen at $\partial_{\hat{\boldsymbol{n}}}\phi_0 = -\partial_{\hat{\boldsymbol{n}}}\phi_7$. Hele bølgesystemet når vi tillater legemet å bevege seg kan da gis ved $\Phi = \Phi_{\mathrm{R}} + \Phi_{\mathrm{D}}$.

GREEN-funksjon

GREEN-funksjonen for dypvann er gitt ved[9]

$$\mathrm{G} = \ln \frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mathfrak{x}}|}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mathfrak{x}}^*|} + \mathrm{Re}\,(f_1) + i\,\mathrm{Re}\,(f_2);$$

$$f_1 = -2\big(\mathrm{E}_1(\mathfrak{z}) + \ln(\mathfrak{z}) - \ln(-\mathfrak{z})\big)\exp\mathfrak{z}, \qquad f_2 = 2\pi\exp\mathfrak{z},$$

hvor $\mathfrak{z} = i\kappa(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mathfrak{x}}^*)$ og κ er bølgetallet til den innkommende bølgen.

Nå kan ϕ_j være kompleks.

[9] [8] WEHAUSEN & LAITONE, eq.3.28, p.481, $\Gamma = 0$, $Q = 2\pi$.

Eksitasjon

Fra Bernoullis likning får vi at diffraksjonspotensialet forårsaker en kraft

$$Y = -i\omega\varrho \int_{S_\mathrm{B}} \phi_\mathrm{D} \hat{n}_2 \,\mathrm{d}S.$$

Det finnes en del forskjellige måter å tilnærme denne kraften. Froude–Krylov-kraften er gitt ved å anta at ϕ_7 ikke bidrar til trykkfeltet,

$$Y^\mathrm{FK} = -i\omega\varrho \int_{S_\mathrm{B}} \phi_0 \hat{n}_2 \,\mathrm{d}S.$$

Vi har Haskinds første relasjon, ved Greens teorem at

$$Y^\mathrm{H1} = -i\omega\varrho \int_{S_\mathrm{B}} \left(\phi_0 \partial_{\hat{\boldsymbol{n}}} \phi_2 - \phi_2 \partial_{\hat{\boldsymbol{n}}} \phi_0\right) \mathrm{d}S,$$

og Haskinds andre relasjon at

$$Y^\mathrm{H2} = i\varrho\omega \int_{S_L} \left(\phi_0 \partial_{\hat{\boldsymbol{n}}} \phi_2 - \phi_2 \partial_{\hat{\boldsymbol{n}}} \phi_0\right) \mathrm{d}S = i\varrho \mathrm{g} A_2^{-\infty}.$$

Sammenlikning av tilnærmingene

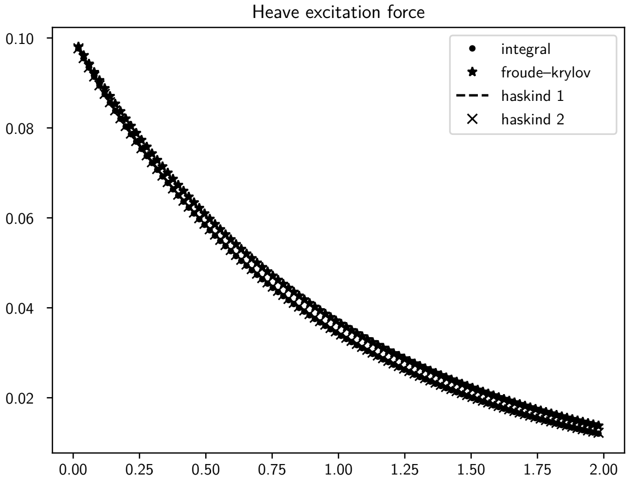


Figure: Her er ${}^{L}/_{D} = 0.1$, og horisontalaksen κD.

Sammenlikning av tilnærmingene

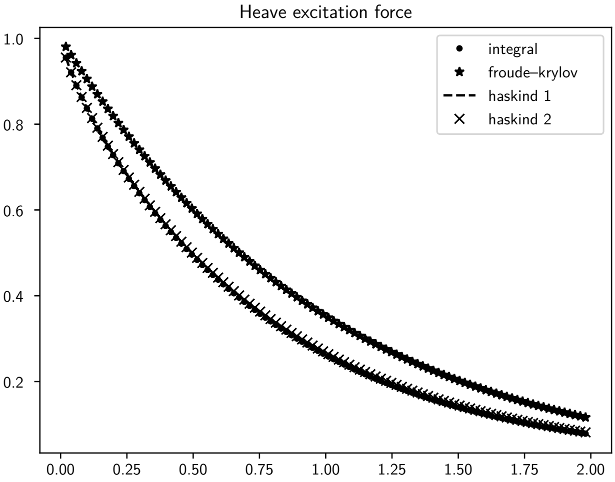


Figure: $^{L}/_{D} = 1$

Sammenlikning av tilnærmingene

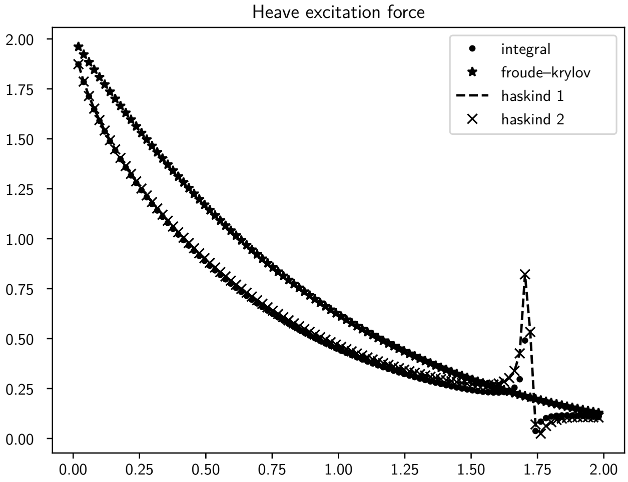


Figure: $L/D = 2$

Sammenlikning av tilnærmingene

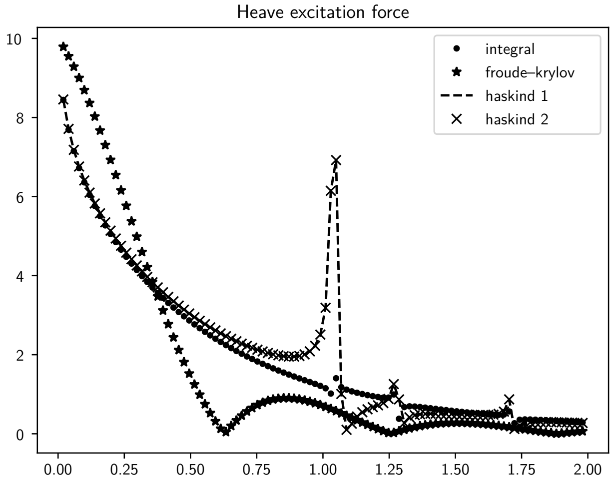


Figure: $L/D = 10$

Frekvenser

Hvor eksitasjonskraften får en diskontinuitet er der FREDHOLM-integrallikningen har en irregulær frekvens. Kort fortalt, er dette hvor GREEN-funksjonen har randbetingelser som ikke samsvarer.[10]

Hvis vi antar at summen av kreftene på legemet resulterer i hiveksitasjonen, vil

$$\frac{\hat{\xi}_2}{A} = \frac{Y}{c_{22} - \omega^2(m + m_{22}) + i\omega r_{22}}, \qquad c_{22} = \varrho \mathrm{g} S.$$

Vi noterer at om et legeme flyter, må massen til legemet være likt massen til vannet det forflytter—$m = \varrho LD$. Om vi nå ser bort fra demping, og antar de hydrostatiske og treghetskreftene er like, vil

$$\omega^2 = \frac{\mathrm{g}}{D\left(1 + \frac{m_{22}}{\varrho LD}\right)}.$$

[10] [2] LEE *et al.* (1996)

Resultater, utslag i hiv

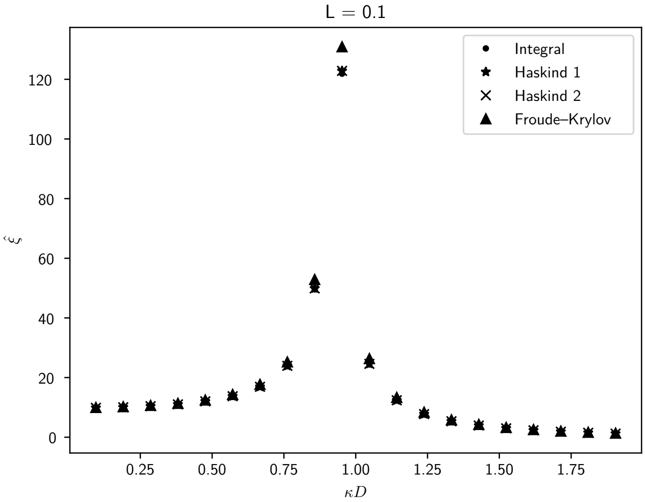


Figure: $L/D = 0.1$

Resultater, utslag i hiv

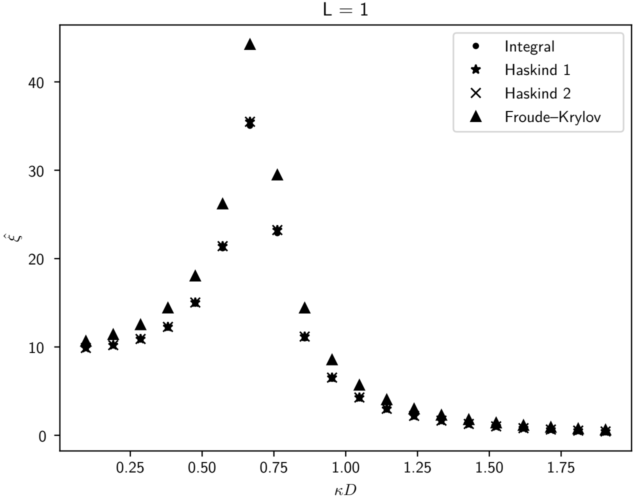


Figure: $^{L}/_{D} = 1$

Resultater, utslag i hiv

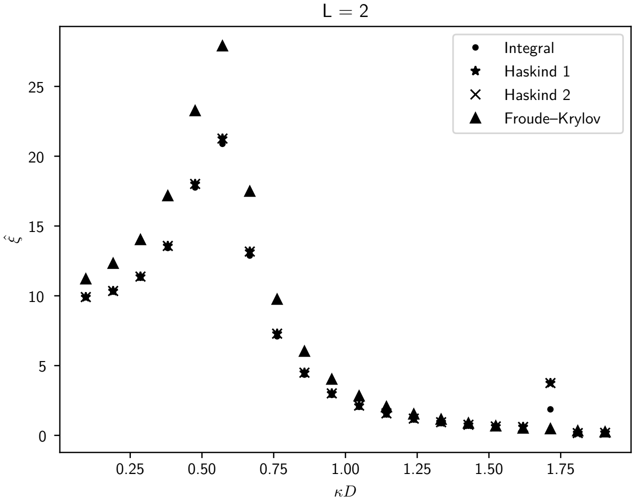


Figure: $^{L}/_{D} = 2$

Resultater, utslag i hiv

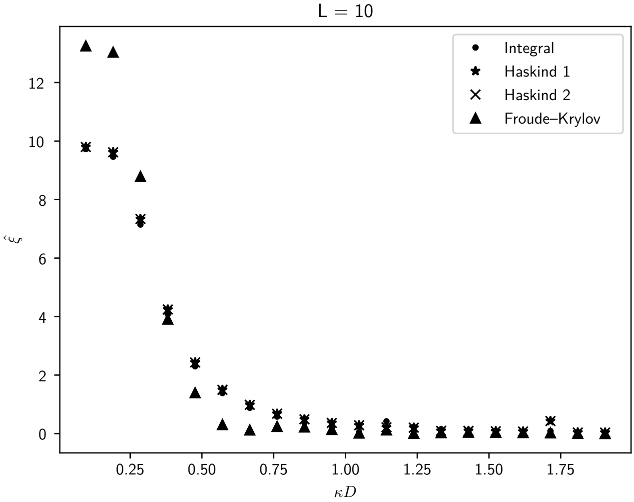


Figure: $^{L}/_{D} = 10$

Krefter på en sparbøye

En sirkulær sparbøye med dypgang D og diameter d flyter fritt. Regn ut de hydrostatiske gjenopprettende kreftene og momentene. Tilnærm den naturlige frekvensen i hiv, ved å anta at bøyen er såpass tynn at addert masse og demping kan neglisjeres i forhold til sparbøyens masse. Tilnærm også Froude–Krylov-eksitasjonskraften og deretter demping fra stasjonær fase-approksimasjonen.

Hydrostatikk

Si oppdriftssenter og tyngdesenter henholdsvis er y_B og y_G. Fortrengt volum er gitt ved $\not{V} = S \times D$, hvor $S = \pi d^2/4$ er vannlinjearealet til bøyen. De hydrostatiske gjenopprettende kreftene er gitt ved

$$c_{22} = \varrho \mathrm{g} S$$

$$c_{44} = \varrho \mathrm{g} S_{33} + \varrho \mathrm{g} \not{V} (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{G}), \qquad c_{66} = \varrho \mathrm{g} S_{11} + \varrho \mathrm{g} \not{V} (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{G}).$$

Her er

$$S_{11} = \int_{S_\mathrm{B}} x^2 \,\mathrm{d}S = \int_0^{d/2} \int_0^{2\pi} r^3 \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta \mathrm{d}r,$$

$$S_{33} = \int_{S_\mathrm{B}} z^2 \,\mathrm{d}S = \int_0^{d/2} \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta \mathrm{d}r.$$

Vi har altså

$$c_{22} = \frac{\pi \varrho \mathrm{g} d^2}{4}, \qquad c_{44} = c_{66} = \frac{\pi \varrho \mathrm{g} d^4}{64} + \frac{\pi \varrho \mathrm{g} D d^2 (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{G})}{4}.$$

Naturlig frekvens

Vi vet at vi får den naturlige frekvensen når $\hat{\xi}/A$ er singulær, som betyr at

$$c_{22} - {\omega_\mathrm{n}}^2 m = 0.$$

Siden bøyen flyter, må dens masse være $m = \varrho V\!\!\!/$. Altså,

$$m = \frac{\pi \varrho D d^2}{4}, \qquad c_{22} = \frac{\pi \varrho \mathrm{g} d^2}{4}.$$

Da får vi

$$\omega_\mathrm{n} = \sqrt{\frac{\mathrm{g}}{D}}.$$

Enhetene er s^{-1}, som er et godt tegn.

Eksitasjonskraft og demping

FROUDE–KRYLOV-kraften får vi som sagt fra

$$Y^{\mathrm{FK}} = -i\omega\varrho \int_{S_{\mathrm{B}}} \phi_0 \hat{n}_2 \,\mathrm{d}S, \qquad \phi_0 = i\,{}^{\mathrm{g}}\!/\!{}_{\omega} \exp\left(\kappa(y - ix)\right).$$

Ser vi for oss sparen, innser vi at selv om S_{B} består av et sylinderskall og en bunnplate, vil normalvektoren kun samsvare med bunnplaten. Vi trenger derfor ikke integrere over sylinderskallet:

$$Y^{\mathrm{FK}} = -i\varrho e^{-\kappa D} \int_{|\mathfrak{z}| \leq {}^{d}\!/\!{}_{2}} e^{-i\kappa x} \,\mathrm{d}\mathfrak{z} = \frac{\pi\varrho \mathrm{g} d^2 e^{-\kappa D}}{4}.$$

Vi kan nå bruke at[11]

$$r_{22} = \frac{\left|Y^{\mathrm{FK}}\right|^2}{2\varrho \mathrm{g} c_g} = \frac{\omega\varrho\pi^2 d^4}{16} \exp\left(-2\kappa D\right), \qquad c_g = \partial_k \omega.$$

[11] [5] NEWMAN, eq.174, p.316

MA3: Forankringsdynamikken til en flytende vindturbin

En stor problemstilling for flytende vind er høye kostnader knyttet til forankring. Vi ønsker å forankre en sparbøye med fiberrep med en slik ankerradius at de elastiske frekvensene overstiger de for vind i jag og bølger i hiv. Derfor skal følgende temaer presenteres:

- Hookes lov
- Forankringssystemer
- Ankerradius for forskjellige turbiner

Hookes lov

Vi husker følgende uttrykk for bevegelseslikningen for et fjærmassesystem.

$$X = m\partial_t^2 \xi = -k\xi, \qquad \xi(t) = \hat{\xi}\sin(\omega t), \qquad \omega = \sqrt{k/m}$$

Vi går ikke veldig i dybden på elastisitet, men vi noterer oss at Hookes lov også kan formuleres med hensyn på strekkspenning $\mathfrak{P}$ og tøyning ε.[12]

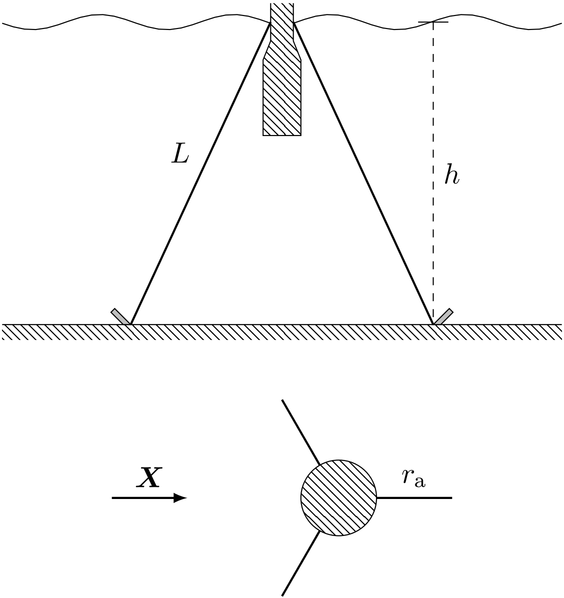
$$\mathfrak{P} = \varepsilon \mathrm{E}, \qquad L\varepsilon = \xi,$$

hvor E er Youngs modul, en empirisk verdi, og spenningen er definert til å være kraften per flateareal. Vi har altså at den effektive fjærstivheten kan gis ved

$$k = \frac{\mathrm{E}A}{L}.$$

[12] [6] Sokolnikoff, p.68

Forankringssystemer



Addert masse

Massen vi ser på i forankringssystemet er $m + m_{11}$ i jag, og $m + m_{22}$ i hiv. I jag tilnærmer vi den adderte massen å være fortrengt vannmasse. I hiv kan vi regne den ut. Ved å bruke oblate sfæroidiske koordinater,[13] kan vi finne den kinetiske energien til en sirkulær disk med radius a som beveger seg perpendikulært til flaten,

$$T = \frac{k' m_{22} U^2}{2} = \frac{4\varrho a^3 U^2}{3}, \qquad k' = \frac{2}{\pi}.$$

For sparbøyen, vil denne platen tilsvare bunnflaten, hvor baksiden ikke vil kunne opptas av fluid, som betyr at vi må halvere den adderte massen,

$$m_{22} = \frac{2\pi \varrho {r_2}^3}{3}.$$

[13] [1] KENNARD, pp.356–361

Egenperioder

Vi har dermed

$$k_{\text{jag}} = \frac{2\text{E}A}{L}\cos^2\alpha, \qquad k_{\text{hiv}} = \frac{3\text{E}A}{L}\sin^2\alpha + c_{22}$$

hvor $\alpha = \arcsin\left({}^{h}\!/\!{}_{L}\right)$. Periodene er gitt ved

$$T_{\text{jag}} = 2\pi\sqrt{\frac{m+m_{11}}{k_{\text{jag}}}}, \qquad T_{\text{hiv}} = 2\pi\sqrt{\frac{m+m_{22}}{k_{\text{hiv}}}}$$

Vi har lyst til å finne en ankerradius r_{a} som gir egenperioder lenger enn $40\,\text{s}$ i jag, og $20\,\text{s}$ i hiv.

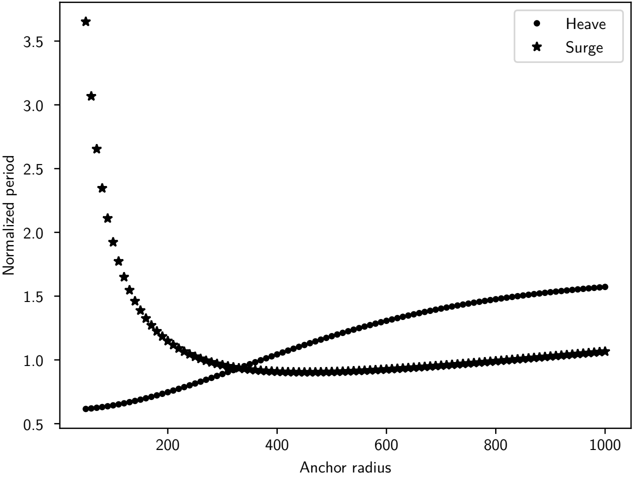
Første case

Vi har en sparvindturbin med masse $m = 2.3864 \times 10^7\,\mathrm{kg}$, øvre radius $r_1 = 5\,\mathrm{m}$, og nedre radius $r_2 = 9\,\mathrm{m}$. Havdybden er $320\,\mathrm{m}$. Vi er gitt $\mathrm{E}A = 6 \times 10^8\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$ for et polyesterrep. Vi søker gjennom ankerradiuser, og finner at ved $r_\mathrm{a} = 830\,\mathrm{m}$, har vi

$$k_\mathrm{jag} = 1.17 \times 10^6\,\mathrm{kg\,s^{-2}}, \qquad k_\mathrm{hiv} = 1.05 \times 10^6\,\mathrm{kg\,s^{-2}};$$

$$T_\mathrm{jag} = 40.05\,\mathrm{s}, \qquad T_\mathrm{hiv} = 29.87\,\mathrm{s}.$$

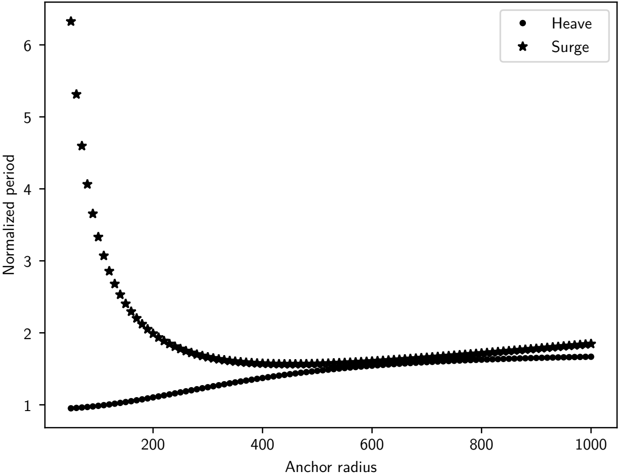
Resultater



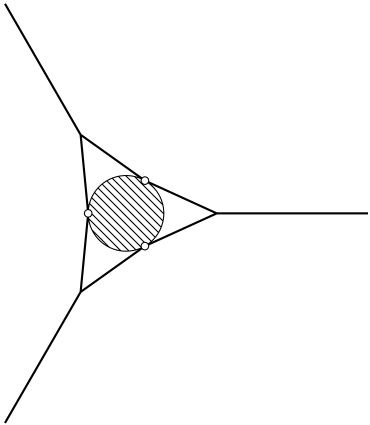
Heave
Surge
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
Normalized period
200
400
600
800
1000
Anchor radius

Andre case

Vi prøver nå nylon i stedet, som har $\mathrm{E}A = 2 \times 10^8\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$.



Girkontroll med kråkefot



Gir

Kråkefotoppsettet tilsvarer mekanisk et system med bjelker av lengde r_f. I lina har vi satt en føroppspenningskraft $\boldsymbol{F} = 2 \times 10^6\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$ så den ikke skal være slakk, som vil motvirke vridning i alle tre repene i gir, slik at stivheten blir

$$k_\mathrm{gir} = 3 \times r_\mathrm{f} \times F \cos\alpha.$$

Treghetsmomentet $I_y = 2.0496 \times 10^8\,\mathrm{kg\,m^2}$ finnes ved hjelp av programvaren 3DFloat. Vi får da

$$T_\mathrm{gir} = 2\pi\sqrt{\frac{I_y}{k_\mathrm{gir}}}.$$

Simuleringer i 3DFloat har vist ustabil oppførsel i gir for små ankerradiuser. Liten ankerradius tilsvarer vinkel tilnærmet 90°, og nesten ingen stivhet i gir.

Giringsvinkel grunnet vind

Vindturbiner har rotortilt så ikke bladene skal treffe tårnet. I tillegg til dette, vil vindene bikke på tårnet, så vi har en totaltilt på si 12°. Vi er gitt en typisk effekt og vinkelfrekvens, gitt henholdsvis ved

$$P = 15 \times 10^6\,\mathrm{W}, \qquad \omega = 0.747\,57\,\mathrm{rad\,s^{-1}}.$$

Momentet er gitt ved

$$M_{\mathrm{gir}} = {}^{P}/_{\omega} \sin\left(12^\circ\right),$$

og gitt k_{gir}, finner vi giringsvinkelen ved

$$\theta_{\mathrm{gir}} = \frac{M_{\mathrm{gir}}}{k_{\mathrm{gir}}}.$$

Stamp

Vi forenkler veldig, og sier stivheten i stamp er lik c_{44}. Vi ignorerer altså effekten av linene og den adderte massen. Fra 3DFloat får vi at $y_\mathrm{B} = -53.5\,\mathrm{m}$ og $y_\mathrm{G} = -65.7\,\mathrm{m}$. Da har vi

$$k_\mathrm{stamp} = mg(y_\mathrm{B} - y_\mathrm{G}) + \frac{\pi \varrho g r^4}{4}.$$

Vi finner momentet i 3DFloat, og ved parallellakseteoremet, har vi

$$T_\mathrm{stamp} = 2\pi\sqrt{\frac{I'_{yy}}{k_\mathrm{stamp}}}, \qquad I'_{yy} = m{y_\mathrm{G}}^2 + 7.3463 \times 10^{10},$$

som er konstant med hensyn på ankerradius. Vi ønsker å bruke momentet ved vannoverflaten, ikke tyngdesenteret.

[1] Kennard, Earle H. *Irrotational Flow of Frictionless Fluids, Mostly of Invariable Density.* U.S. Government Printing Office, 1967.

[2] Lee, Chang Ho, Newman, John Nicholas, and Zhu, X. “An Extended Boundary Integral Equation Method for the Removal of Irregular Frequency Effects”. In: *International journal for numerical methods in fluids* 23 (1996), pp. 637–660.

[3] Markuševič, Aleksey Ivanovič (Маркушевич). *Theory of Functions of a Complex Variable, Volume II.* Ed. by Richard A. Silverman. Prentice-Hall, inc., 1965.

[4] Newman, John Nicholas. “Added Moment of Inertia of Two-dimensional Cylinders”. In: *Journal of Ship Research* 23.1 (1979).

[5] Newman, John Nicholas. *Marine Hydrodynamics.* The MIT press, 2018.

[6] SOKOLNIKOFF, Ivan Stephan. *Mathematical THeory of Elasticity.* McGraw–Hill Book Company, Inc., 1956.

[7] TAYLOR, J. Lockwood. "Some Hydrodynamical Inertia Coefficients". In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 9:55 (1930), pp. 161–183.

[8] WEHAUSEN, John V. and LAITONE, Edmund V. "Surface Waves". In: *Encyclopedia of Physics.* Ed. by Siegfried FLÜGGE. Vol. IX. Springer-Verlag, 1960.

[9] WENDLAND, W. L. "Boundary Element Methods and their Asymptotic Convergence". In: *Theoretical Acoustics and Numerical Techniques.* Ed. by P. FILIPPI. Springer-Verlag, 1983.