Задача 1. *Прибор для выявления брака на фабрике имеет вероятность ошибки 5% (и первого и второго рода), процент брака составляет 5% от всего объёма выпускаемой продукции.*

1. *Какая вероятность того, что мы выявили брак, если прибор выдал положительный результат - "продукция бракованная"?*
2. *Почему же в жизни все-таки используют такие приборы? Что можно было бы изменить в процедуре поиска брака, не меняя точности прибора, так, чтобы вероятность из первого вопроса $\mathbb{P}(\text{брак} \mid +)$ выросла?*
3. *Какое соотношение можно вывести между процентом брака $\mathbb{P}(\text{брак})$ и ошибкой прибора, если мы хотим, чтобы прибор работал лучше честной монетки, хуже или также?*

Решение. 1. Это прямое применение теоремы/формулы Байеса.

B – брак

$\bar{B}$ – не брак

$'+'$ – положительный результат прибора, т.е. продукция бракованная

$'-'$ – отрицательный результат прибора, т.е. продукция бракованная

Даны следующие вероятности:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= 0.05\\ \mathbb{P}(+ \mid \bar{B}) &= 0.05\\ \mathbb{P}(- \mid B) &= 0.05\\ \mathbb{P}(B \mid +) &= ?\end{aligned}$$

Осталось применить формулу Байеса:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B \mid +) = \frac{\mathbb{P}(+ \mid B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(+)} &= \frac{\mathbb{P}(+ \mid B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(+ \mid \bar{B})\mathbb{P}(\bar{B}) + \mathbb{P}(+ \mid B)\mathbb{P}(B)}\\ &= \frac{0.95 \cdot 0.05}{0.05 \cdot 0.95 + 0.95 \cdot 0.05} = 0.5\end{aligned}$$

Отсюда выводим, что прибор довольно бесполезен, если его использовать так наивно.

2. Уверенность в предсказании прибора дает повторение теста несколько раз. Давайте посчитаем, какой вывод бы сделали, если бы и второй тест был положительным:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B \mid ++) &= \frac{\mathbb{P}(+ \mid B)^2\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(+ \mid \bar{B})^2\mathbb{P}(\bar{B}) + \mathbb{P}(+ \mid B)^2\mathbb{P}(B)}\\ &= \frac{0.95^2 \cdot 0.05}{0.05^2 \cdot 0.95 + 0.95^2 \cdot 0.05} = 0.95\end{aligned}$$

В этом случае мы получаем вероятность 0.95, что намного выше 0.5, получаемой при применении теста только один раз.

3. Я не уверен, что понимаю вопрос до конца. Попробую ответить как я понял. Если обозначить за A – точность прибора, $1 - x$ – вероятность ошибки, y – процент брака и возвращаться к формуле, получаем:

$$\frac{1}{A} = 1 + \frac{1 - x - y - xy}{xy} = 2 + \frac{1 - (x + y)}{xy}$$

Дальше, если хотим точность выше монетки, т.е. $A > 0.5$, то надо решить неравенство

$$2 + \frac{1 - (x + y)}{xy} < 2 \iff \frac{1 - (x + y)}{xy} < 0 \iff x + y > 1.$$

В случае точности такой же, как у монетки, получаем $x + y = 1$, что на самом деле наш случай. Действительно, у нас $y = 1 - x = 0.05$. Аналогично, если точность меньше, то $x + y < 1$.

На самом деле, если оставить не x, а саму ошибку $1 - x$, которую переобозначим за z, получаем более наглядный ответ:

$$\begin{aligned} \text{Выше} &\iff z < y \\ \text{Также} &\iff z = y \\ \text{Ниже} &\iff z > y. \end{aligned}$$