Лабораторная работа №1

«Исследование динамики линейных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями»

1. Цель работы

Ознакомиться с пакетом моделирования MatLab. Освоить основные приемы моделирования САУ, описываемых при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений.

2.Указания к самостоятельной работе

До начала работы необходимо по литературе 1), 2) и по данным методическим указаниям ознакомиться с основными компонентами и возможностями прикладного пакета программ, а так же с методом математического моделирования САУ путем понижения порядка ДУ.

3.Краткие теоретические сведения.

Поведение динамической линейной системы автоматического управления может быть описано скалярным дифференциальным уравнением n-го порядка

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = \\ = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \ldots + b_1 u^{(1)} + b_0 u, \tag{1.1}$$

где y – выходная переменная; u – входной сигнал; m – порядок производной входного сигнала; a_i и b_j – постоянные коэффициенты.

При условии, что m<n, уравнение (1.1) можно записать в виде системы уравнений первого порядка

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \alpha_{11}\cdot x_1 + \alpha_{12}\cdot x_2 + \ldots + \alpha_{1n}\cdot x_n + \beta_1 \cdot u, \\ x_2^{(1)} = \alpha_{211}\cdot x_1 + \alpha_{22}\cdot x_2 + \ldots + \alpha_{2n}\cdot x_n + \beta_2 \cdot u, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(1)} = \alpha_{n1}\cdot x_1 + \alpha_{n2}\cdot x_2 + \ldots + \alpha_{nn}\cdot x_n + \beta_n \cdot u, \\ y = C_1\cdot x_1 + C_2\cdot x_2 + \ldots + C_n\cdot x_n, \end{cases} \tag{1.2}$$

где x_i – координаты вектора состояния, α_{ii} и β_i – постоянные коэффициенты.

Система может быть представлена в компактной векторно-матричной форме:

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (1.3)$$

$$y = Cx + Du$$

где A – nxn – мерная матрица постоянных коэффициентов системы; B – nx1 – мерная матрица постоянных коэффициентов входа; c – 1xn – мерная матрица постоянных коэффициентов выхода; X – n-мерный вектор состояния.

1.1 Приведение к нормальной форме Коши

Нормальной формой Коши принято называть общую форму записи ОДУ, то есть представление в виде системы n дифференциальных уравнений первого порядка:

$$x_i' = (t = f_i(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), t)),$$
$$i = 1, 2, \ldots n \qquad (1)$$

Пусть ДУ второго порядка имеет вид:

$$x'' + 2x' + 2x = 2e^{-t}\cos t \quad (2)$$

Задание предполагает нахождение решения $X(t)$ на интервале $t_0 < t < t_f$ при следующих начальных условиях (т.е. нахождение частного решения ДУ при заданных начальных условиях) :

$$t_{ta\div} = 0$$
$$t_{en} = 10$$
$$x_0 = 1$$
$$x_0' = 0 \qquad (3)$$

Для решения ДУ его просто необходимо представить согласно нормальной формы Коши. Для этого руководствуемся следующими обозначениями:

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t) \\ x_2(t) = x'(t) \end{cases} \quad (4)$$

В итоге имеется система ДУ первого порядка вида:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = f(x_1(t), x_2(t), t) \end{cases} \quad (5)$$

Произведя все вышеописанные манипуляции над заданным в варианте уравнением, получим следующую систему:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t); \\ x_2'(t) = -2e^{-t}\cos t - 2x_2(t) - 2x_1(t) \end{cases} \quad (6)$$

Система (6) есть решение уравнения (2).

1.2 Метод Рунге-Кутты второго порядка

В методах Рунге-Кутты интеграл заменяется линейной комбинацией значений подынтегральной функции, вычисленных при разных значениях аргумента:

$$x(t_k) = x(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x(t), t)dt \quad (7)$$

Метод Рунге-Кутты представим в виде:

$$x(t_k) = x(t_{k-1}) + h \cdot \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F_i$$
$$F_1 = f(x(t_{k-1}), t_{k-1})$$
$$F_2 = f(x(t_{k-1}) + h\beta_1 F_1, t_{k-1} + \varphi_1 h)$$
…………………………………………………………………
$$F_s = f(x(t_{k-1}) + h \cdot \beta_n \cdot F_{m-1}, t_{k-1} + \varphi_{m-1} h) \quad (8)$$

Из вышеуказанных общих формул (8) получают формулы метода Рунге-Кутты 2-ого порядка m=2;

$$x(t_k) = x(t_{k-1}) + h(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2)$$
$$F_1 = f(x(t_{k-1}), t_{k-1});$$
$$F_2 = f(x(t_{k-1}) + \beta \cdot h \cdot F_1, t_{k-1} + \eta \cdot h); \quad (9)$$

Для определения метода необходимо найти значения вещественных коэффициентов: $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \eta$. Для этого интеграл, заменяемый линейной комбинацией значений подынтегральной функции, вычисленных при разных значениях аргумента, можно представить как:

$$\varphi(h) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x(t), t)dt = h(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2) \quad (10)$$

А его, в свою очередь, можно представить рядом Тейлора:

$$\varphi(h) = \varphi(0) + h \cdot \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2} \cdot h^2 + O(h^3) \quad (11)$$

где $O(h^3)$ - сумма элементов ряда Тейлора, степень которых не ниже 3.

Осталось найти неизвестные значения $\varphi(0), \varphi'(0), \varphi''(0)$

$$
\begin{aligned}
&\varphi(0) = \varphi(h)\big|_{h=0} = 0 \cdot (\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2) = 0 \\
&\varphi'(0) = \varphi'(h)\big|_{h=0} = \left[(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2) + h \cdot (\alpha_1 F'_{1t} + \alpha_2 F'_{2t})\right]_{h=0} = (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot f(x(t_{k-1}), t_{k-1}) \\
&\varphi''(0) = \varphi''(h)\big|_{h=0} = \left[h \cdot (\alpha_1 F''_{1tt} + \alpha_2 F''_{2tt}) + (\alpha_1 F'_{1t} + \alpha_2 F'_{2t}) + (\alpha_1 F'_1 + \alpha_2 F'_2)\right]_{h=0} = \\
&= 2 \cdot (\alpha_1 F'_{1t} + \alpha_2 F'_{2t}) = 2\alpha_2 (f \cdot f'_x \cdot \beta + f'_t \cdot \eta)
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

В результате таких бесхитростных манипуляций получаем искомый ряд Тейлора:

$$\varphi(h) = h \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot f(x(t_{k-1}), t_{k-1}) + h^2 \cdot 2\alpha_2 (f \cdot f'_x \cdot \beta + f'_t \cdot \eta) \quad (13)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях h в выражениях

(11) и (13). В итоге получим систему уравнений вида:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ 2\alpha_2 \beta = 1 \\ 2\alpha_2 \eta = 1 \end{cases} \quad (14)$$

Из свойств системы (14) следует отметить, что она не обладает единственным решением. При $\alpha_2 = \frac{3}{4}$ значение $\alpha_1 = \frac{1}{4}$, значение $\beta = \frac{2}{3}$, а $\eta = \frac{2}{3}$ (15)

Подставив полученные коэффициенты в соотношение (8), получаем следующие формулы метода Рунге-Кутты 2-ого порядка:

$$x(t) = x(t_{k-1}) + h/4(F_1 + 3F_2)$$

$$
\begin{aligned}
&F_1 = f(x(t_{k-1}), t_{k-1}) \\
&F_2 = f(x(t_{k-1}) + 2h/3F_1, t_{k-1} + 2h/3)
\end{aligned}
\quad (16)
$$

4.Порядок выполнения работы

4.1. Ознакомиться с пакетом прикладных программ MatLab .

4.2. Записать дифференциальное уравнение по исходным данным.

3. Исходные данные

Порядок модели n	a_0	a_1	a_2	a_3	b_0
3	5	4	2	1	5

Порядок модели n	$x(0)$	$\dot{x}(0)$	$\ddot{x}(0)$
3	1	0.5	-1

4.3. Привести исходную систему к нормальной форме Коши.

4.3. Написать скрипт и осуществить моделирование системы дифференциальных уравнений в математическом пакете MatLab , используя численный метод интегрирования Рунге-Кутта и задавая н.у. векторами.

4.4 Проанализировать системы при двух видах входных воздействий :

y1 = 1(t) и y2 =2 sin(t).

4.5 На каждое из воздействий найти решение для двух различных начальных условий: нулевые н.у. и $x''(0) = -1$, $x''(0) = 0.5$, $x(0) = 1$

На дисплей выводить графики сигналов X1(t) (синий цвет, сплошная линия) и X2(t) (зеленый цвет, пунктирная линия). Продолжительность интервалов наблюдения выбрать равной T=25 c.

5. Содержание отчета

1.Цель работы

2.Порядок выполнения работы

3.Математическая модель динамической системы

4. Листинги кодов построения графиков переходных процессов:

Листинг 1.1 – приведение дифференциального уравнения к нормальной форме Коши при единичном воздействии;

Листинг 2.1 – решение дифференциального уравнения методом Рунге-Кутта при ненулевых начальных условиях и единичном воздействии;

Листинг 2.2 – решение дифференциального уравнения методом Рунге-Кутта при нулевых начальных условиях и единичном воздействии;

Листинг 3.1 – приведение дифференциального уравнения к нормальной форме Коши при синусоидальном воздействии;

Листинг 4.1 – решение дифференциального уравнения методом Рунге-Кутта при ненулевых начальных условиях и синусоидальном воздействии;

Листинг 4.2 – решение дифференциального уравнения методом Рунге-Кутта при нулевых начальных условиях и синусоидальном воздействии

5. Графики переходных процессов:

Рис. 1 – реакция системы на единичное воздействие при ненулевых начальных условиях;

Рис. 2 – реакция системы на единичное воздействие при нулевых начальных условиях;

Рис. 3 – реакция системы на синусоидальное воздействие при ненулевых начальных условиях;

Рис. 4 – реакция системы на синусоидальное воздействие при нулевых начальных условиях – на единичное воздействие при нулевых и ненулевых н .у. для X1(t) и X2(t) , на синусоидальное воздействие при нулевых и ненулевых н.у. для X1(t) и X2(t).

6. Выводы.