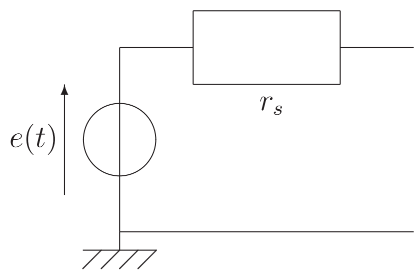
T.P. n$^{\text{o}}$ 1 : modélisation d'un générateur basse fréquence

Objectifs

- Mesures de tensions et de résistances réalisées au multimètre.
- Mettre en application les méthodes vues en MPSI/MP2I et décrites dans le poly de rappels de métrologie :
  - évaluations de type B d'incertitudes-types ;
  - évaluations d'incertitudes-types composées ;
  - comparaison des estimations d'une même grandeur avec l'écart normalisé ;
  - réalisation d'une régression linéaire ;
  - écriture du résultat d'une mesure de manière adaptée.

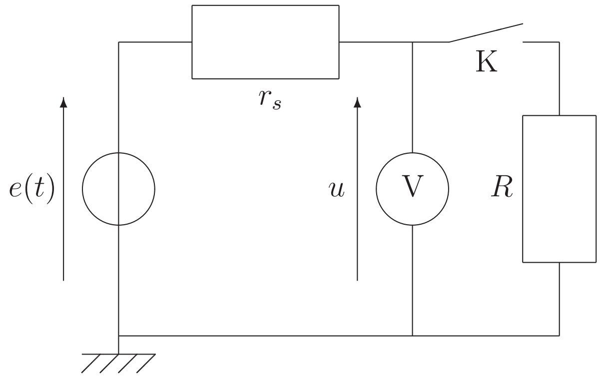
I – Modèle de Thévenin

Un générateur basse fréquence est souvent modélisé par un générateur linéaire (représenté ci-contre), constitué de l'association en série d'un générateur idéal de tension de f.e.m. $e(t)$ et d'une résistance de sortie notée r_s dans la suite.



Problématique Estimer r_s et la valeur efficace de $e(t)$.

Le dispositif de mesure est représenté ci-dessous : il sera obtenu en branchant la boîte de résistances et le multimètre sur la sortie du GBF. L'ouverture du circuit à la hauteur de l'interrupteur K est réalisé en débranchant un des fils connecté à la boîte de résistances.



Dans l'ensemble du TP, l'impédance d'entrée du voltmètre est supposée infinie de sorte que le courant le traversant est nul.

Préparation Exprimer u en fonction de e, r_s et R quand :

- le circuit est ouvert ;
- le circuit est fermé.

En quoi le dispositif permet-il de mesurer E_{eff} et r_s ?

II – Premières manipulations

Régler le générateur basse fréquence de manière à délivrer une tension sinusoïdale $e(t)$ de valeur efficace (RMS) $E_{eff} = 1{,}8$ V et de fréquence 50 Hz, sans terme constant.

1. Déterminer expérimentalement la tension E_{eff} et son incertitude $u(E_{eff})$ à l'aide de la notice fournie.

2. Pour les valeurs données dans le tableau ci-dessous, mesurer la résistance de la boîte de résistance <u>sur le même calibre 200 Ω</u> et compléter le tableau.

R (en Ω)	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Mesure (en Ω)									

Pour le calcul des incertitudes, démarrer Spyder, ouvrir le programme MP01Etd.py, compléter la cellule n° 2 avec les valeurs de R dans le tableau numpy et la formule permettant de calculer $u(R)$ dans la fonction **u1**. Exécuter les deux premières cellules.

III – Première estimation de r_s

3. Constituer le montage expérimental avec $R = 50\ \Omega$.
4. Mesurer la tension U_{eff} au voltmètre et estimer son incertitude $u(U_{eff})$ avec la notice.

5. En exploitant la préparation, estimer la valeur de r_s.

La relation exprimant r_s en fonction de E_{eff} ne permet pas de calculer simplement $u(r_s)$. On utilise alors une simulation de type Monte Carlo pour estimer cette incertitude.

6. Compléter alors les fonction **u2** et **u3** dans la cellule n° 3 du programme afin de d'obtenir $u(r_s)$. La fonction **u2** est l'équivalent de **u1** pour les tensions. La fonction **u3** prend comme paramètre U, R, E et renvoie le tableau `tab_rs` des valeurs de r_s, ainsi que sa moyenne `mrs` et son écart-type `ers`.

   Toutes les grandeurs mesurées seront assimilées à des variables aléatoires normales. On utilisera les fonctions suivantes :

- *np.random.normal(m,s)* qui reçoit comme paramètre la valeur moyenne m et l'écart-type s de la distribution de probabilité et retourne une valeur aléatoire ;
- *statistics.mean(x)* qui prend comme paramètre un tableau de valeurs et en retourne la valeur moyenne ;
- *statistics.pstdev(x)* qui prend comme paramètre un tableau de valeurs et en retourne l'écart-type.

Exécuter la cellule n° 3 et écrire les résultats sous forme normalisée. Comparer avec l'estimation précédente.

IV – Exploitation d'une régression linéaire

A – Estimation de r_s

7. Pour chacune des valeurs de R du tableau du 2., mesurer U_{eff} au voltmètre en restant <u>sur le même calibre 2 V</u>.
8. Compléter la cellule n° 4 en remplissant le tableau `abs_Ueff` de valeur de U_{eff} et en affectant sa valeur à la variable `E_eff`.
   Exécuter la cellule, ce qui permet de représenter R en fonction de $\frac{U_{eff}}{E_{eff}-U_{eff}}$. En quoi une régression linéaire permet d'estimer r_s ? Commenter la représentation obtenue.

Comme la valeur de l'ordonnée à l'origine est imposée par le modèle, il n'est pas possible d'utiliser la fonction *np.polyfit* pour réaliser la régression linéaire.

Si on applique la méthode des moindres carrés à un ensemble de points $(y_k,\, x_k)$ que l'on essaie d'ajuster par une droite de la forme $y = ax$, on doit minimiser la somme

$$S = \sum_{k=1}^{N} (y_k - a x_k)^2 \ .$$

On cherche alors la valeur de a qui annule

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a} = \sum_{k=1}^{N} 2(y_k - a x_k)(-x_k) = 2\left(a \sum_{k=1}^{N} x_k^2 - \sum_{k=1}^{N} x_k y_k\right) \ ,$$

ce qui conduit

$$a = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k y_k}{\sum_{k=1}^{N} x_k^2} \ .$$

9. Compléter la cellule n° 5 en achevant la fonction **regression** qui reçoit les tableaux numpy en abscisses et en ordonnés et retourne la pente du meilleur modèle linéaire. Calculer alors les résidus.

   Pour l'ensemble de ces calculs, privilégier les opérations sur les tableaux numpy et utiliser la fonction *np.sum* qui effectue la somme des éléments d'un tableau.

   Exécuter la cellule n° 5 pour représenter les résidus. Commenter.

10. Compléter la cellule n° 6 en calculant les écarts normalisés, puis l'exécuter pour représenter ces écarts normalisés. Commenter.

Il n'est pas nécessaire de représenter à la fois les résidus et les écarts nomalisés.

B – Estimation de $u(r_s)$

La régression ne permet pas d'estimer l'incertitude $u(r_s)$. De plus, les incertitudes sur E_{eff} et U_{eff} n'ont pas été prises en compte. On réalise alors N simulations Monte Carlo d'estimations de r_s

11. Compléter la cellule n° 7 en achevant la rédaction de la fonction de **incertitudes-Regression** qui prend comme paramètres le tableau de valeurs de U_{eff}, la valeur de E_{eff} et le tableau de valeurs de R, et qui renvoie le tableau `tab_rs` des valeurs de r_s, ainsi que sa moyenne `mrs` et son écart-type `ers`.

On s'inspirera de la fonction **u3** et on réemploiera les fonctions **Abscisses** et **regression**.

Exécuter la cellule n^{o} 7. Ecrire les résultats sous forme normalisée et comparer aux résultats du 6.

12. Question subsidiaire : trouver dans la notice la résistance d'entrée du voltmètre et montrer qu'elle ne perturbe pas les mesures.