ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT MÁY TÍNH

THỰC HÀNH XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ - CO2036

Bài thực hành tuần số 3:

"Giải và mô phỏng bài tập Lab 4 và Lab 5"

Giảng viên hướng dẫn: Phạm Công Thái

Nhóm: 10

Sinh viên thực hiện: Lê Đức Cường - 2210423

Lê Phú Cường - 2210425

Thành phố Hồ Chí Minh, tháng 3 năm 2025

Mục lục

1 Tổng quan

Trong suốt các tuần học vừa qua, nhóm chúng em đã được tiếp cận với các khái niệm quan trọng về tín hiệu và hệ thống rời rạc, cùng với quy trình chuyển đổi tín hiệu tương tự - số (ADC). Những kiến thức này không chỉ giúp chúng em hiểu được cách tín hiệu được biểu diễn, xử lý trong miền rời rạc mà còn cung cấp nền tảng để thực hiện các phân tích, tính toán cần thiết trong các ứng dụng thực tế.

Cụ thể, chúng em đã học và áp dụng các nội dung từ các chương sau:

- Introduction of Signal and System: Bài giảng này giới thiệu những khái niệm cơ bản về tín hiệu và hệ thống, bao gồm phân loại tín hiệu (rời rạc, liên tục, xác định, ngẫu nhiên), các thuộc tính của hệ thống (tuyến tính, bất biến theo thời gian, nhân quả, có nhớ hay không có nhớ) và các phương pháp biểu diễn hệ thống.

- Discrete Time Signal and System: Nội dung này đi sâu vào các tín hiệu trong miền rời rạc, các phép biến đổi tín hiệu, cách biểu diễn tín hiệu theo chuỗi, cũng như các phương pháp phân tích và xử lý hệ thống rời rạc.

- Z Transform: Biến đổi Z là công cụ quan trọng để phân tích hệ thống rời rạc, giúp giải quyết các phương trình sai phân, xác định đáp ứng hệ thống, cũng như thiết kế và phân tích hệ thống trong miền Z.

Dựa trên những kiến thức lý thuyết này, chúng em đã tiến hành các bài thực hành trong phòng LAB để kiểm nghiệm lại các khái niệm đã học, đồng thời vận dụng vào các tình huống cụ thể. Việc thực hành không chỉ giúp củng cố kiến thức mà còn giúp chúng em hiểu rõ hơn về cách các thuật toán xử lý tín hiệu số được triển khai trên thực tế, cũng như những thách thức có thể gặp phải trong quá trình thiết kế và phân tích hệ thống rời rạc.

2 Mục tiêu

Báo cáo này nhằm mục tiêu khám phá và nâng cao hiểu biết về cách sử dụng Scilab trong việc giải quyết các bài toán toán học, đặc biệt là trong phân tích và xử lý tín hiệu. Scilab không chỉ là một công cụ mạnh mẽ để tính toán số, mà còn hỗ trợ trực quan hóa tín hiệu dưới dạng biểu đồ, giúp chúng em dễ dàng quan sát và đánh giá các đặc trưng của tín hiệu một cách trực quan và chính xác.

Mục tiêu của báo cáo không chỉ dừng lại ở việc sử dụng Scilab để giải quyết bài toán, mà còn giúp chúng em hình thành tư duy phân tích tín hiệu, làm quen với các phương pháp xử lý số, từ đó tạo tiền đề cho các nghiên cứu chuyên sâu hơn về xử lý tín hiệu số và hệ thống điều khiển trong tương lai.

3 Phương pháp

Công cụ chính được sử dụng trong báo cáo này là Scilab, một phần mềm tính toán khoa học mạnh mẽ, hỗ trợ giải quyết các bài toán về tín hiệu và hệ thống rời rạc. Nhờ khả năng xử lý dữ liệu số và trực quan hóa tín hiệu, Scilab giúp chúng em dễ dàng theo dõi sự thay đổi của tín hiệu thông qua các biểu đồ, từ đó hiểu rõ hơn về các đặc trưng và quy luật của tín hiệu trong miền rời rạc.

Ngoài việc sử dụng các hàm và công cụ có sẵn trong Scilab, chúng em còn kết hợp với các kiến thức đã học để kiểm chứng kết quả, từ đó hiểu sâu hơn về cách các phép biến đổi toán học được hiện thực hóa trên phần mềm. Đồng thời, chúng em cũng thử nghiệm tạo ra những hàm mới nhằm đơn giản hóa các bước tính toán và tối ưu hóa quá trình phân tích tín hiệu.

4 Nội dung bài thực hành

4.1 Bài tập Lab 4

4.1.1 Bài tập số 1

Dịch đề bài: Tìm Biến đổi Z và miền hội tụ (ROC) tương ứng cho mỗi tín hiệu rời rạc $x(n)$.

$$x(n) = 2\delta(n+2) - 1\delta(n+1) + 2\delta(n) - 3\delta(n-1) + 4\delta(n-2)$$

Bài làm:

$$x(n) = \{2, -1, 2\uparrow, -3, 4\}$$

$$X(z) = 2z^2 - z + 2 - 3z^{-1} + 4z^{-2}, \text{Miền hội tụ ROC là: } 0 < |z| < \infty$$

4.1.2 Bài tập số 2

Dịch đề bài: Tìm Biến đổi Z và miền hội tụ (ROC) tương ứng cho mỗi tín hiệu rời rạc $x(n)$.

$$x(n) = (0.5)^n u(n) + (0.4)^n u(n)$$

Bài làm:

$$x(n) = (0.5)^n u(n) + (0.4)^n u(n)$$

$$=> X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(0.5^n u(n) + 0.4^n u(n)\right) z^{-n} = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} + \frac{1}{1-0.4z^{-1}}$$

$$\text{Miền hội tụ ROC là:} |z| > 0.5$$

4.1.3 Bài tập số 3

Dịch đề bài: Tìm Biến đổi Z và miền hội tụ (ROC) tương ứng cho mỗi tín hiệu rời rạc $x(n)$.

$$x(n) = (0.5)^n u(n) + (0.9)^n u(-n-1)$$

Bài làm:

Ta có:

$$x(n) = (0.5)^n u(n) + (0.9)^n u(-n-1)$$

$$=> X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1-0.9z^{-1}}, \text{Miền hội tụ ROC là:} \frac{1}{2} < |z| < \frac{9}{10}$$

4.1.4 Bài tập số 4

Dịch đề bài: Tìm hiểu các thư viện hoặc hộp công cụ (toolbox) có sẵn trong Scilab để xử lý dữ liệu âm thanh.

Bài làm:

1. **Hàm để đọc file wav**

    - Để đọc toàn bộ dữ liệu: `y = wavread(wavfile)`
    - Để đọc n mẫu đầu tiên: `y = wavread(wavfile, n)`
    - Để đọc các mẫu từ `i1` đến `i2`: `y = wavread(wavfile, [i1 i2])`
    - Để trả về dữ liệu và thông tin: `[y, Fs, bits] = wavread(wavfile)`

      Trong đó:

        - `y`: dữ liệu âm thanh,
        - `Fs`: tần số lấy mẫu (Hz),
        - `bits`: số bit trên mỗi mẫu.

    - Để trả về kích thước dữ liệu: `s = wavread(wavfile, 'size')`

      Trả về một vector: [số kênh, số mẫu].

    - Để trả về thông tin file: `Info = wavread(wavfile, 'info')`

      Trả về một vector gồm 8 số với các thành phần sau:

        (a) Mã định dạng (ví dụ: 1 cho PCM, 3 cho floating point).

        (b) Số kênh.

        (c) Tần số lấy mẫu.

        (d) Số byte trung bình mỗi giây.

        (e) Kích thước khối (block alignment).

        (f) Số bit trên mỗi mẫu.

        (g) Số byte trên mỗi mẫu.

        (h) Tổng số mẫu trên mỗi kênh.

    - Nếu đường dẫn file không có đuôi, `.wav` sẽ được tự động thêm.
    - Hỗ trợ dữ liệu đa kênh với các định dạng: 8-, 16-, 32-bit linear và floating point.

    File = "D:/DSP/Example/sound/ldc.wav";

    Lấy kích thước dữ liệu: `s = wavread(File, "size")`

    Lấy thông tin file: `Info = wavread(File, "info")`

    Đọc 5 mẫu đầu tiên: `y = wavread(File, 5)`

Đọc các mẫu từ chỉ số 4 đến 7: `y = wavread(File, [4 7])`

Đọc toàn bộ dữ liệu kèm thông tin Fs và bits: `[y, Fs, bits] = wavread(File)`

2. **Hàm để nối 2 đoạn âm thanh**

   Nối 2 đoạn audio x và y: `z = [x, y];`

   Lưu ý:

   - Cùng tốc độ lấy mẫu: Nếu khác nhau, cần nội suy lại bằng interp1.
   - Cùng số kênh: Nếu một đoạn là mono và một đoạn là stereo, cần chuyển đổi về cùng dạng.
   - Chuẩn hóa biên độ: Nếu mức âm lượng khác nhau, có thể dùng max hoặc normalize.
   - Xử lý khoảng lặng: Thêm fade-in/fade-out bằng cách nhân với hàm tuyến tính.

3. **Hàm để phát âm thanh**

   `playsnd(z, Fs, 1);`

   Trong đó:

   - z: Dữ liệu âm thanh (mảng mẫu số).
   - Fs: Tần số lấy mẫu (sampling rate), đơn vị Hz.
   - 1: Chế độ phát blocking, tức là chương trình sẽ dừng lại cho đến khi âm thanh phát xong.

4. **Hàm ghi file âm thanh**

   `auwrite(y, Fs, "D:/DSP/Example/sound/ldc.wav");`

   - y: Dữ liệu âm thanh (mảng mẫu số).
   - Fs: Tần số lấy mẫu (đơn vị Hz).
   - "D:/DSP/Example/sound/ldc.wav": Tên file âm thanh đầu ra.

5. **Mixing (trộn) tín hiệu âm thanh**

   Nếu hai tín hiệu x và y có cùng số mẫu, có thể trộn trực tiếp bằng cách cộng:

   ```
   z = x + y;
   ```

   Tuy nhiên, có thể xảy ra hiện tượng clipping (quá tải tín hiệu). Vì vậy, cần chuẩn hóa lại biên độ:

   ```
   z = (x + y) / max(abs(x + y)); // Tránh clipping
   ```

6. **Thay đổi tần số lấy mẫu**

   Tần số lấy mẫu là số mẫu tín hiệu âm thanh được lấy trên mỗi giây, tính bằng Hz (số mẫu/giây).

   `xnew1 = intdec(x, 16000/Fs);` Trong đó:

- x: Dữ liệu âm thanh ban đầu.
- Fs: Tần số lấy mẫu ban đầu (Hz).
- 16000/Fs: Tỷ lệ giảm tần số lấy mẫu (chỉ đúng khi Fs lớn hơn 16000 Hz).
- intdec(x, 16000/Fs): Giảm tần số lấy mẫu xuống 16kHz.
- xnew1: Biến chứa tín hiệu đã được thay đổi sampling rate.

Hàm intdec(x, R) thực hiện giảm tần số lấy mẫu bằng cách nội suy và giảm bớt mẫu.

7. **Phân tích tần số của tín hiệu âm thanh**

   Phân tích tần số giúp xác định thành phần tần số của một tín hiệu âm thanh. Sử dụng Biến đổi Fourier (FFT) để trích xuất phổ tần số từ tín hiệu.

   - Đọc file âm thanh: auread() để lấy dữ liệu & tần số lấy mẫu
   - Chọn số điểm FFT: Thường là lũy thừa của 2 (8192, 16384, ...)
   - Thực hiện FFT: fft() để tính phổ tần số
   - Vẽ phổ tần số: plot(f, abs(Xf))

4.1.5 Bài tập số 5

Dịch đề bài: Tìm hiểu các thư viện hoặc hộp công cụ (toolbox) có sẵn trong Scilab để xử lý ảnh. Sau đó, thực hiện một ví dụ hoặc bản demo để minh họa một thao tác đơn giản (ví dụ: hiển thị histogram, cân bằng histogram, làm mờ, hoặc chèn watermark) trên ảnh số.

Bài làm:

a. Cài đặt thư viện trên SciLab

Thư viện nhóm chúng em sử dụng: Image Processing and Computer Vision Toolbox 4.5.0.1 trên ATOMS của Scilab. Link: **https://atoms.scilab.org/toolboxes/IPCV/4.1.2**. Để thêm thư viện vào scilab ta làm các bước như sau:

- Bước 1: Cài đặt thư viện Image Processing: Nhập vào thanh console: `atomsInstall("IPCV")`
- Bước 2: Kiểm tra thư viện đã cài`atomsListInstalled()`
- Bước 3: Kích hoạt thư viện: `atomsLoad("IPCV")`

b. Các thư viện hoặc hộp công cụ (toolbox) có sẵn trong Scilab để xử lý ảnh

1. Đọc ảnh vào Scilab: Sử dụng hàm imread để đọc ảnh từ một tệp và lưu vào biến:

   ```
   img = imread("path/to/image.png");
   ```

   Hàm này trả về một ma trận chứa thông tin về ảnh, trong đó mỗi phần tử biểu thị giá trị cường độ màu của pixel.

2. Chuyển ảnh từ RGB sang ảnh xám (Grayscale):

   Dùng rgb2gray để chuyển đổi ảnh màu thành ảnh xám:

   `G = rgb2gray(img);`

   Trong ảnh xám, mỗi pixel chỉ có một giá trị cường độ thay vì ba kênh màu (Red, Green, Blue).

3. Tính toán Histogram:

   Histogram giúp hiển thị sự phân bố cường độ sáng của các pixel trong ảnh. Sử dụng `histplot` để tính toán và vẽ histogram:

   `[count, cells] = imhist(G);`

   Trong đó:

   - count: số lượng pixel có cùng một mức xám
   - cells: các mức xám tương ứng

   Hiển thị histogram: `histplot(cells, count);`

4. Cân bằng Histogram:

   Cải thiện độ tương phản của ảnh bằng cách phân bố lại mức sáng của pixel:

   `eq_img = histeq(G);`

   Ảnh sau khi cân bằng có độ sáng trải đều hơn.

5. Làm mờ ảnh bằng bộ lọc chuyển động:

   Tạo bộ lọc chuyển động bằng ‘fspecial‘, sau đó áp dụng với ‘imfilter‘:

   `F = fspecial("motion", 100, 0);`

   `imf = imfilter(img, F);`

   Trong đó:

   - 100: độ dài của hiệu ứng chuyển động
   - 0: hướng chuyển động

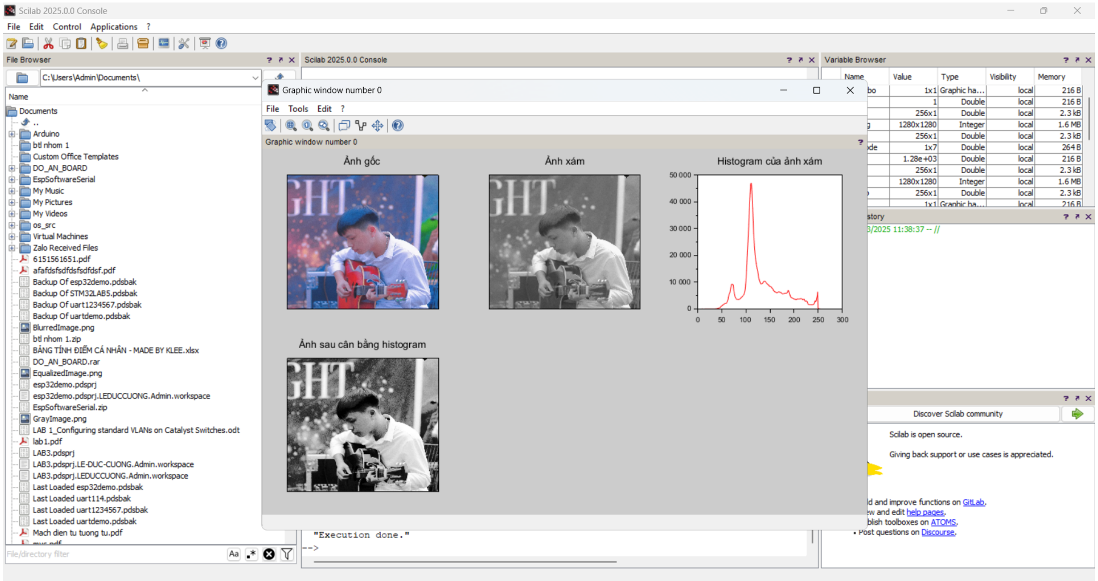
6. Lưu ảnh sau khi xử lý:

   Dùng imwrite để lưu ảnh đã chỉnh sửa ra file:

   `imwrite(G, "GrayImage.png");`

   Hàm này giúp lưu ảnh ở định dạng mong muốn, hỗ trợ nhiều kiểu file như PNG, JPG, BMP.

c. Ví dụ minh họa



4.1.6 Bài tập số 6

Dịch đề bài: Giả sử có hai tín hiệu rời rạc $x(n)$, $h(n)$ với $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, được xác định trên toàn bộ phạm vi của n. Khi đó, tích chập tuyến tính của các tín hiệu rời rạc là $y(n)$ có dạng:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

- Xác định tín hiệu $y(n)$ sao cho $y(n)$ hội tụ trong các trường hợp sau:
  - Cả $h(n)$ và $x(n)$ đều là nhân quả.
  - Hệ thống có đáp ứng xung hữu hạn sao cho $h(n) = 0, \forall n < 0$ và $n > M$.
- Giả sử trường hợp thứ hai được áp dụng, tính tích chập $y(n)$ của $x(n) = [1\uparrow, 2, -3, 2, 1]$ và $h(n) = [1\uparrow, 0, -1]$ bằng phương pháp "gấp và dịch". Triển khai câu trả lời bằng script Scilab.
- Giả sử trường hợp thứ hai được áp dụng, tính tích chập $y(n)$ của $x(n) = [1\uparrow, 2, -3, 2, 1]$ và $h(n) = [1\uparrow, 0, -1]$ bằng phương pháp ma trận. Triển khai câu trả lời bằng script Scilab.
- Vẽ $x(n)$, $y(n)$ và năng lượng của các tín hiệu rời rạc trên cùng một hình.

Bài làm:

- Một tín hiệu $s(n)$ được gọi là nhân quả nếu $s(n) = 0$ với $n < 0$. Do đó, nếu cả $x(n)$ và $h(n)$ đều là nhân quả, thì tích chập $y(n)$ cũng sẽ là nhân quả, tức là:

$$y(n) = 0, \quad \forall n < 0 \tag{1}$$

Công thức tích chập được tính từ $k = 0$ trở đi:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k) \tag{2}$$

- Nếu $h(n)$ có đáp ứng xung hữu hạn (FIR) với điều kiện $h(n) = 0, \forall n < 0$ và $n > M$, thì giới hạn trên của tổng tích chập sẽ là M:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} h(k)x(n-k) \tag{3}$$

- Triển khai câu trả lời bằng script Scilab. Phương pháp 1: Gấp và dịch

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} h(k)x(n-k) = [1\uparrow, 2, -4, 0, 4, -2, -1] \tag{4}$$

```
// function calculate convolution using folding and shifting
function [yn, yorigin] = convolution_fs (xn, xorigin, hn, horigin)
    N = length(xn);
    M = length(hn);
    yn = zeros(1, N+M-1);
    for n = 1:N+M-1
        for k = 1:M
            if n - k + 1 > 0 && n - k + 1 <= N
                yn(n) = yn(n) + hn(k) * xn(n - k + 1);
            end
        end
    end
    yorigin = xorigin
endfunction
```

Hình 1: Function tính tích chập bằng phương pháp gấp và dịch

```
"using folding & shifting: yn = xn*hn = "
 1.   2.  -4.   0.   4.  -2.  -1.
```

Hình 2: Kết quả

- Triển khai câu trả lời bằng script Scilab. Phương pháp 2: Ma trận

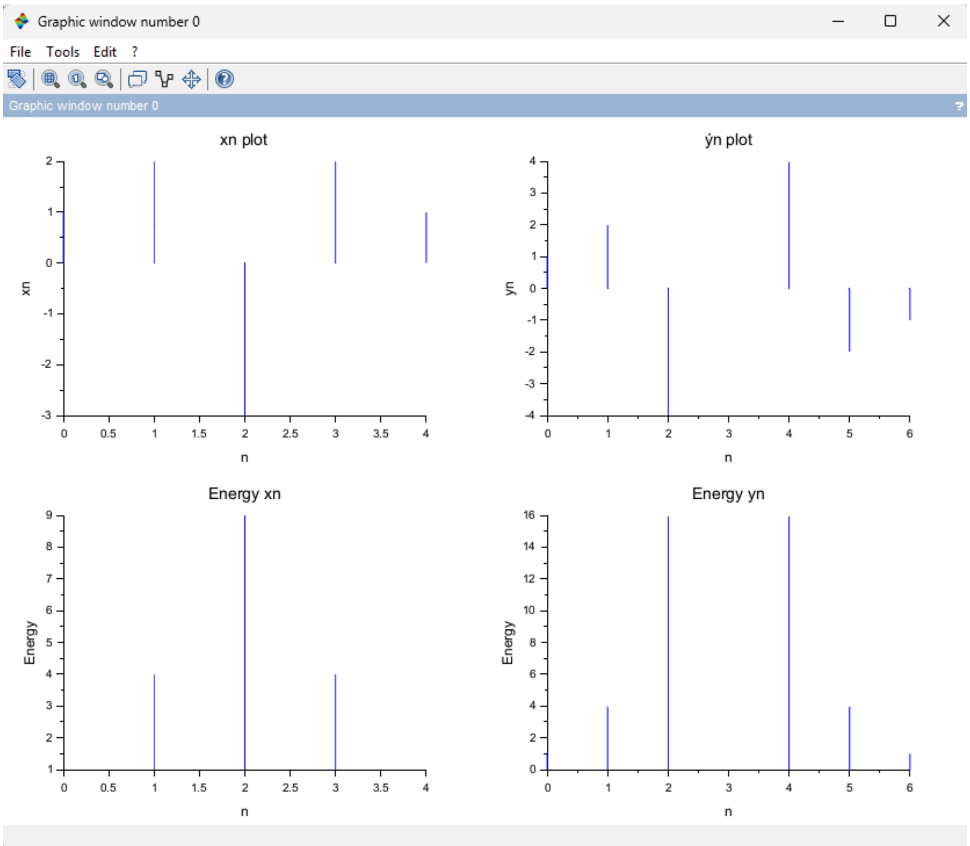
```
// function calculate convolution using matrix method
function [yn, yorigin] = convolution_Matrix(xn, xorigin, hn, horigin)
    // Create the convolution matrix
    N = length(xn);
    M = length(hn);
    H = zeros(N+M-1, N);
    for i = 1:M
        H(i:i+N-1, :) = H(i:i+N-1, :) + hn(i) * eye(N, N);
    end

    // Compute the convolution
    yn = H * xn.';
    yn = yn';
    yorigin = xorigin
endfunction
```

Hình 3: Function tính tích chập bằng phương pháp ma trận

```
"Using matrix method: yn = xn*hn = "
 1.   2.   -4.   0.   4.   -2.   -1.
```

Hình 4: Kết quả

- Vẽ x(n), y(n) và năng lượng của các tín hiệu rời rạc trên cùng một hình.



Hình 5: Đồ thị các tín hiệu

4.1.7 Bài tập số 7

Dịch đề bài: Với một tín hiệu tuần hoàn $x(n)$ có độ dài N và đáp ứng xung $h(n)$ có độ dài M, tích chập tuần hoàn giữa $x(n)$ và $h(n)$ được định nghĩa như sau:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x[(n-k)modN]$$

Giải thích tại sao $y(n)$ có thể bị suy biến theo cách đó.

- Tính tích chập $y(n)$ của $x(n) = [1 \uparrow, 2, -3, 2, 1]$ và $h(n) = [1 \uparrow, 0, -1, -1, 1]$ bằng phương pháp "gấp và dịch". Triển khai câu trả lời bằng script Scilab.
- Tính tích chập $y(n)$ của $x(n) = [1 \uparrow, 2, -3, 2, 1]$ và $h(n) = [1 \uparrow, 0, -1, -1, 1]$ bằng phương pháp ma trận. Triển khai câu trả lời bằng Scilab.
- Vẽ $x(n)$, $y(n)$ và năng lượng của các tín hiệu rời rạc trên cùng một hình.

Bài làm:

Với y(n) như đề bài: Phương pháp tính tích chập bằng gấp và dịch

```
function [yn, yorigin] = convolution_fs (xn, xorigin, hn, horigin)
    N = length(xn);
    M = length(hn);
    yn = zeros(1, N);
    
   for n = 1:N
        for k = 1:M
            if k<= n
            yn(n) = yn(n) + hn(n-k+1) * xn(k);
             end
            if k > n
                yn(n) = yn(n) + hn(N + n -k +1) * xn(k);
            end
        end
    end
    yorigin = xorigin    
endfunction
```

Hình 6: Function tính tích chập bằng phương pháp gấp và dịch với y(n) như đề bài

```
"using folding & shifting: yn = xn*hn = "
 4.  -4.  -3.   0.   3.
```

Hình 7: Kết quả

Phương pháp tính tích chập bằng ma trận

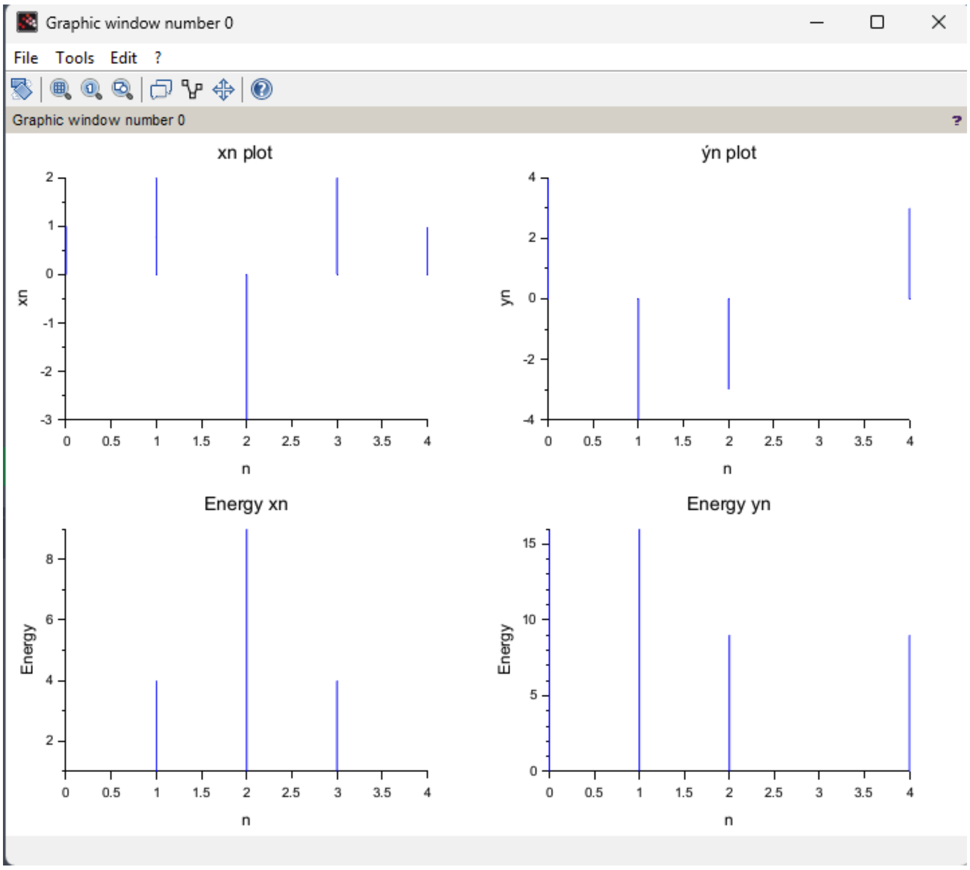
```
// function calculate convolution using matrix method
function [yn, yorigin] = convolution_Matrix(xn, xorigin, hn, horigin)
    // Create the convolution matrix
    N = length(xn);
    M = length(hn);
    H = zeros(N+M-1, N);
    // Create the circular convolution matrix
    H = zeros(N, N);
    for i = 1:M
        H = H + hn(i) * circshift(eye(N, N), i-1);
    end
    // Compute the convolution
    yn = H * xn.';
    yn = yn';
    yorigin = xorigin
endfunction
```

Hình 8: Function tính tích chập bằng phương pháp ma trận với y(n) như đề bài

```
"Using matrix method: yn = xn*hn = "
 4.  -4.  -3.   0.   3.
```

Hình 9: Kết quả

Vẽ x(n), y(n) và năng lượng của các tín hiệu rời rạc trên cùng một hình.



Hình 10: Đồ thị các tín hiệu

4.2 Bài tập Lab 5

4.2.1 Bài tập số 1

Dịch đề bài: Sử dụng biến đổi Z để tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống được mô tả bởi phương trình đầu vào - đầu ra sau:

$$y(n) - y(n-2) = x(n)$$

Bài làm:

Theo bài ra, ta có:

$$y(n) - y(n-2) = x(n)$$

$$=> Y(z) - z^{-2}Y(z) = Y(z)(1 - z^{-2}) = X(z)$$

$$=> \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - z^{-2}} => H(z) = \frac{1}{1 - (z^{-1})^2}$$

Ta có:

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$$

$$x(\frac{n}{m}) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z^m)$$

$$\frac{1}{1 - z^{-1}} \rightarrow \left[\begin{array}{ll} u[n], & \text{ROC: } |z| > 1 \\ -u[-n-1], & \text{ROC: } |z| < 1 \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{1 - z^{-1}} \xrightarrow{\mathcal{Z}} \left[\begin{array}{ll} h(n) = u[\frac{n}{2}], & \text{ROC: } |z| > 1 \\ h(n) = -u[\frac{n}{2} - 1], & \text{ROC: } |z| < 1 \end{array} \right.$$

4.2.2 Bài tập số 2

Dịch đề bài: Sử dụng biến đổi Z và Z nghịch đảo để tính tích chập:

a. $x_1(n) = \{1 \uparrow, 2, 3, 4, 5\}$ và $x_2(n) = \{1 \uparrow, 1, 1\}$

b. $x_1(n) = \left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)$ và $x_2(n) = 2^n u(n)$

c. $x_1(n) = nu(n)$ và $x_2(n) = 2^n u(n-1)$

Bài làm:

a.

Tín hiệu 1:

$$x_1(n) = \{1 \uparrow, 2, 3, 4, 5\}$$

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) z^{-n} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4}, \quad \text{ROC: } \mathbb{R}$$

Tín hiệu 2:

$$x_2(n) = \{1 \uparrow, 1, 1\}$$

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2}, \quad \text{ROC: } \mathbb{R}$$

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) => X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)$$

$$X(z) = (1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4})(1 + z^{-1} + z^{-2})$$

$$= 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + 5z^{-5} + z^{-2} + 2z^{-3} + 3z^{-4} + 4z^{-5} + 5z^{-6}$$

$$= 1 + 3z^{-1} + 6z^{-2} + 9z^{-3} + 12z^{-4} + 9z^{-5} + 5z^{-6}, \text{ROC: } \mathbb{R}$$

$$=> x(n) = \{1 \uparrow, 3, 6, 9, 12, 9, 5\}$$

b.

Tín hiệu:

$$x_2(n) = \left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)$$

$$x_4(n) = 2^n u(n)$$

$$=> X_2(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{5}$$

$$X_4(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > 2$$

Tích chập trong miền Z:

$$X(z) = X_2(z) \cdot X_4(z)$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{5}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - 2z^{-1}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{5}z^{-1})(1 - 2z^{-1})} = \frac{z^2}{(z - \frac{1}{5})(z - 2)}$$

Phân tích thành phân số đơn giản:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z - \frac{1}{5}} + \frac{A_2}{z - 2}$$

Giải hệ phương trình:

$$A_1(z - 2) + A_2(z - \frac{1}{5}) = z$$

$$A_1 z + A_2 z = z$$

$$-2A_1 - \frac{A_2}{5} = 0$$

$$=> A_1 = -\frac{1}{9}, \quad A_2 = \frac{10}{9}$$

$$=> x(n) = -\frac{1}{9}\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n] + \frac{10}{9} \cdot 2^n u[n], |z| > 2$$

c.

Ta có:

$$x_1(n) = nu(n)$$

$$x_2(n) = 2^n(n-1)$$

$$X_1(z) = \frac{z}{(1-z^{-1})^2}, \quad |z| > 1$$

$$X_2(z) = \frac{2z^{-1}}{1-2z^{-1}}, \quad |z| > 2$$

$$X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z) = \frac{2z^{-1} \cdot z^{-1}}{(1-z^{-1})^2(1-2z^{-1})} = \frac{2z}{(z-1)^2(z-2)}, \text{ROC: } |z| > 2$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{(z-1)^2} + \frac{A_3}{z-2}$$

$$=> A_1(z-1)(z-2) + A_2(z-2) + A_3(z-1)^2 = 2$$

$$=> A_1(z^2-3z+2) + A_2z - 2A_2 + A_3z^2 - 2A_3z + A_3 = 2 => \begin{cases} A_1 = -2 \\ A_2 = 2 \\ A_3 = 2 \end{cases}$$

$$=> X(z) = -2 - \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{2z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{2}{1-2z^{-1}}$$

Vì $|z| > 2$, Biến đổi z nghịch đảo, ta có: $x(n) = -2u[n] - nu[n] + 2 \cdot 2^n u[n]$

4.2.3 Bài tập số 3

Dịch đề bài:Tìm tất cả các tín hiệu $x(n)$ có biến đổi Z nghịch đảo như sau:

a. $X_1(z) = \frac{1}{2-3z^{-1}+z^{-2}}$

b. $X_2(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+4z^{-1}+4z^{-2}}$

c. $X_3(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})^2(1-0.3z^{-1})}, \quad 0.3 < z < 0.5$

Bài làm:

a.

$$X_1(z) = \frac{1}{2-3z^{-1}+z^{-2}}$$

$$= \frac{z^2}{2z^2-3z+1}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-\frac{1}{2}}$$

Ta có:

$$A_1(z-\frac{1}{2})+A_2(z-1)=z$$

Lần lượt cho z = 1 và $z=\frac{1}{2}$

$$=> A_1=2, \quad A_2=-1$$

Do đó:

$$X(z)=2\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Trường hợp 1: $|z|<|\frac{1}{z}|$

$$x(n)=-2\left(-u[n-1]\right)-\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]\right)$$
$$=-2u[n-1]+\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]$$

Trường hợp 2: $|\frac{1}{2}|<|z|<|1|$

$$x(n)=-2u[n-1]-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Trường hợp 3: $|z|>|1|$

$$x(n)=2u[n]-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

b.

$$X_2(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+4z^{-1}+4z^{-2}}=\frac{z^2+2z+1}{z^2+4z+4}$$
$$\frac{X_2(z)}{z}=\frac{z^2+2z+1}{z(z^2+4z+4)}$$
$$\frac{X_2(z)}{z}=\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z+2}+\frac{A_3}{(z+2)^2}$$

Nhân cả hai vế với $z(z+2)^2$:

$$A_1(z+2)^2+A_2z(z+2)+A_3z=z^2+2z+1$$

Mở rộng các tích:

$$A_1(z^2+4z+4)+A_2(z^2+2z)+A_3z=z^2+2z+1$$

Nhóm theo bậc của z:

$$(A_1 + A_2)z^2 + (4A_1 + 2A_2 + A_3)z + (4A_1) = z^2 + 2z + 1$$

So sánh hệ số, ta có hệ phương trình:

(1). $A_1 + A_2 = 1$

(2). $4A_1 + 2A_2 + A_3 = 2$

(3). $4A_1 = 1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{4}$

Ta suy ra được:

$$A_1 = \frac{1}{4}, \quad A_2 = \frac{3}{4}, \quad A_3 = \frac{-1}{2}$$

$$=> \frac{X_2(z)}{z} = \frac{\frac{1}{4}}{z} + \frac{\frac{3}{4}}{z+2} + \frac{\frac{-1}{2}}{(z+2)^2}$$

Trường hợp 1: $|z| < 1$

$$x(n) = \frac{1}{4}\delta[n] - \frac{3}{4}(2)^n u[n-1] + \frac{1}{2}nu[-n-1]$$

Trường hợp 2: $1 < |z| < 2$ và **Trường hợp 3:** $|z| > 2$

Ta cũng làm tương tự như trường hợp 1.

c.

$$X_2(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})^2(1 - 0.3z^{-1})}, \quad 0.3 < z < 0.5$$

$$=> X_2(z) = \frac{z^2 + z^3}{(z - 0.5)^2(z - 0.3)}$$

$$=> \frac{X_2(z)}{z} = \frac{z + z^2}{(z - 0.5)^2(z - 0.3)}$$

$$\frac{X_2(z)}{z} = \frac{A_1}{z - 0.5} + \frac{A_2}{(z - 0.5)^2} + \frac{A_3}{z - 0.3}$$

$$A_1(z - 0.5)(z - 0.3) + A_2(z - 0.3) + A_3(z - 0.5)^2 = z^2 + z$$

Mở rộng các tích:

$$A_1(z^2 - 0.8z + 0.15) + A_2(z - 0.3) + A_3(z^2 - z + 0.25) = z^2 + z$$

Nhóm theo bậc của z:

$$(A_1 + A_3)z^2 + (-0.8A_1 + A_2 - A_3)z + (0.15A_1 - 0.3A_2 + 0.25A_3) = z^2 + z$$

So sánh hệ số, ta có hệ:

(1) $A_1 + A_3 = 1$

(2) $-0.8A_1 + A_2 - A_3 = 1$

(3) $0.15A_1 - 0.3A_2 + 0.25A_3 = 0$

Thay $A_3 = 1 - A_1$ vào:

$$0.2A_1 + A_2 = 2$$

$$0.1A_1 + 0.3A_2 = 0.25$$

Giải hệ phương trình:

$$A_1 = \frac{-35}{4}, \quad A_2 = \frac{15}{4}, \quad A_3 = \frac{39}{4}$$

$$X(z) = \frac{-35}{4}.\frac{1}{1-0.5z^{-1}} + \frac{15}{4}.\frac{z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})^2} + \frac{39}{4}.\frac{1}{1-0.3z^{-1}}, \quad 0.3 < z < 0.5$$

$$=> x(n) = \frac{-35}{4}(-0.5)^n u[n-1] + \frac{15}{4}(-n0.5^n)u[n-1] + \frac{39}{4}(0.3)^n u[n]$$

4.2.4 Bài tập số 4

Dịch đề bài: Cho một hệ thống LTI được mô tả bởi phương trình đầu vào - đầu ra sau:

$$y(n) = 0.7y(n-1) + x(n)$$

a. Vẽ sơ đồ khối của hệ thống trên.

b. Xác định $h(n)$.

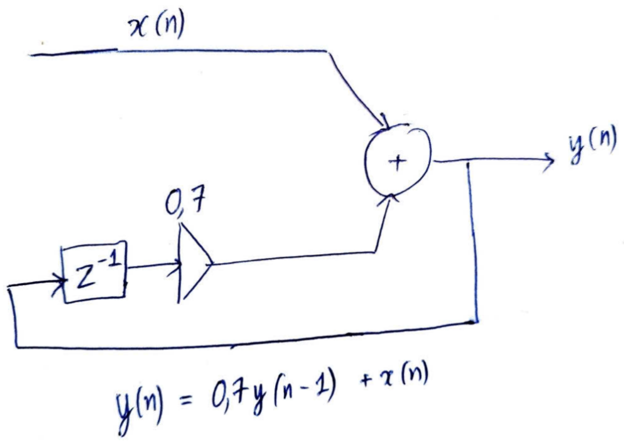
c. Xác định $y(n)$ khi $x(n) = u(n)$.

Bài làm:

a.

Vẽ sơ đồ khối của hệ thống:

$y(n) = 0.7y(n-1) + x(n)$



b.

$$y(n) = 0.7y(n-1) + x(n)$$

Chuyển sang miền Z:

$$Y(z) - 0.7z^{-1}Y(z) = X(z)$$

Hàm truyền đạt:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.7z^{-1}}$$

Đáp ứng xung:

$$h(z) = \frac{1}{1 - 0.7z^{-1}}$$

Trường hợp 1: $|z| < |0.7|$

$$h(n) = -0.7^n u[-n-1]$$

Trường hợp 2: $|z| > |0.7|$

$$h(n) = 0.7^n u(n)$$

c.

$$y(n) = 0.7y(n-1) + x(n)$$

Tín hiệu đầu vào đề bài cho:

$$x(n) = u(n)$$

Chuyển sang miền Z:

$$Y(z) - 0.7z^{-1}Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} => Y(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})}$$

$$=> Y(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.7)} => \frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0.7)}$$

Ta xét:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-0.7}$$

Giải hệ phương trình:

$$A_1(z-0.7) + A_2(z-1) = z$$

$$A_1 + A_2 = 1$$

$$-0.7A_1 - A_2 = 0$$

$$=> A_1 = \frac{10}{3}, \quad A_2 = -\frac{7}{3}$$

Thay A_1 và A_2 vào, ta có:

$$Y(z) = \frac{10}{3}\frac{1}{(1-z^{-1})} - \frac{7}{3}\frac{1}{(1-0.7z^{-1})}$$

Trường hợp 1: $|z| < |0.7|$

$$y(n) = \frac{10}{3}\left(-u[-n-1]\right) - \frac{7}{3}\left(-0.7^n u[-n-1]\right) = -\frac{10}{3}u[-n-1] + \frac{7}{3}0.7^n u[-n-1]$$

Trường hợp 2: $|0.7| < |z| < |1|$

$$y(n) = \frac{-10}{3}u[-n-1] - \frac{7}{3}0.7^n u[n]$$

Trường hợp 3: $|z| < |1|$

$$y(n) = \frac{10}{3}u[n] - \frac{7}{3}0.7^n u[n]$$

4.2.5 Bài tập số 5

Cho một hệ thống LTI được mô tả bởi phương trình đầu vào - đầu ra sau:

$$y(n) = 2y(n-1) - 3y(n-2) + x(n) + x(n-1)$$

a. Vẽ sơ đồ khối của hệ thống trên.

b. Xác định $h(n)$.

c. Xác định $y_{zi}(n)$ khi $y(-1) = y(-2) = 1$.

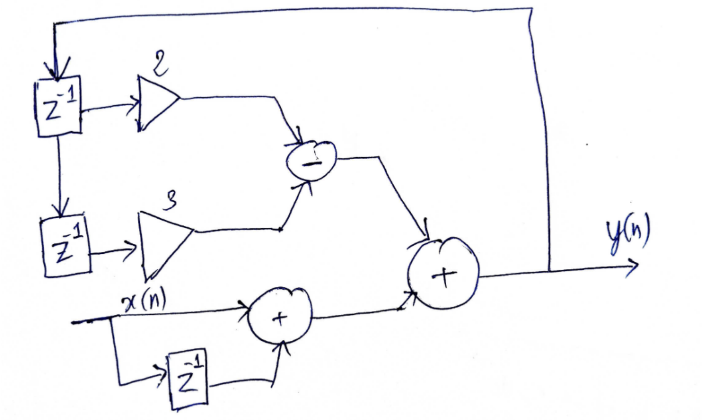
d. Xác định $y_{zs}(n)$ khi $x(n) = 2^n u(n)$.

Bài làm:

a.

Sơ đồ khối của hệ thống:

$$y(n) = 2y(n-1) - 3y(n-2) + x(n) + x(n-1)$$



b.

$$y(n) = 2y(n-1) - 3y(n-2) + x(n) + x(n-1)$$

Chuyển sang miền Z:

$$Y(z) - 2z^{-1}Y(z) + 3z^{-2}Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z)$$

$$=> Y(z)\left(1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}\right) = X(z)\left(1 + z^{-1}\right)$$

$$=> \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}} = H(z) => H(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 - 2z + 3}$$

Ta có

$$p_1 = 1 + \sqrt{2}j, \quad p_2 = 1 - \sqrt{2}j$$

$$=> \frac{H(z)}{z} = \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2}$$

Giải hệ phương trình:

$$A_1(z - p_2) + A_2(z - p_1) = z + 1$$

$$A_1 + A_2 = 1$$

$$-p_2A_1 - p_1A_2 = 1$$

$$=> A_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j, \quad A_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j$$

$$=> H(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}} => h(n) = A_1 p_1^n u(n) + A_2 p_2^n u(n)$$

c.

$$y(n) = 2y(n-1) - 3y(n-2) + x(n) + x(n-1)$$

Lấy biến đổi Z hai vế:

$$Y^+(z) = 2z^{-1}Y^+(z) - 3z^{-2}Y^+(z) + X^+(z) + z^{-1}X^+(z)$$

$$Y^+(z) = \frac{2y(-1)z - 3z^{-1}y(-1) - 3y(-2)}{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}} + \frac{X^+(z) + z^{-1}X^+(z) + x(-1)}{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}}$$

Xác định $y_{zi}(z)$ khi $x(n) = 0$

$$Y_{zi}^+(z) = \frac{z+3}{z^2 - 2z + 3}$$

Phân tích thành phân số đơn giản:

$$Y_{zi}^+(z) = \frac{A_k}{z - p_k} + \frac{A_k^*}{z - p_k^*}$$

Với:

$$p_k = 1 + j\sqrt{2}, \quad A_k = -0.5 + j\sqrt{2}$$

Biến đổi về miền thời gian

$$y_{zi}(n) = 3\sqrt{3}^n \cos(bn + a)u(n)$$

Với:

$$a = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right), \quad b = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

d.

Ta có

$$y(n) = 2y(n-1) - 3y(n-2) + x(n) + x(n-1)$$

Lấy biến đổi Z hai vế:

$$Y^+(z) = 2z^{-1}Y^+(z) + 2y(-1)z^{-1} - 3z^{-2}Y^+(z) - 3y(-2)z^{-2} + X^+(z) + z^{-1}X^+(z) + x(-1)$$

Biết rằng:

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n} = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad |z| > 2.$$

Sắp xếp lại phương trình:

$$Y^+(z)(1-2z^{-1}+3z^{-2}) = X^+(z) + z^{-1}X^+(z) + x(-1).$$

Suy ra:

$$Y_x^+(z) = \frac{X^+(z) + z^{-1}X^+(z) + x(-1)}{1-2z^{-1}+3z^{-2}} = \frac{1}{1-2z^{-1}+3z^{-2}}X^+(z).$$

Viết lại theo dạng phân tích:

$$Y_{xs}^+(z) = \frac{z^2+z}{(z^2-2z+3)(z-2)}$$

Phân tích thành phần tử đơn giản:

$$\frac{A_1}{z-P_1} + \frac{A_2}{z-P_2} + \frac{B}{z-2}.$$

Với các nghiệm của mẫu số:

$$P_1 = 1 + j\sqrt{2}, \quad P_2 = 1 - j\sqrt{2}.$$

Hệ số được xác định:

$$A_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad A_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad B = 2.$$

Suy ra hàm truyền H(z):

$$Y_{xs}^+(z) = \frac{A_1}{1-P_1z^{-1}} + \frac{A_2}{1-P_2z^{-1}} + \frac{B}{1-2z^{-1}}.$$

Dạng thời gian:

$$(\sqrt{3})^{n+1}\cos(bn+a)u(n) - 2^{n+1}u(-n-1), \quad \text{với } \sqrt{3} < |z| < 2.$$

Với:

$$\cos b = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sin b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \cos a = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \sin a = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

4.2.6 Bài tập số 6

Giả sử $x(n)$ có biến đổi Z là $X(z)$. Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $Z[x^*(n)] = X^*(z^*)$.

b. $Z[Re\{x(n)\}] = \frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$.

c. $Z[Im\{x(n)\}] = \frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$.

d. $Z[e^{j\omega_0 n}x(n)] = X(ze^{-j\omega_0})$.

Bài làm:

(a)

Biến đổi Z của một tín hiệu x(n) được định nghĩa là:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Áp dụng biến đổi Z lên $x^*(n)$, ta có:

$$Z[x^*(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x(n))^* z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x(n)(z^*)^{-n}\right)^* = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^*)^{-n}\right]^* = X^*(z^*)$$

Kết luận:

$$Z[x^*(n)] = X^*(z^*)$$

(b)

Ta biến đổi vế phải của biểu thức:

$$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)] = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)(z^*)^{-n}\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x(n)z^{-n} + x^*(n)(z^*)^{-n}\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n} \cdot \frac{x(n) + x^*(n)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n} \cdot \mathrm{Re}\{x(n)\} = z\left[\mathrm{Re}\{x(n)\}\right]$$

Kết luận:

$$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)] = z\left[\mathrm{Re}\{x(n)\}\right]$$

c.

Phần ảo của $x(n)$ có thể được viết dưới dạng:

$$\mathrm{Im}\{x(n)\} = \frac{x(n) - x^*(n)}{2j}$$

Lấy biến đổi Z hai vế:

$$Z\left\{\mathrm{Im}[x(n)]\right\} = Z\left\{\frac{x(n) - x^*(n)}{2j}\right\} = \frac{1}{2j}\left[Z\{x(n)\} - Z\{x^*(n)\}\right]$$

Áp dụng kết quả $Z[x^*(n)] = X^*(z^*)$ đã được chứng minh ở câu a:

$$Z[x(n)] = X(z), \quad Z[x^*(n)] = X^*(z^*)$$

Thay vào biểu thức trên, ta được:

$$Z\left\{\mathrm{Im}[x(n)]\right\} = \frac{1}{2j}\left[X(z) - X^*(z^*)\right]$$

d.

Biến đổi Z của $x(n)$ được định nghĩa là:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Áp dụng biến đổi Z cho $e^{j\omega_0 n}x(n)$:

$$Z\{e^{j\omega_0 n}x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n}x(n)z^{-n}$$

Nhóm $e^{j\omega_0 n}$ với z^{-n}:

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(e^{j\omega_0 n}z^{-n}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left((e^{-j\omega_0}z)^{-n}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(ze^{-j\omega_0})^{-n}$$

Nhận thấy rằng tổng trên chính là biến đổi Z của $x(n)$ với z thay bằng $ze^{-j\omega_0}$:

$$= X(ze^{-j\omega_0})$$

$$Z\{e^{j\omega_0 n}x(n)\} = X(ze^{-j\omega_0})$$

4.3 Bài tập làm thêm trong tài liệu tham khảo

4.3.1 Bài tập 3.3

Dịch đề bài: Xác định biến đổi Z và phác họa miền hội tụ (ROC) của các tín hiệu sau:

$$\text{(a)} \quad x_1(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}, & n < 0 \end{cases}$$

$$\text{(b)} \quad x_2(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$\text{(c)} \quad x_3(n) = x_1(n+4)$$

$$\text{(d)} \quad x_4(n) = x_1(-n)$$

Bài làm:

(a)

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} z^{-n} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^n - 1$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z} - 1 = \frac{\frac{5}{6}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)}$$

Miền hội tụ (ROC): $\frac{1}{3} < |z| < 2$.

(b)

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{1-2z^{-1}} = \frac{-\frac{5}{3}z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

Miền hội tụ (ROC): $|z| > 2$.

(c)

$$X_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n+4) z^{-n}$$

$$= z^4 X_1(z) = \frac{\frac{5}{6}z^4}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)}$$

Miền hội tụ (ROC): $\frac{1}{3} < |z| < 2$.

(d)

$$X_4(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(-n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) z^n = X_1(z^{-1}) = \frac{\frac{5}{6}}{(1-\frac{1}{3}z)(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

Miền hội tụ (ROC): $\frac{1}{2} < |z| < 3$.

4.3.2 Bài tập 3.4

Dịch đề bài: Xác định biến đổi Z của các tín hiệu sau:

(a) $x(n) = n(-1)^n u(n)$

(b) $x(n) = n^2 u(n)$

(c) $x(n) = -na^n u(-n-1)$

(d) $x(n) = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) u(n)$

(e) $x(n) = (-1)^n u(n)$

(f) $x(n) = \{1\uparrow, 0, -1, 0, 1, -1, \dots\}$

Bài làm:

(a)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n z^{-n} = -z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n} = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{1+z^{-1}}\right] = \frac{z^{-1}}{(1+z^{-1})^2}, \quad |z| > 1$$

(b)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^{-n} = z^2\frac{d^2}{dz^2}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = z^2\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{1-z^{-1}}\right] = \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3} = \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}, \quad |z| > 1$$

(c)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -na^n z^{-n} = -z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} a(n) z^{-n} = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{1-az^{-1}}\right] = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| < |a|$$

(d)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) z^{-n} = \frac{1+z^{-1}\cos\frac{\pi}{3}}{1+2z^{-1}\cos\frac{\pi}{3}+z^{-2}}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1+z^{-1}+z^{-2}}, \quad \text{ROC: } |z| > 1$$

(e)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n} = \frac{1}{1+z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

(f)

$$x(n) = \{1\uparrow, 0, -1, 0, 1, -1\}$$

$$X(z) = 1 - z^{-2} + z^{-4} - z^{-5}, \quad z \neq 0$$

4.3.3 Bài tập 3.7

Dịch đề bài: Tính tích chập của các tín hiệu sau bằng cách sử dụng biến đổi Z.

$$x_1(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}, & n < 0 \end{cases}$$

$$x_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Bài làm:

$$x_1(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}, & n < 0 \end{cases}$$

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} z^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z} - 1$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z} - 1 = \frac{\frac{5}{6}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)}$$

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \frac{1}{3} < |z| < 2$$

$$Y(z) = \frac{-2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{10}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-4}{3}\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$$y(n) = \begin{cases} -2\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 0 \\ \frac{-4}{3}(2)^n, & n < 0 \end{cases}$$

4.3.4 Bài tập 3.8

Dịch đề bài: Sử dụng tính chất tích chập để:

(a) Biểu diễn biến đổi Z của

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

theo $X(z)$.

(b) Xác định biến đổi Z của $x(n) = (n+1)u(n)$.

Bài làm:

(a)

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)u(n-k) = x(n) * u(n)$$
$$Y(z) = X(z)U(z) = \frac{X(z)}{1-z^{-1}}$$

(b)

$$u(n) * u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)u(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} u(k) = (n+1)u(n)$$
$$\text{Do đó, } x(n) = u(n) * u(n) \text{và } X(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}, \quad |z| > 1$$

4.3.5 Bài tập 3.13

Dịch đề bài: Giả sử $x(n)$ là một dãy có biến đổi Z là $X(z)$. Xác định, dưới dạng của $X(z)$, biến đổi Z của các tín hiệu sau:

(a)

$$x_1(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right), & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ 0, & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

(b)

$$x_2(n) = x(2n)$$

Bài làm:

(a)

$$x_1(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right), & \text{n chẵn} \\ 0, & \text{n lẻ} \end{cases}$$

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2}\right)z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-2k} = X(z^2)$$

(b)

$$x_2(n) = x(2n)$$

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2n)z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-\frac{k}{2}}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{x(k) + (-1)^k x(k)}{2}\right] z^{-\frac{k}{2}}, \quad k \text{ chẵn} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-\frac{k}{2}} + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)(-z)^{-\frac{k}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[X(\sqrt{z}) + X(-\sqrt{z})\right]$$

4.3.6 Bài tập 3.14

Dịch đề bài: Xác định tín hiệu nhân quả $x(n)$ nếu biến đổi Z-transform $X(z)$ được cho bởi:

(a)

$$X(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

(b)

$$X(z) = \frac{-1}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

(c)

$$X(z) = \frac{z^{-6} + z^{-7}}{1 - z^{-1}}$$

(d)

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-2}}{1 + z^{-2}}$$

$$\text{(e)} \quad X(z) = \frac{1}{4}\frac{1 + 6z^{-1} + z^{-2}}{(1 - 2z^{-1} + 2z^{-2})(1 - 0.5z^{-1})}$$

(f)

$$X(z) = \frac{2 - 1.5z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

(g)

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}}$$

(h)

$X(z)$ được xác định bởi sơ đồ trong Hình P3.14.

Hằng số $G = \frac{1}{4}$.

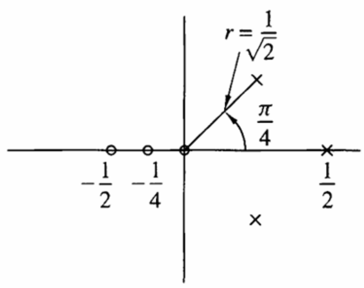


Figure P3.14

(i)

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

(j)

$$X(z) = \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a}$$

Bài làm:

(a)

$$X(z) = \frac{1 - 3z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{A}{(1 + z^{-1})} + \frac{B}{(1 + 2z^{-1})}$$

$$A = 2, \quad B = -1$$

$$\text{Do đó, } x(n) = [2(-1)^n - (-2)^n]\, u(n)$$

(b)

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{A(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) + B(\frac{1}{2}z^{-1})}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

$$A = 1, \quad B = 1$$

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{4})z^{-1}}{1 - 2\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{4})z^{-1} + (\frac{1}{2})z^{-2}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\frac{\pi}{4})z^{-1}}{1 - 2\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{4})z^{-1} + (\frac{1}{2})z^{-2}}$$

$$\text{Do đó, } x(n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}v^n \cos\frac{\pi}{4}n + \frac{1}{\sqrt{2}}v^n \sin\frac{\pi}{4}n\right] u(n)$$

(c)

$$X(z) = \frac{z^{-6} + z^{-7}}{1 - z^{-1}}$$

$$x(n) = u(n-6) + u(n-7)$$

(d)

$$X(z) = \frac{1}{1 + z^{-2}} + \frac{z^{-2}}{1 + z^{-2}} = 2 \cdot \frac{1}{1 + z^{-2}}$$

$$x(n) = \cos\frac{\pi}{2}nu(n) + 2\cos\frac{\pi}{2}(n-2)u(n-2) = 2\delta(n) - \cos\frac{\pi}{2}nu(n)$$

(e)

$$X(z) = \frac{1}{4}\frac{1 + 6z^{-1} + z^{-2}}{(1 - 2z^{-1} + 2z^{-2})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{A(1 - z^{-1})}{1 - 2z^{-1} + 2z^{-2}} + \frac{Bz^{-1}}{1 - 2z^{-1} + 2z^{-2}} + \frac{C}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$A = -\frac{3}{5}, \quad B = \frac{23}{10}, \quad C = \frac{17}{20}$$

$$\text{Do đó, } x(n) = \left[-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cos\frac{\pi}{4}n + \frac{23}{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sin\frac{\pi}{4}n + \frac{17}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n)$$

(f)

$$X(z) = \frac{2 - 1.5z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$x(n) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right] u(n)$$

(g)

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}} = 1 - \left(\frac{2z^{-1} - 1 + 3z^{-2}}{(1 + 2z^{-1})(1 + 2z^{-1})}\right) = 1 - \frac{2z^{-1}}{1 + 2z^{-1}} + \frac{z^{-2}}{(1 + 2z^{-1})^2}$$

$$x(n) = \delta(n) - 2(-2)^{-n}u(n-1) + (n-1)(-2)^{-n}u(n-1)$$

$$= \delta(n) + (n-3)(-2)^{-n}u(n-1)$$

(h)

$$X(z) = \frac{1}{4}\frac{(z + \frac{1}{2})(z + \frac{1}{4})}{(z - \frac{1}{2})(z - \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}})(z - \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})} = \frac{1}{4}\frac{(1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2})z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1} + z^{-2})}$$

$$= \frac{A(1 - \frac{1}{2}z^{-1})z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}} + \frac{A(\frac{1}{2}z^{-1})z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}} + \frac{Cz^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{7}{8}, \quad C = \frac{3}{4}$$

$$\text{Do đó, } x(n) = \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cos\frac{\pi}{4}(n-1) + \frac{7}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sin\frac{\pi}{4}(n-1) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] u(n-1)$$

(i)

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{z^{-1}}{4(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)$$

(j)

$$X(z) = \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a} = \frac{1}{a}\left(\frac{1 - az^{-1}}{1 - \frac{az^{-1}}{a}}\right) = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{az^{-1}}{1 - az^{-1}}\right)$$

$$x(n) = \frac{1}{a}\delta(n) + \left(\frac{1}{a}\right)a^n u(n-1) = \frac{1}{a}\delta(n) + a^{n-1}u(n-1)$$

4.3.7 Bài tập 3.19

Dịch đề bài: Bằng cách lấy vi phân $X(z)$ trước, sau đó sử dụng các tính chất thích hợp của biến đổi z-, xác định $x(n)$ cho các trường hợp sau:

(a)

$$X(z) = \log(1 - 2z), \quad |z| < \frac{1}{2}$$

(b)

$$X(z) = \log(1 - z^{-1}), \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Bài làm:

(a)

$$X(z) = \log(1 - 2z), \quad |z| < \frac{1}{2}$$

$$Y(z) = -z\frac{dX(z)}{dz} = -z\frac{-2}{1-2z} = \frac{2z}{1-2z}, \quad |z| < \frac{1}{2}$$

Suy ra:

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n < 0$$

$$x(n) = \frac{1}{n}y(n) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$$

(b)

$$X(z) = \log\left(1 - z^{-1}\right), \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$Y(z) = -z\frac{dX(z)}{dz} = -z\frac{-z^{-2}}{1-z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Vì vậy, ta có:

$$y(n) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

Suy ra:

$$x(n) = \frac{1}{n}y(n) = -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)$$

4.3.8 Bài tập 3.20

Dịch đề bài:

(a) Vẽ sơ đồ cực-không (pole-zero) cho tín hiệu

$$x_1(n) = (r^n \sin \omega_0 n) u(n), \quad 0 < r < 1$$

(b) Tính biến đổi z- $X_2(z)$, tương ứng với sơ đồ cực-không trong phần (a).

(c) So sánh $X_1(z)$ với $X_2(z)$. Chúng có giống nhau không? Nếu không, hãy chỉ ra một phương pháp để suy ra $X_1(z)$ từ sơ đồ cực-không.

Bài làm:

(a) Theo bài ra, ta có:

$$x_1(n) = r^n \sin \omega_0 n\, u(n), \quad 0 < r < 1$$

$$X_1(z) = \frac{r \sin \omega_0 z^{-1}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Zero tại $z = 0$ và poles tại $z = re^{\pm j\omega_0} = r(\cos \omega_0 \pm j \sin \omega_0)$.

(b)

$$X_2(z) = \frac{z}{(1 - re^{j\omega_0} z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0} z^{-1})}$$

$$= \frac{z}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

(c) Ta thấy $X_1(z)$ và $X_2(z)$ khác nhau bởi một hằng số. Hằng số này có thể được xác định bằng cách lấy giá trị của $X_1(z)$ tại $z = 1$.

Tài liệu tham khảo

[1] Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications (4th Edition), John G. Proakis, Dimitris G. Manolakis, Prentice Hall.

[2] Slide bài giảng môn học Xử lý tín hiệu số - CO2035, PGS.TS Phạm Hoàng Anh