ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT MÁY TÍNH

THỰC HÀNH XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ - CO2036

Bài thực hành tuần số 4:

"Giải và mô phỏng bài tập Lab 6"

Giảng viên hướng dẫn: Phạm Công Thái

Nhóm: 10

Sinh viên thực hiện: Lê Đức Cường - 2210423

Lê Phú Cường - 2210425

Thành phố Hồ Chí Minh, tháng 4 năm 2025

Mục lục

1 Tổng quan

Trong suốt các tuần học vừa qua, nhóm chúng em đã được tiếp cận với các khái niệm quan trọng về tín hiệu và hệ thống rời rạc, cùng với quy trình chuyển đổi tín hiệu tương tự - số (ADC). Những kiến thức này không chỉ giúp chúng em hiểu được cách tín hiệu được biểu diễn, xử lý trong miền rời rạc mà còn cung cấp nền tảng để thực hiện các phân tích, tính toán cần thiết trong các ứng dụng thực tế.

Cụ thể, chúng em đã học và áp dụng các nội dung từ các chương sau:

- Introduction of Signal and System: Bài giảng này giới thiệu những khái niệm cơ bản về tín hiệu và hệ thống, bao gồm phân loại tín hiệu (rời rạc, liên tục, xác định, ngẫu nhiên), các thuộc tính của hệ thống (tuyến tính, bất biến theo thời gian, nhân quả, có nhớ hay không có nhớ) và các phương pháp biểu diễn hệ thống.

- Discrete Time Signal and System: Nội dung này đi sâu vào các tín hiệu trong miền rời rạc, các phép biến đổi tín hiệu, cách biểu diễn tín hiệu theo chuỗi, cũng như các phương pháp phân tích và xử lý hệ thống rời rạc.

- Z Transform: Biến đổi Z là công cụ quan trọng để phân tích hệ thống rời rạc, giúp giải quyết các phương trình sai phân, xác định đáp ứng hệ thống, cũng như thiết kế và phân tích hệ thống trong miền Z.

Dựa trên những kiến thức lý thuyết này, chúng em đã tiến hành các bài thực hành trong phòng LAB để kiểm nghiệm lại các khái niệm đã học, đồng thời vận dụng vào các tình huống cụ thể. Việc thực hành không chỉ giúp củng cố kiến thức mà còn giúp chúng em hiểu rõ hơn về cách các thuật toán xử lý tín hiệu số được triển khai trên thực tế, cũng như những thách thức có thể gặp phải trong quá trình thiết kế và phân tích hệ thống rời rạc.

2 Mục tiêu

Báo cáo này nhằm mục tiêu khám phá và nâng cao hiểu biết về cách sử dụng Scilab trong việc giải quyết các bài toán toán học, đặc biệt là trong phân tích và xử lý tín hiệu. Scilab không chỉ là một công cụ mạnh mẽ để tính toán số, mà còn hỗ trợ trực quan hóa tín hiệu dưới dạng biểu đồ, giúp chúng em dễ dàng quan sát và đánh giá các đặc trưng của tín hiệu một cách trực quan và chính xác.

Mục tiêu của báo cáo không chỉ dừng lại ở việc sử dụng Scilab để giải quyết bài toán, mà còn giúp chúng em hình thành tư duy phân tích tín hiệu, làm quen với các phương pháp xử lý số, từ đó tạo tiền đề cho các nghiên cứu chuyên sâu hơn về xử lý tín hiệu số và hệ thống điều khiển trong tương lai.

3 Phương pháp

Công cụ chính được sử dụng trong báo cáo này là Scilab, một phần mềm tính toán khoa học mạnh mẽ, hỗ trợ giải quyết các bài toán về tín hiệu và hệ thống rời rạc. Nhờ khả năng xử lý dữ liệu số và trực quan hóa tín hiệu, Scilab giúp chúng em dễ dàng theo dõi sự thay đổi của tín hiệu thông qua các biểu đồ, từ đó hiểu rõ hơn về các đặc trưng và quy luật của tín hiệu trong miền rời rạc.

Ngoài việc sử dụng các hàm và công cụ có sẵn trong Scilab, chúng em còn kết hợp với các kiến thức đã học để kiểm chứng kết quả, từ đó hiểu sâu hơn về cách các phép biến đổi toán học được hiện thực hóa trên phần mềm. Đồng thời, chúng em cũng thử nghiệm tạo ra những hàm mới nhằm đơn giản hóa các bước tính toán và tối ưu hóa quá trình phân tích tín hiệu.

4 Nội dung bài thực hành

4.1 Bài tập Lab 6

4.1.1 Bài tập số 1

Exercise 1. Find Fourier transform of the following signals

a. $x_1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\tau} & |t| \leq \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$

b. $x_2(t) = e^{j\omega_0 t}$

Bài làm:

a

$$x_a(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{\tau} & \text{nếu } |t| \leq \tau \\ 0 & \text{nếu } |t| > \tau \end{cases}$$

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right) e^{-j2\pi Ft} dt$$

Đặt $\omega = 2\pi F$, ta có:

$$X(F) = \int_{-\tau}^{\tau} \left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\omega t} dt - \int_{-\tau}^{\tau} \frac{|t|}{\tau} e^{-j\omega t} dt$$

Ta xét tích phân thứ nhất

$$\int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\omega t} dt = \left.\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_{-\tau}^{\tau} = \frac{e^{-j\omega\tau} - e^{j\omega\tau}}{-j\omega} = \frac{-2j\sin(\omega\tau)}{-j\omega} = \frac{2\sin(\omega\tau)}{\omega}$$

Ta xét tích phân thứ hai:

$$\int_{-\tau}^{\tau} \frac{|t|}{\tau} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\tau}\left(\int_{0}^{\tau} t e^{-j\omega t} dt + \int_{-\tau}^{0} (-t) e^{-j\omega t} dt\right)$$

$$= \frac{1}{\tau}\left(\int_{0}^{\tau} t e^{-j\omega t} dt - \int_{-\tau}^{0} t e^{-j\omega t} dt\right)$$

Áp dụng giới hạn, ta sẽ thay vào hai tích phân để tính cụ thể.

$$= \frac{e^{-j\omega\tau}}{-j\omega} + \frac{e^{j\omega\tau}}{j\omega} - \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{j\omega} e^{j\omega\tau} + \frac{\tau}{(j\omega)^2}\left(e^{j\omega\tau} - 1\right)\right) - \frac{2\cos(\omega\tau)}{\tau} - \frac{2}{\tau} + \frac{2\cos(\omega\tau)}{j\omega}$$

$$\Rightarrow X(F) = \frac{2\sin(\omega\tau)}{\omega} + \frac{2\cos(\omega\tau)-2}{\tau} - \frac{2\cos(\omega\tau)}{j\omega}$$

b.

$$x_2(t) = e^{j\omega_0 t}$$

Xét phổ $X(\omega) = \delta(\omega - \omega_0) \Rightarrow x(t) \leftrightarrow X(\omega)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega$$

Vì $\delta(\omega-\omega_0) \Rightarrow \omega = \omega_0$, ta có:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega = \frac{e^{j\omega_0 t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\omega_0)d\omega = \frac{e^{j\omega_0 t}}{2\pi}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{e^{j\omega_0 t}}{2\pi} \Rightarrow X(\omega) = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

4.1.2 Bài tập số 2

Exercise 2. Find Fourier transform of the following signals

a. $x_1(n) = u(n) - u(n-6)$

b. $x_2(n) = 2^n u(-n)$

c. $x_3(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n+4)$

d. $x_4(n) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{2}n & |n| \le 4 \\ 0 & |n| > 4 \end{cases}$

e. $x_5(n) = |a|^n sin(\omega_0 n)|a| < 1$

Bài làm:

a.

$$x_1(n) = u(n) - u(n-6) \Rightarrow x_1(\omega) = \sum_{n=0}^{5} e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-6j\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

Hàm $x_1(n)$ là hiệu của hai hàm bước đơn vị, nên nó có giá trị bằng 1 trong khoảng $0 \le n < 6$ và 0 ngoài khoảng đó. Biến đổi Fourier của chuỗi hữu hạn từ $n = 0$ đến $n = 5$ là tổng hình học hữu hạn.

Điều kiện hội tụ: $|e^{j\omega}| > 1$; $e^{j\omega} \neq 0$

b.

$$x_2(n) = 2^n u(-n)$$

$$= -2^n u(-(n-1)+1)$$

$$= -2^n u(-n+1)$$

$$\Rightarrow x_2(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{0} 2^n e^{-j\omega n} = \frac{-e^{j\omega}}{1-2e^{j\omega}}$$

Hàm $x_2(n)$ là hàm nhân lũy thừa 2^n với hàm đơn vị lùi (chạy từ $-\infty$ đến 0). Đây là chuỗi hình học lùi nên công thức tổng vô hạn được áp dụng.

Điều kiện hội tụ: $|e^{j\omega}| < 2$; $e^{j\omega} \neq 0$

c.

Ta có:

$$x_3(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n+4)$$

$$\Rightarrow x_3(\omega) = \sum_{n=-4}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n e^{-j\omega n} = \frac{e^{4j\omega}}{1-0.25e^{-j\omega}}$$

Dịch trái hàm mũ nhân với bước đơn vị giúp tạo ra chuỗi từ $n = -4$ đến ∞. Biến đổi Fourier của chuỗi này có thêm hệ số pha $e^{4j\omega}$ do dịch chỉ số.

Điều kiện hội tụ: $|e^{j\omega}| > 0.25$; $e^{j\omega} \neq 0$

d.

Theo bài ra, ta có:

$$x_4(n) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{2}|n|, & |n| \leq 4 \\ 0, & |n| > 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_4(n) = \left\{4, \frac{7}{2}, 3, \frac{5}{2}, 2\uparrow, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0\right\}$$

Đây là hàm xung tam giác bị cắt ở hai đầu tại $n = -4$ và $n = 4$. Ta thực hiện biến đổi Fourier rời rạc:

$$\begin{aligned} x_4(\omega) &= 4e^{j4\omega} + \frac{7}{2}e^{j3\omega} + 3e^{j2\omega} + \frac{5}{2}e^{j\omega} \\ &\quad + 2 + \frac{3}{2}e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} + \frac{1}{2}e^{-3j\omega} \\ &= 4e^{j4\omega} + 3e^{j3\omega} + 2e^{j2\omega} + 1e^{j\omega} + 2 + \cos(3\omega) + 2\cos(2\omega) + 3\cos(\omega) \end{aligned}$$

e.

Ta có:

$$x_5(n) = |a|^n \sin(\omega_0 n), \quad |a| < 1$$

Ta biết:

$$\mathcal{F}\{\sin(\omega_0 n)\} = -\pi j\left[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\right]$$

Đặt $z = e^{j\omega}$, ta xét biến đổi z của $x_5(n)$:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a|^n \sin(\omega_0 n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n \sin(\omega_0 n) z^{-n}$$

Đây là chuỗi hình học kết hợp với sin, nên ta áp dụng công thức tổng chuẩn:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n \sin(\omega_0 n) z^{-n} = \frac{|a| z^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2|a| z^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$$

Từ đó:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{|a| e^{-j\omega} \sin(\omega_0)}{1 - 2|a| e^{-j\omega} \cos(\omega_0) + a^2 e^{-2j\omega}}$$

Nếu gọi $X'(\omega)$ là biểu thức biến đổi Fourier của $x_5(n)$, thì:

$$X'(\omega) = \frac{|a| e^{-j\omega} \sin(\omega_0)}{1 - 2|a| e^{-j\omega} \cos(\omega_0) + a^2 e^{-2j\omega}}$$

4.1.3 Bài tập số 3

Exercise 3. Use Scilab to draw the amplitude spectrum and phase spectrum of the following signals

a. $x_1(n) = 0.1^n u(n)$

b. $x_2(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3)$

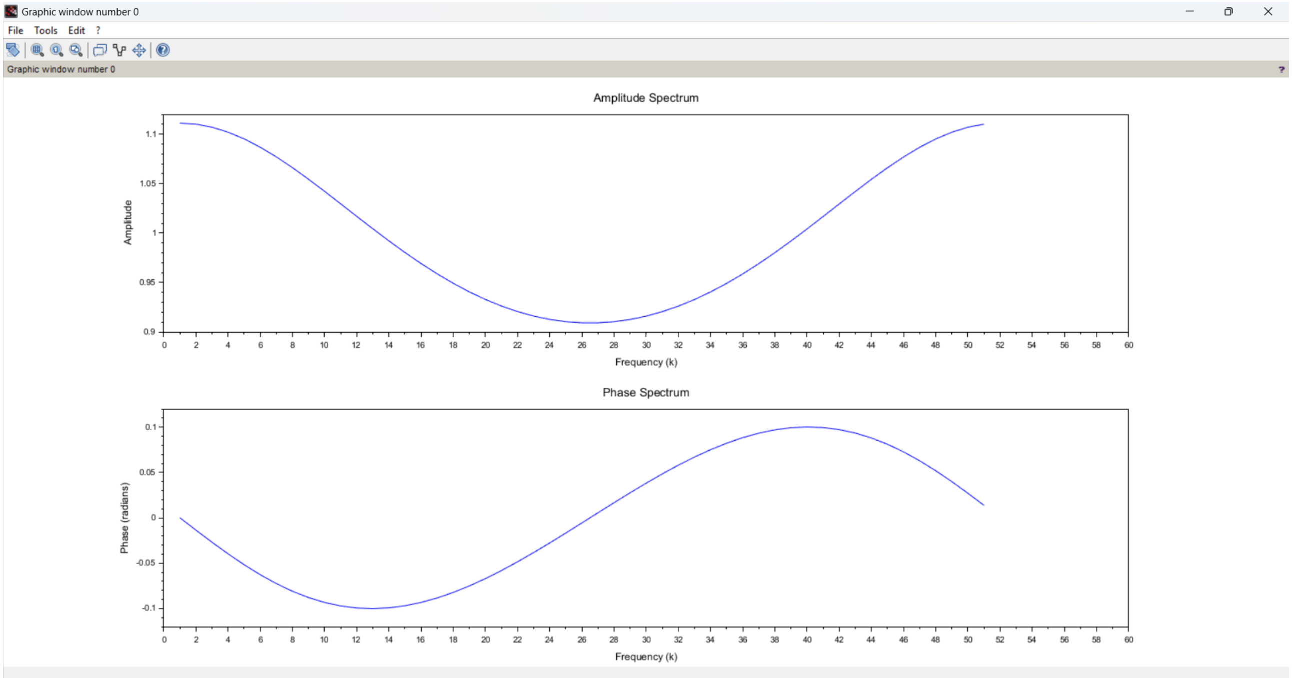
Bài làm:

a.

Tín hiệu $x_1(n)$

- Phổ biên độ: Có biên độ giảm dần, tập trung năng lượng ở tần số thấp, vì tín hiệu là một hàm mũ giảm.

- Phổ pha: Có dạng tuyến tính (linear), do đặc tính đơn điệu của hàm mũ.

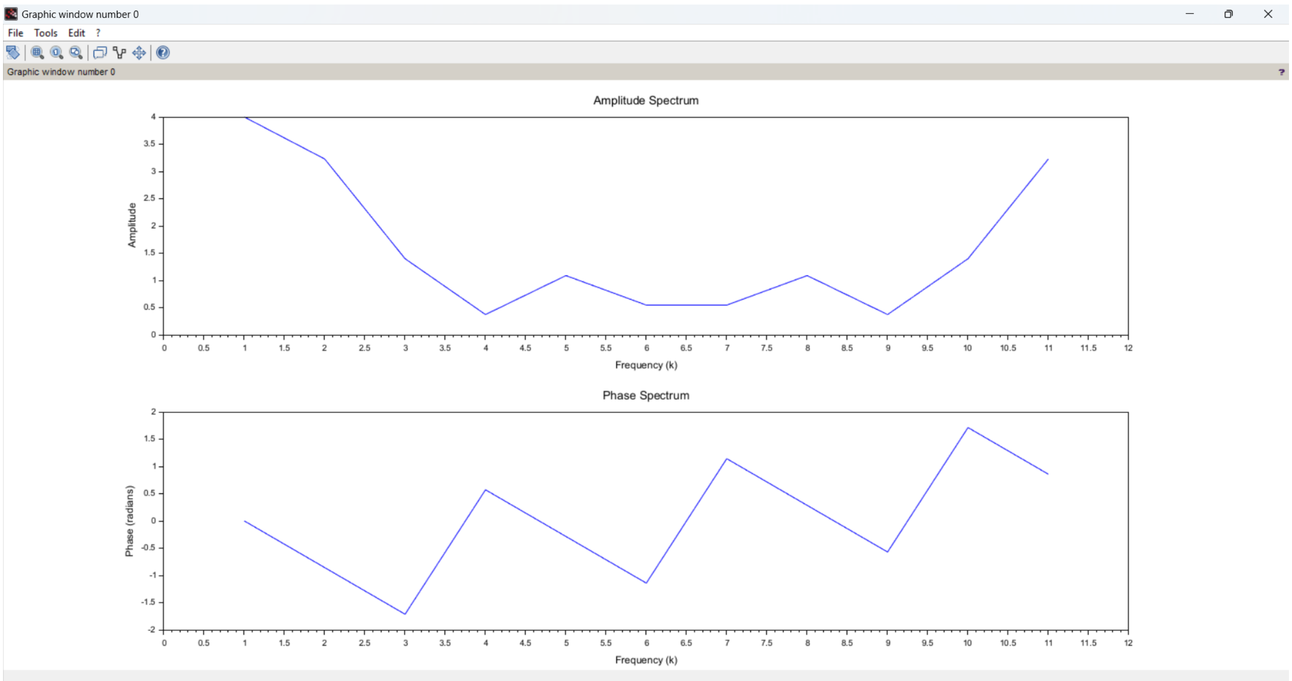


b.

Tín hiệu $x_2(n)$

- Là tổ hợp các xung → phổ biên độ có dạng hàm sinx/x (sinc), giống như phổ của một rectangular pulse trong miền thời gian.

- Phổ pha là dạng răng cưa (do các xung không đối xứng quanh 0).



4.1.4 Bài tập số 4

Exercise 4. Given LTI system by the following input-ouput description equation

$$y(n) + 0.1y(n-1) + 0.2y(n-2) = x(n)$$

Determine the Fourier transform of the impulse response h(n) and then draw the amplitude spectrum and phase spectrum.

Bài làm:

Xét hệ thống rời rạc tuyến tính bất biến (LTI) với phương trình sai phân:

$$y(n) + 0.1y(n-1) + 0.2y(n-2) = x(n)$$

Dùng biến đổi Fourier rời rạc, ta có:

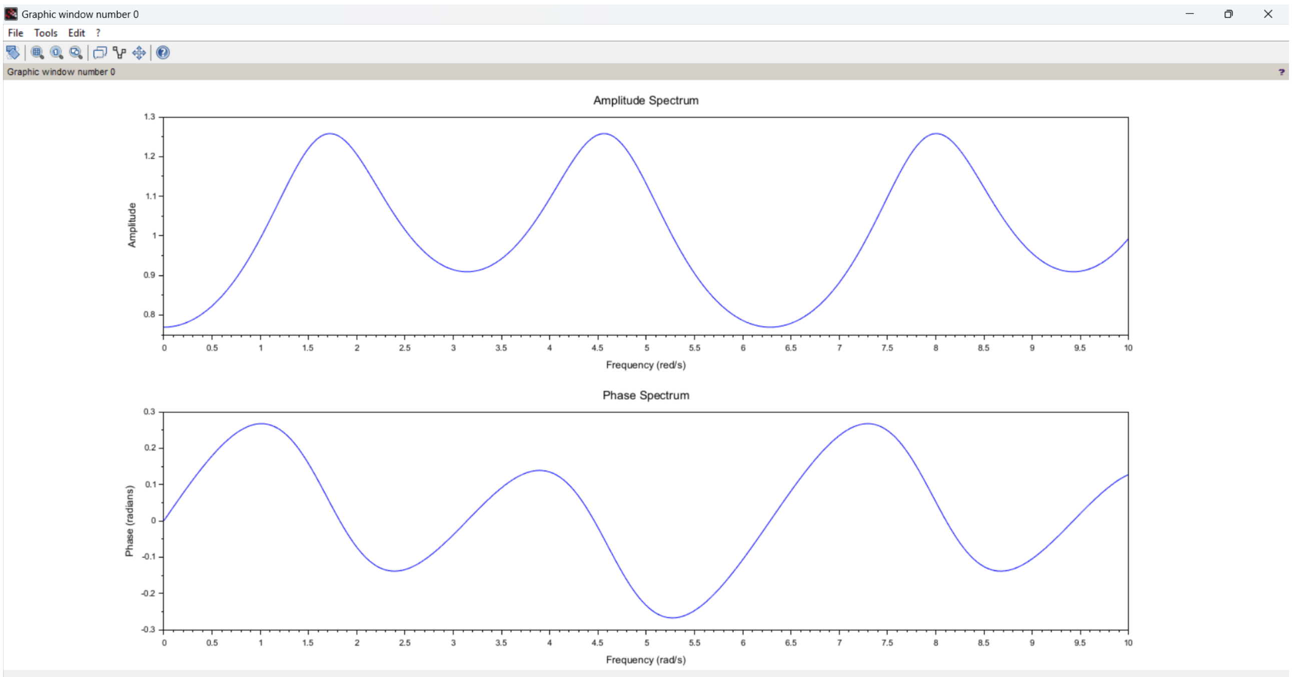
$$\rightarrow y(\omega) + 0.1e^{-j\omega}y(\omega) + 0.2e^{-2j\omega}y(\omega) = X(\omega)$$

Tách $y(\omega)$ ra ngoài:

$$\rightarrow y(\omega)\left[1 + 0.1e^{-j\omega} + 0.2e^{-2j\omega}\right] = X(\omega)$$

Suy ra hàm đáp ứng tần số:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1 + 0.1e^{-j\omega} + 0.2e^{-2j\omega}}$$



4.1.5 Bài tập số 5

Exercise 5. Given LTI system $h(n) = \delta(n) + \delta(n-1)$. Determine output y(n) when input x$(n) = 0.5^n u(n)$ by using Fourier Transform. Then, use SciLab to draw amplitude and phase spectrums.

Bài làm:

$h(n) = \delta(n) + \delta(n-1)$ và đầu vào $x(n) = 0.5^n u(n)$.

Ta sử dụng biến đổi Fourier để tìm đầu ra $y(n)$.

Biến đổi Fourier của $h(n)$ là:

$$H(\omega) = 1 + e^{-j\omega}$$

Biến đổi Fourier của $x(n) = 0.5^n u(n)$ là:

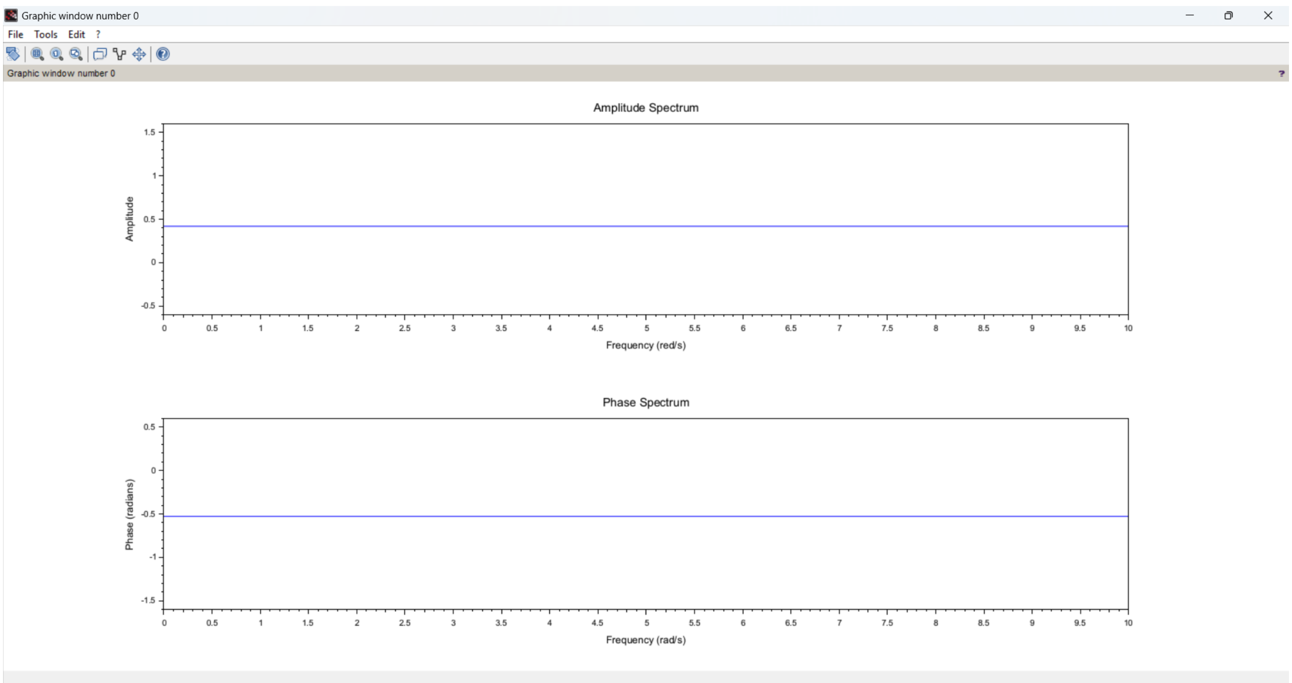
$$X(\omega) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\omega}}$$

Suy ra:

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) = \frac{1 + e^{-j\omega}}{1 - 0.5e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\omega}} + \frac{e^{-j\omega}}{1 - 0.5e^{-j\omega}}$$

Áp dụng biến đổi Fourier ngược, ta được:

$$y(n) = 0.5^n u(n) + 0.5^{n-1} u(n-1)$$



4.2 Bài tập trong sách tham khảo

4.2.1 Bài tập 4.1

4.1 Consider the full-wave rectified sinusoid in Fig. P4.1.

(a) Determine its spectrum $X_a(F)$.

(b) Compute the power of the signal.

(c) Plot the power spectral density.

(d) Check the validity of Parseval's relation for this signal.

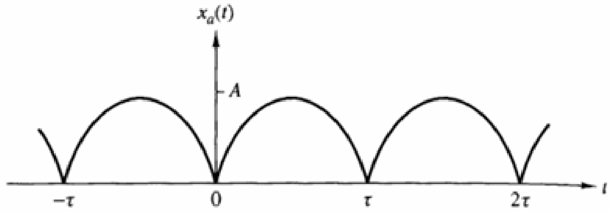


Figure P4.1

Bài làm:

(a) Vì $x_a(t)$ là hàm tuần hoàn, nên nó có thể được biểu diễn bởi chuỗi Fourier:

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kt/\tau}$$

trong đó:

$$c_k = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau A\sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) e^{-j2\pi kt/\tau} dt$$

$$= \frac{A}{j2\tau}\int_0^\tau \left[e^{j\pi t/\tau} - e^{-j\pi t/\tau}\right] e^{-j2\pi kt/\tau} dt$$

$$= \frac{A}{j2\tau}\left[\frac{e^{j\pi(1-2k)t/\tau}}{j\frac{\pi}{\tau}(1-2k)} - \frac{e^{-j\pi(1+2k)t/\tau}}{-j\frac{\pi}{\tau}(1+2k)}\right]_0^\tau$$

$$= \frac{A}{\pi}\left[\frac{1}{1-2k} - \frac{1}{1+2k}\right]$$

$$= \frac{2A}{\pi(1-4k^2)}$$

Sau đó, biến đổi Fourier $X_a(F)$ là:

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi(F-\frac{k}{\tau})t} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(F-\frac{k}{\tau})t} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta\left(F - \frac{k}{\tau}\right)$$

Do đó, phổ tần của $x_a(t)$ gồm các vạch phổ tại các tần số $\frac{k}{\tau}$, với $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ có biên độ là $|c_k|$ và pha là $\angle c_k$.

(b) Công suất tín hiệu:

$$P_x = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} x_a^2(t)dt = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} A^2 \sin^2\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) dt = \frac{A^2}{2}$$

(c) Mật độ phổ công suất (Power Spectral Density):

$$\text{PSD} = |c_k|^2, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

(d) Hệ thức Parseval:

$$P_x = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} x_a^2(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{4A^2}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}$$

4.2.2 Bài tập 4.2

4.2 Compute and sketch the magnitude and phase spectra for the following signals ($a > 0$).

(a) $x_a(t) = \begin{cases} Ae^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

(b) $x_a(t) = Ae^{-a|t|}$

Bài làm:

a.

Xét tín hiệu:

$$x_a(t) = Ae^{-at}u(t), \quad a > 0$$

trong đó $u(t)$ là hàm bước đơn vị (unit step), đảm bảo tín hiệu chỉ tồn tại khi $t \geq 0$. Đây là một tín hiệu suy giảm theo hàm mũ, thường gặp trong các hệ thống đáp ứng tự nhiên.

Ta cần tìm biến đổi Fourier của tín hiệu $x_a(t)$, ký hiệu là $X_a(F)$. Theo định nghĩa:

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j2\pi Ft}dt = \int_{0}^{\infty} Ae^{-at}e^{-j2\pi Ft}dt$$

Gộp các số mũ lại:

$$X_a(F) = A\int_{0}^{\infty} e^{-(a+j2\pi F)t}dt$$

Đây là tích phân của hàm mũ suy giảm với điều kiện $a > 0$, nên tích phân hội tụ:

$$X_a(F) = A\left[\frac{e^{-(a+j2\pi F)t}}{-(a+j2\pi F)}\right]_0^{\infty} = \frac{A}{a+j2\pi F}$$

Ta có thể phân tích biểu thức này thành biên độ và pha:

Biên độ phổ:

$$|X_a(F)| = \left|\frac{A}{a+j2\pi F}\right| = \frac{A}{\sqrt{a^2+(2\pi F)^2}}$$

Biểu thức cho thấy biên độ giảm theo tần số F; tức là tín hiệu có phổ tập trung chủ yếu ở tần số thấp.

b.

Xét tín hiệu đối xứng thời gian, bao gồm hai phần mũ đối nhau:

$$X_a(F) = \int_{0}^{\infty} Ae^{at}e^{-j2\pi Ft}dt + \int_{0}^{\infty} Ae^{-at}e^{-j2\pi Ft}dt$$

Biến đổi từng phần:

$$= \int_{0}^{\infty} Ae^{-(-a+j2\pi F)t}dt + \int_{0}^{\infty} Ae^{-(a+j2\pi F)t}dt$$

$$= \frac{A}{a-j2\pi F} + \frac{A}{a+j2\pi F}$$

$$= \frac{A(a+j2\pi F)+A(a-j2\pi F)}{a^2+(2\pi F)^2} = \frac{2aA}{a^2+(2\pi F)^2}$$

Do tử số là số thực, nên:

$$|X_a(F)| = \frac{2aA}{a^2+(2\pi F)^2}$$

$$\angle X_a(F) = 0$$

4.2.3 Bài tập 4.3

4.3 Consider the signal

$$x(t) = \begin{cases} 1 - |t|/\tau, & |t| \le \tau \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

(a) Determine and sketch its magnitude and phase spectra, $|X_a(F)|$ and $\measuredangle X_a(F)$, respectively.

(b) Create a periodic signal $x_p(t)$ with fundamental period $T_p \ge 2\tau$, so that $x(t) = x_p(t)$ for $|t| < T_p/2$. What are the Fourier coefficients c_k for the signal $x_p(t)$?

(c) Using the results in parts (a) and (b), show that $c_k = (1/T_p)X_a(k/T_p)$.

Bài làm:

(a).

Xét hàm $x(t)$ như sau:

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{\tau}, & |t| \le \tau \\ 0, & \text{ngược lại} \end{cases}$$

Biến đổi Fourier của $x(t)$ là:

$$X_a(F) = \int_{-\tau}^{0} \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-j2\pi Ft} dt + \int_{0}^{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) e^{-j2\pi Ft} dt$$

Một cách khác, ta có thể xét đạo hàm $y(t) = x'(t)$:

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\tau}, & -\tau < t \le 0 \\ -\dfrac{1}{\tau}, & 0 < t \le \tau \end{cases}$$

Khi đó, biến đổi Fourier của $y(t)$ là:

$$Y(F) = \int_{-\tau}^{\tau} y(t) e^{-j2\pi Ft} dt = \int_{-\tau}^{0} \frac{1}{\tau} e^{-j2\pi Ft} dt + \int_{0}^{\tau} \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-j2\pi Ft} dt$$

$$= \frac{2\sin(2\pi F\tau)}{j\pi F\tau}$$

Suy ra:

$$X(F) = \frac{1}{j2\pi F} Y(F) = \tau \left(\frac{\sin(\pi F\tau)}{\pi F\tau}\right)^2$$

$$|X(F)| = \tau \left(\frac{\sin(\pi F\tau)}{\pi F\tau}\right)^2, \qquad \angle X_a(F) = 0$$

(b).

Hệ số Fourier c_k của $x(t)$ với chu kỳ T_p được xác định bởi:

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) e^{-j2\pi kt/T_p} dt$$

Do tính chẵn của hàm $x(t)$, ta tính như sau:

$$c_k = \frac{1}{T_p} \left[\int_{-\tau}^{0} \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-j2\pi kt/T_p} dt + \int_{0}^{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) e^{-j2\pi kt/T_p} dt \right]$$

$$= \frac{\tau}{T_p} \left(\frac{\sin(\pi k\tau/T_p)}{\pi k\tau/T_p} \right)^2$$

(c).

Từ kết quả ở (a) và (b), ta nhận được:

$$c_k = \frac{1}{T_p} X_a\left(\frac{k}{T_p}\right)$$

4.2.4 Bài tập 4.4

4.4 Consider the following periodic signal:

$$x(n) = \{\ldots, 1, 0, 1, 2, \underset{\uparrow}{3}, 2, 1, 0, 1, \ldots\}$$

(a) Sketch the signal $x(n)$ and its magnitude and phase spectra.

(b) Using the results in part (a), verify Parseval's relation by computing the power in the time and frequency domains.

Bài làm:

(a).

Ta có tín hiệu $x(n)$:

$$x(n) = \{\ldots, 1, 0, 1, 2, 3\uparrow, 2, 1, 0, 1, \ldots\}$$

Ta sẽ tính các hệ số Fourier rời rạc c_k theo công thức:

$$c_k = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{5} x(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{6}}$$

Thay giá trị $x(n) = \{3, 2, 1, 0, 1, 2\}$ vào:

$$c_k = \frac{1}{6} \left[3 + 2e^{-j\frac{2\pi k}{6}} + e^{-j\frac{4\pi k}{6}} + 0 + e^{-j\frac{8\pi k}{6}} + 2e^{-j\frac{10\pi k}{6}} \right]$$
$$= \frac{1}{6} \left[3 + 2e^{-j\frac{\pi k}{3}} + e^{-j\frac{2\pi k}{3}} + e^{-j\frac{4\pi k}{3}} + 2e^{-j\frac{5\pi k}{3}} \right]$$

Sử dụng công thức Euler và tổ hợp lượng giác:

$$c_k = \frac{1}{6}\left[3 + 4\cos\left(\frac{\pi k}{3}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right)\right]$$

Từ đó, ta có:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{6}(3+4+2) = \frac{9}{6} \\
c_1 &= \frac{1}{6}(3+2(-\tfrac{1}{2})+2(-\tfrac{1}{2})) = \frac{4}{6} \\
c_2 &= \frac{1}{6}(3-2+(-1)) = 0 \\
c_3 &= \frac{1}{6}(3-4+2) = \frac{1}{6} \\
c_4 &= \frac{1}{6}(3-2+(-1)) = 0 \\
c_5 &= \frac{1}{6}(3+2(-\tfrac{1}{2})+2(-\tfrac{1}{2})) = \frac{4}{6}
\end{aligned}$$

(b).

Tính công suất trong miền thời gian:

$$\begin{aligned}
P_t &= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}|x(n)|^2 \\
&= \frac{1}{6}(3^2+2^2+1^2+0^2+1^2+2^2) \\
&= \frac{1}{6}(9+4+1+0+1+4) = \frac{19}{6}
\end{aligned}$$

Tính công suất trong miền tần số:

$$\begin{aligned}
P_f &= \sum_{k=0}^{5}|c_k|^2 \\
&= \left(\left(\frac{9}{6}\right)^2 + \left(\frac{4}{6}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{4}{6}\right)^2\right) \\
&= \frac{81}{36} + \frac{16}{36} + 0 + \frac{1}{36} + 0 + \frac{16}{36} = \frac{114}{36} = \frac{19}{6}
\end{aligned}$$

Vậy ta có:

$$P_t = P_f = \frac{19}{6}$$

4.2.5 Bài tập 4.5

4.5 Consider the signal

$$x(n) = 2 + 2\cos\frac{\pi n}{4} + \cos\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi n}{4}$$

(a) Determine and sketch its power density spectrum.

(b) Evaluate the power of the signal.

Bài làm:

Cho tín hiệu:

$$x(n) = 2 + 2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) \Rightarrow N = 8$$

(a).

Tín hiệu này có chu kỳ $N = 8$, do đó ta sử dụng biểu thức tổng quát cho hệ số Fourier rời rạc:

$$c_k = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} x(n)e^{-j\pi kn/4}$$

Ta triển khai tín hiệu $x(n)$ tại các điểm $n = 0$ đến 7 dựa vào các giá trị lượng giác:

$$x(n) = \left\{\frac{11}{2},\ 2 + \frac{3}{4}\sqrt{2},\ 1,\ 2 - \frac{3}{4}\sqrt{2},\ \frac{1}{2},\ 2 - \frac{3}{4}\sqrt{2},\ 1,\ 2 + \frac{3}{4}\sqrt{2}\right\}$$

Dựa vào đối xứng và phân tích phổ (hoặc bằng tính toán từng c_k), ta thu được:

$$\begin{aligned} &c_0 = 2, \quad c_1 = c_7 = 1, \quad c_2 = c_6 = \frac{1}{2}, \\ &c_3 = c_5 = \frac{1}{4}, \quad c_4 = 0 \end{aligned}$$

(b).

Công suất tín hiệu được tính bằng tổng bình phương biên độ các hệ số phổ:

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=0}^{7} |c(i)|^2 \\ &= |c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 + |c_4|^2 + |c_5|^2 + |c_6|^2 + |c_7|^2 \\ &= 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + 0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 1 \\ &= \frac{53}{8} \end{aligned}$$

4.2.6 Bài tập 4.9

4.9 Compute the Fourier transform of the following signals.

(a) $x(n) = u(n) - u(n-6)$

(b) $x(n) = 2^n u(-n)$

(c) $x(n) = (\frac{1}{4})^n u(n+4)$

(d) $x(n) = (\alpha^n \sin \omega_0 n)u(n), \qquad |\alpha| < 1$

(e) $x(n) = |\alpha|^n \sin \omega_0 n, \qquad |\alpha| < 1$

(f) $x(n) = \begin{cases} 2 - (\frac{1}{2})n, & |n| \le 4 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$

(g) $x(n) = \{-2, -1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2\}$

(h) $x(n) = \begin{cases} A(2M + 1 - |n|), & |n| \le M \\ 0, & |n| > M \end{cases}$

Sketch the magnitude and phase spectra for parts (a), (f), and (g).

Bài làm:

(a).

Ta có:

$$x(n) = u(n) - u(n-6)$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{5} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j6\omega}}{1 - e^{-j\omega}}$$

(b).

Ta có:

$$x(n) = 2^n u(-n)$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{0} 2^n e^{-j\omega n} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega}}{2}\right)^m = \frac{2}{2 - e^{j\omega}}$$

(c).

Ta có:

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n+4)$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-4}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n e^{-j\omega n} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^m e^{-j\omega m}\right) 4^4 e^{j4\omega} = \frac{4^4 e^{j4\omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

(d).

Ta có:

$$x(n) = \alpha^n \sin(\omega_0 n)u(n), \quad |\alpha| < 1$$

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[\frac{e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}}{2j}\right] e^{-j\omega n} = \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha e^{-j(\omega-\omega_0)}\right]^n - \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha e^{-j(\omega+\omega_0)}\right]^n$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-\alpha e^{-j(\omega-\omega_0)}} - \frac{1}{1-\alpha e^{-j(\omega+\omega_0)}}\right] = \frac{\alpha \sin\omega_0\, e^{-j\omega}}{1 - 2\alpha\cos\omega_0\, e^{-j\omega} + \alpha^2 e^{-j2\omega}}$$

(e).

Ta có:

$$x(n) = |\alpha|^n \sin(\omega_0 n), \quad |\alpha| < 1$$

Lấy trị tuyệt đối:

$$|x(n)| = |\alpha|^n |\sin(\omega_0 n)|$$

Xét tổng:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha|^n |\sin(\omega_0 n)|$$

Giả sử $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, khi đó:

$$|\sin(\omega_0 n)| = 1 \quad \text{với mọi } n$$

Do đó:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha|^n$$

Vì $|\alpha| < 1$, nên với $n < 0$ ta có $|\alpha|^n = \left(\frac{1}{|\alpha|}\right)^{-n}$ tăng theo hàm mũ khi $n \to -\infty$, nên tổng không hội tụ:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \to \infty$$

Vậy hàm $x(n)$ không hội tụ tuyệt đối.

(f)

Ta có:

$$x(n) = \begin{cases} 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, & |n| \le 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-4}^{4} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-4}^{4} \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{2e^{j4\omega}}{1-e^{-j\omega}} - \frac{1}{2}\left[-4e^{j4\omega} + 4e^{-j4\omega} - 3e^{j3\omega} + e^{-j3\omega} - 2e^{j2\omega} + 2e^{-j2\omega} - e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right]$$

$$= \frac{2e^{j4\omega}}{1-e^{-j\omega}} + j\left[4\sin(4\omega) + 3\sin(3\omega) + 2\sin(2\omega) + \sin(\omega)\right]$$

(g)

Ta có:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$= -2e^{j2\omega} - e^{j\omega} + e^{-j\omega} + 2e^{-j2\omega}$$

$$= -2j\,[2\sin(2\omega) + \sin(\omega)]$$

4.2.7 Bài tập 4.10

4.10 Determine the signals having the following Fourier transforms.

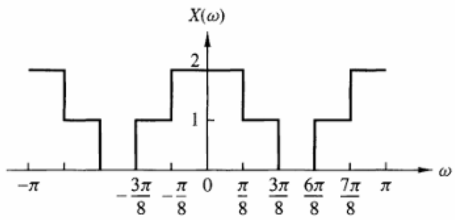
(a) $X(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 \le |\omega| \le \omega_0 \\ 1, & \omega_0 < |\omega| \le \pi \end{cases}$

(b) $X(\omega) = \cos^2 \omega$

(c) $X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_0 - \delta\omega/2 \le |\omega| \le \omega_0 + \delta\omega/2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$

(d) The signal shown in Fig. P4.10.

Figure P4.10



Bài làm:

(a)

Biểu thức nghịch đảo biến đổi Fourier rời rạc:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$$

Với $X(\omega) = 1$ trên hai đoạn $[-\pi, -\omega_0]$ và $[\omega_0, \pi]$, ta có:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\omega_0} e^{j\omega n}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0}^{\pi} e^{j\omega n}d\omega$$

Tại $n = 0$:

$$x(0) = \frac{1}{2\pi}(\pi - \omega_0) + \frac{1}{2\pi}(\pi - \omega_0) = \frac{\pi - \omega_0}{\pi}$$

Với $n \neq 0$, ta tính từng phần:

$$\int_{-\pi}^{-\omega_0} e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{jn}\left(e^{-j\omega_0 n} - e^{-j\pi n}\right)$$

$$\int_{\omega_0}^{\pi} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{jn}\left(e^{j\pi n} - e^{j\omega_0 n}\right)$$

Cộng lại:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{jn}\left(e^{-j\omega_0 n} - e^{-j\pi n} + e^{j\pi n} - e^{j\omega_0 n}\right)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi jn}\left[\left(e^{j\pi n} - e^{-j\pi n}\right) - \left(e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}\right)\right]$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi jn}\left[2j\sin(\pi n) - 2j\sin(\omega_0 n)\right]$$

$$x(n) = \frac{1}{\pi n}\left[\sin(\pi n) - \sin(\omega_0 n)\right]$$

Vì $\sin(\pi n) = 0$ với $n \in \mathbb{Z}$, nên:

$$x(n) = -\frac{\sin(\omega_0 n)}{\pi n}, \quad n \neq 0$$

(b)

$X(\omega) = \cos^2(\omega)$

Dùng đẳng thức lượng giác:

$$X(\omega) = \cos^2(\omega) = \left(\frac{1}{2}e^{j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{j2\omega} + 2 + e^{-j2\omega})$$

Lấy biến đổi ngược để tìm $x(n)$:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{8\pi}[2\pi\delta(n+2) + 4\pi\delta(n) + 2\pi\delta(n-2)] = \frac{1}{4}[\delta(n+2) + 2\delta(n) + \delta(n-2)]$$

(c)

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}} e^{j\omega n} d\omega$$

Tính tích phân:

$$= \frac{2}{\pi}\delta\omega\left(\frac{\sin(n\delta\omega/2)}{n\delta\omega/2}\right)e^{jn\omega_0}$$

(d)

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\Re\left\{\int_0^{\pi/8} 2e^{j\omega n}d\omega + \int_{\pi/8}^{3\pi/8} e^{j\omega n}d\omega + \int_{3\pi/8}^{5\pi/8} e^{j\omega n}d\omega + \int_{5\pi/8}^{7\pi/8} e^{j\omega n}d\omega + \int_{7\pi/8}^{\pi} 2e^{j\omega n}d\omega\right\}$$

Rút gọn:

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/8} 2\cos(\omega n)d\omega + \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \cos(\omega n)d\omega + \int_{5\pi/8}^{7\pi/8} \cos(\omega n)d\omega + \int_{7\pi/8}^{\pi} 2\cos(\omega n)d\omega\right]$$

Tính tích phân từng đoạn:

$$= \frac{1}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{7\pi n}{8}\right) + \sin\left(\frac{6\pi n}{8}\right) - \sin\left(\frac{3\pi n}{8}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right)\right]$$

4.2.8 Bài tập 4.11

4.11 Consider the signal

$$x(n) = \{1, 0, -1, \underset{\uparrow}{2}, 3\}$$

with Fourier transform $X(\omega) = X_R(\omega) + j(X_I(\omega))$. Determine and sketch the signal $y(n)$ with Fourier transform

$$Y(\omega) = X_I(\omega) + X_R(\omega)e^{j2\omega}$$

Bài làm:

Biểu thức phân tách tín hiệu thành phần chẵn:

$$x_e(n) = \frac{x(n) + x(-n)}{2}$$

Với $x(n) = \left\{\frac{1}{2}, 0, 1, 2, 1, 0, \frac{1}{2}\right\}$

Biểu thức phân tách tín hiệu thành phần lẻ:

$$x_o(n) = \frac{x(n) - x(-n)}{2}$$

Suy ra:

$$x_e(n) = \left\{\frac{1}{2}, 0, 1, 2, 1, 0, \frac{1}{2}\right\}$$

$$x_o(n) = \left\{\frac{1}{2}, 0, -2, 0, 2, 0, \frac{1}{2}\right\}$$

Dạng biểu diễn phổ:

$$X_R(w) = \sum_{n=-3}^{3} x_e(n)e^{-jwn}$$

$$jX_I(w) = \sum_{n=-3}^{3} x_o(n)e^{-jwn}$$

Biểu thức tổ hợp:

$$Y(w) = X_I(w) + X_R(w)e^{j2w}$$

Dùng biến đổi ngược:

$$y(n) = \mathcal{F}^{-1}\left\{X_I(w)\right\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{X_R(w)e^{j2w}\right\}$$

$$y(n) = -jx_o(n) + x_e(n+2)$$

$$= \left\{\frac{1}{2}, 0, 1-\frac{j}{2}, 2, 1+\frac{j}{2}, 0\uparrow, \frac{1}{2}-j2, 0, \frac{j}{2}\right\}$$

5 Bàn Luận

Qua bài báo cáo và quá trình thực hiện các bài tập trong phòng lab của môn Xử lý Tín hiệu Số (DSP), nhóm em đã có cơ hội củng cố và áp dụng thực tiễn các kiến thức đã học trong suốt học kỳ. Các nội dung chính mà nhóm đã tiếp cận bao gồm: giới thiệu về xử lý tín hiệu số, tín hiệu và hệ thống trong miền thời gian, biến đổi Z, tín hiệu và hệ thống trong miền tần số, cùng với biến đổi Fourier rời rạc (DFT). Đây đều là những kiến thức cốt lõi trong lĩnh vực xử lý tín hiệu số, giúp nhóm em hiểu được cách phân tích, biểu diễn và xử lý tín hiệu trong cả miền thời gian và miền tần số.

Không chỉ dừng lại ở lý thuyết, nhóm em còn tiến hành mô phỏng và giải các bài tập trên phần mềm Scilab – một công cụ mã nguồn mở hỗ trợ mạnh cho việc tính toán và trực quan hóa tín hiệu. Qua quá trình thực hành này, nhóm đã làm quen với giao diện phần mềm, sử dụng các lệnh để biểu diễn tín hiệu, thực hiện biến đổi Z và DFT, cũng như vẽ các đồ thị biểu diễn tín hiệu và đáp ứng hệ thống. Nhờ đó, nhóm đã hình dung rõ ràng hơn về mối liên hệ giữa các khái niệm toán học và tín hiệu thực tế.

Tuy nhiên, nhóm cũng nhận thấy vẫn còn một số hạn chế. Vì lần đầu tiếp cận Scilab nên các thao tác còn khá chậm và thiếu tự tin. Một số bài tập có mức độ khó cao, đòi hỏi tư duy phân tích sâu và khả năng vận dụng linh hoạt kiến thức khiến nhóm em gặp không ít khó khăn trong quá trình giải. Đôi lúc, kết quả mô phỏng thu được khiến nhóm chưa hoàn toàn chắc chắn về tính chính xác do chưa hiểu sâu bản chất của một số phép biến đổi.

Từ những trải nghiệm và hạn chế đó, nhóm em xác định rõ định hướng phát triển kỹ năng trong thời gian tới. Trước mắt, nhóm sẽ tiếp tục ôn tập và hệ thống hóa toàn bộ kiến thức đã học để chuẩn bị tốt cho kỳ thi cuối kỳ. Đồng thời, nhóm cũng sẽ tăng cường luyện tập thêm các bài tập nâng cao, đặc biệt là về biến đổi Z và DFT. Cuối cùng, nhóm sẽ đẩy mạnh hoạt động trao đổi và thảo luận nội bộ để hỗ trợ lẫn nhau trong việc học và giải quyết các vấn đề còn chưa nắm vững.

6 Tài liệu tham khảo

Tài liệu tham khảo

[1] Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications (4th Edition), John G. Proakis, Dimitris G. Manolakis, Prentice Hall.

[2] Slide bài giảng môn học Xử lý tín hiệu số - CO2035, PGS.TS Phạm Hoàng Anh