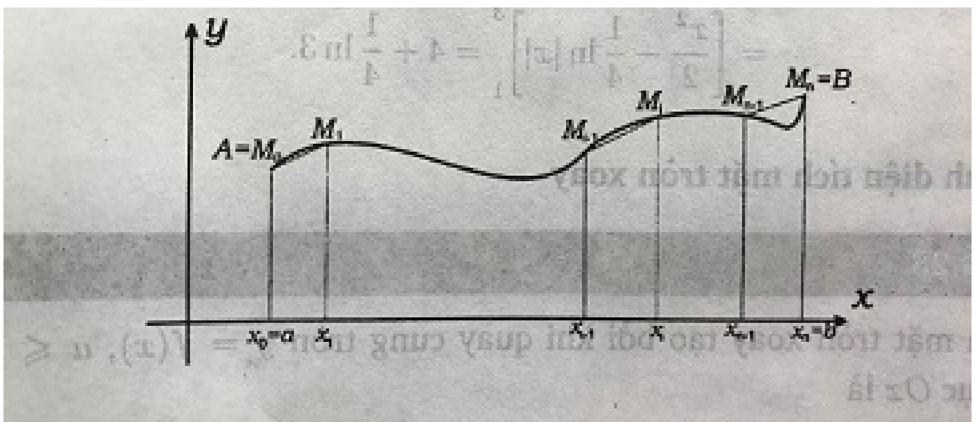
GIẢI TÍCH 1

GVHD: Hoàng Hải Hà
Họ và tên: Lê Đức Huy
MSSV: 1810166

Chứng minh công thức:
Diện tích mặt tròn xoay tạo bởi khi quay cung tròn $y = f(x), a \leq x \leq b$ quanh trục Ox là

$$S = 2\pi \int\limits_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

Giải:



Hình 4.20: Cung $\widehat{AB}$ có phương trình $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.

Chia đoạn $[a, b]$ bởi những điểm $A = M_0, M_1, ..., M_{i-1}, M_i, ..., M_n = B$. Độ dài cung $M_{i-1}Mi$ là

$$L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

Theo định lý Lagrange, ta có

$$y_i - y_{i-1} = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f'(\xi_i).\Delta x_i \qquad \xi \in (x_{i-1}, x_i)$$

Suy ra $L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(\xi_i))^2(\Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x_i$

Khi đó độ dài của cả cung AB là

$$L = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n L_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x_i = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

Ta xem diện tích cần tìm bằng tổng diện tích khi các đoạn thẳng nhỏ (ở phần trên) xoay quanh Ox tạo thành. Mỗi đoạn thẳng nhỏ khi xoay quanh Ox tạo thành bề mặt xung quanh của một hình nón cụt, có diện tích là

$$S_i = \pi(R + r)L_i = \pi(|f(x_{i-1})| + |f(x_i)|)\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x_i$$

Vì $f(x_{i-1}) \approx f(x_i)$ nên $S_i = 2\pi f(x_i)\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x_i$.
Ta có:

$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} S_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi|f(x_i)|\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x_i = 2\pi \int\limits_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$