CLB CHÚNG TA CÙNG TIẾN

ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ THI THỬ GIẢI TÍCH 1

(Ngày 05/01/2019)

Câu 1: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số: (1,5đ)

$$y = \frac{e^x}{|x+1|}$$

Lời giải:

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (hoặc $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$)
- Ta có:

$$y = \begin{cases} \dfrac{e^x}{x+1}, x > -1 \\ -\dfrac{e^x}{x+1}, x < -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x(x+1)} = +\infty \Rightarrow \text{không tồn tại tiệm cận xiên bên phải}$$

$$\lim_{x\to -\infty} y = \lim_{x\to -\infty} -\frac{e^x}{x+1} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ là tiệm cận ngang bên trái } (0{,}25đ)$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} y = \lim_{x\to(-1)^-} y = +\infty \Rightarrow x = -1 \text{ là tiệm cận đứng } (0{,}25đ)$$

$$y' = \begin{cases} \dfrac{x.e^x}{(x+1)^2}, x > -1 \\ -\dfrac{x.e^x}{(x+1)^2}, x < -1 \end{cases}$$

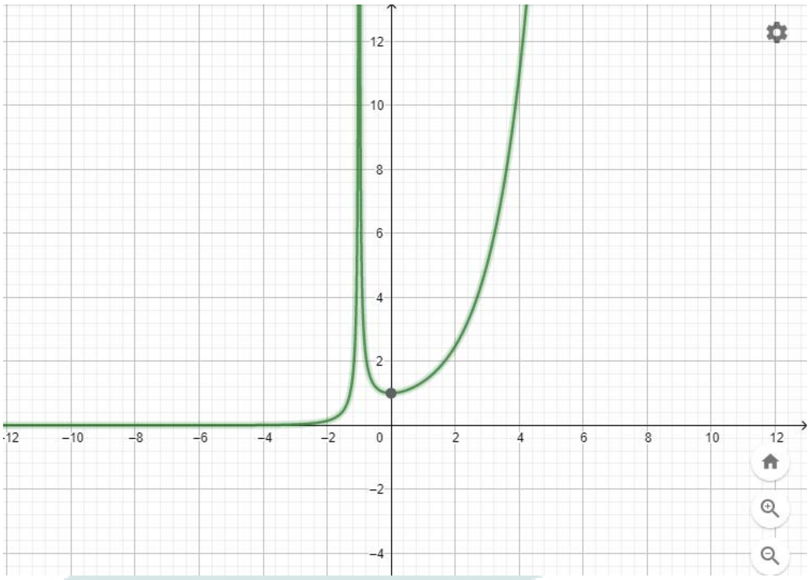
$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- Bảng biến thiên (0,5đ)

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là: $(0, 1)$

- Đồ thị: (0,5đ)

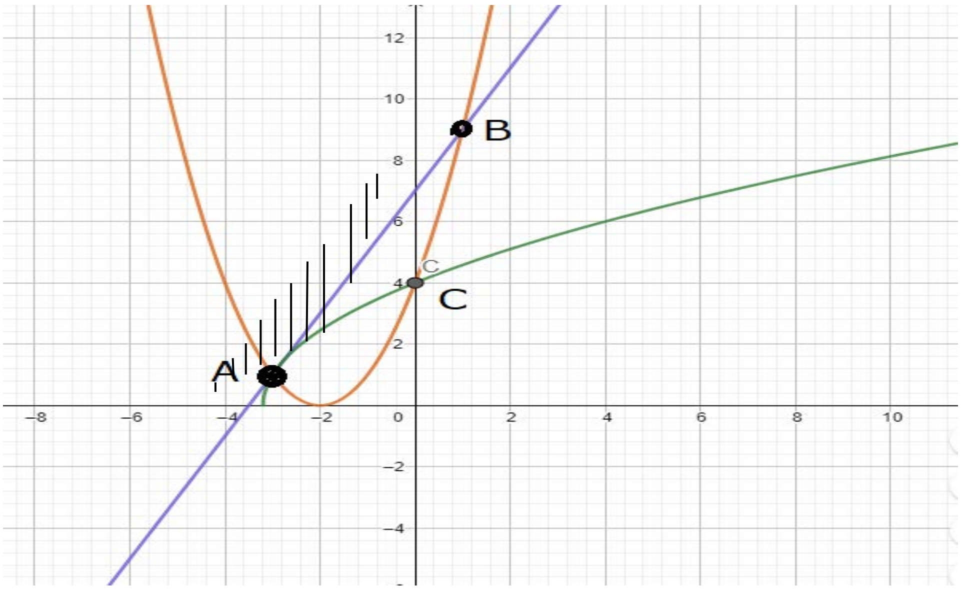


Câu 2: Tính diện tích phần mặt phẳng Oxy giới hạn bởi: (1,5đ)

$$y \geq (x+2)^2, y \leq 2x+7, y \geq \sqrt{5x+16}$$

Lời giải:

- Vẽ hình



(Xác định được miền trong trường hợp tính sai hoành toàn tích phân (0,5đ))

- Tọa độ giao điểm A(-11/4, 3/2); B(1,9); C(0,4)
- $S = S_1 + S_2$

$$= \int_{-\frac{11}{4}}^{0} \left(2x + 7 - \sqrt{5x + 16}\right)dx + \int_{0}^{1} \left(2x + 7 - (x + 2)^2\right)dx \text{ (0,5đ cho mỗi tp)}$$

$$= \frac{173}{48} + \frac{5}{3} = \frac{253}{48} \approx 5{,}2708 \text{ (0,5đ)}$$

Câu 3: Tính tích phân sau: (1,5đ)

$$I = \int_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3} dx$$

Lời giải:

- Đặt: $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ dv = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{-1}{x^2} dx \\ v = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$, ta được:

$$I = \left(\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right)\Bigg|_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty} + \int_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx = 0 + \pi - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty} = \pi - 0 = \pi$$

Note: $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx = -\int \sin\left(\frac{1}{x}\right) d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + C$

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị α để tích phân sau hội tụ: (2 đ)

$$I = \int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^5\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}}} dx$$

Lời giải:

- Ta có: $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^5\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}}} dx = \int_1^{2} \frac{\ln x}{\sqrt{x^5\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}}} dx + \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^5\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}}} dx = I_1 + I_2$

Đặt $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x^5\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}}}$

Khi $x \to 1^+, f(x) = \frac{\ln[1+(x-1)]}{\left[x^5\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{x-1}{(x-1)^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{(x-1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}$ (0,25 đ)

Mà $I_3 = \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{\alpha}{2}-1}} dx$ cùng bản chất với I_1, nên I_1 hội tụ $\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} - 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 4$ (0,5 đ)

Khi $x \to +\infty, f(x) \sim \frac{\ln x}{x^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{x}{x^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ (0,25 đ)

Vì $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ hội tụ, nên $I_4 = \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{5}{2}}} dx$ cũng hội tụ Mà I_4 cùng bản chất với I_2, do đó I_2 hội tụ $\forall \alpha$. (0,5 đ)

- Vậy I hội tụ khi α<4 (0,5 đ)

Câu 5: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (2 đ)

$$y'' - 3y' + 2y = \cos^2 x$$

Lời giải:

- Phương trình được viết lại thành $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} = \frac{e^{0x}}{2} + \frac{e^{0x}\cos 2x}{2}$

Nghiệm tổng quát của phương trình $y_{tq} = y_{tn} + y_r$

Ta tìm nghiệm thuần nhất bằng phương trình đặc trưng $k^2 - 3k + 2k = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 2 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm thuần nhất $y_{tn} = C_1e^x + C_2e^{2x}$(0,25đ)

- Tìm nghiệm riêng y_{r1} của phương trình $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2}$

Nghiệm riêng có dạng $y_{r1} = Ax^s$. Vì $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên $s = 0 \Rightarrow y_{r1} = A$ (0,25đ)

Ta có được $y'_{r1} = 0, y''_{r1} = 0$

Đồng nhất hệ số:

$$y''_{r1} - 3y'_{r1} + 2y_{r1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 - 3 \times 0 + 2A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = \frac{1}{4}$$

Vậy nghiệm riêng $y_{r1} = \frac{1}{4}$ (0,5đ)

- Tìm nghiệm riêng y_{r2} của phương trình $y'' - 3y' + 2y = \frac{\cos 2x}{2}$

Nghiệm riêng có dạng $y_{r2} = x^s(B\cos 2x + C\sin 2x)$. Vì $0 + 2i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên $s = 0 \Rightarrow y_{r2} = B\cos 2x + C\sin 2x$ (0,25đ)

Ta có được $y'_{r2} = 2C\cos 2x - 2B\sin 2x\,, y''_{r2} = -4B\cos 2x - 4C\sin 2x$

Đồng nhất hệ số:

$$y''_{r2} - 3y'_{r2} + 2y_{r2} = \frac{\cos 2x}{2}$$

$$\Leftrightarrow -4B\cos 2x - 4C\sin 2x - 6C\cos 2x + 6B\sin 2x + 2B\cos 2x + 2C\sin 2x = \frac{\cos 2x}{2}$$

$$\Leftrightarrow (-6C - 2B)\cos 2x + (6B - 2C)\sin 2x = \frac{\cos 2x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6C - 2B = \dfrac{1}{2} \\ 6B - 2C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\dfrac{1}{40} \\ C = -\dfrac{3}{40} \end{cases}$$

Vậy nghiệm riêng $y_{r2} = -\frac{1}{40}\cos 2x - \frac{3}{40}\sin 2x$ (0,5đ)

Từ đó suy ra nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y_{tq} = y_{tn} + y_{r1} + y_{r2} = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{40}\cos 2x - \frac{3}{40}\sin 2x \text{ (0,25đ)}$$

Câu 6: Anh Nam mới mua nhầm một cái lò xo "dỏm" có độ dài $L = 7(\text{cm})$. Nếu lo xo bình thường, thì khi bị nén một đoạn là $x(\text{cm})$ $(0 \leq x < L)$ rồi thả ra, nó trở về trạng thái cân bằng (giãn ra độ dài ban đầu) bởi lực đàn hồi do nó sinh ra. Tuy nhiên do hàng "dỏm", nên khi anh Nam nén lò xo lại một đoạn là 2,5(cm) thì thấy lực đàn hồi không đủ mạnh làm cho lò xo có độ dài L như ban đầu mà đã hụt đi một đoạn 0,056(cm). Sau nhiều năm nghiên cứu, anh Nam cũng tìm ra được độ dài bị hụt đi đó tuân theo một hàm mất mát $N(x)(\text{cm})$ với $x(\text{cm})$ là độ dài mà lò xo bị nén. Anh Nam còn thấy sự thay đổi độ dài mất mát bằng thương của độ dài mất mát ứng với độ dài biến dạng x và $e^{-x}(e^x - \alpha)$ (α là hằng số thực dương). Bạn hãy giúp anh Nam tìm độ dài còn lại của lò xo sau khi bị anh Đại nén lại một đoạn là 3(cm). Biết rằng khi lò xo không bị nén, vật cũng không bị giãn nở hay co lại vì nhiệt độ môi trường. Làm tròn tới chữ số thập phân thứ ba. (1,5 đ)

Lời giải

- Ta có hàm độ dài mất mát là $N(x)$. Suy ra sự thay đổi độ dài mất mát là

$$N'(x) = \frac{dN(x)}{dx}$$

- Độ dài mất mát ứng với độ biến dạng x là $N(x)$

Suy ra ta có phương trình $\frac{dN(x)}{dx} = \frac{N(x)}{e^{-x}(e^x - \alpha)}$ $(*)$ (0,25đ)

Giải phương trình $(*)$ bằng cách đưa về dạng tách biến

$$\frac{dN(x)}{N(x)} = \frac{e^x dx}{e^x - \alpha} \Leftrightarrow \ln N(x) = \ln(e^x - \alpha) + \ln C \ (C > 0)$$

$$\Leftrightarrow \ln N(x) = \ln C(e^x - \alpha) \Leftrightarrow N(x) = C(e^x - \alpha)$$ (0,25đ)

Khi lò xo không bị nén $(x = 0)$ thì vật không bị giản nở hay co lại

$$\Rightarrow N(0) = C(e^0 - \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ (0,25đ)}$$

Khi anh Nam nén một đoạn là $x = 2{,}5$ thì lo xo bị hụt đi $0{,}056$

$$\Rightarrow N(2{,}5) = C(e^{2{,}5} - 1) = 0{,}056 \Leftrightarrow C = 0{,}005 = \frac{1}{200} \text{ (0,25đ)}$$

- Vậy hàm $N(x) = \frac{e^x - 1}{200}$

Độ dài bị hụt đi sau khi anh Đại nén một đoạn $x = 3$ là

$$N(3) = \frac{e^3 - 1}{200} = 0{,}095 \text{ (cm) (0,25đ)}$$

Tổng độ dài mà lo xo đã bị hụt đi sau 2 lần nén là

$$0{,}056 + 0{,}095 = 0{,}151 \text{ (cm)}$$

- Vậy chiều dài còn lại của lò xo là $L_f = 7 - 0{,}151 = 6{,}849$ (cm) (0,25đ)