

等差数列的 r 阶前 n 项和与组合数的联系

江林锐

梅州市梅县区高级中学

d9920713549@163.com

摘要 本文的目的在于：用数学归纳法证明了等差数列的 r 阶前 n 项和与组合数之间的联系。

关键字 等差数列 r 阶前 n 项和；组合数；数学归纳法

一 定义

1.1 等差数列 $\{a_n\}$ 的 r 阶前 n 项和

设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，其通项公式为 $a_n = n$ ，现定义 $S_n^{(r)}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的 r 阶前 n 项和，其中 $r \in \mathbb{N}$ 而且对于 $\forall r \geq 1$ ，都有：

$$S_n^{(r)} = \sum_{i=1}^n S_i^{(r-1)}$$

另外，我们规定： $S_n^{(0)} = a_n$ 。

1.2 排列、排列数及其计算公式

关于排列及排列数的定义，详见[小节 4.1](#)。

现给出排列数的计算公式：

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

其中， $n, m \in \mathbb{N}$ 且 $m \leq n$ 。

1.3 组合、组合数及其计算公式

关于组合及组合数的定义，详见[小节 4.2](#)。

现给出组合数的计算公式：

$$\binom{n}{m} = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

其中， $n, m \in \mathbb{N}$ 且 $m \leq n$ 。

1.3.1 组合数的一个推论与一个性质

现给出用于本文证明的**组合数**的一个推论和一个性质：

推论 1: 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 有 $\binom{n}{n} = 1$.

性质 1: 对于任意的 $n, m \in \mathbb{N}_+$ 且 $m \leq n$, 有 $\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \binom{n+1}{m}$.

对于上述**组合数**的推论和性质的证明, 详见[小节 4.2.1](#).

二 猜想

2.1 举例

由定义 1.1 可知,

当 $r = 1$ 时, $S_n^{(1)}$ 即 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i = \frac{1}{2}n(n+1)$;

又如, 当 $r = 2$ 时, $S_n^{(2)} = \sum_{i=1}^n S_i = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.

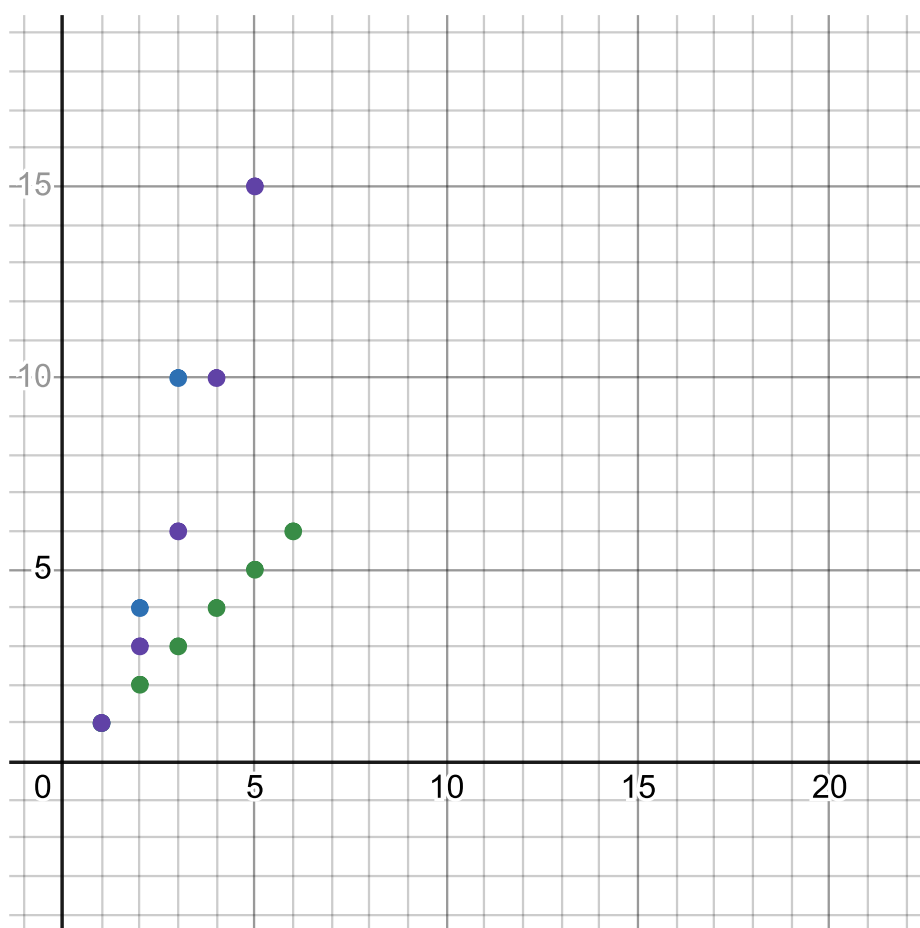


图 1 绿点、紫点、蓝点分别表示数列 $\{a_n\}$ 、 $\{S_n\}$ 及 $\{S_n^{(2)}\}$

2.2 猜想等差数列 $\{a_n\}$ 的 r 阶前 n 项和的表达式

据 2.1 所举例子, 可得如下猜想:

$$S_n^{(r)} = \frac{1}{(r+1)!} \prod_{i=0}^r (n+i) = \frac{(n+r)!}{(r+1)!(n-1)!} = \binom{n+r}{r+1} \quad (1)$$

三 证明

现对所做猜想给出证明:

证.

(1) 当 $r = 0$ 或 $r = 1$ 时, 显然有 公式 1 成立.

(2) 假设当 $r = k (k \in \mathbb{N}_+)$ 时, 公式 1 成立, 即

$$S_n^{(k)} = \binom{n+k}{k+1} \quad (2)$$

则据定义 1.1, 有,

$$\begin{aligned} S_n^{(k+1)} &= \sum_{i=1}^n S_i^{(k)} \\ &= S_1^{(k)} + S_2^{(k)} + S_3^{(k)} + \cdots + S_n^{(k)} \\ &= \binom{1+k}{k+1} + \binom{2+k}{k+1} + \binom{3+k}{k+1} + \cdots + \binom{n+k}{k+1} \end{aligned} \quad (3)$$

由组合数的推论 1 可知, 公式 3 等价于

$$S_n^{(k+1)} = \binom{2+k}{k+2} + \binom{2+k}{k+1} + \binom{3+k}{k+1} + \cdots + \binom{n+k}{k+1} \quad (4)$$

又由组合数的性质 1 可知, 公式 4 等价于

$$\begin{aligned} S_n^{(k+1)} &= \binom{3+k}{k+2} + \binom{3+k}{k+1} + \cdots + \binom{n+k}{k+1} \\ &= \binom{4+k}{k+2} + \binom{4+k}{k+1} + \cdots + \binom{n+k}{k+1} \\ &\quad \dots \\ &= \binom{n+k}{k+2} + \binom{n+k}{k+1} \\ &= \binom{n+k+1}{k+2} = \binom{n+(k+1)}{(k+1)+1} \end{aligned} \quad (5)$$

即当 $n = k+1$ 时, 公式 1 也成立.

由(1)(2)可知, 公式 1 对任何 $r \in \mathbb{N}$ 都成立.

证毕

故猜想成立.

四 附录

4.1 排列及排列数

排列, 一般地, 从 n 个不同的元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素, 按照一定的顺序排成一列, 叫做从 n 个元素中取出 m 个元素的一个排列. 特别地, 当 $m = n$ 时, 这个排列被称作全排列.

排列数, 排列数指的是从 n 个不同元素中任取 $m(m \leq n)$ 个元素排成一列 (考虑元素先后出现次序) 称此为一个排列, 此种排列的总数即为排列数, 即叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数, 记作 A_n^m .

4.2 组合及组合数

组合, 一般地, 从 n 个不同的元素中, 任取 $m(m \leq n)$ 个元素为一组, 叫作 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

组合数, 从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有组合的个数, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数, 记作 $\binom{n}{m}$.

4.2.1 组合数的一个推论与一个性质的证明

现给出对推论 1 和性质 1 的证明.

4.2.1.1 推论 1 的证明

设 $n, m \in \mathbb{N}$ 且 $m \leq n$,

则由组合数的计算公式

$$\binom{n}{m} = \frac{A_n^n}{A_m^m}$$

知,

当 $m = n$ 时, 上式为

$$\binom{n}{n} = \frac{A_n^n}{A_n^n} = 1$$

.

故推论 1 得证.

4.2.1.2 性质 1 的证明

设 $n, m \in \mathbb{N}_+$ 且 $m \leq n$,

则

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} \\
 &= n! \left(\frac{1}{m(m-1)!(n-m)!} + \frac{1}{(n-m+1)(m-1)!(n-m)!} \right) \\
 &= \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m+1} \right) \\
 &= \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} \cdot \frac{n-m+1+m}{m(n-m+1)} \\
 &= \frac{n!(n+1)}{m(m-1)!(n-m+1)(n-m)!} \\
 &= \frac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!} \\
 &= \binom{n+1}{m}
 \end{aligned}$$

故性质 1 得证.

4.3 一个有趣的数

当 $n = 4, r = 20$ 时, $S_n^{(r)} = S_4^{(20)} = \binom{24}{5} = 2024$, 恰好是本文的写作年份.

在此, 本文作者也祝大家 2024 新年快乐 (虽然已经过去快 4 个月了)!

本文写于 2024 年 3 月 31 日.

4.4 致谢

在此感谢钟运辉老师、李嘉才同学、王富平同学在本文写作过程中给予的帮助.