等差数列的 r 阶前 n 项和与组合数的联系

江林锐
梅县区高级中学
d9920713549@163.com

摘要 本文的目的在于：用数学归纳法证明了等差数列的 r 阶前 n 项和与组合数之间的联系。

关键字 等差数列 r 阶前 n 项和；组合数；数学归纳法

一 定义

1.1 等差数列$\{a_n\}$的 r 阶前 n 项和

设数列$\{a_n\}$为等差数列，其通项公式为$a_n = n$， 现定义$S_n^{(r)}$为数列$\{a_n\}$的 **r 阶前 n 项和**，其中 $r \in \mathbb{N}$. 而且对于$\forall r \geq 1$，都有：

$$S_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} S_i^{(r-1)}$$

另外，我们规定：$S_n^{(0)} = a_n$.

1.2 排列、排列数及其计算公式

关于**排列**及**排列数**的定义，详见小节 4.1 .

现给出**排列数**的计算公式：

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

其中，$n, m \in \mathbb{N}$且$m \leq n$.

1.3 组合、组合数及其计算公式

关于**组合**及**组合数**的定义，详见小节 4.2 .

现给出**组合数**的计算公式：

$$\binom{n}{m} = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

其中，$n, m \in \mathbb{N}$且$m \leq n$.

1.3.1 组合数的一个推论与一个性质

现给出用于本文证明的**组合数**的一个推论和一个性质：

推论 1：对于任意的$n \in \mathbb{N}$，有$\binom{n}{n} = 1$.

性质 1：对于任意的$n, m \in \mathbb{N}_{+}$且$m \leq n$，有$\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \binom{n+1}{m}$.

对于上述**组合数**的推论和性质的证明，详见小节 4.2.1 .

二　猜想

2.1　举例

由定义 **1.1** 可知，

当$r = 1$时，$S_n^{(1)}$即$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{2}n(n+1)$；

又如，当$r = 2$时，$S_n^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} S_i = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.

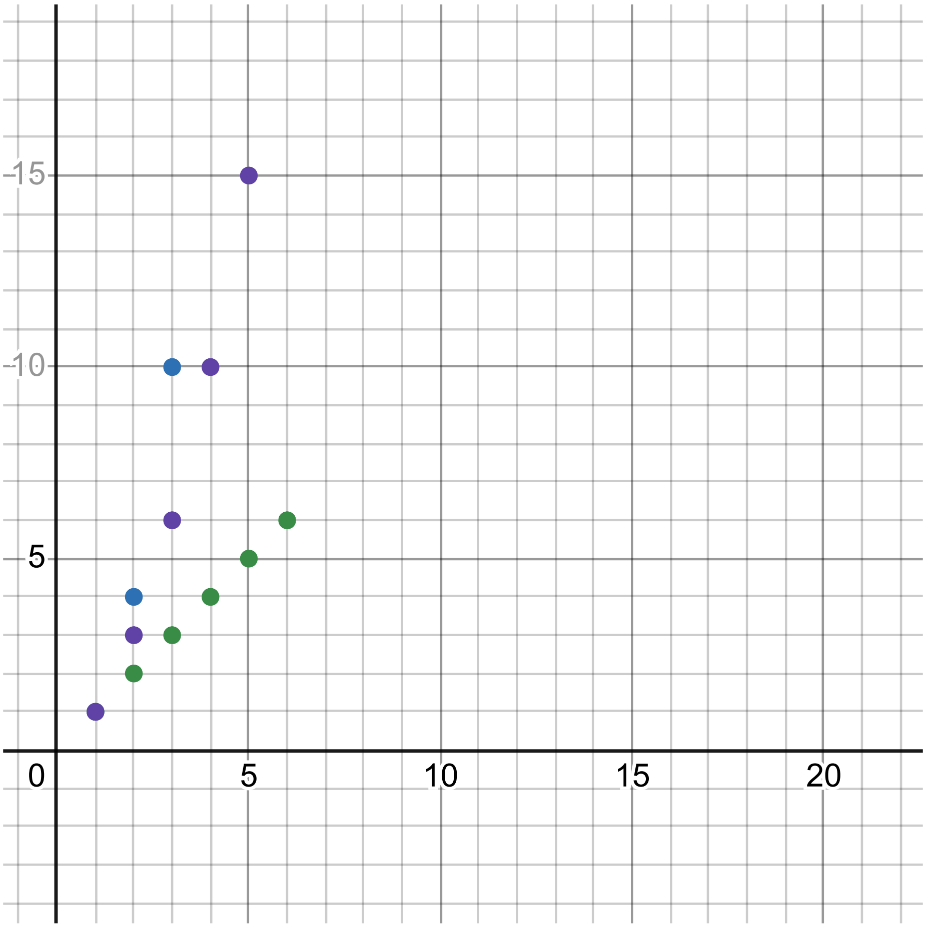

图 1　绿点、紫点、蓝点分别表示数列$\{a_n\}$、$\{S_n\}$及$\left\{S_n^{(2)}\right\}$

2.2 猜想等差数列$\{a_n\}$的 r 阶前 n 项和的表达式

据 **2.1** 所举例子，可得如下猜想：

$$S_n^{(r)} = \frac{1}{(r+1)!}\prod_{i=0}^{r}(n+i) = \frac{(n+r)!}{(r+1)!(n-1)!} = \binom{n+r}{r+1} \tag{1}$$

三 证明

现对所做猜想给出证明：

证.

(1) 当$r=0$或$r=1$时，显然有 公式 1 成立.

(2) 假设当$r=k(k\in\mathbb{N}_+)$时，公式 1 成立，即

$$S_n^{(k)} = \binom{n+k}{k+1} \tag{2}$$

则据定义 **1.1**，有，

$$\begin{aligned} S_n^{(k+1)} &= \sum_{i=1}^{n} S_i^{(k)} \\ &= S_1^{(k)} + S_2^{(k)} + S_3^{(k)} + \cdots + S_n^{(k)} \\ &= \binom{1+k}{k+1} + \binom{2+k}{k+1} + \binom{3+k}{k+1} + \cdots + \binom{n+k}{k+1} \end{aligned} \tag{3}$$

由**组合数的推论 1** 可知，公式 3 等价于

$$S_n^{(k+1)} = \binom{2+k}{k+2} + \binom{2+k}{k+1} + \binom{3+k}{k+1} + \cdots + \binom{n+k}{k+1} \tag{4}$$

又由**组合数的性质 1** 可知，公式 4 等价于

$$\begin{aligned} S_n^{(k+1)} &= \binom{3+k}{k+2} + \binom{3+k}{k+1} + \cdots + \binom{n+k}{k+1} \\ &= \binom{4+k}{k+2} + \binom{4+k}{k+1} + \cdots + \binom{n+k}{k+1} \\ &\cdots \\ &= \binom{n+k}{k+2} + \binom{n+k}{k+1} \\ &= \binom{n+k+1}{k+2} = \binom{n+(k+1)}{(k+1)+1} \end{aligned} \tag{5}$$

即当$n=k+1$时， 公式 1 也成立.
由(1)(2)可知， 公式 1 对任何$r\in\mathbb{N}$都成立.

证毕

故猜想成立.

四 附录

4.1 排列及排列数

排列，一般地，从n个不同的元素中取出$m(m \leq n)$个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从n个元素中取出m个元素的一个排列. 特别地，当$m = n$时，这个排列被称作全排列.

排列数，排列数指的是从n个不同元素中任取$m(m \leq n)$个元素排成一列（考虑元素先后出现次序）称此为一个排列，此种排列的总数即为排列数，即叫做从n个不同元素中取出m个元素的排列数，记作A_n^m.

4.2 组合及组合数

组合，一般地，从 n 个不同的元素中，任取$m(m \leq n)$个元素为一组，叫作n个不同元素中取出m个元素的一个组合.

组合数，从n个不同元素中取出$m(m \leq n)$个元素的所有组合的个数，叫做从n个不同元素中取出m个元素的组合数，记作$\binom{n}{m}$.

4.2.1 组合数的一个推论与一个性质的证明

现给出对**推论 1** 和**性质 1** 的证明.

4.2.1.1 推论 1 的证明

设$n, m \in \mathbb{N}$且$m \leq n$,

则由**组合数**的计算公式

$$\binom{n}{m} = \frac{A_m^n}{A_m^m}$$

知，
当$m = n$时，上式为

$$\binom{n}{n} = \frac{A_n^n}{A_n^n} = 1$$

.

故**推论 1** 得证.

4.2.1.2 性质 1 的证明

设$n, m \in \mathbb{N}_+$且$m \leq n$,

则

$$\begin{aligned}\binom{n}{m}+\binom{n}{m-1}&=\frac{n!}{m!(n-m)!}+\frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!}\\&=n!\left(\frac{1}{m(m-1)!(n-m)!}+\frac{1}{(n-m+1)(m-1)!(n-m)!}\right)\\&=\frac{n!}{(m-1)!(n-m)!}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m+1}\right)\\&=\frac{n!}{(m-1)!(n-m)!}\cdot\frac{n-m+1+m}{m(n-m+1)}\\&=\frac{n!(n+1)}{m(m-1)!(n-m+1)(n-m)!}\\&=\frac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!}\\&=\binom{n+1}{m}\end{aligned}$$

故**性质 1** 得证.

4.3 一个有趣的数

当$n=4,r=20$时，$S_n^{(r)}=S_4^{(20)}=\binom{24}{5}=2024$，恰好是本文的写作年份.

在此，本文作者也祝大家 2024 新年快乐（虽然已经过去快 4 个月了)!

本文写于 **2024** 年 **3** 月 **31** 日.

4.4 致谢

在此感谢**钟运辉**老师及**李嘉才**同学对本文的勘误工作所做的帮助.