Solving linear systems of equations using HHL and its Qiskit implementation

In this tutorial, we introduce the HHL algorithm, derive the circuit, and implement it using Qiskit. We show how to run the HHL on a simulator and on a five qubit device.

Contents

1. Introduction

We see systems of linear equations in many real-life applications across a wide range of areas. Examples include the solution of Partial Differential Equations, the calibration of financial models, fluid simulation or numerical field calculation. The problem can be defined as, given a matrix $A\in\ \mathbb{C}^{N\times N}$ and a vector $\vec{b} \in \mathbb{C}^N$, find $\vec{x} \in \mathbb{C}^N$ satisfying $A\vec{x} = \vec{b}$

For example, take $N = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Then the problem can also be written as find such that `{latex} x_{1}, x_{2}\in\mathbb{C}`

$$\begin{cases} x_1 - \frac{x_2}{3} = 1 \\ -\frac{x_1}{3} + x_2 = 0 \end{cases}$$

A system of linear equations is called s-sparse if A has at most s non-zero entries per row or column. Solving an s-sparse system of size N with a classical computer requires $\mathcal{O}(Ns\kappa\log(1/\epsilon))$ running time using the conjugate gradient method [1]. Here κ denotes the condition number of the system and ϵ the accuracy of the approximation.

The HHL algorithm estimates a function of the solution with running time complexity of $\mathcal{O}(\log(N)s^2\kappa^2/\epsilon)$[2]. The matrix A must be Hermitian, and we assume we have efficient oracles for loading the data, Hamiltonian simulation, and computing a function of the solution. This is an exponential speed up in the size of the system, with the catch that HHL can only approximate functions of the solution vector, while the classical algorithm returns the full solution.

HHL 및 Qiskit 구현을 사용하여 선형 연립 방정식 풀기 {v*}

이 튜토리얼에서는 HHL 알고리즘, d를 소개합니다. 회로를 도출하고 Qiskit을 사용하여 구현합니다. 시뮬레이터와 {v*}에서 HHL을 실행하는 방법을 보여줍니다. 4-큐비트 장치.

목차

1. 소개

우리는 다양한 분야에서 많은 실제 응용 분야에서 선형 방정식 시스템을 봅니다. 그 예로는 편미분 방정식의 해, 금융 모델의 보정, 유체 시뮬레이션 또는 수치 필드 계산이 있습니다. 문제는 행렬 와 벡터 가 주어졌을 때, 다음을 만족하는 를 찾는 것으로 정의할 수 있습니다.

$$A \in \mathbb{C}^{N \times N} \qquad \vec{b} \in \mathbb{C}^{N} \qquad \vec{x} \in \mathbb{C}^{N} \qquad A\vec{x} = \vec{b}$$

예를 들어, {v*}를 취하십시오.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

그러면 문제는 다음과 같이 쓸 수도 있습니다. {latex} x_{1}, x_{2}\in\mathbb{C} 을 만족하는 것을 찾으시오.

$$\begin{cases} x_1 - \frac{x_2}{3} = 1 \\ -\frac{x_1}{3} + x_2 = 0 \end{cases}$$

선형 방정식 시스템은 행 또는 열당 최대 {v*}개의 0이 아닌 항목을 갖는 경우 {v*}-희소라고 합니다. 고전적인 컴퓨터로 크기 {v*}의 {v*}-희소 시스템을 푸는 데는 켤레 기울기 방법 1을 사용하여 시간이 필요합니다. 여기서 {v*}는 시스템의 조건수를 나타내고 {v*}는 근사치의 정확도를 나타냅니다.

HHL 알고리즘은 해의 함수를 추정하며 실행 시간 복잡도는 2입니다. 행렬은 에르미트 행렬이어야 하며 로딩, 해밀토니안 시뮬레이션, 해의 함수 계산을 위한 효율적인 오라클이 있다고 가정합니다. 이는 시스템 크기에 대한 지수적인 속도 향상이지만, HHL은 해 벡터의 함수만 근사할 수 있는 반면, 고전적인 알고리즘은 전체 해를 반환한다는 단점이 있습니다.

2. The HHL algorithm

A. Some mathematical background

The first step towards solving a system of linear equations with a quantum computer is to encode the problem in the quantum language. By rescaling the system, we can assume $\vec{b}$ and $\vec{x}$ to be normalised and map them to the respective quantum states $|b\rangle$ and $|x\rangle$. Usually the mapping used is such that i^{th} component of $\vec{b}$ (resp. $\vec{x}$) corresponds to the amplitude of the i^{th} basis state of the quantum state $|b\rangle$ (resp. $|x\rangle$). From now on, we will focus on the rescaled problem

$$A|x\rangle = |b\rangle$$

Since A is Hermitian, it has a spectral decomposition

$$A = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j |u_j\rangle\langle u_j|, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

where $|u_j\rangle$ is the j^{th} eigenvector of A with respective eigenvalue λ_j. Then,

$$A^{-1} = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j^{-1} |u_j\rangle\langle u_j|$$

and the right hand side of the system can be written in the eigenbasis of A as

$$|b\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} b_j |u_j\rangle, \quad b_j \in \mathbb{C}$$

It is useful to keep in mind that the goal of the HHL is to exit the algorithm with the readout register in the state

$$|x\rangle = A^{-1}|b\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j^{-1} b_j |u_j\rangle$$

Note that here we already have an implicit normalisation constant since we are talking about a quantum state.

B. Description of the HHL algorithm

The algorithm uses three quantum registers, all set to $|0\rangle$ at the beginning of the algorithm. One register, which we will denote with the subindex n_l, is used to store a binary representation of the eigenvalues of A. A second register, denoted by n_b, contains the vector solution, and from now on $N = 2^{n_b}$. There is an extra register for auxiliary qubits, used for intermediate steps in the computation. We can ignore any auxiliary in the following description as they are $|0\rangle$ at the beginning of each computation, and are restored back to $|0\rangle$ at the end of each individual operation.

The following is an outline of the HHL algorithm with a high-level drawing of the corresponding circuit. For simplicity all computations are assumed to be exact in the ensuing description, and a more detailed explanation of the non-exact case is given in Section 2.D..

2. HHL 알고리즘

A. 몇 가지 수학적 배경

양자 컴퓨터로 선형 방정식 시스템을 풀기 위한 첫 번째 단계는 문제를 양자 언어로 인코딩하는 것입니다. 시스템을 재조정하여 와 가 정규화되었다고 가정하고 각각 양자 상태 와 로 매핑할 수 있습니다. 일반적으로 사용되는 매핑은 (resp.)의 성분이 양자 상태 (resp.)의 기저 상태의 진폭에 해당하도록 하는 것입니다. 이제부터는 재조정된 문제에 집중하겠습니다.

$$A|x\rangle = |b\rangle$$

에르미트 행렬이므로 스펙트럼 분해를 가집니다.

$$A = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j |u_j\rangle\langle u_j|, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

여기서 고유값 에 해당하는 의 고유벡터입니다. 그러면,

$$A^{-1} = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j^{-1} |u_j\rangle\langle u_j|$$

그리고 시스템의 우변은 {v*}의 고유 기저로 쓸 수 있습니다.

$$|b\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} b_j |u_j\rangle, \quad b_j \in \mathbb{C}$$

HHL의 목표는 판독 레지스터를 다음 상태로 알고리즘에서 종료하는 것임을 명심하는 것이 유용합니다. {v*}

$$|x\rangle = A^{-1}|b\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j^{-1} b_j |u_j\rangle$$

여기서 양자 상태에 대해 이야기하고 있으므로 이미 암묵적인 정규화 상수가 있음을 유의하십시오. {v*}

B. HHL 알고리즘 설명

알고리즘 u{v*} ses 세 개의 양자 레지스터는 알고리즘 시작 시 로 설정됩니다. 아래 첨자 로 표시할 레지스터는 의 유효한 표현을 저장하는 데 사용됩니다. .
두 번째 레지스터, 로 표시되며, 벡터 해를 포함하고, 지금부터는 입니다. 계산의 중간 단계를 위해 사용되는 보조 큐비트용 레지스터가 추가로 있습니다. 보조 i는 무시할 수 있습니다. 다음
설명에서 각 연산 시작 시점에 보관되고, 각 개별 연산 종료 시점에 복원되는 {v*}에 대한 설명입니다.

다음은 ou입니다. 해당 회로의 개략적인 그림과 함께 HHL 알고리즘의 tline을 나타냅니다. 설명을 간소화하기 위해 이어지는 설명에서는 모든 계산이 정확하다고 가정하며, 더 자세한 설명은 다음과 같습니다.
비정확한 경우의 {v*} 섹션 2.D.에 제공됩니다. {v*}

1. Load the data $|b\rangle \in \mathbb{C}^N$. That is, perform the transformation

$$|0\rangle_{n_b} \mapsto |b\rangle_{n_b}$$

2. Apply Quantum Phase Estimation (QPE) with

$$U = e^{iAt} := \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\lambda_j t} |u_j\rangle\langle u_j|$$

The quantum state of the register expressed in the eigenbasis of A is now

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_j |\lambda_j\rangle_{n_l} |u_j\rangle_{n_b}$$

where is the `{latex} |\lambda _ {j }\rangle_{n_{l}}` n_l-bit binary representation of λ_j.

3. Add an auxiliary qubit and apply a rotation conditioned on $|\lambda_j\rangle$,

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_j |\lambda_j\rangle_{n_l} |u_j\rangle_{n_b} \left(\sqrt{1 - \frac{C^2}{\lambda_j^2}} |0\rangle + \frac{C}{\lambda_j} |1\rangle \right)$$

where C is a normalisation constant, and, as expressed in the current form above, should be less than the smallest eigenvalue λ_{min} in magnitude, i.e., $|C| < \lambda_{min}$.

4. Apply QPE†. Ignoring possible errors from QPE, this results in

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_j |0\rangle_{n_l} |u_j\rangle_{n_b} \left(\sqrt{1 - \frac{C^2}{\lambda_j^2}} |0\rangle + \frac{C}{\lambda_j} |1\rangle \right)$$

5. Measure the auxiliary qubit in the computational basis. If the outcome is 1, the register is in the post-measurement state

$$\left(\sqrt{\frac{1}{\sum_{j=0}^{N-1} |b_j|^2 / |\lambda_j|^2}} \right) \sum_{j=0}^{N-1} \frac{b_j}{\lambda_j} |0\rangle_{n_l} |u_j\rangle_{n_b}$$

which up to a normalisation factor corresponds to the solution.

6. Apply an observable M to calculate $F(x) := \langle x|M|x\rangle$.

C. Quantum Phase Estimation (QPE) within HHL

Quantum Phase Estimation is described in more detail in Chapter 3. However, since this quantum procedure is at the core of the HHL algorithm, we recall here the definition. Roughly speaking, it is a quantum algorithm which, given a unitary U with eigenvector $|\psi\rangle_m$ and eigenvalue $e^{2\pi i\theta}$, finds θ. We can formally define this as follows.

1. 데이터 로드. 즉, 변환을 수행합니다.

$$|0\rangle_{n_b} \mapsto |b\rangle_{n_b}$$

2. 양자 위상 추정(QPE) 적용: {v*}

$$U = e^{iAt} := \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\lambda_j t}|u_j\rangle\langle u_j|$$

레지스터의 양자 상태는 의 고유 기저로 표현되며 다음과 같습니다. {v*}

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_j|\lambda_j\rangle_{n_l}|u_j\rangle_{n_b}$$

의 {latex} |\lambda _ {j }\rangle_{n_{l}} -비트 이진 표현은 어디에 있습니까?

3. 보조 큐비트를 추가하고 {v*}에 따라 회전을 적용합니다.

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_j|\lambda_j\rangle_{n_l}|u_j\rangle_{n_b}\left(\sqrt{1-\frac{C^2}{\lambda_j^2}}|0\rangle + \frac{C}{\lambda_j}|1\rangle\right)$$

여기서 는 정규화 상수이고, 현재 형태로 표현된 바와 같이, 크기가 가장 작은 고유값 보다 작아야 합니다. 즉, 입니다. 4. QPE를 적용합니다. QPE로 인한 가능한 오류를 무시하면 다음과 같은 결과가 나타납니다.

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_j|0\rangle_{n_l}|u_j\rangle_{n_b}\left(\sqrt{1-\frac{C^2}{\lambda_j^2}}|0\rangle + \frac{C}{\lambda_j}|1\rangle\right)$$

5. 보조 큐비트를 계산 기저에서 측정합니다. 결과가 이면 레지스터는 측정 후 상태에 있습니다.

$$\left(\sqrt{\frac{1}{\sum_{j=0}^{N-1}|b_j|^2/|\lambda_j|^2}}\right)\sum_{j=0}^{N-1}\frac{b_j}{\lambda_j}|0\rangle_{n_l}|u_j\rangle_{n_b}$$

정규화 인자를 고려하면 {v*}에 해당하는 해입니다.

6. 관찰 가능한 {v*}를 적용하여 {v*}를 계산합니다.

C. HHL 내 양자 위상 추정 (QPE) {v*}

양자 위상 추정은 3장에서 더 자세히 설명되어 있습니다. 그러나 이 양자 절차가 HHL 알고리즘의 핵심이므로 여기에서 정의를 상기합니다. 대략적으로 말하면, 고유 벡터 {v*}와 고유값 를 갖는 유니타리 가 주어졌을 때 를 찾는 양자 알고리즘입니다. 이를 다음과 같이 공식적으로 정의할 수 있습니다.

Definition: Let $U \in \ \mathbb{C}^{2^m \times 2^m}$ be unitary and let $|\psi\rangle_m \in \mathbb{C}^{2^m}$ be one of its eigenvectors with respective eigenvalue $e^{2\pi i\theta}$. The **Quantum Phase Estimation** algorithm, abbreviated **QPE**, takes as inputs the unitary gate for U and the state and returns the state . Here `{latex} |0\rangle_{n}|\psi\rangle_{m} {latex} |\tilde{\theta}\rangle_{n}|\psi\rangle_{m}` $\tilde{\theta}$ denotes a binary approximation to $2^n\theta$ and the n subscript denotes it has been truncated to n digits.

$$\mathrm{QPE}(U, |0\rangle_n |\psi\rangle_m) = |\tilde{\theta}\rangle_n |\psi\rangle_m$$

For the HHL we will use QPE with $U = e^{iAt}$, where A is the matrix associated to the system we want to solve. In this case,

$$e^{iAt} = \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\lambda_j t} |u_j\rangle\langle u_j|$$

Then, for the eigenvector , which has eigenvalue `{latex} |u_{j}\rangle_{n_{b}}` $e^{i\lambda_j t}$, QPE will output . Where `{latex} |\tilde{\lambda }_ { j }\rangle_{n_{l}}|u_{j}\rangle_{n_{b}}` $\tilde{\lambda}_j$ represents an n_l-bit binary approximation to $2^{n_l}\frac{\lambda_j t}{2\pi}$. Therefore, if each λ_j can be exactly represented with n_l bits,

$$\mathrm{QPE}(e^{iAt}, \sum_{j=0}^{N-1} b_j |0\rangle_{n_l} |u_j\rangle_{n_b}) = \sum_{j=0}^{N-1} b_j |\lambda_j\rangle_{n_l} |u_j\rangle_{n_b}$$

D. Non-exact QPE

In reality, the quantum state of the register after applying QPE to the initial state is

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_j \left(\sum_{l=0}^{2^{n_l}-1} \alpha_{l|j} |l\rangle_{n_l} \right) |u_j\rangle_{n_b}$$

where

$$\alpha_{l|j} = \frac{1}{2^{n_l}} \sum_{k=0}^{2^{n_l}-1} \left(e^{2\pi i \left(\frac{\lambda_j t}{2\pi} - \frac{l}{2^{n_l}} \right)} \right)^k$$

Denote by $\tilde{\lambda_j}$ the best n_l-bit approximation to λ_j, $1 \leq \ j \leq \ N$. Then we can relabel the n_l-register so that $\alpha_{l|j}$ denotes the amplitude of . So now, `{latex} |l + \tilde { \lambda } _ { j } \rangle_{n_{l}}`

$$\alpha_{l|j} := \frac{1}{2^{n_l}} \sum_{k=0}^{2^{n_l}-1} \left(e^{2\pi i \left(\frac{\lambda_j t}{2\pi} - \frac{l + \tilde{\lambda}_j}{2^{n_l}} \right)} \right)^k$$

If each $\frac{\lambda_j t}{2\pi}$ can be represented exactly with n_l binary bits, then `{latex} \frac { \lambda _ { j } t } { 2 \pi }=\frac { \tilde { \lambda } _ { j } } { 2 ^ { n_{l} } } \ \forall j`. Therefore in this case $\forall j$, $1 \leq \ j \leq \ N$, it holds that $\alpha_{0|j} = 1$ and $\alpha_{l|j} = 0 \forall l \quad \neq 0$. Only in this case we can write that the state of the register after QPE is

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_j |\lambda_j\rangle_{n_l} |u_j\rangle_{n_b}$$

Otherwise, $|\alpha_{l|j}|$ is large if and only if and the state of the register is `{latex} \frac { \lambda _ { j } t } { 2 \pi } \approx \frac { l + \tilde { \lambda } _ { j } } { 2 ^ { n_{l} } }`

정의: 가 유니타리 행렬이고 가 각각의 고유값 에 대한 고유벡터라고 하자. 양자 위상 추정 알고리즘(QPE)은 에 대한 유니타리 게이트와 에 를 입력으로 받아 상태 를 반환한다. 여기서 {latex} |0\rangle_{n}|\psi\rangle_{m} {latex} |\tilde{\theta}\rangle_{n}|\psi\rangle_{m} 는 에 대한 이진 근사값을 나타내며, 아래 첨자 는 자릿수로 잘렸음을 나타낸다.

$$\mathrm{QPE}(U,|0\rangle_n|\psi\rangle_m) = |\tilde{\theta}\rangle_n|\psi\rangle_m$$

HHL의 경우 QPE를 사용하며, 여기서 는 유니가 풀고자 하는 시스템과 관련된 행렬입니다. 이 경우,

$$e^{iAt} = \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\lambda_j t}|u_j\rangle\langle u_j|$$

그러면, ei에 대해 genvec {latex} |u_{j}\rangle_{n_{b}} 를 고유값으로 갖는 tor에 대해, QPE는 를 출력합니다. 여기서 {latex} |\tilde{\lambda }_ { j }\rangle_{n_{l}}|u_{j}\rangle_{n_{b}} 는 -비트를 나타냅니다. 이진 근사 {v*} 이션 따라서 각 {v*}를 {v*}비트로 정확하게 표현할 수 있다면,

$$\mathrm{QPE}(e^{iAt}, \sum_{j=0}^{N-1} b_j|0\rangle_{n_l}|u_j\rangle_{n_b}) = \sum_{j=0}^{N-1} b_j|\lambda_j\rangle_{n_l}|u_j\rangle_{n_b}$$

D. 비정확한 QPE {v*}

실제로, 초기 상태에 QPE를 적용한 후 레지스터의 양자 상태는 다음과 같습니다.

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_j \left(\sum_{l=0}^{2^{n_l}-1} \alpha_{l|j}|l\rangle_{n_l} \right) |u_j\rangle_{n_b}$$

어디에

$$\alpha_{l|j} = \frac{1}{2^{n_l}} \sum_{k=0}^{2^{n_l}-1} \left(e^{2\pi i \left(\frac{\lambda_j t}{2\pi} - \frac{l}{2^{n_l}} \right)} \right)^k$$

t로 나타냅니다. 최적의 -비트 근사값은 입니다. 그런 다음 -레지스터의 레이블을 다시 지정하여 가 의 진폭을 나타내도록 할 수 있습니다. 이제, {latex} |l + \tilde { \lambda } _ { j } \rangle_{n_{l}}

$$\alpha_{l|j} := \frac{1}{2^{n_l}} \sum_{k=0}^{2^{n_l}-1} \left(e^{2\pi i \left(\frac{\lambda_j t}{2\pi} - \frac{l+\tilde{\lambda}_j}{2^{n_l}} \right)} \right)^k$$

각각이 이진 비트 {v*}로 정확하게 표현될 수 있다면, {latex} \frac { \lambda _ { j } t } { 2 \pi }=\frac { \tilde { \lambda } _ { j } } { 2 ^{ n_{l} } } } 입니다. 따라서 이 경우 , , 및 가 성립합니다. 이 경우에만 QPE 후 레지스터의 상태를 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_j|\lambda_j\rangle_{n_l}|u_j\rangle_{n_b}$$

Ot그렇지 않으면 {v*}가 크고 레지스터의 상태가 {latex} \frac { \lambda _ { j } t } { 2 \pi } \approx \frac { l + \tilde { \lambda } _ { j } } { 2 ^{ n_{l} } } } 인 경우에만 그렇습니다.

$$\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{2^{n_l}-1}\alpha_{l|j}b_j|l\rangle_{n_l}|u_j\rangle_{n_b}$$

3. Example: 4-qubit HHL

Let's take the small example from the introduction to illustrate the algorithm. That is,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1/3\\ -1/3 & 1\end{pmatrix}\quad\text{and}|b\rangle\quad=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

We will use $n_b=1$ qubit to represent $|b\rangle$, and later the solution $|x\rangle$, $n_l=2$ qubits to store the binary representation of the eigenvalues and 1 auxiliary qubit to store whether the conditioned rotation, hence the algorithm, was successful.

For the purpose of illustrating the algorithm, we will cheat a bit and calculate the eigenvalues of A to be able to choose t to obtain an exact binary representation of the rescaled eigenvalues in the n_l-register. However, keep in mind that for the HHL algorithm implementation one does not need previous knowledge of the eigenvalues. Having said that, a short calculation will give

$$\lambda_1=2/3\text{and}\qquad\lambda_2=4/3$$

Recall from the previous section that the QPE will output an n_l-bit (2-bit in this case) binary approximation to $\frac{\lambda_j t}{2\pi}$. Therefore, if we set

$$t=2\pi\cdot\frac{3}{8}$$

the QPE will give a 2-bit binary approximation to

$$\frac{\lambda_1 t}{2\pi}=1/4\text{and}\qquad\frac{\lambda_2 t}{2\pi}=1/2$$

which is, respectively,

$$|01\rangle_{n_l}\quad\text{and}|10\quad\rangle_{n_l}$$

The eigenvectors are, respectively,

$$|u_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\quad\text{and}|\quad u_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Again, keep in mind that one does not need to compute the eigenvectors for the HHL implementation. In fact, a general Hermitian matrix A of dimension N can have up to N different eigenvalues, therefore calculating them would take $\mathcal{O}(N)$ time and the quantum advantage would be lost.

We can then write $|b\rangle$ in the eigenbasis of A as

$$|b\rangle_{n_b}=\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{2}}|u_j\rangle_{n_b}$$

Now we are ready to go through the different steps of the HHL algorithm.

$$\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{2^{n_l}-1}\alpha_{l|j}b_j|l\rangle_{n_l}|u_j\rangle_{n_b}$$

3. 예시: 4-큐비트 HHL

알고리즘을 설명하기 위해 소개 부분에서 사용한 작은 예제를 살펴보겠습니다. 즉,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1/3\\ -1/3 & 1\end{pmatrix}\quad\text{and}|b\rangle\quad=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

우리는 {qubit}을 사용하여 를 나타내고, 나중에 해 를 나타냅니다. qubits은 고유값의 이진 표현을 저장하고, 보조 qubit은 조건부 회전을 저장하므로 알고리즘 , 성공했습니다.

알고리즘을 설명하기 위해 약간 속임수를 써서 의 고유값을 계산하여 -레지스터에서 스케일 조정된 고유값의 정확한 이진 표현을 얻을 수 있도록 를 선택할 것입니다. 그러나 , HHL 알고리즘 구현에는 고유값에 대한 사전 지식이 필요하지 않다는 점을 명심하세요. 그렇긴 하지만, 간단한 계산을 통해 {v*}를 구할 수 있습니다.

$$\lambda_1=2/3\text{and}\qquad\lambda_2=4/3$$

이전 섹션에서 QPE는 -비트(이 경우 -비트) 이진 근사값을 출력한다는 것을 상기하십시오. 따라서, 만약 우리가 {v*}를 설정하면

$$t=2\pi\cdot\frac{3}{8}$$

QPE는 {v*}에 대한 -비트 이진 근사값을 제공합니다.

$$\frac{\lambda_1 t}{2\pi}=1/4\text{and}\qquad\frac{\lambda_2 t}{2\pi}=1/2$$

각각 {v*}입니다.

$$|01\rangle_{n_l}\quad\text{and}|10\quad\rangle_{n_l}$$

고유 벡터는 각각 다음과 같습니다.

$$|u_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\quad\text{and}|\quad u_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

다시 말하지만, HHL 구현을 위해 고유 벡터를 계산할 필요는 없습니다. 실제로, 차원 {v*}의 일반적인 에르미트 행렬은 최대 {v*}개의 서로 다른 고유값을 가질 수 있으므로, 이를 계산하는 데 {v*} 시간이 걸리고 양자 이점이 사라집니다.

그러면 의 고유기저에서 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$|b\rangle_{n_b}=\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{2}}|u_j\rangle_{n_b}$$

이제 HHL 알고리즘의 다양한 단계를 살펴볼 준비가 되었습니다.

1. State preparation in this example is trivial since $|b\rangle = |0\rangle$.
2. Applying QPE will yield

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle|u_2\rangle$$

3. Conditioned rotation with $C = 1/8$ that is less than the smallest (rescaled) eigenvalue of $\frac{1}{4}$. Note, the constant C here needs to be chosen such that it is less than the smallest (rescaled) eigenvalue of $\frac{1}{4}$ but as large as possible so that when the auxiliary qubit is measured, the probability of it being in the state $|1>$ is large.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle|u_1\rangle\left(\sqrt{1-\frac{(1/8)^2}{(1/4)^2}}|0\rangle + \frac{1/8}{1/4}|1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle|u_2\rangle\left(\sqrt{1-\frac{(1/8)^2}{(1/2)^2}}|0\rangle + \frac{1/8}{1/2}|1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle|u_1\rangle\left(\sqrt{1-\frac{1}{4}}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle|u_2\rangle\left(\sqrt{1-\frac{1}{16}}|0\rangle + \frac{1}{4}|1\rangle\right)$$

4. After applying QPE† the quantum computer is in the state

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle|u_1\rangle\left(\sqrt{1-\frac{1}{4}}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle|u_2\rangle\left(\sqrt{1-\frac{1}{16}}|0\rangle + \frac{1}{4}|1\rangle\right)$$

5. On outcome 1 when measuring the auxiliary qubit, the state is

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle|u_1\rangle\frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle|u_2\rangle\frac{1}{4}|1\rangle}{\sqrt{5/32}}$$

   A quick calculation shows that

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{4\sqrt{2}}|u_2\rangle}{\sqrt{5/32}} = \frac{|x\rangle}{||x||}$$

6. Without using extra gates, we can compute the norm of $|x\rangle$: it is the probability of measuring 1 in the auxiliary qubit from the previous step.

$$P(|1\rangle) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{5}{32} = ||x||^2$$

4. Qiskit Implementation

Now that we have analytically solved the problem from the example we are going to use it to illustrate how to run the HHL on a quantum simulator and on the real hardware. The following uses , a Qiskit-based package which can be found in this repository and installed as described in the corresponding file. For the quantum simulator, already provides an implementation of the HHL algorithm requiring only the matrix `quantum_linear_solvers Readme quantum_linear_solvers` A and $|b\rangle$ as inputs in the simplest example. Although we can give the algorithm a general Hermitian matrix and an arbitrary initial state as NumPy arrays, in these cases the quantum algorithm will not achieve an exponential speedup. This is because the default implementation is exact and therefore exponential in the number of qubits. There is no algorithm polynomial

1. 이 예제에서는 상태 준비가 {v*}이므로 간단합니다. 2. 양자 위상 추정 알고리즘(QPE)을 적용하면 다음과 같은 결과를 얻습니다.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle|u_2\rangle$$

3. 가 의 가장 작은 (재조정된) 고유값보다 작은 조건부 회전. 여기서 상수 는 의 가장 작은 (재조정된) 고유값보다 작으면서 보조 큐비트가 측정될 때 상태 에 있을 확률이 커지도록 가능한 한 크게 선택해야 합니다. -

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle|u_1\rangle\left(\sqrt{1-\frac{(1/8)^2}{(1/4)^2}}|0\rangle + \frac{1/8}{1/4}|1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle|u_2\rangle\left(\sqrt{1-\frac{(1/8)^2}{(1/2)^2}}|0\rangle + \frac{1/8}{1/2}|1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle|u_1\rangle\left(\sqrt{1-\frac{1}{4}}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle|u_2\rangle\left(\sqrt{1-\frac{1}{16}}|0\rangle + \frac{1}{4}|1\rangle\right)$$

4. QPE를 적용한 후 양자 컴퓨터는 다음 상태에 있습니다. {v*}

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle|u_1\rangle\left(\sqrt{1-\frac{1}{4}}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle|u_2\rangle\left(\sqrt{1-\frac{1}{16}}|0\rangle + \frac{1}{4}|1\rangle\right)$$

5. 보조 큐비트를 측정할 때 결과에 따라 상태는 다음과 같습니다. {v*}

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle|u_1\rangle\frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle|u_2\rangle\frac{1}{4}|1\rangle}{\sqrt{5/32}}$$

간단한 계산을 통해 다음을 알 수 있습니다.

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{4\sqrt{2}}|u_2\rangle}{\sqrt{5/32}} = \frac{|x\rangle}{||x||}$$

6. 추가적인 게이트 없이, w{v*} e는 {v*}의 노름을 계산할 수 있습니다. 이는 p에서 보조 큐비트에서 {v*}를 측정할 확률입니다. 이전 단계.

$$P(|1\rangle) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{5}{32} = ||x||^2$$

4. Qiskit 구현

이제 예제에서 문제를 분석적으로 해결했으므로 양자 시뮬레이터와 실제 하드웨어에서 HHL을 실행하는 방법을 설명하는 데 사용하겠습니다. 다음은 이 저장소에서 찾을 수 있고 해당 파일에 설명된 대로 설치할 수 있는 Qiskit 기반 패키지인 를 사용합니다. 양자 시뮬레이터의 경우 이미 행렬 quantum_linear_solvers Readme quantum_linear_solvers 및 를 가장 간단한 예의 입력으로만 요구하는 HHL 알고리즘의 구현을 제공합니다. NumPy 배열로 일반적인 Hermitian 행렬과 임의의 초기 상태를 알고리즘에 제공할 수 있지만 이러한 경우 양자 알고리즘은 지수적 속도 향상을 달성하지 못합니다. 이는 기본 구현이 정확하고 따라서 큐비트 수에서 지수적이기 때문입니다. 다항식 알고리즘이 없습니다.

resources in the number of qubits that can prepare an exact arbitrary quantum state, or that can perform the exact operation e^{iAt} for some general Hermitian matrix A. If we know an efficient implementation for a particular problem, the matrix and/or the vector can be given as objects. Alternatively, there's already an efficient implementation for tridiagonal Toeplitz matrices and in the future there might be more. `QuantumCircuit`

However,at the time of writing the existing quantum computers are noisy and can only run small circuits. Therefore, in Section 4.B. we will see an optimised circuit that can be used for a class of problems to which our example belongs and mention the existing procedures to deal with noise in quantum computers.

A. Running HHL on a simulator: general method

To run the code on this page, you'll need to install the linear solvers package. you can do this through the command:

```
pip install git+https://github.com/anedumla/quantum_linear_solvers
```

The interface for all algorithms to solve the linear system problem is . The problem to be solved is only specified when the method is called: `LinearSolver solve()`

```
LinearSolver(...).solve(matrix, vector)
```

The simplest implementation takes the matrix and the vector as NumPy arrays. Below we also create a (the classical algorithm) to validate our solutions. `NumPyLinearSolver`

```
import numpy as np
# pylint: disable=line-too-long
from linear_solvers import NumPyLinearSolver, HHL
matrix = np.array([[1, -1/3], [-1/3, 1]])
vector = np.array([1, 0])
naive_hhl_solution = HHL().solve(matrix, vector)
```

For the classical solver we need to rescale the right hand side (i.e.) to take into account the renormalisation that occurs once is encoded in a quantum state within HHL. `vector / np.linalg.norm(vector) vector`

```
classical_solution = NumPyLinearSolver().solve(matrix,
                                               vector/np.linalg.norm(vector))
```

The package contains a folder called intended to be a placeholder for efficient implementations of particular types of matrices. At the time of writing the only truly efficient implementation it contains (i.e. complexity scaling polynomially in the number of qubits) is the class. Tridiagonal Toeplitz symmetric real matrices are of the following form `linear_solvers matrices TridiagonalToeplitz`

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 \\ 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix} ,a,b\in \quad \mathbb{R}$$

(note that in this setting we do not consider non symmetric matrices since the HHL algorithm assumes that the input matrix is Hermitian).

Since the matrix A from our example is of this form we can create an instance of and compare the results to solving the system with an array as input. `TridiagonalToeplitz(num_qubits, a, b)`

리소스 {v*} 정확한 임의의 양자 상태를 준비할 수 있거나, 일반적인 에르미트 행렬 에 대해 정확한 연산을 수행할 수 있는 큐비트의 수입니다. 만약 우리가 {v*}에 대한 효율적인 구현을 알고 있다면 e^{iAt} A
특정 문제 행렬 및/또는 벡터는 객체로 제공될 수 있습니다. 또는 삼중대각 Toeplitz 행렬에 대한 효율적인 구현이 이미 있으며 앞으로 더 많은 구현이 있을 수 있습니다. QuantumCir cuit

하지만 이 글을 쓰는 시점에서 기존 양자 컴퓨터는 노이즈가 심하고 작은 회로만 실행할 수 있습니다. 따라서 4.B절에서는 우리 예제가 속한 문제 클래스에 사용할 수 있는 최적화된 회로를 살펴보고 양자 컴퓨터의 노이즈를 처리하기 위한 기존 절차를 언급하겠습니다.

A. 시뮬레이터에서 HHL 실행하기: 일반적인 방법

이 페이지의 코드를 실행하려면 선형 솔버 패키지를 설치해야 합니다. 다음 명령을 통해 설치할 수 있습니다.

```
pip install git+https://github.com/anedumla/quantum_linear_solvers
```

선형 시스템 문제를 해결하는 모든 알고리즘의 인터페이스는 입니다. 해결할 문제는 메서드가 호출될 때만 지정됩니다. LinearSolver solve()

```
LinearSolver(...).solve(matrix, vector)
```

가장 간단한 구현은 행렬과 벡터를 NumPy 배열로 취합니다. 아래에서는 솔루션을 검증하기 위해 (고전적인 알고리즘)도 만듭니다. NumPyLinearSolver

```
numpy를 np로 가져오기
# pylint: disable=line-too-long
선형_솔버에서 NumPyLinearSolver, HHL 가져오기
행렬 = np.array([[1, -1/3], [-1/3, 1]]) 벡터 = np.array([1, 0]) naive_hhl_
solution = HHL().solve(matrix, vector)
```

클래시카의 경우l 솔버에서 HHL 내의 양자 상태로 인코딩되면 발생하는 재정규화를 고려하기 위해 우변(즉,)의 스케일을 조정해야 합니다. vector / np.linalg.norm(vector) vecto r

```
classical_solution = NumPyLinearSolver().solve(matrix,
                                               vector/np.linalg.norm(vector))
```

패키지 co 특정 유형의 행렬에 대한 효율적인 구현을 위한 자리 표시자 역할을 하는 폴더가 있습니다. 현재 작성 시점에서 포함된 유일하게 진정으로 효율적인 구현은 {v*}입니다(예: 복잡성). y
스케일링 다항식 {v*} qubit 수에서) 클래스입니다. 삼중대각 토플리츠 대칭 실수 행렬은 다음 형식을 갖습니다. linear_solvers matrices TridiagonalToeplitz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 \\ 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$$

(이 설정에서는 HHL 알고리즘이 입력 행렬이 에르미트 행렬이라고 가정하므로 비대칭 행렬은 고려하지 않습니다).

행렬이 우리 예제와 같은 형태이므로 인스턴스를 생성하고 배열을 입력으로 사용하여 시스템을 푸는 결과와 비교할 수 있습니다. TridiagonalToeplitz(num_qubits, a, b)

```
from linear_solvers.matrices.tridiagonal_toeplitz import TridiagonalToeplitz
tridi_matrix = TridiagonalToeplitz(1, 1, -1 / 3)
tridi_solution = HHL().solve(tridi_matrix, vector)
```

Recall that the HHL algorithm can find a solution exponentially faster in the size of the system than their classical counterparts (i.e. logarithmic complexity instead of polynomial). However the cost for this exponential speedup is that we do not obtain the full solution vector.
Instead, we obtain a quantum state representing the vector x and learning all the components of this vector would take a linear time in its dimension, diminishing any speedup obtained by the quantum algorithm.

Therefore, we can only compute functions from x (the so called observables) to learn information about the solution.
This is reflected in the object returned by , which contains the following properties `LinearSolverResult solve()`

- `state` : either the circuit that prepares the solution or the solution as a vector
- `euclidean_norm` : the euclidean norm if the algorithm knows how to calculate it
- `observable` : the (list of) calculated observable(s)
- `circuit_results` : the observable results from the (list of) circuit(s)

Let's ignore and for the time being and check the solutions we obtained before. `observable circuit_results`

First, was the result from a classical algorithm, so if we call it will return an array: `classical_solution .state`

```
print('classical state:', classical_solution.state)
```

```
classical state: [1.125 0.375]
```

Our other two examples were quantum algorithms, hence we can only access to the quantum state. This is achieved by returning the quantum circuit that prepares the solution state:

```
print('naive state:')
print(naive_hhl_solution.state)
print('tridiagonal state:')
print(tridi_solution.state)
```

```
from linear_solvers.matrices.tridiagonal_toeplitz import TridiagonalToeplitz tridi_matrix = TridiagonalToeplitz(1
, 1, -1 / 3) tridi_solution = HHL().solve(tridi_matrix, vector)
```

{v*}를 상기하십시오. HHL 알고리즘은 고전적인 알고리즘보다 시스템 크기에 따라 지수적으로 더 빠르게 해를 찾을 수 있습니다(예: 다항식 복잡도 대신 로그 복잡도). 그러나 이 지수적인 {v*} tial speedup은 다음과 같습니다.

전체 해 벡터를 얻지는 못합니다.

대신, 벡터 {v*}를 나타내는 양자 상태를 얻고 이 벡터의 모든 구성 요소를 학습하는 데 차원에서 선형 시간이 걸리므로 양자 알고리즘으로 얻은 속도 향상이 줄어듭니다.

따라서 해에 대한 정보를 학습하기 위해 (소위 관측 가능한) 함수에서만 함수를 계산할 수 있습니다. 이는 다음 속성을 포함하는 에 의해 반환된 객체에 반영됩니다. LinearSolverResult solve()

- state : 해를 준비하는 회로 또는 벡터로서의 해 euclidean_norm : 알고리즘이 계산
- 방법을 아는 경우의 유클리드 노름 observable : 계산된 관측값(목록) circuit_result
- s : 회로(목록)에서 얻은 관측값 결과
-

다음과 같이 할 수 있습니다. 은 이전에 얻은 솔루션을 확인합니다. observable circuit_ 결과

먼저, 고전적인 알고리즘의 결과였으므로 호출하면 배열을 반환합니다. classical_solution .state

```
print('고전적 상태:', classical_solution.state)
```

```
classical state: [1.125 0.375]
```

다른 두 예시는 양자 알고리즘이었으므로 양자 상태에만 접근할 수 있습니다. 이는 솔루션 상태를 준비하는 양자 회로를 반환하여 달성됩니다.

```
print('naive state:')
print(naive_hhl_solution.state)
print('tridiagonal state:')
print(tridi_solution.state)
```

```
naive state:
     ┌──────────────┐┌─────┐          ┌──────────┐
  q4: ┤ circuit-85 ├┤3    ├──────────┤3         ├
     └──────────────┘│     │          │          │
q5_0: ───────────────┤0    ├─┐      ┌─┤0         ├
                     │  QPE │ │      │ │  QPE_dg  │
q5_1: ───────────────┤1    ├─┤1     ├─┤1         ├
                     │     │ │ 1/x  │ │          │
q5_2: ───────────────┤2    ├─┤0     ├─┤2         ├
                     └─────┘ │      │ └──────────┘
  q6: ───────────────────────┤3     ├─────────────
                             └──────┘
tridiagonal state:
     ┌──────────────┐┌─────┐          ┌──────────┐
  q26: ┤ circuit-298 ├┤3    ├──────────┤3         ├
     └──────────────┘│     │          │          │
q27_0: ──────────────┤0    ├─┐      ┌─┤0         ├
                     │  QPE │ │      │ │  QPE_dg  │
q27_1: ──────────────┤1    ├─┤1     ├─┤1         ├
                     │     │ │ 1/x  │ │          │
q27_2: ──────────────┤2    ├─┤0     ├─┤2         ├
                     └─────┘ │      │ └──────────┘
  q28: ──────────────────────┤3     ├─────────────
                             └──────┘
```

Recall that the Euclidean norm for a vector is defined as `{latex} \mathbf{x}=(x_1,\dots,x_N)` $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$. Therefore, the probability of measuring 1 in the auxiliary qubit from Step 5 in Section B is the squared norm of $\mathbf{x}$. This means that the HHL algorithm can always calculate the euclidean norm of the solution and we can compare the accuracy of the results:

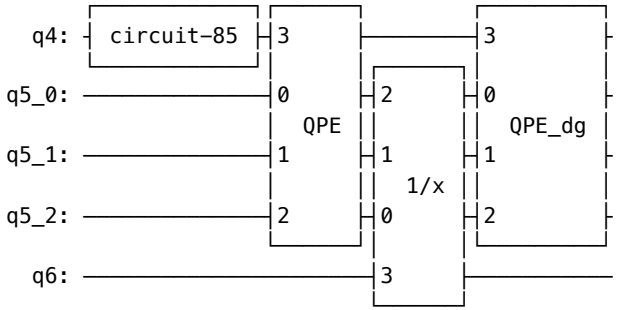
```
print('classical Euclidean norm:', classical_solution.euclidean_norm)
print('naive Euclidean norm:', naive_hhl_solution.euclidean_norm)
print('tridiagonal Euclidean norm:', tridi_solution.euclidean_norm)
```

```
classical Euclidean norm: 1.1858541225631423
naive Euclidean norm: 1.185854122563138
tridiagonal Euclidean norm: 1.1858541225631365
```

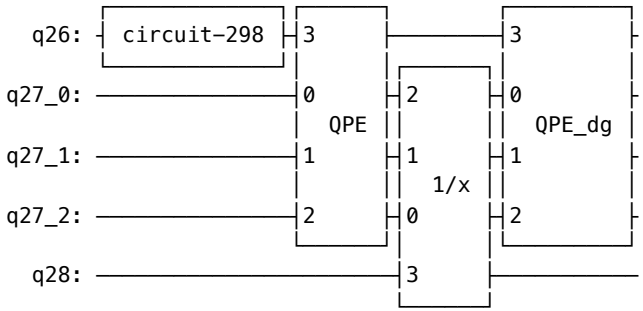
Comparing the solution vectors component-wise is more tricky, reflecting again the idea that we cannot obtain the full solution vector from the quantum algorithm. However, for educational purposes we can check that indeed the different solution vectors obtained are a good approximation at the vector component level as well.

To do so first we need to use from the package and extract the right vector components, i.e. those corresponding to the ancillary qubit (bottom in the circuits) being `Statevector quantum_info` 1 and the work qubits (the two middle in the circuits) being 0. Thus, we are interested in the states and , corresponding to the first and second components of the solution vector respectively. `10000 10001`

순진한 상태:



삼중대각 상태:



벡터의 유클리드 놈은 {latex} \mathbf{x}=(x_1,\dots,x_N) 로 정의됩니다. 따라서 섹션 B의 단계 에서 보조 큐비트에서 1을 측정할 확률은 $\sum_{i=1}^{N}\frac{C^2}{\lambda_i^2}|b_i|^2$ 의 제곱 놈입니다. 이는 HHL 알고리즘이 항상 해의 유클리드 놈을 계산할 수 있으며 결과의 정확도를 비교할 수 있음을 의미합니다.

print('고전적인 유클리드 노름:', classical_solution.euclidean_norm) print('단순한 유클리드 노름:', na
ive_hhl_solution.euclidean_norm) print('삼중대각 유클리드 노름:', tridi_solution.euclidean_norm)

고전적인 유클리드 노름: 1.1858541225631423 순진한 유클리드
노름: 1.185854122563138 삼중대각 유클리드 노름: 1.1858541225
631365

해결 벡터를 성분별로 비교하는 것은 더 까다로운데, 이는 양자 알고리즘에서 전체 해결 벡터를 얻을 수 없다는 생각을 다시 반영합니다. 그러나 교육적인 목적으로 얻은 다양한 해결 벡터가 벡터 성분 수준에서도 좋은 근사값인지 확인할 수 있습니다.

그렇게 하려면 먼저 Qiskit 패키지에서 가져와 올바른 벡터 구성 요소를 추출해야 합니다. 즉, 보조 큐비트(회로의 맨 아래)에 해당하는 구성 요소는 Statevector quantum_info 이고 작업 큐비트(가운데 두 1 회로에서) 입니다. 따라서 우리는 해 벡터의 첫 번째 및 두 번째 구성 요소에 해당하는 상태 10000 10001 에 관심이 있습니다.

```
from qiskit.quantum_info import Statevector

naive_sv = Statevector(naive_hhl_solution.state).data
tridi_sv = Statevector(tridi_solution.state).data

# Extract vector components; 10000(bin) == 16 & 10001(bin) == 17
naive_full_vector = np.array([naive_sv[16], naive_sv[17]])
tridi_full_vector = np.array([tridi_sv[16], tridi_sv[17]])

print('naive raw solution vector:', naive_full_vector)
print('tridi raw solution vector:', tridi_full_vector)
```

```
naive raw solution vector: [0.75+3.52055626e-16j 0.25+1.00756137e-16j]
tridi raw solution vector: [0.75-9.01576529e-17j 0.25+3.74736911e-16j]
```

At a first glance it might seem that this is wrong because the components are complex numbers instead of reals. However note that the imaginary part is very small, most likely due to computer accuracy, and can be disregarded in this case (we'll use the array's attribute to get the real part). `.real`

Next, we will divide the vectors by their respective norms to suppress any constants coming from the different parts of the circuits. The full solution vector can then be recovered by multiplying these normalised vectors by the respective Euclidean norms calculated above:

```
def get_solution_vector(solution):
    """Extracts and normalizes simulated state vector
    from LinearSolverResult."""
    solution_vector = Statevector(solution.state).data[16:18].real
    norm = solution.euclidean_norm
    return norm * solution_vector / np.linalg.norm(solution_vector)

print('full naive solution vector:', get_solution_vector(naive_hhl_solution))
print('full tridi solution vector:', get_solution_vector(tridi_solution))
print('classical state:', classical_solution.state)
```

```
full naive solution vector: [1.125 0.375]
full tridi solution vector: [1.125 0.375]
classical state: [1.125 0.375]
```

It should not come as a surprise that is exact because all the default methods used are exact. However, is exact only in the `naive_hhl_solution` `tridi_solution` 2×2 system size case. For larger matrices it will be an approximation, as shown in the slightly larger example below.

```
from qiskit.quantum_info import Statevector

naive_sv = Statevector(naive_hhl_solution.state).data tridi_sv = Statevector(tri
di_solution.state).data

# 벡터 컴포넌트 추출; 10000(bin) == 16 & 10001(bin) == 17 naive_full_vector = np.array([na
ive_sv[16], naive_sv[17]]) tridi_full_vector = np.array([tridi_sv[16], tridi_sv[17]])

print('naive raw solution vector:', naive_full_vector) print('tridi raw solution vect
or:', tridi_full_vector)
```

순진한 raw 해 벡터: [0.75+3.52055626e-16j 0.25+1.00756137e-16j] 삼중대각 raw 해 벡터: [0.75-9.01
576529e-17j 0.25+3.74736911e-16j]

언뜻 보기에 이것이 잘못된 것처럼 보일 수도 있습니다. 왜냐하면 구성 요소가 실수가 아닌 복소수이기 때문입니다. 그러나 허수 부분은 매우 작고 컴퓨터 정확도 때문일 가능성이 높다는 점에 유의하십시오. {v* }에서 무시됩니다. 이 경우 (배열의 속성을 사용하여 실수 부분을 가져옵니다). .real

다음으로, 회로의 각 부분에서 오는 상수를 억제하기 위해 벡터를 각 노름으로 나눕니다. 그런 다음 위에서 계산한 각 유클리드 노름을 이러한 정규화된 벡터에 곱하여 전체 솔루션 벡터 {v*}를 복구할 수 있습니다.

```
def get_solution_vector(solution):
"""LinearSolverResult에서 시뮬레이션된 상태 벡터를 추출하고 정규화합니다."""solution_vector
= Statevector(solution.state).data[16:18].realnorm = solution.euclidean_normreturn norm * solution
_vector / np.linalg.norm(solution_vector)

print('완전한 순진한 해 벡터:', get_solution_vector(naive_hhl_solution)) print('완전한 삼중대각 해 벡터:', get_sol
ution_vector(tridi_solution)) print('고전적 상태:', classical_solution.state)
```

전체 순진한 해 벡터: [1.125 0.375] 전체 삼중대각 행렬 해
벡터: [1.125 0.375] 고전적 상태: [1.125 0.375]

정확한 이유는 사용된 모든 기본 방법이 정확하기 때문이라는 것은 놀라운 일이 아닙니다. 그러나 naive_hhl_solution tridi_solution 시스템 크기 경우에만 정확합니다. 더 큰 행렬의 경우 아래의 약간 더 큰 예에서 볼 수 있듯이 근사값이 됩니다. 2× 2

```
from scipy.sparse import diags

NUM_QUBITS = 2
MATRIX_SIZE = 2 ** NUM_QUBITS
# entries of the tridiagonal Toeplitz symmetric matrix
# pylint: disable=invalid-name
a = 1
b = -1/3

matrix = diags([b, a, b],
               [-1, 0, 1],
               shape=(MATRIX_SIZE, MATRIX_SIZE)).toarray()

vector = np.array([1] + [0]*(MATRIX_SIZE - 1))
# run the algorithms
classical_solution = NumPyLinearSolver(
                       ).solve(matrix, vector / np.linalg.norm(vector))
naive_hhl_solution = HHL().solve(matrix, vector)
tridi_matrix = TridiagonalToeplitz(NUM_QUBITS, a, b)
tridi_solution = HHL().solve(tridi_matrix, vector)

print('classical euclidean norm:', classical_solution.euclidean_norm)
print('naive euclidean norm:', naive_hhl_solution.euclidean_norm)
print('tridiagonal euclidean norm:', tridi_solution.euclidean_norm)
```

```
classical euclidean norm: 1.237833351044751
naive euclidean norm: 1.209980623111888
tridiagonal euclidean norm: 1.2094577218705271
```

We can also compare the difference in resources from the exact method and the efficient implementation. The $2\times\ 2$ system size is again special in that the exact algorithm requires less resources, but as we increase the system size, we can see that indeed the exact method scales exponentially in the number of qubits while is polynomial. `TridiagonalToeplitz`

```
from scipy.sparse import diags

NUM_QUBITS = 2
MATRIX_SIZE = 2 ** NUM_QUBITS
# 삼중대각 퇴플리츠 대칭 행렬의 항목
# pylint: disable=invalid-name
a = 1
b = -1/3

행렬 = diags([b, a, b], [-1, 0, 1],

                        shape=(MATRIX_SIZE, MATRIX_SIZE)).toarray()

벡터 = np.array([1] + [0]*(MATRIX_SIZE - 1))
# 알고리즘 실행
classical_solution = NumPyLinearSolver(
                                      ).solve(matrix, vector / np.linalg.norm(vector))
naive_hhl_solution = HHL().solve(matrix, vector)
tridi_matrix = TridiagonalToeplitz(NUM_QUBITS, a, b)
tridi_solution = HHL().solve(tridi_matrix, vector)

print('고전적인 유클리드 노름:', classical_solution.euclidean_norm) print('단순한 유클리드 노름:', na
ive_hhl_solution.euclidean_norm) print('삼중대각 유클리드 노름:', tridi_solution.euclidean_norm)
```

```
고전적인 유클리드 노름: 1.237833351044751 순진한 유클리드 노
름: 1.209980623111888 삼중대각 유클리드 노름: 1.209457721870
5271
```

We can also compare the difference in resources from the exact method and the efficient implementation. The $2\times\ 2$ system size is again special in that the exact algorithm requires less resources, but as we increase the system size, we can see that indeed the exact method scales exponentially in the number of qubits while is polynomial. `TridiagonalToeplitz`

```
from qiskit import transpile

MAX_QUBITS = 4
a = 1
b = -1/3

i = 1
# calculate the circuit depths for different number of qubits to compare the use
# of resources (WARNING: This will take a while to execute)
naive_depths = []
tridi_depths = []
for n_qubits in range(1, MAX_QUBITS+1):
    matrix = diags([b, a, b],
                   [-1, 0, 1],
                   shape=(2**n_qubits, 2**n_qubits)).toarray()
    vector = np.array([1] + [0]*(2**n_qubits -1))

    naive_hhl_solution = HHL().solve(matrix, vector)
    tridi_matrix = TridiagonalToeplitz(n_qubits, a, b)
    tridi_solution = HHL().solve(tridi_matrix, vector)

    naive_qc = transpile(naive_hhl_solution.state,
                         basis_gates=['id', 'rz', 'sx', 'x', 'cx'])
    tridi_qc = transpile(tridi_solution.state,
                         basis_gates=['id', 'rz', 'sx', 'x', 'cx'])

    naive_depths.append(naive_qc.depth())
    tridi_depths.append(tridi_qc.depth())
    i +=1


sizes = [f"{2**n_qubits}×{2**n_qubits}"
         for n_qubits in range(1, MAX_QUBITS+1)]
columns = ['size of the system',
           'quantum_solution depth',
           'tridi_solution depth']
data = np.array([sizes, naive_depths, tridi_depths])
ROW_FORMAT ="{:>23}" * (len(columns) + 2)
for team, row in zip(columns, data):
    print(ROW_FORMAT.format(team, *row))
```

```
     size of the system                   2×2                   4×4                   8×8                 16×16
 quantum_solution depth                   334                  2593                 34008                403899
   tridi_solution depth                   565                  5107                 14756                 46552
```

```
from qiskit import transpile

MAX_QUBITS = 4
a = 1
b = -1/3

나 = 1
# 양자 비트 수에 따른 회로 깊이를 계산하여 사용량 비교
리소스 수 (경고: 실행하는 데 시간이 오래 걸립니다) naive_depths = [] tridi_depths =
[]

for n_qubits in range(1, MAX_QUBITS+1): matrix = diags([b, a, b], [-1, 0, 1], shape=(2**n
_qubits, 2**n_qubits)).toarray() vector = np.array([1] + [0]*(2**n_qubits -1))

naive_hhl_solution = HHL().solve(matrix, vector)     tridi_matrix = TridiagonalT
oeplitz(n_qubits, a, b)     tridi_solution = HHL().solve(tridi_matrix, vector)

    naive_qc = 트랜스파일(naive_hhl_solution.state,
    basis_gates=['id', 'rz', 'sx', 'x', 'cx'])
    tridi_qc = 트랜스파일(tridi_solution.state,
    basis_gates=['id', 'rz', 'sx', 'x', 'cx'])

naive_depths.append(naive_qc.depth())tridi_depths.append(tr
idi_qc.depth())i +=1

크기 = [f"{2**n_qubits}×{2**n_qubits}" for n_qubits in range(1, MAX_QU
BITS+1)] 열 = ['시스템 크기', '양자 솔루션 깊이', '삼중대각 솔루션 깊이']
데이터 = np.array([크기, naive_depths, tridi_depths]) ROW_FORMAT ="{:
>23}" * (len(columns) + 2) 팀과 행을 zip하여 열과 데이터를 반복합니다. p
rint(ROW_FORMAT.format(team, *row))
```

size of the system	2×2	4×4	8×8	16×16
quantum_solution depth	334	2593	34008	403899
tridi_solution depth	565	5107	14756	46552

The reason the implementation still seems to need exponential resources is because the current conditioned rotation implementation (step 3 from Section 2.B) is exact (i.e. needs exponential resources in n_l). Instead we can calculate how many more resources the default implementation needs compared to Tridiagonal - since they only differ in how they implement e^{iAt}:

```
print('excess:',
      [naive_depths[i] - tridi_depths[i] for i in range(0, len(naive_depths))])
```

```
excess: [-231, -2514, 19252, 357347]
```

In the near future the plan is to integrate to obtain a polynomial implementation of the conditioned rotation as well. `qiskit.circuit.library.arithmetics.PiecewiseChebyshev`

Now we can return to the topic of observables and find out what the and properties contain. `observable circuit_results`

The way to compute functions of the solution vector $\mathbf{x}$ is through giving the method a as input. There are two types of available which can be given as input: `.solve() LinearSystemObservable LinearSystemObservable`

```
from linear_solvers.observables import AbsoluteAverage, MatrixFunctional
```

For a vector , the observable computes `{latex} \mathbf{x}=(x_1,...,x_N) AbsoluteAverage` $\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right|$.

```
NUM_QUBITS = 1
MATRIX_SIZE = 2 ** NUM_QUBITS
# entries of the tridiagonal Toeplitz symmetric matrix
a = 1
b = -1/3

matrix = diags([b, a, b],
               [-1, 0, 1],
               shape=(MATRIX_SIZE, MATRIX_SIZE)).toarray()
vector = np.array([1] + [0]*(MATRIX_SIZE - 1))
tridi_matrix = TridiagonalToeplitz(1, a, b)

average_solution = HHL().solve(tridi_matrix,
                               vector,
                               AbsoluteAverage())
classical_average = NumPyLinearSolver(
                         ).solve(matrix,
                                 vector / np.linalg.norm(vector),
                                 AbsoluteAverage())

print('quantum average:', average_solution.observable)
print('classical average:', classical_average.observable)
print('quantum circuit results:', average_solution.circuit_results)
```

구현 이유 여전히 지수적인 리소스가 필요한 이유는 현재 조건부 회전 구현(섹션 2.B의 3단계)이 정확하기 때문입니다(즉, {v*}에서 지수적인 리소스가 필요함). 대신에 우리는 n
계산 방법 {v*} Tridiagonal과 비교하여 기본 구현에 필요한 리소스가 더 많은 이유는 e^{iAt} 구현 방식의 차이 때문입니다. {v*}

```
print('초과:',
      [naive_depths[i] - tridi_depths[i] for i in range(0, len(naive_depths))])
```

초과: [-231, -2514, 19252, 357347]

가까운 미래에는 조건부 회전의 다항식 구현을 얻기 위해 통합할 계획입니다. qiskit.circuit.library.arithmetics.PiecewiseChebyshev

이제 관측 가능량 주제로 돌아가서 observable 및 circuit_results에 어떤 속성이 포함되어 있는지 알아볼 수 있습니다.

해 벡터의 함수를 계산하는 방법은 메서드에 a를 입력으로 $\mathbf{x}$ 제공하는 것입니다. 입력으로 제공할 수 있는 두 가지 유형이 있습니다. .solve() LinearSystemObse
rvable LinearSystemObservable

```
선형_솔버.관찰_가능물에서 절대평균, 행렬함수 가져오기
```

벡터 {latex} \mathbf{x}=(x_1,...,x_N) 에 대해 관찰 가능한 값은 AbsoluteAverage{v*}를 계산합니다. $\frac{1}{N}\left|\sum_{i=1}^{N} x_i\right|$

```
NUM_QUBITS = 1
MATRIX_SIZE = 2 ** NUM_QUBITS
# 삼중대각 퇴플리츠 대칭 행렬의 항목
a = 1
b = -1/3

행렬 = diags([b, a, b], [-1, 0, 1], shape=(MATRIX_SIZE, MATRIX_SIZE)).toarray()


벡터 = np.array([1] + [0]*(MATRIX_SIZE - 1)                    )
삼중_행렬 = 삼중대각Toeplitz(1, a, b)

average_solution = HHL().solve(tridi_matrix,
벡터, AbsoluteAverage()) classical_average = NumPyLinearSolver( ).solve(matrix, 벡터 / np.li
nalg.norm(vector), AbsoluteAverage())




print('양자 평균:', average_solution.observable)
print('고전적 평균:', classical_average.observable)
print('양자 회로 결과:', average_solution.circuit_results)
```

```
quantum average: 0.7499999999999962
classical average: 0.75
quantum circuit results: (0.4999999999999952+0j)
```

The observable computes `MatrixFunctional` $\mathbf{x}^T B\mathbf{x}$ for a vector $\mathbf{x}$ and a tridiagonal symmetric Toeplitz matrix B. The class takes the main and off diagonal values of the matrix for its constructor method.

```
observable = MatrixFunctional(1, 1 / 2)

functional_solution = HHL().solve(tridi_matrix, vector, observable)
classical_functional = NumPyLinearSolver(
                        ).solve(matrix,
                                vector / np.linalg.norm(vector),
                                observable)

print('quantum functional:', functional_solution.observable)
print('classical functional:', classical_functional.observable)
print('quantum circuit results:', functional_solution.circuit_results)
```

```
quantum functional: 1.8281249999999818
classical functional: 1.828125
quantum circuit results: [(0.6249999999999941+0j), (0.4999999999999952+0j), (0.1249999999999988+0j)]
```

Therefore, contains the final value of the function on `observable` $\mathbf{x}$, while contains the raw values obtained from the circuit and used to process the result of . `circuit_results` `observable`

This 'how to process the result' is better explained by looking at what arguments takes. The method accepts up to five arguments: `.solve()` `solve()`

```
def solve(self, matrix: Union[np.ndarray, QuantumCircuit],
          vector: Union[np.ndarray, QuantumCircuit],
          observable: Optional[Union[LinearSystemObservable, BaseOperator,
                                     List[BaseOperator]]] = None,
          post_rotation: Optional[Union[QuantumCircuit, List[QuantumCircuit]]] = None,
          post_processing: Optional[Callable[[Union[float, List[float]]],
                                             Union[float, List[float]]]] = None) \
        -> LinearSolverResult:
```

The first two are the matrix defining the linear system and the vector right hand side of the equation, which we have already covered. The remaining parameters concern the (list of) observable(s) to be computed out of the solution vector x, and can be specified in two different ways. One option is to give as the third and last parameter a (list of) (s). Alternatively, we can give our own implementations of the , and , where `LinearSystemObservable` `observable` `post_rotation` `post_processing`

- `observable` is the operator to compute the expected value of the observable and can be e.g. a `PauliSumOp`
- `post_rotation` is the circuit to be applied to the solution to extract information if additional gates are needed.
- `post_processing` is the function to compute the value of the observable from the calculated probabilities.

양자 평균: 0.7499999999999962
고전적 평균: 0.75
양자 회로 결과: (0.4999999999999952+0j)

관찰 가능한 것은 MatrixFunctional fo를 계산합니다 $x^T B x$ r 벡터와 실수 x B 대각 대칭 Toeplitz 행렬 {v*}입니다. 이 클래스는 주 대각선과 오프 대각선을 취합니다. 생성자 메서드를 위한 행렬의 {v*} 값입니다.

```
관찰 가능한 = MatrixFunctional(1, 1 / 2)

functional_solution = HHL().solve(tridi_matrix, vector, observable) classical_functional = NumPyL
inearSolver(                    ).solve(matrix,                    vector / np.linalg.norm(vector),
observable)
```

```
print('양자 함수:', functional_solution.observable)
print('고전적 함수형:', classical_functional.observable) print('양자 회로 결과:', functional_solution.circu
it_results)
```

양자 함수: 1.8281249999999818
고전적 함수형: 1.828125
양자 회로 결과: [(0.6249999999999941+0j), (0.4999999999999952+0j), (0.12499999999999988+0j)]

따라서 observable 에 대한 함수의 최종 값을 포함하고, circuit_results observable 의 결과를 처리하는 데 사용되는 회로에서 얻은 원시 값을 포함합니다.

이 '결과 처리 방법'은 어떤 인수를 취하는지 살펴보는 것이 더 좋습니다. 이 메서드는 최대 5개의 인수를 허용합니다. .solve() solve()

```
def solve(self, matrix: Union[np.ndarray, QuantumCircuit], vector: Union[np.ndarray, QuantumCircuit], observable: Optional[U
nion[LinearSystemObservable, BaseOperator, List[BaseOperator]]] = None, post_rotation: Optional[Union[QuantumCircuit, Lis
t[QuantumCircuit]]] = None, post_processing: Optional[Callable[[Union[float, List[float]]], Union[float, List[float]]]] = None) -
> LinearSolverResult:
```

처음 두 개는 선형 시스템을 정의하는 행렬과 방정식의 우변 벡터이며, 이는 이미 다룬 내용입니다. 나머지 매개변수는 해 벡터에서 계산될 관측 가능한 항목(목록)에 관한 것이며, 두 가지 다른 방식으로 지정할 수 있습니다. 한 가지 옵션은 세 번째이자 마지막 매개변수로 (목록) (s)를 제공하는 것입니다. 또는 , 및 의 자체 구현을 제공할 수 있습니다. 여기서 LinearSystemObservable observable post_rotation post_processing x

- observable 은 관측 가능한 값의 기대값을 계산하는 연산자이며, 예를 들어 PauliSumOp 일 수 있습니다. post_rotat
- ion 은 추가 게이트가 필요한 경우 정보를 추출하기 위해 해법에 적용될 회로입니다. post_processing 은 계산된 확률
- 로부터 관측 가능한 값의 값을 계산하는 함수입니다.

In other words, there will be as many as circuits, and is telling the algorithm how to use the values we see when we print to obtain the value we see when we print
. `circuit_results` `post_rotation` `post_processing` `circuit_results` `observable`

Finally, the class accepts the following parameters in its constructor method: `HHL`

- error tolerance : the accuracy of the approximation of the solution, the default is `1e-2`
- expectation : how the expectation values are evaluated, the default is `PauliExpectation`
- quantum instance: the or backend, the default is a simulation `QuantumInstance` `Statevector`

```
from qiskit import Aer

backend = Aer.get_backend('aer_simulator')
hhl = HHL(1e-3, quantum_instance=backend)

accurate_solution = hhl.solve(matrix, vector)
classical_solution = NumPyLinearSolver(
                    ).solve(matrix,
                            vector / np.linalg.norm(vector))

print(accurate_solution.euclidean_norm)
print(classical_solution.euclidean_norm)
```

```
1.185854122563138
1.1858541225631423
```

B. Running HHL on a real quantum device: optimised example

In the previous section we ran the standard algorithm provided in Qiskit and saw that it uses 7 qubits, has a depth of ~100 gates and requires a total of 54 CNOT gates. These numbers are not feasible for the current available hardware, therefore we need to decrease these quantities. In particular, the goal will be to reduce the number of CNOTs by a factor of 5 since they have worse fidelity than single-qubit gates. Furthermore, we can reduce the number of qubits to 4 as was the original statement of the problem: the Qiskit method was written for a general problem and that is why it requires 3 additional auxiliary qubits.

However, solely decreasing the number of gates and qubits will not give a good approximation to the solution on real hardware. This is because there are two sources of errors: those that occur during the run of the circuit and readout errors.

Qiskit provides a module to mitigate the readout errors by individually preparing and measuring all basis states, a detailed treatment on the topic can be found in the paper by Dewes et al.[3] To mitigate errors, we can use Richardson extrapolation to calculate the error to the zero limit by running the circuit three times, each replacing each CNOT gate by 1, 3 and 5 CNOTs respectively[4]. The idea is that theoretically the three circuits should produce the same result, but in real hardware adding CNOTs means amplifying the error. Since we know we've obtained results with an amplified error, and we can estimate how much the error was amplified by in each case, we can recombine the quantities to get a new result closer to the analytic solution.

Below we give the optimised circuit that can be used for any problem of the form

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{and} |b\rangle \quad = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}, a, b, \theta \in \quad \mathbb{R}$$

다시 말해, 회로는 circuit_results post_rotation post_processing circuit_results observable 만큼 많을 것이며, 인쇄할 때 보이는 값을 사용하여 인쇄할 때 보이는 값을 얻는 방법을 알고리즘에 알려줍니다.

마지막으로, 클래스는 생성자 메서드에서 다음 매개변수를 허용합니다. HHL

- 오차 허용 범위: 해의 근사 정확도, 기본값은 1e-2 기대값: 기대값을 평가하는 방법, 기본값은 Pau
- liExpectation 양자 인스턴스: 또는 백엔드, 기본값은 시뮬레이션 QuantumInstance Statevector
-

```
from qiskit import Aer

백엔드 = Aer.get_backend('aer_simulator') hhl = HHL(1e-3, q
uantum_instance=backend)

정확한_해 = hhl.solve(matrix, vector) 고전적인_해 = NumPyLinearSolver(
).solve(matrix,                    vector / np.linalg.norm(vector))



print(accurate_solution.euclidean_norm) print(classical_sol
ution.euclidean_norm)
```

```
1.  185854122563138 1.18
58541225631423
```

B. 실제 양자 장치에서 HHL 실행: 최적화된 예제

이전 섹션에서는 Qiskit에서 제공하는 표준 알고리즘을 실행하여 큐비트를 사용하고, 깊이가 ~ 게이트 CNOT 게이트가 필요하다는 것을 확인했습니다. 이러한 수치는 현재 사용 가능한 하드웨어에는 실현 불가능하므로 이러한 양을 줄여야 합니다. 특히, 단일 큐비트 게이트보다 충실도가 떨어지므로 CNOT 수를 배로 줄이는 것이 목표입니다. 또한, 문제의 원래 설명과 같이 큐비트 수를 로 줄일 수 있습니다. Qiskit 방법은 일반적인 문제를 위해 작성되었기 때문에 추가적인 보조 큐비트가 필요합니다.

그러나, 오로지 {개} 큐비트와 큐비트 수를 줄이는 것은 실제 하드웨어에서 솔루션에 대한 좋은 근사값을 제공하지 않습니다. 이는 오류의 원인이 두 가지이기 때문입니다. t 실행 중에 발생하는 오류와 {v*} 회로를 읽습니다. 오류가 발생했습니다.

Qiskit은 모든 기본 상태를 개별적으로 준비하고 측정하여 판독 오류를 완화하는 모듈을 제공합니다. 이 주제에 대한 자세한 내용은 Dewes 등의 논문3에서 확인할 수 있습니다. 오류를 완화하기 위해 Richardson 외삽법을 사용하여 회로를 세 번 실행하여 오류를 0으로 제한할 수 있습니다. 각 회로는 각 CNOT 게이트를 , 및 CNOT로 대체합니다4. 아이디어는 이론적으로 세 회로가 동일한 결과를 생성해야 하지만 실제 하드웨어에서 CNOT를 추가하면 오류가 증폭된다는 것입니다. 증폭된 오류로 결과를 얻었고 각 경우에 오류가 얼마나 증폭되었는지 추정할 수 있으므로 수량을 재결합하여 분석 솔루션에 더 가까운 새로운 결과를 얻을 수 있습니다.

아래는 {v*} 형태의 모든 문제에 사용할 수 있는 최적화된 회로입니다.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{and} |b\rangle \quad = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}, a, b, \theta \in \quad \mathbb{R}$$

The following optimisation was extracted from a work on the HHL for tridiagonal symmetric matrices[5], this particular circuit was derived with the aid of the UniversalQCompiler software[6].

The following optimisation was extracted from a work on the HHL for tridiagonal symmetric matrices[5], this particular circuit was derived with the aid of the UniversalQCompiler software[6].

```
from qiskit import QuantumRegister, QuantumCircuit
import numpy as np

t = 2  # This is not optimal; As an exercise, set this to the
       # value that will get the best results. See section 8 for solution.

NUM_QUBITS = 4  # Total number of qubits
nb = 1  # Number of qubits representing the solution
nl = 2  # Number of qubits representing the eigenvalues

theta = 0  # Angle defining |b>

a = 1  # Matrix diagonal
b = -1/3  # Matrix off-diagonal

# Initialize the quantum and classical registers
qr = QuantumRegister(NUM_QUBITS)

# Create a Quantum Circuit
qc = QuantumCircuit(qr)

qrb = qr[0:nb]
qrl = qr[nb:nb+nl]
qra = qr[nb+nl:nb+nl+1]

# State preparation.
qc.ry(2*theta, qrb[0])

# QPE with e^{iAt}
for qu in qrl:
    qc.h(qu)

qc.p(a*t, qrl[0])
qc.p(a*t*2, qrl[1])

qc.u(b*t, -np.pi/2, np.pi/2, qrb[0])


# Controlled e^{iAt} on \lambda_{1}:
params=b*t

qc.p(np.pi/2,qrb[0])
qc.cx(qrl[0],qrb[0])
qc.ry(params,qrb[0])
qc.cx(qrl[0],qrb[0])
qc.ry(-params,qrb[0])
qc.p(3*np.pi/2,qrb[0])
```

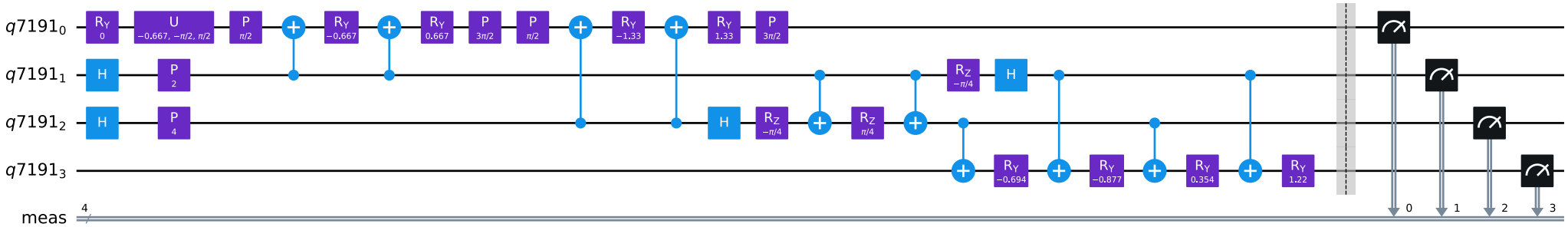
```
from qiskit import QuantumRegister, QuantumCircuit import numpy as np


t = 2  # 이것은 최적이 아닙니다. 연습 삼아, 이것을 최상의 결과를 얻을 수 있는 값으로 설정하십시오. 해
법은 8절을 참조하십시오.


NUM_QUBITS = 4  # 총 큐비트 수 nb = 1  # 해를 나타내는 큐비트 수 nl = 2  #
고유값을 나타내는 큐비트 수



theta = 0 # |b>를 정의하는 각도


a = 1  # 행렬 대각선 b = -1/3  # 행렬 비대각
선


# 양자 및 고전 레지스터 초기화 qr = QuantumRegister(NUM_QUBIT
S)


# 양자 회로 qc = QuantumCircuit(qr)
생성


qrb = qr[0:nb] qrl = qr[nb:nb+nl]
qra = qr[nb+nl:nb+nl+1]



# 상태 준비. qc.ry(2*theta, qrb[0
])


# qrl에서 qu에 대한 e^iAt
}를 사용한 QPE: qc.h(qu)



qc.p(a*t, qrl[0]) qc.p(a*t*2,
qrl[1])


qc.u(b*t, -np.pi/2, np.pi/2, qrb[0])



# \lambda_{1}에 대한 제어된 e^iAt}: params=b*t



qc.p(np.pi/2,qrb[0]) qc.cx(qrl[0],
qrb[0]) qc.ry(params,qrb[0]) qc.c
x(qrl[0],qrb[0]) qc.ry(-params,qr
b[0]) qc.p(3*np.pi/2,qrb[0])
```

```
# Controlled e^{2iAt} on \lambda_{2}:
params = b*t*2

qc.p(np.pi/2,qrb[0])
qc.cx(qrl[1],qrb[0])
qc.ry(params,qrb[0])
qc.cx(qrl[1],qrb[0])
qc.ry(-params,qrb[0])
qc.p(3*np.pi/2,qrb[0])

# Inverse QFT
qc.h(qrl[1])
qc.rz(-np.pi/4,qrl[1])
qc.cx(qrl[0],qrl[1])
qc.rz(np.pi/4,qrl[1])
qc.cx(qrl[0],qrl[1])
qc.rz(-np.pi/4,qrl[0])
qc.h(qrl[0])

# Eigenvalue rotation
t1=(-np.pi +np.pi/3 - 2*np.arcsin(1/3))/4
t2=(-np.pi -np.pi/3 + 2*np.arcsin(1/3))/4
t3=(np.pi -np.pi/3 - 2*np.arcsin(1/3))/4
t4=(np.pi +np.pi/3 + 2*np.arcsin(1/3))/4

qc.cx(qrl[1],qra[0])
qc.ry(t1,qra[0])
qc.cx(qrl[0],qra[0])
qc.ry(t2,qra[0])
qc.cx(qrl[1],qra[0])
qc.ry(t3,qra[0])
qc.cx(qrl[0],qra[0])
qc.ry(t4,qra[0])
qc.measure_all()

print(f"Depth: {qc.depth()}")
print(f"CNOTS: {qc.count_ops()['cx']}")
qc.draw(fold=-1)
```

```
Depth: 26
CNOTS: 10
```

```
# \lambda_{2} 상의 제어된 e↑2iAt}: params = b*t*2


qc.p(np.pi/2,qrb[0]) qc.cx(qrl[1],
qrb[0]) qc.ry(params,qrb[0]) qc.c
x(qrl[1],qrb[0]) qc.ry(-params,qr
b[0]) qc.p(3*np.pi/2,qrb[0])




# 역 QFT qc.h(qrl[1]) qc.rz(-np.
pi/4,qrl[1]) qc.cx(qrl[0],qrl[1]) q
c.rz(np.pi/4,qrl[1]) qc.cx(qrl[0],q
rl[1]) qc.rz(-np.pi/4,qrl[0]) qc.h(
qrl[0])




# 고유값 회전 t1=(-np.pi +np.pi/3 - 2*np.arcsin(1/3))/4 t2
=(-np.pi -np.pi/3 + 2*np.arcsin(1/3))/4 t3=(np.pi -np.pi/3 -
2*np.arcsin(1/3))/4 t4=(np.pi +np.pi/3 + 2*np.arcsin(1/3))/
4



qc.cx(qrl[1],qra[0]) qc.ry(t1,q
ra[0]) qc.cx(qrl[0],qra[0]) qc.r
y(t2,qra[0]) qc.cx(qrl[1],qra[0
]) qc.ry(t3,qra[0]) qc.cx(qrl[0]
,qra[0]) qc.ry(t4,qra[0]) qc.me
asure_all()




print(f"깊이: {qc.depth()}") print(f"CNOTS: {qc.count_o
ps()['cx']}") qc.draw(fold=-1)
```

```
깊이: 26 CN
OT 게이트
수: 10
```



The code below takes as inputs our circuit, the real hardware backend and the set of qubits we want to use, and returns and instance that can be run on the specified device. Creating the circuits with 3 and 5 CNOTs is the same but calling the transpile method with the right quantum circuit.

Real hardware devices need to be recalibrated regularly, and the fidelity of a specific qubit or gate can change over time. Furthermore, different chips have different qubit connectivity. If we try to run a circuit that performs a two-qubit gate between two qubits that are not connected on the specified device, the transpiler will add SWAP gates. Therefore it is good practice to check with the IBM Quantum Experience webpage[7] before running the following code and choose a set of qubits with the right connectivity and lowest error rates at the given time.

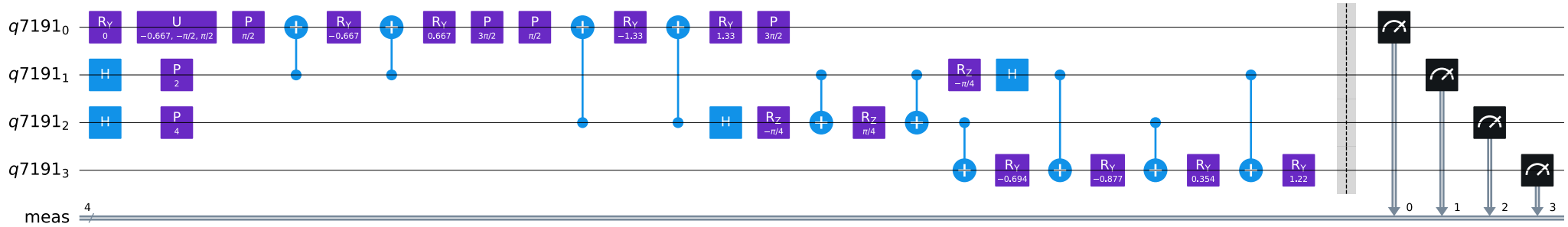
```
from qiskit import IBMQ, transpile
from qiskit.utils.mitigation import complete_meas_cal

provider = IBMQ.load_account()

backend = provider.get_backend('ibmq_quito') # calibrate using real hardware
layout = [2,3,0,4]
chip_qubits = 5

# Transpiled circuit for the real hardware
qc_qa_cx = transpile(qc, backend=backend, initial_layout=layout)
```

The next step is to create the extra circuits used to mitigate the readout errors[3].

```
meas_cals, state_labels = complete_meas_cal(qubit_list=layout,
                                            qr=QuantumRegister(chip_qubits))
qcs = meas_cals + [qc_qa_cx]

job = backend.run(qcs, shots=10)
```

The following plot[5], shows the results from running the circuit above on real hardware for 10 different initial states. The x-axis represents the angle θ defining the initial state in each case. The results where obtained after mitigating the readout error and then extrapolating the errors arising during the run of the circuit from the results with the circuits with 1, 3 and 5 CNOTs.

Compare to the results without error mitigation nor extrapolation from the CNOTs[5].



아래 코드는 다음을 수행합니다. 회로, 실제 하드웨어 백엔드 및 사용하려는 큐비트 세트를 사용하고 지정된 장치에서 실행할 수 있는 인스턴스를 반환합니다. {v*} 및 CNOT로 회로를 만드는 것은 3 5 t를 호출하는 것과 동일합니다. 양자 회로를 사용하여 트랜스파일 메서드를 실행합니다.

실제 하드웨어 장치는 정기적으로 재보정해야 하며, 특정 큐비트 또는 게이트의 충실도는 시간이 지남에 따라 변경될 수 있습니다. 또한, 칩마다 큐비트 연결성이 다릅니다. 지정된 장치에서 연결되지 않은 두 큐비트 간에 2 큐비트 게이트를 수행하는 회로를 실행하려고 하면 트랜스파일러가 SWAP 게이트를 추가합니다. 따라서 다음 코드를 실행하기 전에 IBM Quantum Experience 웹페이지[7]를 확인하고 주어진 시간에 올바른 연결성과 가장 낮은 오류율을 가진 큐비트 세트를 선택하는 것이 좋습니다. {v*}

```
from qiskit import IBMQ, transpile from qiskit.utils.mitigation import complete
_meas_cal

공급자 = IBMQ.load_account()

백엔드 = provider.get_backend('ibmq_quito') # 실제 하드웨어 레이아웃을 사용하여 보정 = [2,3,0,4]

칩 큐비트 = 5

# 실제 하드웨어를 위한 트랜스파일된 회로
qc_qa_cx = transpile(qc, backend=backend, initial_layout=layout)
```

다음 단계는 판독 오류를 완화하는 데 사용되는 추가 회로를 만드는 것입니다[3].

```
meas_cals, state_labels = complete_meas_cal(qubit_list=layout, qr=QuantumRegister(chip_qubits))

qcs = meas_cals + [qc_qa_cx]

작업 = backend.run(qcs, shots=10)
```

다음 p lot[5]는 위 회로를 실제 하드웨어에서 다양한 초기 상태로 실행한 결과를 보여줍니다. -축은 각 경우의 초기 상태를 나타냅니다. 완 화 후 편집됨 판독 오류를 보정한 다음 , , 및 CNOT를 사용하여 회로 결과로부터 회로 실행 중에 발생하는 오류를 추정합니다.

Compare to the results without error mitigation nor extrapolation from the CNOTs[5].

8. Problems

Real hardware:

1. Set the time parameter for the optimised example.

▶ Solution (Click to expand)

2. Create transpiled circuits for 3 and 5 CNOTs from a given circuit ''. When creating the circuits you will have to add barriers so that these consecutive CNOT gates do not get cancelled when using the function. `qc transpile()`
3. Run your circuits on the real hardware and apply a quadratic fit to the results to obtain the extrapolated value.

9. References

1. J. R. Shewchuk. An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain. Technical Report CMU-CS-94-125, School of Computer Science, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, Pennsylvania, March 1994.
2. A. W. Harrow, A. Hassidim, and S. Lloyd, “Quantum algorithm for linear systems of equations,” Phys. Rev. Lett. 103.15 (2009), p. 150502.
3. A. Dewes, F. R. Ong, V. Schmitt, R. Lauro, N. Boulant, P. Bertet, D. Vion, and D. Esteve, “Characterization of a two-transmon processor with individual single-shot qubit readout,” Phys. Rev. Lett. 108, 057002 (2012).
4. N. Stamatopoulos, D. J. Egger, Y. Sun, C. Zoufal, R. Iten, N. Shen, and S. Woerner, “Option Pricing using Quantum Computers,” arXiv:1905.02666 .
5. A. Carrera Vazquez, A. Frisch, D. Steenken, H. S. Barowski, R. Hiptmair, and S. Woerner, “Enhancing Quantum Linear System Algorithm by Richardson Extrapolation,” ACM Trans. Quantum Comput. 3 (2022).
6. R. Iten, O. Reardon-Smith, L. Mondada, E. Redmond, R. Singh Kohli, R. Colbeck, “Introduction to UniversalQCompiler,” arXiv:1904.01072 .
7. https://quantum-computing.ibm.com/ .
8. D. Bucher, J. Mueggenburg, G. Kus, I. Haide, S. Deutschle, H. Barowski, D. Steenken, A. Frisch, "Qiskit Aqua: Solving linear systems of equations with the HHL algorithm" https://github.com/Qiskit/qiskit-tutorials/blob/master/legacy_tutorials/aqua/linear_systems_of_equations.ipynb


```
# pylint: disable=unused-import
import qiskit.tools.jupyter
%qiskit_version_table
```

Version Information

Qiskit Software	Version
`qiskit-terra`	0.21.0
`qiskit-aer`	0.10.4
`qiskit-ibmq-provider`	0.19.2
`qiskit`	0.37.2
`qiskit-nature`	0.4.1
`qiskit-finance`	0.3.2

8. 문제

실제 하드웨어:

1. 최적화된 예제에 대한 시간 매개변수를 설정합니다. {v*}

▶ 해결책 (클릭하여 펼치기)

2. 주어진 회로 "에서 및 CNOT3|5 에 대해 트랜스파일된 회로를 생성합니다. 회로를 생성할 때 배리어를 추가하여 이러한 연속적인 CNOT 게이트가 사용 시 취소되지 않도록 해야 합니다. 그 함수. qc transpile()
3. 실제 하드웨어에서 회로를 실행하고 결과에 이차 적합을 적용하여 외삽 값을 얻습니다. {v*}

9. 참고 문헌

1. J. R . Shewchuk. 고통 없이 배우는 켤레 기울기법 소개 (An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain). 기술 보고서 CMU-CS-94-125, 컴퓨터 과학 대학, 카네기 멜론 대학교, 피츠버그, 펜 펜실베이니아, 1994년 3월.

2. A. W. Harrow, A. Hassidim, and S. Lloyd, “선형 방정식의 양자 알고리즘,” Phys. Rev. Lett. 103.15 (2009), p. 150502. 3. A. Dewes, F. R. Ong, V. Schmitt, R. Lauro, N. Boulant, P. Bertet, D. Vion, and D. Esteve, “개별 단일 샷 큐비트 판독을 갖춘 2-트랜스몬 프로세서의 특성화,” Phys. Rev. Lett. 108, 057002 (2012). 4. N. Stamatopoulos, D. J. Egger, Y. Sun, C. Zoufal, R. Iten, N. Shen, and S. Woerner, “양자 컴퓨터를 사용한 옵션 가격 책정,” arXiv:1905.02666 . 5. A. Carrera Vazquez, A. Frisch, D. Steenken, H. S. Barowski, R. Hiptmair, and S. Woerner, “Richardson 외삽법을 이용한 양자 선형 시스템 알고리즘 개선,” ACM Trans. Quantum Comput. 3 (2022). 6. R. Iten, O. Reardon-Smith, L. Mondada , E. Redmond, R. Singh Kohli, R. Colbeck, “UniversalQCompiler 소개,” arXiv:1904.01072 . 7. https://quantum-computing.ibm.com/ .

8. D. B ucher, J. Mueggenburg, G. Kus, I. Haide, S. Deutschle, H. Barowski, D. Steenken, A. Frisch, "Qiskit Aqua: HHL 알고리즘으로 선형 방정식 시스템 풀기" https://github.com/Qiskit/q it-튜터 ials/blob/master/legacy_tutorials/aqua/선형_방정식_시스템.ipynb

pylint: disable=unused-import qiskit.tools.ju
pyter 가져오기 %qiskit_version_table

버전 정보

Qiskit Software	Version
qiskit-terra	0.21.0
qiskit-aer	0.10.4
qiskit-ibmq-provider	0.19.2
qiskit	0.37.2
qiskit-nature	0.4.1
qiskit-finance	0.3.2

`qiskit-optimization`	0.4.0
`qiskit-machine-learning`	0.4.0
System information	
Python version	3.8.13
Python compiler	Clang 13.1.6 (clang-1316.0.21.2.5)
Python build	default, Aug 29 2022 05:17:23
OS	Darwin
CPUs	8
Memory (Gb)	32.0
Wed Sep 21 15:26:35 2022 BST	

`qiskit-optimization`	0.4.0
`qiskit-machine-learning`	0.4.0
System information	
Python version	3.8.13
Python compiler	Clang 13.1.6 (clang-1316.0.21.2.5)
Python build	default, Aug 29 2022 05:17:23
OS	Darwin
CPUs	8
Memory (Gb)	32.0
Wed Sep 21 15:26:35 2022 BST	