ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА"

Физический факультет

Курсовая работа

Моделирование и визуализация динамики маятника Максвелла

Выполнил:
студент 2 курса 214 группы
Першин Александр Денисович

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. Труханов В.А.

Москва
2021

Содержание

1 Введение 2

2 Постановка задачи 2

3 Решения уравнений движения 4

4 Программная реализация 5

4.1 Описание программы 5

4.2 Интерфейс 5

5 Результаты 6

6 Итоги работы 9

1 Введение

В курсе общей физики удобно пояснять основные идеи на простых примерах. В качестве примера может быть взята задача, рамки рассмотрения которой определяются аспектами рассматриваемого примера.

Из кинематики известно, что в случае плоского движения твердого тела все его точки движутся в параллельных плоскостях [1]. Положение сечения определяется положением двух его точек, а положения двух точек на плоскости характеризуется четырьмя координатами. Между этими координатами имеется одно соотношение, выражающее постоянство расстояний между двумя точками. Следовательно, при плоском движении число степеней свободы равно трем.

В качетсве классического примера плоского движения твердого тела может быть рассмотрена задача описания динамики маятника Максвелла.

2 Постановка задачи

В данной работе изучается динамика маятника Максвелла. Маятник Максвелла представляет собой диск, подвешенный на нити. Нить намотана на ось диска. После освобождения из верхнего положения маятник начинает движение под действием силы тяжести и сил со стороны нитей: поступательное - вниз и вращательное - вокруг оси диска. В нижней точке вращение продолжается по инерции, нить начинает наматываться на стержень, а маятник начинает подниматься. Достигнув верхней точки, маятник снова начинает движение вниз и т.д.

В движении маятника Максвелла можно выделить три временные стадии: спуск, удар и подъем. Стоит отметить, что при ударе маятника кинетическая энергия его вращения, которая гораздо больше, чем кинетическая энергия поступательного движения перед ударом, практически не изменяется (в рамках построения модели время удара маятника будет устремлено к нулю и можно будет считать, что кинетическая энергия вращения не будет изменяться) [2].

Движение маятника происходит под действием силы тяжести и силы натяжения нитей. Без учета сопротивления воздуха и отклонения нитей от вертикали, уравнения движения маятника Максвелла вниз и вверх в лабораторной системе отсчета одинаковы и имеют вид:

$$ma = mg - 2T, \tag{1}$$

где m - масса маятника, T - сила натяжения нити, g - ускорение свободного падения, a - ускорение поступательного движения центра масс маятника.

Уравнение моментов относительно оси маятника:

$$J\varepsilon = 2rT, \tag{2}$$

где J - момент инерции маятника относительно его оси, r - радиус стержня маятника, ε - угловое ускорение.

Уравнение кинематической связи:

$$a = \varepsilon r \tag{3}$$

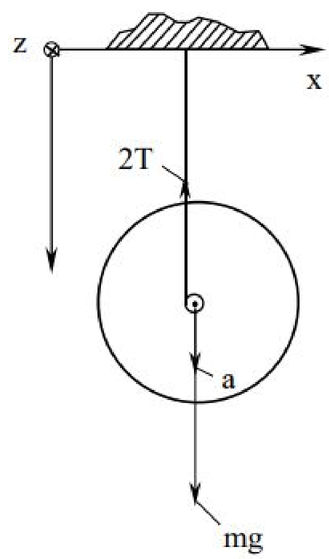

Рис. 1: Схема маятника Максвелла

Решая систему уравнений (1) – (3) получаем:

$$a = \frac{g}{1 + \frac{J}{mr^2}}. \tag{4}$$

С учетом того, что $J = mR^2$, выражение для ускорения маятника примет вид:

$$a \equiv \frac{dv}{dt} \equiv \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{1 + \frac{R^2}{r^2}} \tag{5}$$

Цель работы состоит в том, чтобы визуализировать динамику маятника Максвелла в зависимости от задаваемых пользователем параметров, а именно от вводимых радиусов диска и стержня.

3 Решения уравнений движения

Для начала рассмотрим поступательное движение маятника Максвелла. Интегрируя (5) по времени, получим хорошо известные выражения для $x(t)$ и $v(t)$:

$$v(t) = v_0 + at$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

где $x_0 = x(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$ - значения координаты и скорости поступательного движения маятника в момент времени t_0.

Отметим, что при спуске маятника значение $v(t_{\text{верх}}) = v_0 = 0$, где $t_{\text{верх}}$ - момент времени t, когда маятник находится в верхнем положении. Напротив, при подъеме $v(t_{\text{нижн}}) = v_0 = v_{\text{нижн}} = v_{max}$, где $v_{\text{нижн}}$ - значение скорости поступательного движения маятника в нижней точке, а $t_{\text{нижн}}$ - момент времени t, когда маятник находится в нижнем положении.

Перейдем к рассмотрению вращательного движения. Для этого воспользуемся уравнениями (3) и (5):

$$\varepsilon \equiv \frac{d\omega}{dt} \equiv \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{r}\frac{g}{1 + R^2/r^2} \tag{6}$$

Проинтегрировав (6) по времени, с учетом (3), можно получить выражения для $\omega(t)$ и $\varphi(t)$:

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{1}{r}at$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{r}\frac{at^2}{2}$$

Аналогично, при спуске маятника значение $\omega(t_{\text{верх}}) = \omega_0 = 0$, а при подъеме $\omega(t_{\text{нижн}}) = \omega_0 = \omega_{\text{нижн}} = \omega_{max}$, где $\omega_{\text{нижн}}$ - значение угловой скорости вращения маятника в нижней точке.

Ускорения при спуске и подъеме одинаковы, а потерями энергии при ударе вследствие неупругих процессов в нитях [1] при построении модели мы пренебрегаем и считаем, что маятник все время поднимается на одну и ту же высоту.

4 Программная реализация

4.1 Описание программы

Для решения задачи визуализации движения маятника Максвелла была написана программа на языке C++ в среде программирования Visual Studio 2019 с использованием графической библиотеки WinApi. Проект представляет собой:

- заголовочный файл
- файл ресурсов
- файл .cpp

Значения скоростей, координаты центра масс и угла поворота записывались в файл типа .txt, графики строились в программе Origin.

4.2 Интерфейс

Графический интерфейс программы показан на рис.2.

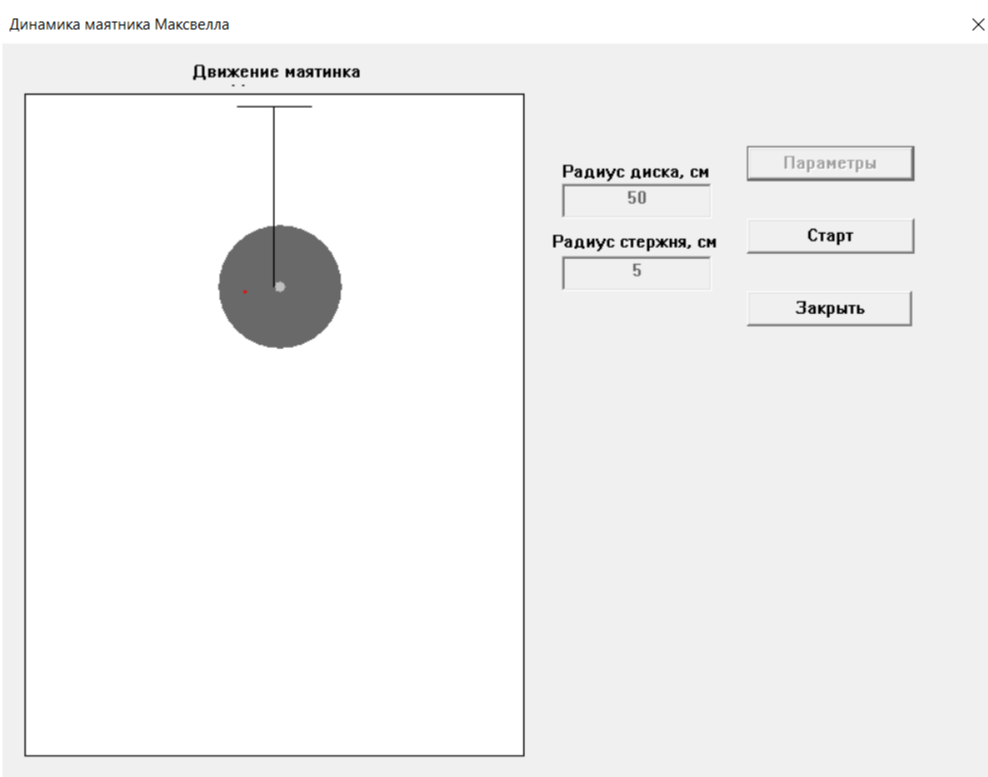

Рис. 2: Интерфейс программы в процессе работы

В окне программы расположены: рамка, в которой строится изображение маятника Максвелла; кнопки «Параметры», «Start», «Close», отвечающие за ввод параметров установки в окна «Радиус диска» и «Радиус стержня», за начало моделирования движения и за закрытие окна программы по окончании моделирования соответственно.

5 Результаты

Исследуем динамику маятника Максвелла на следующих значениях входных параметров:

Радиус диска: 50 см

Радиус стержня: 5 см

То, как выглядит маятник с данными входными параметрами, можно увидеть на рис. 2. На рис. 3 и рис. 4 изображены графики зависимостей скоростей поступательного v и вращательного ω движения маятника Максвелла от времени t. Видно, что графики представляют собой прямые, т.е. зависимость является линейной, что соответствует ранее проведенному теоретическиму анализу.

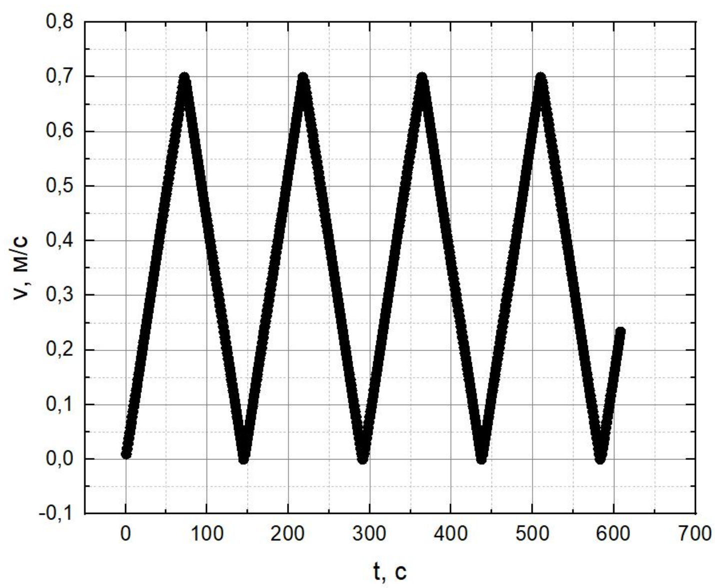

Рис. 3: График зависимости скорости поступательного движения маятника v от времени t

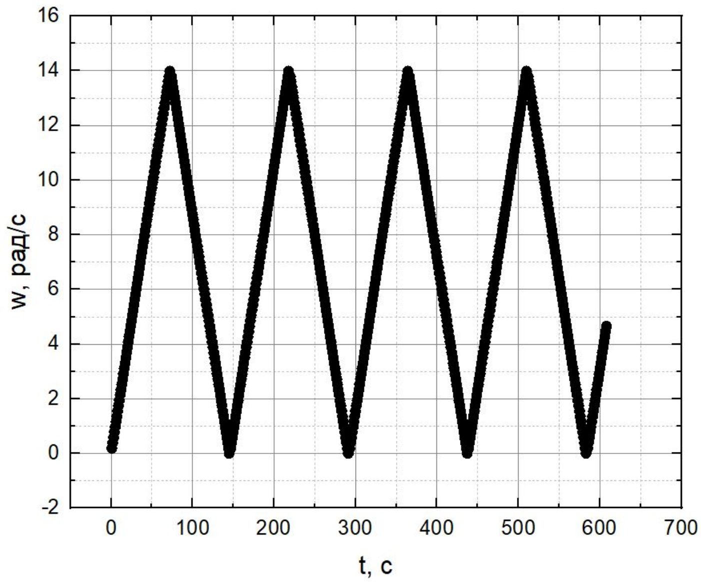

Рис. 4: График зависимости скорости вращательного движения маятника w от времени t

На рис. 5 и рис. 6 изображены графики зависимостей координаты центра масс и угла поворота маятника от времени. Результаты также согласуются с теоретическими представлениями.

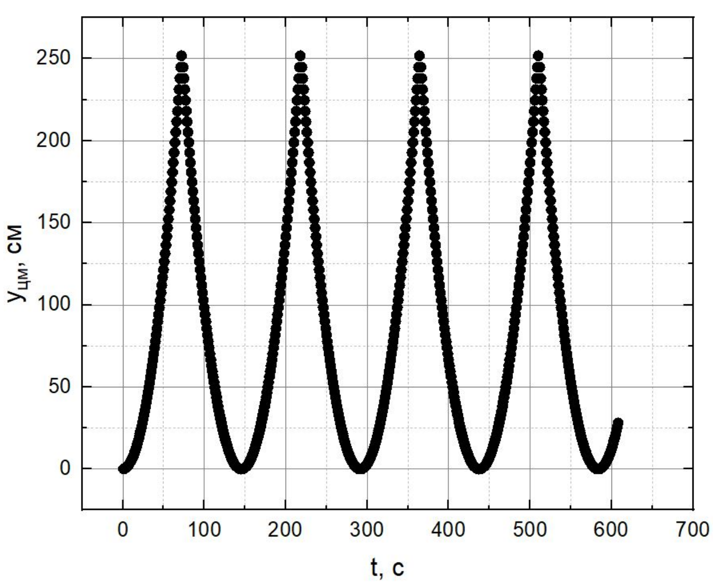

Рис. 5: График зависимости координаты центра масс маятника y от времени t

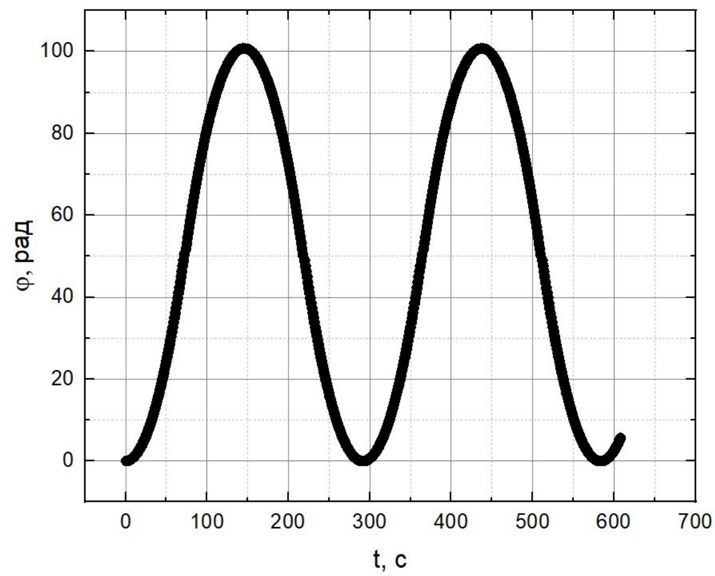

Рис. 6: График зависимости угла поворота маятника φ от времени t

Ниже приведены те же графики зависимостей, но для иных значений вводимых параметров:

Радиус диска: 60 см

Радиус стержня: 10 см

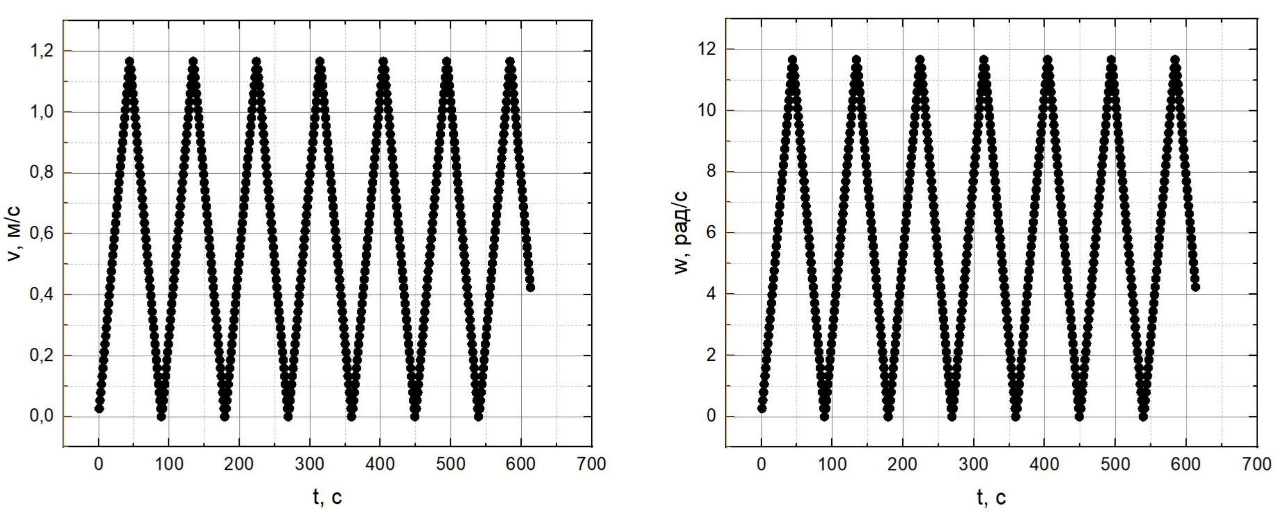

Рис. 7: График зависимостей скоростей поступательного v и вращательного w движения маятника от времени t

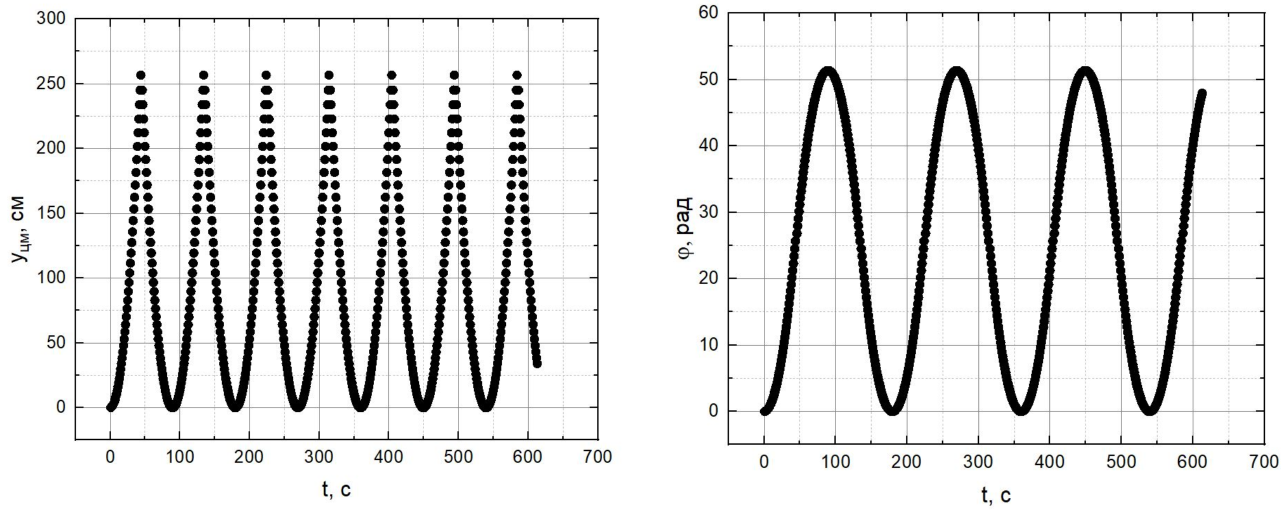

Рис. 8: График зависимостей координаты центра масс y и угла поворота φ маятника от времени

6 Итоги работы

- Проведено изучение динамики маятника Максвелла
- Написана программа, производящая расчеты согласно полученным уравнениям движения
- Реализована визуализация движения маятника Максвелла
- Построены графики зависимостей скоростей поступательного и вращательного движения, координаты центра масс и угла поворота маятника от времени

Список литературы

[1] Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Курс общей физики. Механика. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.

[2] Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. - «ОНИКС 21 век», 2003.