d)

$$x_{i+1}^{n} - x_{i}^{n} \geq x_{i+1}^{n-1} - \left(x_{i}^{n-1} + \frac{h}{3}\cdot\left(x_{i+1}^{n-1} - x_{i}^{n-1}\right)\right) \iff$$

$$\iff x_{i+1}^{n} - x_{i}^{n} \geq x_{i+1}^{n-1}\left(1 - \frac{h}{3}\right) - x_{i}^{n-1}\left(-1 + \frac{h}{3}\right) =$$

$$= x_{i+1}^{n-1}\left(1 - \frac{h}{3}\right) + x_{i}^{n-1}\left(1 - \frac{h}{3}\right) \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_{i+1}^{n} - x_{i}^{n} \geq 0 \\ h \leq 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x_{i+1}^{n} - x_{i}^{n} > 0 \\ h < 3 \end{cases}$$

I uträkningarna stannar x_{i+1} plötsligt och har därför samma position i n samt n+1. Om x_{i+1} har en hastighet kan h bli större utan om körningar.

e) Bakåt Euler aplicerad på (2) o (3):

$$x_i^{n+1} = x_i^n + hf(x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1})$$

=> Ger två fall:

<u>Fall 1:</u> x_i^{n+1} är bilen längst fram <=> x_M

Ur a) får vi att f def. till

$$x_i^{n+1} = x_i^n + hg(x)$$

=> Ovan är entydligt bestämt då vi antagit värde på x_i^n samt hg är konstanter.

<u>Fall 2:</u> x_i^{n+1} är bil 1, 2, ..., M-1

Från def. av f får vi:

$$x_i^{n+1} = x_i^n + h\frac{v_M}{d}(x_{i+1}^{n+1} - x_i^{n+1}) \quad , \quad \begin{cases} v_M \text{ är maxfart} \\ d \text{ är max strecka} \end{cases}$$

$$\frac{v_M}{d} = k$$

$$\Rightarrow x_i^{n+1} = x_i^n + hkx_{i+1}^{n+1} - hkx_i^{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_i^{n+1}(1+hk) = x_i^n + hkx_{i+1}^{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_i^{n+1} = \frac{x_i^n + hkx_{i+1}^{n+1}}{1+hk}$$

Vi ser att för entydlighet i Fall 2 krävs entydlighet i framförvarande bil, x_{i+1}^{n+1}.

På så sätt kan rekursion antas så att vid godtycklig x_M^n kommer hela kedjan kunna beräknas.

Enligt ovan resonemang kommer således x_{M-1}^n varpå x_{M-1}^{n+1} kommer kunna beräknas.

Varpå x_{M-2}^{n+1} har en lösning.

$\Rightarrow$ således kommer x_i^{n+1} gå att beräkna.

f) $k := \frac{V_m}{d}$, $d := x_{i+1}^n - x_i^n$

$$x_i^{n+1} = \frac{x_i^n + hk \cdot x_{i+1}^{n+1}}{1+hk} = \frac{x_i^n}{1+hk} + \frac{hk x_{i+1}^{n+1}}{1+hk}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x_i^n}{1+hk} = x_i^n \quad , \quad \lim_{h\to 0} \frac{hk x_{i+1}^{n+1}}{1+hk} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{h\to \infty} \frac{x_i^n}{1+hk} = 0 \quad , \quad \lim_{h\to \infty} \frac{hk x_{i+1}^{n+1}}{1+hk} = x_{i+1}^{n+1}$$

$$\therefore \quad \lim_{h\to 0} x_i^{n+1} = x_i^n + 0 = x_i^n \, ,$$

$$\lim_{h\to \infty} x_i^{n+1} = 0 + x_{i+1}^{n+1} = x_{i+1}^{n+1}$$

Vi tolkar detta som att när $h \to 0$ står bilen kvar och när $h \to \infty$ står bilen på samma ställe som framförvarande bil.

Vi bör alltså välja ett begränsat $h > 0$.

h) $$x_i^{n+1} = \frac{x_i^n + hk x_{i+1}^{n+1}}{1+hk} = / \, k = \tfrac{1}{3} \, / = \frac{x_i^n + \frac{h x_{i+1}^{n+1}}{3}}{1 + \frac{h}{3}} =$$

$$= \frac{3 x_i^n + h x_{i+1}^{n+1}}{3+h}$$

i) Det system av differentialfunktioner som givits i uppgiften är i många anseenden rimlig att implementera som modell för trafikflöden.

Inom trafikanalys finns ett fenomen som kallas för snaking. Detta medför att det blir en enorm kedjeeffekt av att någon i exempelvis en kö bromsar. Detta fenomen syns tydligt på de filmer som genereras av MatLab.

En potentiell utveckling av modellen är att bilar i nuvarande version ej har någon längd utan existerar enbart som punkter. Detta är dock enkelt att implementera i den kod som skrivits för labben.

WHITELINES