Del 1.

Att $\tilde{\alpha}$ minimerar 3 innebär att $\tilde{\alpha}$ är en extrempunkt. Dessa har som bekant en derivata som är lika med 0.

$$0 = \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_n}\left(\frac{\tilde{U}(\tilde{\alpha}_n)}{f(x_n) - \tilde{\alpha}_n}\right) =$$

$$= \frac{\tilde{U}'(\tilde{\alpha}_n)\cdot(f(x_n) - \tilde{\alpha}_n) - \tilde{U}(\tilde{\alpha}_n)\cdot(-1)}{(f(x_n) - \tilde{\alpha}_n)^2}$$

$$\Rightarrow / f(x_n) - \tilde{\alpha}_n \neq 0 / \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{U}(\tilde{\alpha}_n)\cdot(f(x_n) - \tilde{\alpha}_n) = -\tilde{U}(\tilde{\alpha}_n)$$

$$\Rightarrow f(x_n) - \tilde{\alpha}_n = -\frac{\tilde{U}(\tilde{\alpha}_n)}{\tilde{U}'(\tilde{\alpha}_n)}$$

Del 3

(5) $$\frac{1}{U(\tilde{\alpha})} = \frac{1}{8} + \frac{a}{\tilde{\alpha}}$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{1}{U(\tilde{\alpha})} - \frac{1}{8}\right)\tilde{\alpha}$$

$$= \frac{\tilde{\alpha}}{U(\tilde{\alpha})} - \frac{\tilde{\alpha}}{8}$$

(6) $$U(\tilde{\alpha}) = 8 - a\tilde{\alpha}^{b}$$

$$\Rightarrow \ln(8 - U(\tilde{\alpha})) = \ln a + b\ln\tilde{\alpha}$$

$\Rightarrow$ / sub. $t = \ln a$ / $\Rightarrow$

$$\Rightarrow t \cdot b\ln\tilde{\alpha} = \ln(8 - U(\tilde{\alpha}))$$

∇U:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = -\tilde{\alpha}^{b},$$

$$\frac{\partial U}{\partial b} = -a\tilde{\alpha}^{b}\ln\tilde{\alpha}$$

$$\Rightarrow \nabla U = \begin{bmatrix} -\tilde{\alpha}^{b} \\ -a\tilde{\alpha}^{b}\ln\tilde{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$(5) = \frac{1}{8} + \frac{a}{\tilde{\alpha}} = \frac{1}{U(\tilde{\alpha})}$$

Från Matlab - Min. Kv. av (5) $\Rightarrow a = \frac{21\,025}{504}$

$$\Rightarrow \frac{1}{U(\tilde{\alpha})} = \frac{1}{8} + \frac{\frac{21025}{504}}{\tilde{\alpha}} = \frac{1}{8} + \frac{21025}{504\tilde{\alpha}}$$

$$\Rightarrow U(\tilde{\alpha}) = \frac{1}{\frac{1}{8} + \frac{21025}{504\tilde{\alpha}}} = \cdots = \frac{504\tilde{\alpha}}{63\tilde{\alpha} + 21025}$$

---

(4)

$$f(x) - \tilde{\alpha} = -\frac{\tilde{U}(\tilde{\alpha})}{\tilde{U}'(\tilde{\alpha})}$$

$$f(x) = \tilde{\alpha} - \frac{\tilde{U}(\tilde{\alpha})}{\tilde{U}'(\tilde{\alpha})} = \tilde{\alpha} - \frac{\tilde{U}(\tilde{\alpha})}{\frac{\partial}{\partial\tilde{\alpha}}(\tilde{U}(\tilde{\alpha}))}$$

$$\Rightarrow / \tilde{U}(\tilde{\alpha}) = U_\infty - U / \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \tilde{\alpha} - \frac{U_\infty - U}{\frac{\partial}{\partial\tilde{\alpha}}(U_\infty - U)}$$

$$f(x) = \tilde{\alpha} - \frac{8 - \frac{504\tilde{\alpha}}{63\tilde{\alpha} + 21025}}{\frac{\partial}{\partial\tilde{\alpha}}\left(8 - \frac{504\tilde{\alpha}}{63\tilde{\alpha} + 21025}\right)}$$

$$\Rightarrow / \quad 8 - \frac{504\tilde{\alpha}}{63\tilde{\alpha} + 21025} =$$

$$= \frac{8(63\tilde{\alpha} + 21025)}{63\tilde{\alpha} + 21025} - \frac{504\tilde{\alpha}}{63\tilde{\alpha} + 21025} =$$

$$= \frac{168200 + 504\tilde{\alpha} - 504\tilde{\alpha}}{63\tilde{\alpha} + 21025} =$$

$$= \frac{168200}{63\tilde{\alpha} + 21025}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}} \left(\frac{168200}{63\tilde{\alpha} + 21025} \right) = -\frac{10596600}{(63\tilde{\alpha} + 21025)^2} \; / \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \tilde{\alpha} - \left(\frac{\frac{168200}{63\tilde{\alpha} + 21025}}{-\frac{10596600}{(63\tilde{\alpha} + 21025)^2}} \right) =$$

$$= \tilde{\alpha} - \left(-\frac{63\tilde{\alpha} + 21025}{63} \right) = 2\tilde{\alpha} + \frac{21025}{63}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = 1{,}0709x + 0{,}0618x^2 = 2\tilde{\alpha} + \frac{21025}{63}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\alpha} = 0{,}0309x^2 + 0{,}5355x - \frac{21025}{126}$$

$$\Rightarrow \alpha(x) = 0{,}0309x^2 + 0{,}5355x - 166{,}8650$$

Del 4

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_m}\Big(U(\alpha_{m-1})\cdot \Delta t + g(X_N) -$$

$$- \lambda_m\big(X_m - X_{m-1} - \Delta t(f(X_{m-1}) - \alpha_{m-1})\big)\Big) =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \lambda_m}\Big(\lambda_m\big(X_m - X_{m-1} - \Delta t(f(X_{m-1}) - \alpha_{m-1})\big)\Big) =$$

$$= X_m - X_{m-1} - \Delta t\big(f(X_{m-1}) - \alpha_{m-1}\big), \quad m = 1, \dots, N$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_n}\Big(U(\alpha_n)\cdot \Delta t + g(X_N) -$$

$$- \lambda_{n+1}\big(X_{n+1} - X_n - \Delta t(f(X_n) - \alpha_n)\big)\Big) =$$

$$= U'(\alpha_n)\cdot \Delta t - \lambda_{n+1}\cdot \Delta t = \Delta t\big(U'(\alpha_n) - \lambda_{n+1}\big),$$

$$, n = 0, \dots, N-1$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_n}\Big(-\lambda_n X_n + \lambda_{n+1} X_n - \Delta t\cdot\big(f(X_n) - \alpha_n\big)\lambda_{n+1}\Big) =$$

$$= -\lambda_n + \lambda_{n+1} - \Delta t \cdot f'(X_n)\cdot \lambda_{n+1}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$\frac{\partial L}{X_n}\Big(U(\alpha_n)\cdot \Delta t + g(X_N) -$$

$$- \lambda_{n+1}\big(X_{n+1} - X_n - \Delta t\cdot(f(X_n) - \alpha_n)\big)\Big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow / \, n < N-1 \leq N \, / \Rightarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_N}\left(g(X_N) - \lambda_{n+1} \cdot X_{n+1} \right) = g'(X_N) - \lambda_N$$

$$U(\alpha) = -\frac{3}{2} \cdot \alpha^{-2/3}$$

$$U'(\alpha) = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \alpha^{-5/3} = \frac{6}{6} \cdot \alpha^{-5/3} = \alpha^{-5/3}$$

$$\Rightarrow \quad U'(\alpha_n) = \alpha_n^{-5/3} \Rightarrow / \, U'(\alpha_n) = \lambda_{n+1} / \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U'(\alpha_n) = \lambda_{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_n = (\lambda_{n+1})^{-3/5}$$

Labb 2 - svar:

Del 2:

$a = 1,0709$
$b = 0,0618$

Min. kv. metoden diff: 0,0892
Poly. approx. diff: $1,7094 \cdot 10^{-13}$

Slutsats: Minsta-kvadratmetoden får ett större fel men polynomet som skapas blir mycket rimligare.

Del 3:

Min. kv. metoden (5):
$a = 41,7163$

Min. kv. metoden (6):
$a = 174,5247$
$b = -0,6640$

Slutsats 1. Vad gäller vilken variant som är bäst är de väldigt lika. Vi föredrar dock min. kv. metoden före GN.

Slutsats 2. Anpassning med modell (5) är att föredra då det blir en mycket simplare anpassning då man endast har en variabel. Dock är den eventuellt ej lika nogrann som anpassning med modell (6).

Slutsats 3. Genom poly. approx. av U anpassar vi oss till de kända punkterna. Detta måste dock ej stämma för övriga punkter.

$\alpha(x)$: se härledning

Del 5.

Lösningarna bygger på antaganden gällande hur produktionen beror av kapitalet. I den första lösningen antar vi att produktionen beror helt linjärt på kapitalet. Det skulle såklart kunna vara som så, men när vi i del 2 approximerar ett andragrads-polynom till produktionsvärden får x^2-termen en 0-skilld koefficient vilket

tyder på att sambandet är mer
komplext. Polynom kan ofta approxi-
mera värden bra men att förklara
varför produktionen består av kapitalet
just på det viset, känns även det svårt.
Vi ser att de två lösningarna från
andragradspolynomet ger relativt liknande
resultat till skillnad från det givna
linjära förstagradspolynomet som
sticker ut.