SF1545 Laboration 2 (HT 2021): Optimalt sparande

Labben redovisas enligt tidsbokning under något av labbhandledningspassen 16:e november eller 18:e november. Kom väl förberedd och med lösningen väl strukturerad till redovisningen. Numeriska resultat ska finnas noterade. Båda i laborationsgruppen ska kunna redogöra för teori och algoritmer! Utnyttja gärna alla schemalagda laborationshandledningstillfällen.

Avsikten med denna laboration är att:

- lösa ett optimeringsproblem med en differentialekvation som bivillkor,
- repetera och hantera metoden med Lagrangefunktioner för att lösa optimeringsproblem med bivillkor
- studera ett exempel när en differentialekvation används för att bestämma koefficienter i ekvationen, d.v.s. lösa ett inverst problem,
- öva på numerisk approximation, ekvationslösning, optimering och Matlabprogrammering.

Laborationen handlar om optimering, med en numerisk metod som kan generaliseras till många problem, t.ex. används den för maskininlärning inom artificiell intelligens och att söka optimal form av en vinge eller ett skrov. Frågorna är med avsikt inte alltid precist formulerade.

Frank P. Ramsey skrev 1928 uppsatsen "A Mathematical Theory of Saving" [The Economic Journal, vol 38 (1928), 543-559] där han besvarar frågan hur mycket av inkomsten som en nation ska spara, genom att lösa följande optimeringsproblem. Betrakta en ekonomi med kapitalet $X(t)$ och konsumtionen $\alpha(t)$, vid tiden t, och anta att produktionen ges av $f(X(t))$, för en given funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, så att

$$\frac{d}{dt}X(t) = f(X(t)) - \alpha(t)\,, \tag{1}$$

vilket betyder att produktionen $f(X(t))$ är uppdelad i konsumtion $\alpha(t)$ och investering $dX(t)/dt$. Anta att $X(0) = x_0$ är ett givet begynnelsekapital. Frågan är hur mycket nationen ska spara. Hög konsumtion idag är attraktivt men leder via (1) till låg investering. Anta att samhället värderar konsumtionen med en given nyttofunktion $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som är strängt växande, strängt konkav och begränsad uppåt, d.v.s. $\lim_{\alpha\to\infty} U(\alpha) = U_\infty \in \mathbb{R}$, och för alla $\alpha \in \mathbb{R}$ gäller $U'(\alpha) > 0$ och $U''(\alpha) < 0$. Detta antagande betyder att människor med hög konsumtion värderar en given ökad konsumtion lägre än människor med låg konsumtion. Ramsey använder parametriseringen $t \mapsto X(t)$ för att bestämma den konsumtionsfunktion $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(X(t))$ som minimerar onyttan $\tilde{U} := U_\infty - U$ över tiden

$$\int_0^\infty \tilde{U}\big(\alpha(t)\big)\,dt \tag{2}$$

där X och α löser (1) med givet startkapital $X(0) = x_0$. Variabelbytet $t \to X(t)$ ger $dt = dX/\big(f(X) - \tilde{\alpha}(X)\big)$ och onyttan

$$\int_0^\infty \tilde{U}\big(\alpha(t)\big)dt = \int_{x_0}^\infty \frac{\tilde{U}\big(\tilde{\alpha}(X)\big)}{f(X) - \tilde{\alpha}(X)} dX.$$

Man kan minimera detta uttryck med avseende på funktioner $\tilde{\alpha}$ men det är enklare att minimera en diskret approximation

$$\min_{\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^N} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{U}(\tilde{\alpha}_n)}{f(X_n) - \tilde{\alpha}_n} \Delta X \tag{3}$$

med avseende på värden $\tilde{\alpha}_n$, som approximerar $\tilde{\alpha}(X_n)$, där $X_n = n\Delta X$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Del 1. Motivera varför en minimipunkt $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots)$ till (3) satisfierar

$$0 = \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_n} \frac{\tilde{U}(\tilde{\alpha}_n)}{f(X_n) - \tilde{\alpha}_n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

och visa att det leder till

$$f(X_n) - \tilde{\alpha}_n = -\frac{\tilde{U}(\tilde{\alpha}_n)}{\tilde{U}'(\tilde{\alpha}_n)}, \tag{4}$$

vilket är Ramseys regel för sparande "the rate of saving multiplied by the marginal utility of money should be equal to the amount by which the total net enjoyment falls short of the possible rate of enjoyment".

Del 2. Skriv ett Matlabprogram för minstakvadratmetoden och bestäm den produktionsfunktion $f(X) = aX + bX^2$ som bäst approximerar följande produktionsvärden $f(0) = 0, f(0.5) = 0.52, f(1) = 1.09, f(1.5) = 1.75, f(2) = 2.45, f(2.99) = 3.5, f(3) = 4.0$.

Skriv också ett Matlabprogram för polynomapproximation och jämför minstakvadratmetoden med att interpolera ett polynom som antar dessa värden. Plotta produktionsvärdena, minstakvadratanpassningen och det interpolerande polynomet i samma figur. Uppskatta felen i båda metoder. Vad är din slutsats om val av approximationsmetod?

Del 3. Ramsey ger följande skattning av nyttofunktionen: $U(150) = 2, U(200) = 3, U(300) = 4, U(500) = 5, U(1000) = 6, U(2000) = 7, U_\infty = 8$, där 150 är familjeårskonsumtionen i pund. Bestäm en approximation av U som har positiv derivata, t.ex. genom att ansätta

$$1/U(\tilde{\alpha}) = 1/8 + a/\tilde{\alpha} \tag{5}$$

eller

$$U(\tilde{\alpha}) = 8 - a\tilde{\alpha}^b \tag{6}$$

och använda minstakvadratmetoden. För modellfunktionen (6) ska två varianter av minstakvadratanpassning användas, dels genom omskrivining av problemet till ett linjärt ersättningsproblem, och dels genom användning av metoden Gauss-Newton. Vilken variant är bäst? Är anpassning med modellen (5) eller (6) att föredra? Vad leder polynomapproximation av U till?

Målet är nu att bestämma konsumtionen som funktion av kapitalet, $\tilde{\alpha}(X)$. Med hjälp av (4) bestäms produktionen $f(X)$ som funktion av konsumtionen $\tilde{\alpha}$ och din skattning av U i fall (6). Använd sedan din minstakvadratskattning av $f(X)$ från Del 2 för att bestämma funktionen $\tilde{\alpha}(X)$.

Sparande med ändlig horisont

Ett relaterat sparproblem med ändlig tidshorisont T kan formuleras som en modell för ett företag med kapital X, produktion $f(X)$, löneuttag α och möjlig försäljning vid T. För ett givet tidsintervall $[0,T]$ är problemet att bestämma löneuttaget (d.v.s. konsumtionen) $\alpha : [0,T] \to \mathbb{R}$ så att nyttan

$$\int_0^T U\big(\alpha(t)\big)dt + g\big(X(T)\big) \tag{7}$$

maximimeras, där X och α löser (1) och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en given nyttofunktion för sparat kapital vid tiden T, t.ex. från försäljning, som uppfyller $g'(X) > 0$ och $g''(X) < 0$.

Del 4. Vi ska lösa optimeringsproblemet (7) numeriskt med hjälp av Eulers metod

$$X_{n+1} = X_n + \Delta t\big(f(X_n) - \alpha_n\big), \quad n = 0, \dots, N-1, \tag{8}$$

där (X_n, α_n) approximerar $\big(X(n\Delta t), \alpha(n\Delta t)\big)$ med tidssteget $\Delta t = 1/N$ och $X_0 = x_0$ är ett givet startkapital.

Målet är att maximera nyttan

$$\max_{\alpha\in\mathbb{R}^N} \Big(\sum_{n=0}^{N-1} U(\alpha_n)\Delta t + g(X_N)\Big)$$

med bivillkoret (8). Lagranges metod är användbar för att studera maximering med bivillkor och ger en formulering av optimering med bivillkor som liknar villkoret att gradienten blir noll i optimering utan bivillkor. Repetera gärna avsnittet om Lagranges metod från kursen analys i flera variabler. Lagrangefunktionen, som beror på X_n, α_n och Lagrangemultiplikatorerna $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, \dots, N$, definieras av

$$L(X, \alpha, \lambda) := \sum_{n=0}^{N-1} U(\alpha_n)\Delta t + g(X_N) - \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_{n+1}\Big(X_{n+1} - X_n - \Delta t\big(f(X_n) - \alpha_n\big)\Big)$$

där $X=(x_0,X_1,\dots,X_N)\in\mathbb{R}^{N+1}$, $\alpha=(\alpha_0,\dots,\alpha_{N-1})\in\mathbb{R}^N$, $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_N)\in\mathbb{R}^N$. Visa att Lagrangefunktionen satisfierar

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial L}{\partial \lambda_m}(X,\alpha,\lambda)=X_m-X_{m-1}-\Delta t\big(f(X_{m-1})-\alpha_{m-1}\big),\quad m=1,\dots,N,\\
&\frac{\partial L}{\partial \alpha_n}(X,\alpha,\lambda)=\big(U'(\alpha_n)-\lambda_{n+1}\big)\Delta t,\quad n=0,\dots,N-1,\\
&\frac{\partial L}{\partial X_n}(X,\alpha,\lambda)=-\lambda_n+\lambda_{n+1}+\Delta t f'(X_n)\lambda_{n+1},\quad n=1,\dots,N-1,\quad \frac{\partial L}{\partial X_N}(X,\alpha,\lambda)=g'(X_N)-\lambda_N\,.
\end{aligned}
$$

Lagranges metod visar att i en punkt (X^*,α^*) där nyttan, $\sum_{n=0}^{N-1}U(\alpha_n)\Delta t+g(X_N)$, är maximal med (8) som bivillkor, finns $\lambda=\lambda^*\in\mathbb{R}^N$ som uppfyller

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial \lambda_m}(X^*,\alpha^*,\lambda^*)=0,\quad m=1,\dots,N,\\
&\frac{\partial L}{\partial \alpha_n}(X^*,\alpha^*,\lambda^*)=0,\quad n=0,\dots,N-1,\\
&\frac{\partial L}{\partial X_n}(X^*,\alpha^*,\lambda^*)=0,\quad n=1,\dots N,
\end{aligned}
$$

d.v.s. gradienten av Lagrangefunktionen är noll i punkten (X^*,α^*,λ^*). Vi får då ekvationssystemet

$$
\begin{aligned}
\lambda_{n+1}&=U'(\alpha_n),\quad n=0,\dots,N-1,\\
\lambda_n&=\lambda_{n+1}+\Delta t f'(X_n)\lambda_{n+1},\quad n=1,\dots,N-1,\quad \lambda_N=g'(X_N)\\
X_{n+1}&=X_n+\Delta t\big(f(X_n)-\alpha_n\big),\quad n=0,\dots,N-1,\quad X_0=x_0.
\end{aligned}
$$

Låt nyttofunktionen vara $U(\alpha)=-\frac{3}{2}\alpha^{-2/3}$. Visa att detta ger $\alpha_n=(\lambda_{n+1})^{-3/5}$ för $n=0,\dots,N-1$.

Det ickelinjära systemet

$$
\begin{aligned}
\lambda_n&=\lambda_{n+1}+\Delta t f'(X_n)\lambda_{n+1},\quad n=1,\dots N-1,\quad \lambda_N=g'(X_N),\\
X_{n+1}&=X_n+\Delta t\Big(f(X_n)-\frac{1}{\lambda_{n+1}^{3/5}}\Big),\quad n=0,\dots,N-1,\quad X_0=x_0\,,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

har begynnelsevärdet $X_0=x_0$ för kapitalet och slutvärdet $\lambda_N=g'(X_N)$ för Lagrangemultiplikatorn, vilket betyder att systemet inte är ett begynnelsevärdesproblem där det räcker att stega fram värden från begynnelsedata. Istället behövs iterationer för att lösa systemet, som för ickelinjära randvärdesproblem. Systemet kan i vissa fall lösas genom att initialisera kapitalvektorn enligt

$$X_n[0]=x_0,\quad n=0,\dots,N,$$

och sedan iterera

$$
\begin{aligned}
\lambda_n[i] &= \lambda_{n+1}[i] + \Delta t f'(X_n[i])\lambda_{n+1}[i], \quad n = 1, \dots N-1, \quad \lambda_N[i] = g'(X_N[i]) \\
X_{n+1}[i+1] &= X_n[i+1] + \Delta t\big(f(X_n[i+1]) - \frac{1}{\lambda_{n+1}^{3/5}[i]}\big), \quad n = 0, \dots, N-1, \quad X_0[i+1] = x_0\,,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

för $i = 0, 1, 2, \dots$. Här är $X_n[i]$ kapitalet vid tiden $n\Delta t$ för iteration nummer i. Om vektorerna $X[i] = (X_0[i], X_1[i], \dots, X_N[i])$ och $\lambda[i] = (\lambda_1[i], \dots, \lambda_N[i])$ konvergerar när $i \to \infty$ så erhålls systemet (9).

Skriv ett Matlabprogram som löser systemet (9), t.ex. med iterationerna med $[i]$ ovan.

Exempel på programidé (egna andra lösningar får gärna användas):

- bilda en vektor vars $N+1$ komponenter lagrar kapitalet X vid tiderna $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, N\Delta t$,
- bilda en till vektor med $N+1$ komponenter för att lagra uppdatering av kapitalet och
- bilda en vektor med N komponenter för att lagra Lagrangemultiplikatorvärdena vid tidpunkterna $\Delta t, 2\Delta t, \dots, N\Delta t$.
- Ge vektorn med kapital lämplig startgissning för alla tider.
- Låt ditt program ha en yttre slinga för att hantera iterationerna (indicerade med $[i]$ ovan) och två inre slingor (indicerade med n ovan).
- Den första inre slingan stegar bakåt i tiden och ger Lagrangemultiplikatorn värden med start $\lambda_N = g'(X_N)$ vid $t = 1$ och slut λ_1 vid $t = \Delta t$, med hjälp av första raden i ekvation (10) ovan (dvs första raden i (9) som använder värden på kapitalet).
- Den andra inre slingan stegar sedan uppdaterade kapitalvärdet framåt i tiden från $X_0 = 1$ till sista värdet X_N, med hjälp av andra raden i ekvation (10) ovan (som använder Lagrangemultiplikatorn).
- Efter att båda inre slingor gjorts bestäms normen av skillnaden mellan kapitalvektorn $X[i]$ och uppdaterade kapitalvektorn, sedan uppdateras kapitalvektorn och slutligen testas om den ändrats tillräckligt lite för att avsluta den yttre slingan.

Studera iterationernas konvergens/divergens och formulera ett lämpligt stoppvillkor. Plotta lösningen kapital X_n och konsumtion α_n, mot tidpunkterna $t_n = n\Delta t$ för $n = 0, \dots, N-1$, då $g(X) = 2\sqrt{X}, T = 1, x_0 = 1$ och de tre alternativen $f(X) = X, f(X) = X + X^2/10$ och f från Del 2.

Del 5. Beskriv de felkällor din lösning av optimalt sparande har och jämför felens storlek.