第三章 点线面的位置关系

4 空间点、直线、平面之间的位置关系
4.2 空间点、直线、平面的位置关系

内 容 标 准	学 科 素 养
1.了解空间两条直线间的位置关系，理解异面直线的定义. 2.了解直线与平面之间的三种位置关系，并能判断直线与平面的位置关系. 3.了解平面与平面之间的两种位置关系，并能判断两个平面的位置关系. 4.会用符号语言和图形语言表示直线和平面、平面和平面之间的位置关系.	数学抽象 直观想象 逻辑推理

课前·自主探究

自主预习　基础认知

[教材提炼]

知识点一　空间直线与直线的位置关系

预习教材，思考问题

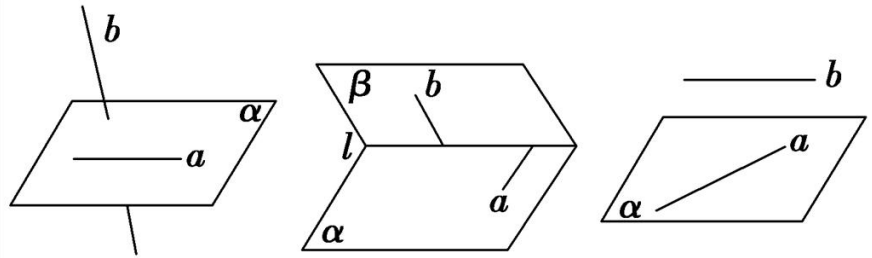
我们知道在平面上两条直线有两种位置关系：平行和相交，在空间中两条直线有哪些位置关系呢？

[提示]　空间中两条直线除了平行和相交外，还有一种位置关系是它们不在同一个平面内，即异面.

知识梳理 (1)异面直线

①定义：不同在_____任何一个平面内_____的两条直线.

②异面直线的画法：为了表示它们不共面的特点，作图时，用一个或两个平面衬托.



(2)空间两条直线的位置关系：

①相交直线——同一平面内，_____有且只有_____一个公共点；

②平行直线——同一平面内，_____没有_____公共点；

③异面直线——不同在任何一个平面内，_____没有_____公共点.

知识点二　空间中直线与平面的位置关系

预习教材，思考问题

通过基本事实 2，我们知道如果一条直线上有两点在平面内，那么这条直线在平面内．如果一条直线和平面只有一个公共点、没有公共点，它们又是什么位置关系呢？

[提示]　若直线和平面只有一个公共点，它们相交关系；若没有公共点，它们是平行关系，这种平行和直线间的平行相似，就是它们没有公共点．

知识梳理 (1)直线与平面的位置关系有三种：

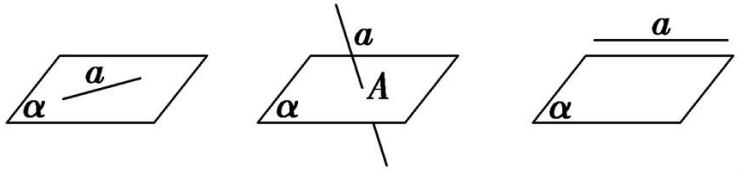
①直线在平面内：有无数个公共点，记作 $a \subset \alpha$；

②直线与平面相交：有且只有一个公共点，记作 $a \cap \alpha = A$；

③直线与平面平行：没有公共点，记作 $a // \alpha$.

当直线与平面相交或平行时，直线不在平面内，也称为直线在平面外.

(2)直线与平面的三种位置关系的画法：



知识点三　空间中平面与平面的位置关系

预习教材，思考问题

观察正方体的相对的两个平面，它们没有公共点，它们是什么关系呢？再观察相邻的两个平面它们有一条公共的直线，它们又是什么关系呢？思考生活中的两个平面还有哪些位置关系呢？

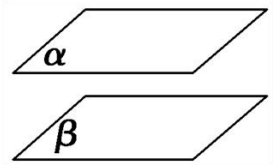
[提示]　类似于两条直线的位置关系，相对的两个平面没有公共点是平行关系，相邻的两个平面有一条交线是相交关系，两个平面只有两种位置关系.

知识梳理 (1)平面与平面的位置关系有两种：

①两个平面平行：没有公共点，记作 $\alpha /\!/ \beta$；

②两个平面相交：有一条公共直线，记作 $\alpha \cap \beta = l$.

(2)平行平面的画法：使表示平面的两个平行四边形的对应边平行，如图



[自主检测]

1．直线 l 与平面 α 有两个公共点，则(　　)

A．$l\in\alpha$　　B．$l/\!/\alpha$

C．l 与 α 相交　　D．$l\subset\alpha$

解析： 由基本事实 2 可知，直线 l 在平面内．

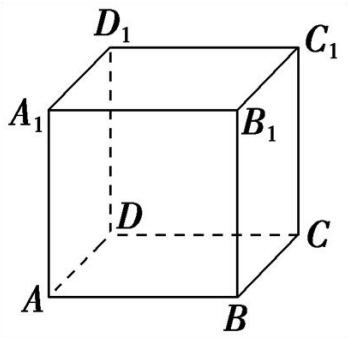
答案： D

2．正方体的六个面中互相平行的平面有(　　)

A．1 对　　B．2 对

C．3 对　　D．4 对

解析：如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 $ABCD$ // 平面 $A_1B_1C_1D_1$，平面 ABB_1A_1 // 平面 CDD_1C_1，平面 ADD_1A_1 // 平面 BCC_1B_1，故六个面中互相平行的平面有 3 对．



答案：C

3．已知 a，b 是异面直线，直线 c // 直线 a，那么 c 与 b(　　)

A．一定是异面直线　　B．一定是相交直线

C．不可能是平行直线　　D．不可能是相交直线

解析： c 与 b 可以相交，也可以异面，故选 C.

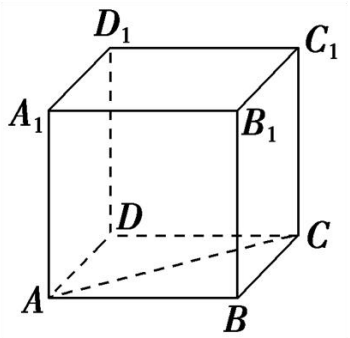
答案： C

4．如果在两个平面内分别有一条直线，这两条直线互相平行，那么这两个平面的位置关系是_____.

答案： 平行或相交

5．正方体 AC_1 中，与面 $ABCD$ 的对角线 AC 异面的棱有_____条．

解析： 如图，在正方体 AC_1 中，与面 $ABCD$ 的对角线 AC 异面的棱有 BB_1，DD_1，A_1B_1，A_1D_1，D_1C_1，B_1C_1，共 6 条．



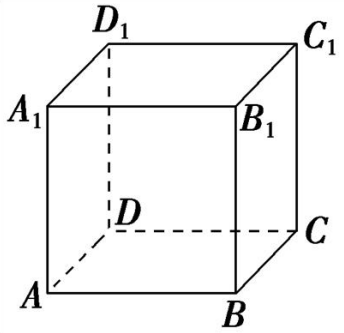
答案： 6

课堂·互动探究

以例示法　核心突破

探究一　空间两条直线位置关系的判定

[例 1]　(1)在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，判断下列直线间的位置关系：



①A_1B 与 D_1C_____；

②A_1B 与 B_1C_____；

③D_1D 与 CE(E 为 C_1D_1 的中点)_____;

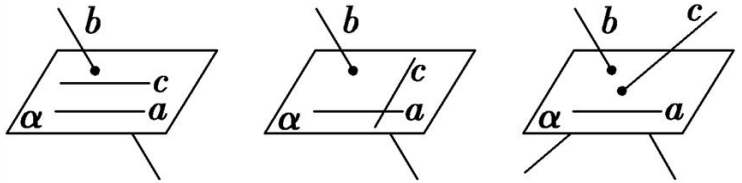
④AB 与 B_1C_____.

(2)已知三条直线 a，b，c，a 与 b 异面，b 与 c 异面，那么 a 与 c 有什么样的位置关系？并画图说明.

[解析] (1)①平行 ②异面 ③相交 ④异面

(2)直线 a 与 c 的位置关系有三种情况，如图所示.

直线 a 与 c 可能平行，如图①；可能相交，如图②；可能异面，如图③.



答案：(1)①平行 ②异面 ③相交 ④异面 (2)见解析

方法提升

空间两条直线位置关系的判定方法

(1)判定两条直线平行或相交可用平面几何的方法去判断.

(2)判定两条直线是异面直线的方法:

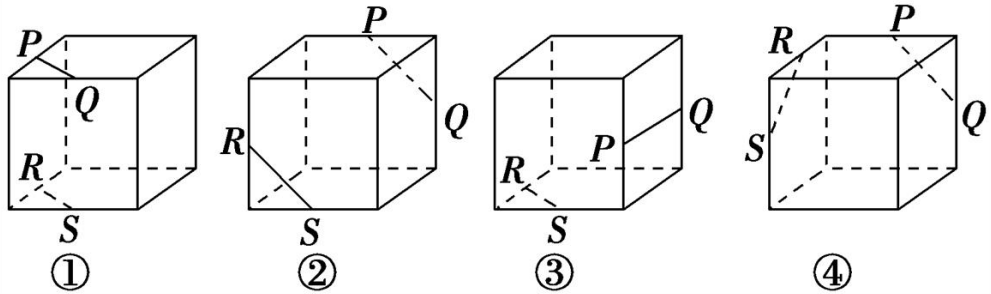
①定义法:由定义判断两直线不可能在同一平面内;

②排除法(反证法):排除两直线共面(平行或相交).

③重要结论:连接平面内一点与平面外一点的直线和这个平面内不经过此点的直线是异面直线.

同源异考 重在触类旁通

1．如图，点 P、Q、R、S 分别在正方体的四条棱上，且是所在棱的中点，则直线 PQ 与 RS 是异面直线的一个图是_____.



解析： ①中 $PQ \parallel RS$，②中 $RS \parallel PQ$，④中 RS 和 PQ 相交.

答案： ③

探究二　空间直线与平面位置关系的判定

[例 2]　给出下列四个命题：

①直线 l 平行于平面 α 内的无数条直线，则 $l\parallel\alpha$；②若直线 a 在平面 α 外，则 $a\parallel\alpha$；③若直线 $a\parallel b$，直线 $b\subset\alpha$，则 $a\parallel\alpha$；④若 $a\parallel b$，$b\subset\alpha$，那么直线 a 就平行于平面 α 内的无数条直线，其中真命题的个数为(　　)

A．1　　B．2

C．3　　D．4

[解析] 对于①，直线 l 虽与平面 α 内无数条直线平行，但 l 有可能在平面 α 内，∴ l 不一定平行于 α.故①错.

对于②，∵直线 a 在平面 α 外包括两种情形：$a\parallel\alpha$，a 与 α 相交，故②错.

对于③，由直线 $a\parallel b$，$b\subset\alpha$，只能说明 a 和 b 无公共点，但 a 可能在平面 α 内，故③错.

对于④，∵$a\parallel b$，$b\subset\alpha$，∴在平面 α 内与 b 平行的直线都与 a 平行，故④正确.

[答案] A

方法提升

直线与平面的位置关系有三种，即直线在平面内，直线与平面相交，直线与平面平行.

(1)判断直线在平面内，需找到直线上两点在平面内，根据基本事实 2 知直线在平面内.

(2)判断直线与平面相交，根据定义只需判定直线与平面有且只有一个公共点.

(3)判断直线与平面平行，可根据定义判断直线与平面没有公共点，也可以排除直线与平面相交及直线在平面内两种情况，从而判断直线与平面平行.

同源异考 重在触类旁通

2．若直线 a 不平行于平面 α，则下列结论成立的是(　　)

A．α 内的所有直线均与 a 异面

B．α 内不存在与 a 平行的直线

C．α 内直线均与 a 相交

D．直线 a 与平面 α 有公共点

解析： 由于直线 a 不平行于平面 α，则 a 在 α 内或 a 与 α 相交，故 A 错；当 $a\subset\alpha$ 时，在平面 α 内存在与 a 平行的直线，故 B 错；因为 α 内的直线也可能与 a 平行或异面，故 C 错；由线面平行的定义知 D 正确．

答案： D

探究三　空间平面与平面位置关系的判定

[例 3]　给出的下列四个命题中，其中正确命题的个数是(　　)

①平面 α 内有两条直线和平面 β 平行，那么这两个平面平行；

②平面 α 内有无数条直线和平面 β 平行，则 α 与 β 平行；

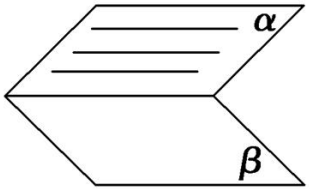
③平面 α 内 $\triangle ABC$ 的三个顶点到平面 β 的距离相等，则 α 与 β 平行；

④若两个不重合平面有无数个公共点，则这两个平面的位置关系是相交.

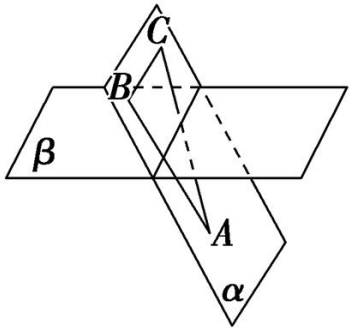
A．0　　B．1

C．3　　D．4

[解析] 如图(1)，平面 α 内有无数条直线与 β 平行，但 α 与 β 相交；如图(2)，$\triangle ABC$ 的三个顶点到 β 的距离相等，但 α 与 β 相交．故③错．不重合的两个平面，若它们有公共点，则它们有无数个公共点，都在它们的交线上，故④正确．



图(1)



图(2)

[答案] B

方法提升

平面与平面的位置关系有相交与平行，判定两个平面相交，只需找到两个平面的一个公共点，就可根据基本事实 3 知，两个不重合的平面是相交的.

判定两个平面平行，可根据定义判定两个平面没有公共点，也可以排除两个平面相交，从而判定两平面平行.

同源异考 重在触类旁通

3．已知下列说法：

①若两个平面 $\alpha /\!/ \beta$，$a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，则 $a /\!/ b$；

②若两个平面 $\alpha /\!/ \beta$，$a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，则 a 与 b 一定不相交；

③若两个平面 $\alpha \cap \beta = b$，$a \subset \alpha$，则 a 与 β 一定相交．

其中正确的是_____．(将你认为正确的序号都填上)

解析：①错，a 与 b 也可能异面；②对，$\because \alpha /\!/ \beta$，$\therefore a$ 与 β 无公共点．又$\because a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，$\therefore a$ 与 b 无公共点；③错，a 与 β 也可能平行．

答案：②

课后·素养培优

素养拓展　能力提升

一、立体几何模型——判断空间点、线、面位置关系时的重要载体

►直观想象、逻辑推理

判断空间点、直线、平面的位置关系时，常常根据有关空间点、直线、平面的位置关系的概念，借助于长方体、正方体、正四面体等空间几何体进行操作.

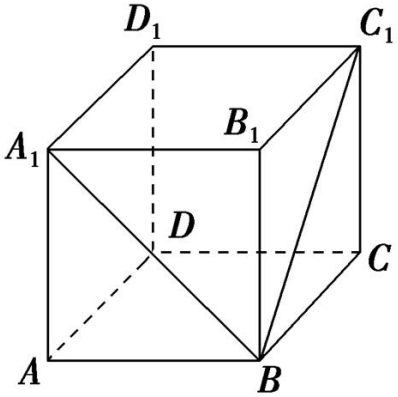
[典例 1] 已知直线 a，b 都与平面 α 相交，则 a，b 的位置关系是(　　)

A．相交

B．平行

C．异面

D．以上都有可能



[解析] 如图，在正方体中取平面 $ABCD$ 为平面 α，取 AA_1 所在直线为直线 a，BB_1 所在直线为直线 b，则 $a/\!/b$，取 A_1B 所在直线为直线 b，则 a、b 相交，取 BC_1 所在直线为直线 b，则 a、b 异面，故三种情况都有可能.

[答案] D

二、因思维不全面致误►直观想象、逻辑推理

[典例 2] 设 P 是异面直线 a、b 外的一点，则过 P 与 a、b 都平行的平面(　　)

A．有且只有一个

B．恰有两个

C．没有或只有一个

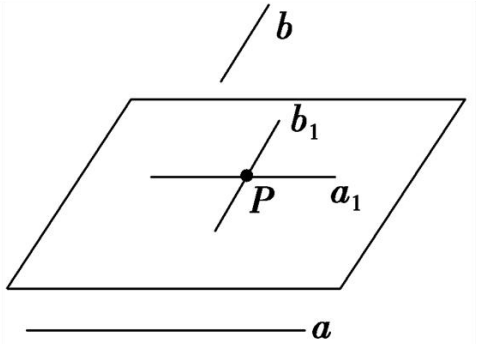
D．有无数个

[解析] (1)当直线 b(或 a)平行于直线 a(或 b)与点 P 所确定的平面时，则过 P 与 a，b 都平行的平面不存在.

(2)当直线 b(或 a)不平行于直线 a(或 b)与点 P 所确定的平面时，如图所示，过 P 作 $a_1 // a$，$b_1 // b$.

$\because a_1 \cap b_1 = P$,

$\therefore$过 a_1、b_1 有且只有一个平面.



[答案] C