第一章

认识几何体

第一课时　棱柱、棱锥、棱台的结构特征

内　容　标　准	学　科　素　养
1.了解空间几何体的分类及其相关概念. 2.理解棱柱、棱锥、棱台的定义，知道这三种几何体的结构特征，能够识别和区分这些几何体.	数学抽象 直观想象

课前·自主探究

[教材提炼]

知识点一 空间几何体

预习教材，思考问题

(1)观察纸箱、金字塔、茶叶盒、水晶石等有什么相同的特点？

[提示] 围成它们的每个面都是平面图形，并且都是平面多边形.

(2)观察纸杯、奶粉罐、腰鼓、篮球等几何体有什么相同的特点？

[提示] 围成它们的面不全是平面图形，有些面是曲面.

知识梳理 (1)定义：如果只考虑物体的<u>形状</u>和<u>大小</u>，而不考虑其他因素，那么由这些物体抽象出来的<u>空间图形</u>叫做空间几何体.

(2)分类：常见的空间几何体有<u>多面体</u>与<u>旋转体</u>两类.

(3)多面体的定义：由若干个<u>平面多边形</u>围成的几何体，围成多面体的各个<u>多边形</u>叫做多面体的面，两个面的<u>公共边</u>叫做多面体的棱，棱与棱的<u>公共点</u>叫做多面体的顶点.

(4)旋转体的定义：一条平面曲线(包括直线)绕它所在平面内的一条定直线旋转所形成的<u>曲面</u>叫做旋转面，封闭的<u>旋转面</u>围成的几何体叫做旋转体，这条<u>定直线</u>叫做旋转体的旋转轴.

知识点二　棱柱的结构特征

预习教材，思考问题

长方体是我们常见的几何体，它就是一种很简单的棱柱，据此，猜想一下棱柱一般有哪些特点？

[提示]　有两个面互相平行，其余各个面都是四边形，并且相邻两个四边形的的公共边互相平行.

知识梳理 (1)棱柱的定义：有两个面<u>互相平行</u>，其余各面都是<u>四边形</u>，并且每相邻两个四边形的公共边都<u>互相平行</u>，由这些面所围成的多面体叫做棱柱，两个互相<u>平行</u>的面叫做棱柱的底面，它们是全等的多边形，<u>其余各面</u>叫做棱柱的侧面，它们都是平行四边形，相邻侧面的<u>公共边</u>叫做棱柱的侧棱，<u>侧面与底面</u>的公共顶点叫做棱柱的顶点.

(2)棱柱的分类及表示：根据底面多边形的<u>边数</u>分为<u>三棱柱</u>(底面是三角形)、<u>四棱柱</u>(底面是四边形)……，例如底面是五边形的棱柱可表示为五棱柱<u>$ABCDE\text{-}A'B'C'D'E'$</u>.

(3)特殊的棱柱：

直棱柱：侧棱__垂直__于底面的棱柱；

斜棱柱：侧棱__不垂直__于底面的棱柱；

正棱柱：底面是__正多边形__的__直__棱柱；

平行六面体：底面是__平行四边形__的四棱柱．

知识点三　棱锥的结构特征

预习教材，思考问题

棱锥和棱柱相比，有什么相同之处？又有什么不同？

[提示]　相同之处是底面仍然是平面多边形，不同之处是侧棱不再平行，而是交于一点．

知识梳理 (1)棱锥的定义：有一个面是<u>多边形</u>，其余各面都是<u>有一个公共顶点</u>的三角形，由这些面所围成的多面体叫做棱锥，这个<u>多边形</u>面叫做棱锥的底面，有<u>公共顶点</u>的各个三角形面叫做棱锥的侧面，相邻侧面的<u>公共边</u>叫做棱锥的侧棱，<u>各侧面的公共顶点</u>叫做棱锥的顶点．

(2)棱锥的分类及表示：根据底面多边形的<u>边数</u>分为<u>三棱锥</u>(底面是三角形)、<u>四棱锥</u>(底面是四边形)……，其中三棱锥又叫四面体．

棱锥用表示顶点和底面各顶点的字母来表示，例如三棱锥可表示为：三棱锥 $S\text{-}ABC$.

(3)特殊的棱锥

正棱锥：底面是<u>正多边形</u>，并且顶点与底面中心的连线<u>垂直</u>于底面的棱锥．

知识点四　棱台的结构特征

预习教材，思考问题

棱台和棱柱一样有两个面互相平行，但两个面大小不一样，而侧棱又和棱锥相似不平行，那它和哪种几何体的关系更密切呢？

[提示]　和棱锥更密切，因为棱台是用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥而得到，把棱锥的侧棱延长后会交于一点，也就是说棱台可以补为棱锥．

知识梳理 (1)棱台的定义：用一个<u>平行</u>于棱锥底面的平面去截棱锥，<u>底面与截面</u>之间的那部分多面体叫做棱台，原棱锥的<u>底面</u>和<u>截面</u>分别叫做棱台的下底面和上底面，<u>其余各面</u>叫做棱台的侧面，相邻侧面的<u>公共边</u>叫做棱台的侧棱，侧面与上(下)底面的<u>公共顶点</u>叫做棱台的顶点．

(2)棱台的分类及表示：根据底面多边形的<u>边数</u>分为<u>三棱台</u>(底面是三角形)、<u>四棱台</u>(底面是四边形)……，例如底面是五边形的棱台可表示为五棱台 $ABCDE\text{-}A'B'C'D'E'$．

[自主检测]

1．有两个面平行的多面体不可能是(　　)

A．棱柱　　B．棱锥

C．棱台　　D．以上都错

解析：棱柱、棱台的上、下底面是平行的，而棱锥的任意两面均不平行．

答案：B

2．正五棱柱中，不同在任何侧面且不同在任何底面的两顶点的连线称为它的对角线，那么一个正五棱柱对角线的条数共有(　　)

A．20　　B．15

C．12　　D．10

解析： 从正五棱柱的上底面 1 个顶点与下底面不与此点在同一侧面上的两个顶点相连可得 2 条对角线，故共有 $5\times2=10$ 条对角线．

答案： D

3．下列命题中正确的是(　　)

A．用一个平面去截棱锥，棱锥底面和截面之间的部分是棱台

B．两个底面平行且相似，其余各面都是梯形的多面体是棱台

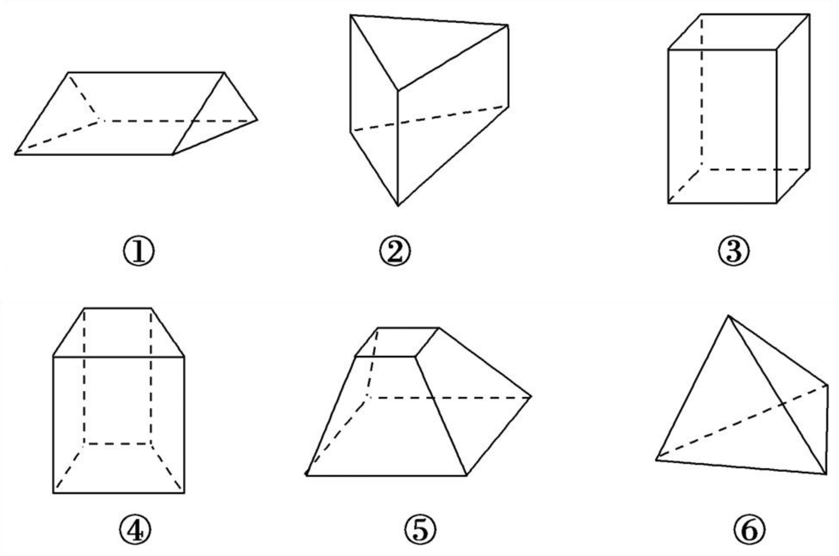
C．棱台的底面是两个相似的正方形

D．棱台的侧棱延长后必交于一点

解析： A 中的平面不一定平行于底面，故 A 错；B 中侧棱不一定交于一点；C 中底面不一定是正方形.

答案： D

4．下列几何体中，________是棱柱，________是棱锥，________是棱台(仅填相应序号)．



解析：结合棱柱、棱锥和棱台的定义可知①③④是棱柱，⑥是棱锥，⑤是棱台．

答案：①③④　⑥　⑤

5．侧棱垂直于底面的棱柱叫做直棱柱．

侧棱不垂直于底面的棱柱叫做斜棱柱．

底面是正多边形的直棱柱叫做正棱柱．

底面是平行四边形的四棱柱叫做平行六面体．

侧棱与底面垂直的平行六面体叫做直平行六面体．

底面是矩形的直平行六面体叫做长方体．

棱长都相等的长方体叫做正方体．

请根据上述定义，回答下面的问题：

(1)直四棱柱__________是长方体；

(2)正四棱柱__________是正方体．(填“一定”“不一定”“一定不”)

解析：根据上述定义知：长方体一定是直四棱柱，但是直四棱柱不一定是长方体；正方体一定是正四棱柱，但是正四棱柱不一定是正方体.

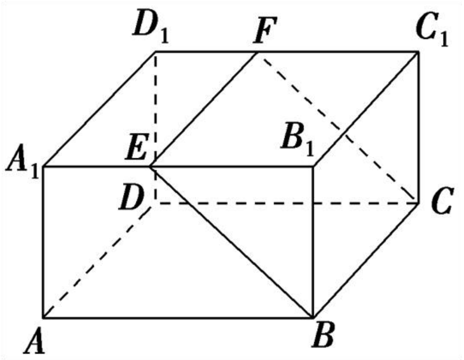
答案：(1)不一定　(2)不一定

课堂・互动探究

以例示法　核心突破

探究一　棱柱的结构特征

[例 1]　如图长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$.



(1)这个长方体是棱柱吗？如果是，是几棱柱？为什么？

(2)用平面 $BCFE$ 把这个长方体分成两部分后，各部分的几何体还是棱柱吗？若是棱柱指出它们的底面与侧棱.

[解析] (1)这个长方体是棱柱，是四棱柱，因为它满足棱柱的定义.

(2)截面 $BCFE$ 右侧部分是三棱柱，它的底面是$\triangle BEB_1$与$\triangle CFC_1$，侧棱是 EF，B_1C_1，BC.截面左侧部分是四棱柱.它的底面是四边形 $ABEA_1$ 与四边形 $DCFD_1$，侧棱是 AD，BC，EF，A_1D_1.

方法提升

1．紧扣棱柱的结构特征进行有关概念辨析

(1)两个面互相平行；

(2)其余各面是四边形；

(3)相邻两个四边形的公共边互相平行.

2．多注意观察一些实物模型和图片便于反例排除.

同源异考 重在触类旁通

1．下列关于棱柱的说法：

(1)所有的面都是平行四边形；

(2)每一个面都不会是三角形；

(3)两底面平行，并且各侧棱也平行；

(4)被平面截成的两部分可以都是棱柱．

其中正确说法的序号是________.

解析： (1)错误，棱柱的底面不一定是平行四边形；

(2)错误，棱柱的底面可以是三角形；

(3)正确，由棱柱的定义易知；

(4)正确，棱柱可以被平行于底面的平面截成两个棱柱，

所以说法正确的序号是(3)(4).

答案： (3)(4)

探究二　棱锥、棱台的结构特征

[例 2]　下列关于棱锥、棱台的说法：

(1)棱台的侧面一定不会是平行四边形；

(2)棱锥的侧面只能是三角形；

(3)由四个面围成的封闭图形只能是三棱锥；

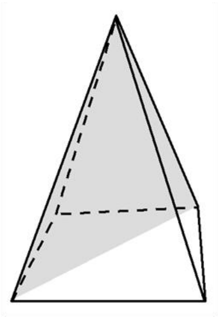
(4)棱锥被平面截成的两部分不可能都是棱锥，其中正确说法的序号是__________.

[解析] (1)正确，棱台的侧面一定是梯形，而不是平行四边形；

(2)正确，由棱锥的定义知棱锥的侧面只能是三角形；

(3)正确，由四个面围成的封闭图形只能是三棱锥；

(4)错误，如图所示四棱锥被平面截成的两部分都是棱锥.



[答案] (1)(2)(3)

方法提升

判断棱锥、棱台形状的两个方法

(1)举反例法：

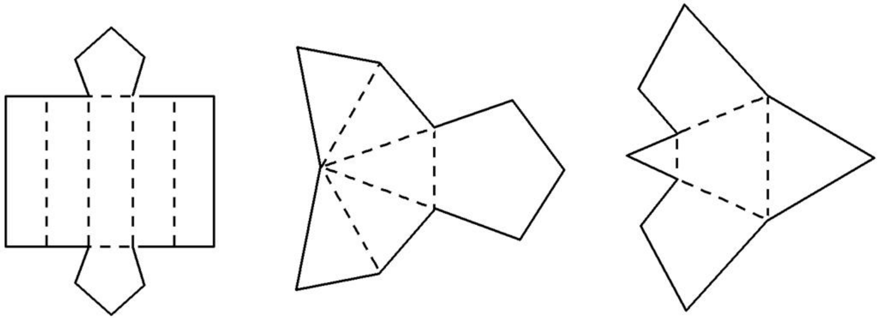
结合棱锥、棱台的定义举反例直接判断关于棱锥、棱台结构特征的某些说法不正确.

(2)直接法：

	棱锥	棱台
定底面	只有一个面是多边形，此面即为底面	两个互相平行的面，即为底面
看侧棱	相交于一点	延长后相交于一点

探究三　多面体的表面展开与折叠

[例 3]　如图是三个几何体的侧面展开图，请问各是什么几何体?



①　②　③

[解析]　由题目可获取以下主要信息：

(1)都是多面体；(2)①中的折痕是平行线，是棱柱；

②中折痕交于一点，是棱锥；

③中侧面是梯形，是棱台．

方法提升

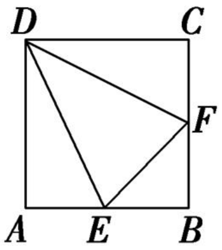
1.解答此类问题要结合多面体的结构特征发挥空间想象能力和动手能力.

2．若给出多面体画其展开图时，常常给多面体的顶点标上字母，先把多面体的底面画出来，然后依次画出各侧面.

3．若是给出多面体的表面展开图，来判断是由哪一个多面体展开的，则可把上述过程逆推.

同源异考 重在触类旁通

2．在正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别为 AB，BC 的中点，现沿 DE，DF，EF 把△ADE，△CDF，△BEF 折起，使 A，B，C 三点重合，则折成的几何体为________．

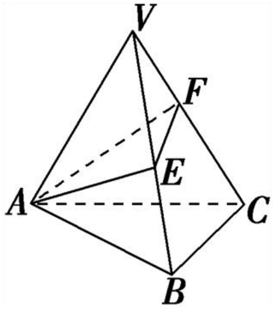


解析： 由于 E，F 分别为 AB，BC 的中点，折起后 A，B，C 三点重合，DA，DC 重合，EA，EB 重合，FB，FC 重合，故会形成一个三棱锥．

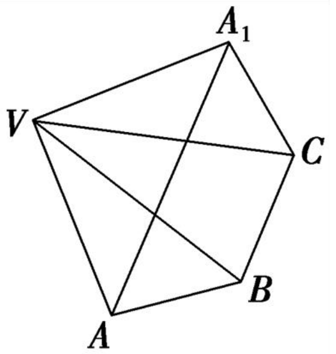
答案： 三棱锥

探究四　多面体表面距离最短问题

[例 4]　如图，在三棱锥 $V\text{-}ABC$ 中，$VA=VB=VC=4$，$\angle AVB=\angle AVC=\angle BVC=30°$，过点 A 作截面$\triangle AEF$，求$\triangle AEF$ 周长的最小值.



[解析]　将三棱锥沿侧棱 VA 剪开，并将其侧面展开平铺在一个平面上，如图，线段 AA_1 的长为所求$\triangle AEF$ 周长的最小值.



$\because \angle AVB=\angle A_1VC=\angle BVC=30°$，

$\therefore \angle AVA_1=90°$.

又 $VA=VA_1=4$，$\therefore AA_1=4\sqrt{2}$.

$\therefore \triangle AEF$ 周长的最小值为 $4\sqrt{2}$.

变式训练 培养应变能力

本例中，将条件“$\angle AVB=\angle AVC=\angle BVC=30°$”改为“$\angle AVB=\angle AVC=\angle BVC=40°$”，其余条件不变，如何求解？

解析： 将三棱锥展开，线段 AA_1 的长为所求△AEF 周长的最小值.

$\because \angle AVB=\angle A_1VC=\angle BVC=40°$，$\therefore \angle AVA_1=120°$，

又 $VA=VA_1=4$，由余弦定理得 $AA_1^2=VA^2+VA_1^2-2VA\cdot VA_1\cos 120°=48$，$\therefore AA_1=4\sqrt{3}$，

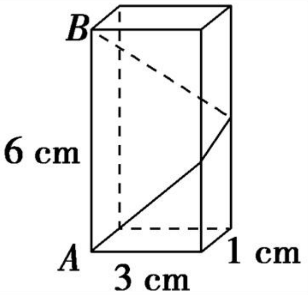
$\therefore$△AEF 周长的最小值为 $4\sqrt{3}$.

方法提升

该题考查的是有关几何体的表面上两点之间的最短距离的求解问题，在解题的过程中，需要明确两个点在几何体上所处的位置，再利用平面上两点间直线段最短，所以处理方法就是将面切开平铺，利用平面图形的相关特征求得结果.

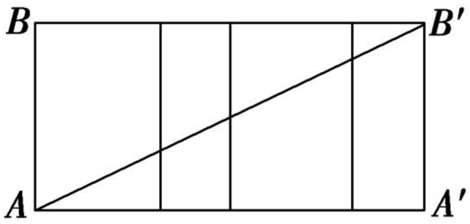
同源异考 重在触类旁通

3.如图所示，长方体的底面相邻边长分别为1 cm和3 cm，高为6 cm.如果用一根细线从点 A 开始经过4个侧面缠绕一圈到达点 B，那么所用细线最短需要多长？



解析： 将长方体展开，连接 A、B'，$\because AA'=1+3+1+3=8(\text{cm})$，$A'B'=6\text{ cm}$，根据两点之间线段最短，$AB'=\sqrt{8^2+6^2}=10\text{ cm}$.

所以所用细线最短需要10 cm.



课后·素养培优

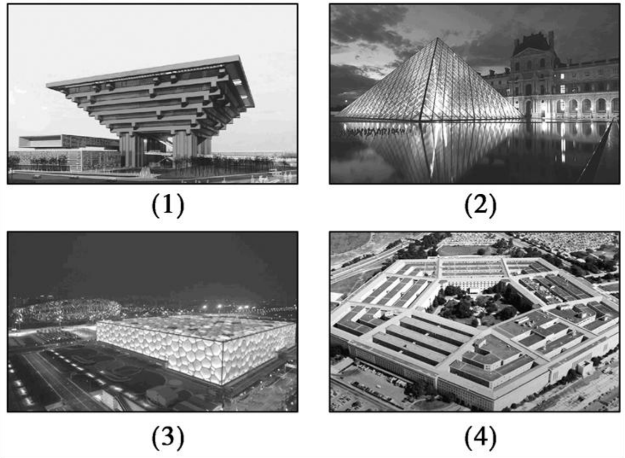
素养拓展 能力提升

一、“生活之中处处闪烁着数学之美”——空间几何体的结构美

►直观想象、数学抽象、逻辑推理

数学即生活，从生活中体会数学之美，数学的发展源于生活，我们的生活又极大地推动了数学的发展.

[典例 1]　观察下列四张图片，结合所学知识说出这四个建筑物主要的结构特征．



[解析]　(1)是上海世博会中国馆，其主体结构是四棱台．

(2)是法国卢浮宫，其主体结构是四棱锥．

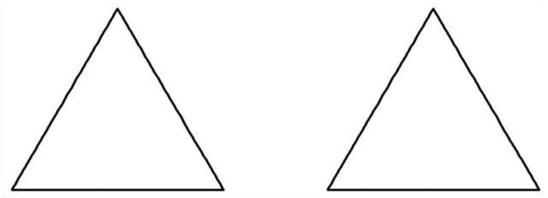
(3)是国家游泳中心“水立方”，其主体结构是四棱柱．

(4)是美国五角大楼，其主体结构是五棱柱．

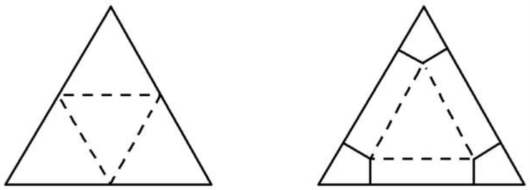
二、“平面与空间、二维与三维的相互转化”——空间想象能力的培养

►直观想象、数学抽象、逻辑推理

[典例 2] 给出两块正三角形纸片(如图所示)，要求将其中一块剪拼成一个底面为正三角形的三棱锥模型，另一块剪拼成一个底面是正三角形的三棱柱模型，请设计一种剪拼方案，分别用虚线标示在图中，并作简要说明.



[解析] 如图(1)所示，沿正三角形三边中点连线折起，可拼得一个底面为正三角形的三棱锥.


(1) (2)

如图(2)所示，正三角形三个角上剪出三个相同的四边形，其较长的一组邻边边长为三角形边长的$\frac{1}{4}$，有一组对角为直角，余下部分按虚线折成，可成为一个缺上底的底面为正三角形的三棱柱，而剪出的三个相同的四边形恰好拼成这个底面为正三角形的棱柱的上底.

[素养提升] 根据几何体的结构特点判定几何体的类型，首先要熟练掌握各几何体的概念，把握好各类几何体的性质，其次要有一定的空间想象能力.