第二章

立体几何初步

简单几何体的表面积与体积

第1课时　柱、锥、台的表面积和体积

导学聚焦

考点	学习目标	核心素养
柱、锥、台的表面积	了解柱体、锥体、台体的侧面展开图，掌握柱体、柱、锥、台的体积	直观想象、数学运算
锥体、台体的表面积的求法	能利用柱体、锥体、台体的体积公式求体积，理解柱体、锥体、台体的体积之间的关系	直观想象、数学运算

问题导学

预习教材 P114－P117 的内容，思考以下问题：

1．棱柱、棱锥、棱台的表面积如何计算？

2．圆柱、圆锥、圆台的侧面展开图分别是什么？

3．圆柱、圆锥、圆台的侧面积公式是什么？

4．柱体、锥体、台体的体积公式分别是什么？

5．圆柱、圆锥、圆台的侧面积公式、体积公式之间分别有怎样的关系？

栏目导引

新知初探

1．棱柱、棱锥、棱台的表面积

多面体的表面积就是____围成多面体各个面____的面积的和．棱柱、棱锥、棱台的表面积就是____围成它们的各个面____的面积的和．

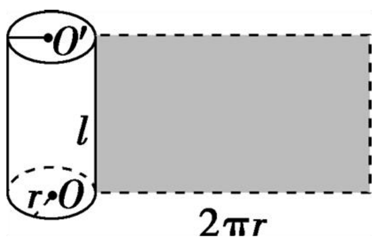
2．棱柱、棱锥、棱台的体积

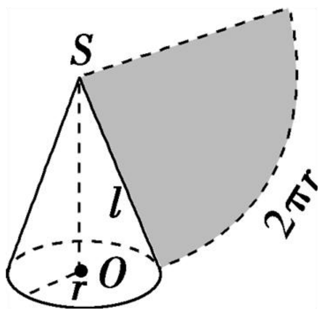
(1)$V_{棱柱}$＝____Sh____；(2)$V_{棱锥}$＝____$\frac{1}{3}Sh$____；

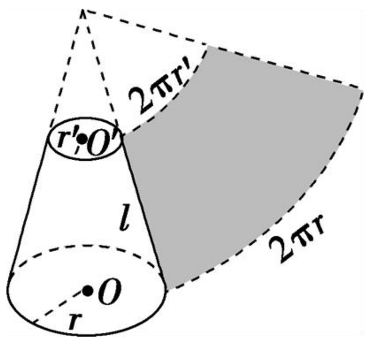
$V_{棱台}$＝____$\frac{1}{3}h(S'+\sqrt{SS'}+S)$____，其中 S'，S 分别是棱台的上、下底面面积，h 为棱台的高．

栏目导引

3．圆柱、圆锥、圆台的表面积和体积

名称	图形	公式
圆柱		底面积：$S_{底}$＝$\underline{\pi r^2}$ 侧面积：$S_{侧}$＝$\underline{2\pi rl}$ 表面积：S＝$\underline{2\pi rl+2\pi r^2}$ 体积：V＝$\underline{\pi r^2 l}$

名称	图形	公式
圆锥		底面积：$S_{底}$＝<u>πr^2</u> 侧面积：$S_{侧}$＝<u>πrl</u> 表面积：S＝<u>$\pi rl+\pi r^2$</u> 体积：V＝<u>$\frac{1}{3}\pi r^2h$</u>

名称	图形	公式
圆台		上底面面积：$S_{上底}=$__$\pi r'^2$__ 下底面面积：$S_{下底}=$__πr^2__ 侧面积：$S_{侧}=$__$\pi l(r+r')$__ 表面积： $S=$__$\pi(r'^2+r^2+r'l+rl)$__ 体积： $V=$__$\frac{1}{3}\pi h(r'^2+r'r+r^2)$__

■名师点拨

1．柱体、锥体、台体的体积

(1)柱体：柱体的底面面积为 S，高为 h，则 $V=Sh$.

(2)锥体：锥体的底面面积为 S，高为 h，则 $V=\frac{1}{3}Sh$.

(3)台体：台体的上、下底面面积分别为 S'、S，高为 h，

则 $V=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{SS'}+S)h$.

2．圆柱、圆锥、圆台的侧面积公式之间的关系

$$S_{\text{圆柱侧}}=2\pi rl\xleftrightarrow{r'=r}S_{\text{圆台侧}}=\pi(r'+r)l\xleftrightarrow{r'=0}S_{\text{圆锥侧}}=\pi rl.$$

3．柱体、锥体、台体的体积公式之间的关系

$$V_{\text{柱体}}=Sh\xleftrightarrow{S'=S}V_{\text{台体}}=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h\xleftrightarrow{S'=0}V_{\text{锥体}}=\frac{1}{3}Sh.$$

栏目导引

自我检测

1 判断(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1)几何体的表面积就是其侧面面积与底面面积的和．(√　)

(2)几何体的侧面积是指各个侧面的面积之和．(√　)

(3)等底面面积且等高的两个同类几何体的体积相同．(√　)

(4)在三棱锥 P-ABC 中，$V_{P\text{-}ABC}=V_{A\text{-}PBC}=V_{B\text{-}PAC}=V_{C\text{-}PAB}$.(√　)

栏目导引

2 棱长都是 1 的三棱锥的表面积为(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{3}$　　C．$3\sqrt{3}$　　D．$4\sqrt{3}$

解析：选 A．$S_{表}=4S_{正\triangle}=4\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$.

3 若长方体的长、宽、高分别为 3 cm，4 cm，5 cm，则长方体的体积为(　　)

A．27 cm^3　B．60 cm^3　C．64 cm^3　D．125 cm^3

解析：选 B．长方体即为四棱柱，其体积为底面积×高，即为 $3\times4\times5=60(cm^3)$．

4 圆台的上、下底面半径分别为 3 和 4，母线长为 6，则其表面积等于(　　)

A．72　　B．42π　　C．67π　　D．72π

解析：选 C．$S_{表}=\pi(3^2+4^2+3\times6+4\times6)=67\pi$.

探究点1　柱、锥、台的表面积

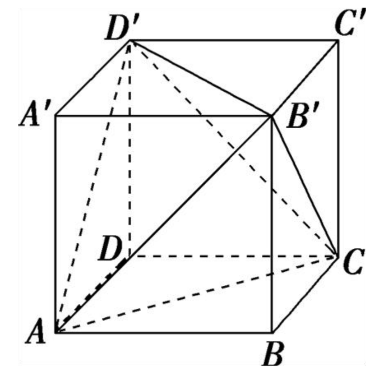
例1　(1)若圆锥的正视图是正三角形，则它的侧面积是底面积的(　　)

A. $\sqrt{2}$倍　　B. 3 倍

C. 2 倍　　D. 5 倍

栏目导引

(2)已知正方体的 8 个顶点中，有 4 个为侧面是等边三角形的三棱锥的顶点，则这个三棱锥与正方体的表面积之比为(　　)



A．$1:\sqrt{2}$　　B．$1:\sqrt{3}$

C．$2:\sqrt{2}$　　D．$3:\sqrt{6}$

(3)已知某圆台的一个底面周长是另一个底面周长的 3 倍，母线长为 3 ，圆台的侧面积为 84π，则该圆台较小底面的半径为(　　)

A．7　　B．6

C．5　　D．3

栏目导引

【解析】　(1)设圆锥的底面半径为 r，母线长为 l，则由题意可知，$l=2r$，于是 $S_{侧}=\pi r\cdot 2r=2\pi r^2$，$S_{底}=\pi r^2$，可知选 C.

(2)棱锥 B'-ACD'为适合条件的棱锥，四个面为全等的等边三角形，设正方体的棱长为 1，则 $B'C=\sqrt{2}$，$S_{\triangle B'AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

三棱锥的表面积 $S_{锥}=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，

又正方体的表面积 $S_{正}=6$.

因此 $S_{锥}:S_{正}=2\sqrt{3}:6=1:\sqrt{3}$.

(3)设圆台较小底面的半径为 r，则另一底面的半径为 $3r$.由 $S_{侧}=3\pi(r+3r)=84\pi$，解得 $r=7$.

【答案】　(1)C　(2)B　(3)A

栏目导引

规律方法

空间几何体表面积的求法技巧

(1)多面体的表面积是各个面的面积之和．

(2)组合体的表面积应注意重合部分的处理．

(3)圆柱、圆锥、圆台的侧面是曲面，计算侧面积时需要将这个曲面展开为平面图形计算，而表面积是侧面积与底面圆的面积之和．

跟踪训练　已知正四棱台(正四棱锥被平行于底面的平面所截，截面与底面间的部分)上底面边长为 4，侧棱和下底面边长都是 8，求它的侧面面积.

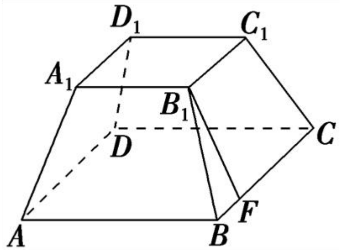
解：法一：设正四棱台为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，如图①.设 B_1F 为斜高.

在 $Rt\triangle B_1FB$ 中，$BF=\frac{1}{2}\times(8-4)=2$，$B_1B=8$，

所以 $B_1F=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$，

所以 $S_{正棱台侧}=4\times\frac{1}{2}\times(4+8)\times2\sqrt{15}$

$=48\sqrt{15}$.



①

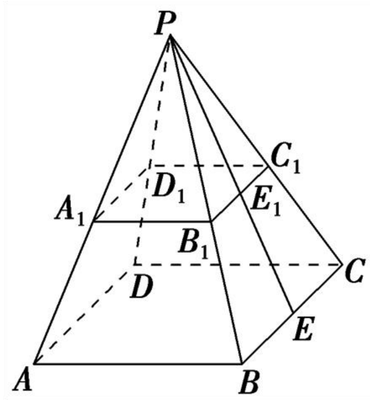
法二：设正四棱台为 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，延长正四棱台的侧棱交于点 P，作面 PBC 上的斜高 PE，交 B_1C_1 于 E_1，如图②.

设 $PB_1=x$，则 $\frac{x}{x+8}=\frac{4}{8}$，

解得 $x=8$.

所以 $PB_1=B_1B=8$，

所以 E_1 为 PE 的中点，



②

又 $PE_1=\sqrt{PB_1^2-B_1E_1^2}=\sqrt{8^2-2^2}$

$=2\sqrt{15}$，

所以 $PE=2PE_1=4\sqrt{15}$.

所以 $S_{\text{正棱台侧}}=S_{\text{大正棱锥侧}}-S_{\text{小正棱锥侧}}$

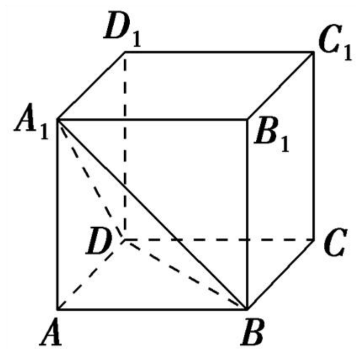
$=4\times\frac{1}{2}\times 8\times PE-4\times\frac{1}{2}\times 4\times PE_1$

$=4\times\frac{1}{2}\times 8\times 4\sqrt{15}-4\times\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{15}$

$=48\sqrt{15}$.

探究点2　柱、锥、台的体积

例2　如图所示，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，过顶点 B，D，A_1 截下一个三棱锥.



(1)求剩余部分的体积；

(2)求三棱锥 $A\text{-}A_1BD$ 的体积及高.

【解】　(1)$V_{三棱锥A_1\text{-}ABD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}\cdot A_1A$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD\cdot A_1A=\frac{1}{6}a^3.$

故剩余部分的体积

$V=V_{正方体}-V_{三棱锥A_1\text{-}ABD}=a^3-\frac{1}{6}a^3=\frac{5}{6}a^3.$

(2)$V_{三棱锥A-A_1BD}=V_{三棱锥A_1-ABD}=\frac{1}{6}a^3$.

设三棱锥 A-A_1BD 的高为 h，

则 $V_{三棱锥A-A_1BD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle A_1BD}\cdot h$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{2}a)^2h=\frac{\sqrt{3}}{6}a^2h$，

故$\frac{\sqrt{3}}{6}a^2h=\frac{1}{6}a^3$，

解得 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

规律方法

求几何体体积的常用方法

(1)公式法：直接代入公式求解.

(2)等积法：例如四面体的任何一个面都可以作为底面，只需选用底面积和高都易求的形式即可.

(3)补体法：将几何体补成易求解的几何体，如棱锥补成棱柱，棱台补成棱锥等.

(4)分割法：将几何体分割成易求解的几部分，分别求体积.

[提醒]　求几何体的体积时，要注意利用好几何体的轴截面(尤其为圆柱、圆锥时)，准确求出几何体的高和底面积.

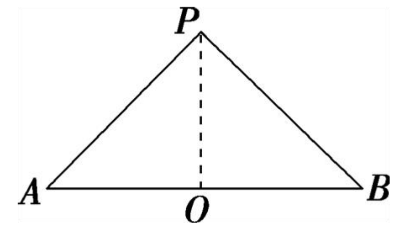
跟踪训练

1．圆锥的轴截面是等腰直角三角形，侧面积是 $16\sqrt{2}\pi$，则圆锥的体积是(　　)

A．$\dfrac{64\pi}{3}$　　B．$\dfrac{128\pi}{3}$

C．64π　　D．$128\sqrt{2}\pi$

解析：选 A．作圆锥的轴截面，如图所示．由题设，在 $\triangle PAB$ 中，$\angle APB=90°$，$PA=PB$.



设圆锥的高为 h，底面半径为 r，

则 $h=r$，$PB=\sqrt{2}r$.

由 $S_{侧}=\pi\cdot r\cdot PB=16\sqrt{2}\pi$，

得$\sqrt{2}\pi r^2=16\sqrt{2}\pi$.所以 $r=4$.则 $h=4$.

故圆锥的体积 $V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{64}{3}\pi$.

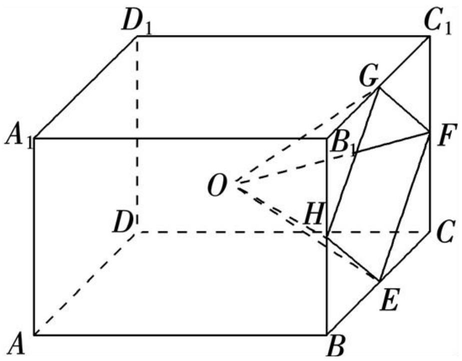
2．圆柱的侧面展开图是长 12 cm，宽 8 cm 的矩形，则这个圆柱的体积为(　　)

A.$\dfrac{288}{\pi}$ cm^3　　B.$\dfrac{192}{\pi}$ cm^3

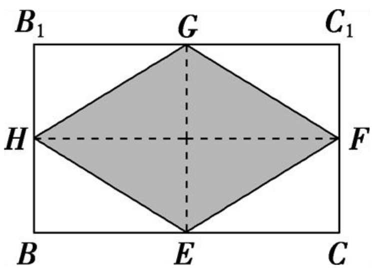
C.$\dfrac{288}{\pi}$ cm^{3}或$\dfrac{192}{\pi}$ cm^3　　D.192π cm^3

解析：选 C．当圆柱的高为 8 cm 时，$V=\pi\times\left(\dfrac{12}{2\pi}\right)^2\times 8=\dfrac{288}{\pi}(\mathrm{cm}^3)$，当圆柱的高为 12 cm 时，$V=\pi\times\left(\dfrac{8}{2\pi}\right)^2\times 12=\dfrac{192}{\pi}(\mathrm{cm}^3)$．

3．(2019·高考全国卷Ⅲ)学生到工厂劳动实践，利用 3D 打印技术制作模型．如图，该模型为长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 挖去四棱锥 $O\text{-}EFGH$ 后所得的几何体，其中 O 为长方体的中心，E，F，G，H 分别为所在棱的中点，$AB=BC=6$ cm，$AA_1=4$ cm.3D 打印所用原料密度为 0.9 g/cm^3.不考虑打印损耗，制作该模型所需原料的质量为________g.



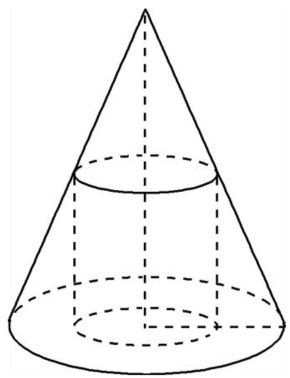
解析：由题易得长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $6\times6\times4=144(\text{cm}^3)$，四边形 $EFGH$ 为平行四边形，如图所示，连接 GE，HF，易知四边形 $EFGH$ 的面积为矩形 BCC_1B_1 面积的一半，即 $\frac{1}{2}\times6\times4=12(\text{cm}^2)$，所以 $V_{\text{四棱锥}O\text{-}EFGH}=\frac{1}{3}\times3\times12=12(\text{cm}^3)$，所以该模型的体积为 $144-12=132(\text{cm}^3)$，所以制作该模型所需原料的质量为 $132\times0.9=118.8(\text{g})$.



答案：118.8

探究点3　组合体的表面积和体积

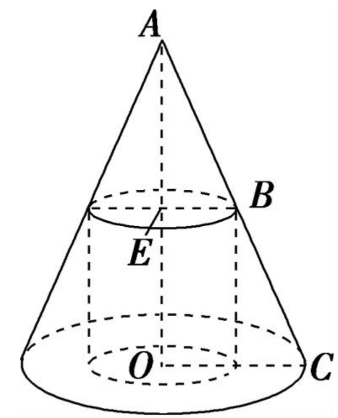
例3　如图在底面半径为 2，母线长为 4 的圆锥中内接一个高为$\sqrt{3}$的圆柱，求圆柱的表面积.



【解】　设圆锥的底面半径为 R，圆柱的底面半径为 r，表面积为 S.

则 $R=OC=2$，$AC=4$，

$AO=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.



如图所示，

易知$\triangle AEB\backsim\triangle AOC$，

所以$\frac{AE}{AO}=\frac{EB}{OC}$，即$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{r}{2}$，所以 $r=1$，

$S_{底}=2\pi r^2=2\pi$，$S_{侧}=2\pi r\cdot h=2\sqrt{3}\pi$.

所以 $S=S_{底}+S_{侧}=2\pi+2\sqrt{3}\pi$

$=(2+2\sqrt{3})\pi$.

互动探究

1. [变问法]本例中的条件不变，求圆柱的体积与圆锥的体积之比.

解：由例题解析可知：圆柱的底面半径为 $r=1$，高 $h=\sqrt{3}$，所以圆柱的体积 $V_1=\pi r^2h=\pi\times1^2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}\pi$.

圆锥的体积 $V_2=\frac{1}{3}\pi\times2^2\times2\sqrt{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$.

所以圆柱与圆锥的体积比为 3∶8.

2．[变问法]本例中的条件不变，求图中圆台的表面积与体积．

解：由例题解析可知：圆台的上底面半径 $r=1$，下底面半径 $R=2$，高 $h=\sqrt{3}$，母线 $l=2$，所以圆台的表面积 $S=\pi(r^2+R^2+r\cdot l+Rl)=\pi(1^2+2^2+1\times2+2\times2)=11\pi$.

圆台的体积 $V=\frac{1}{3}\pi(r^2+rR+R^2)h=\frac{1}{3}\pi(1^2+2+2^2)\times\sqrt{3}=\frac{7\sqrt{3}}{3}\pi$.

3．[变条件、变问法]本例中的“高为$\sqrt{3}$”改为“高为 h”，试求圆柱侧面积的最大值．

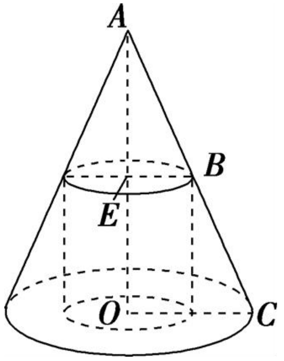
解：设圆锥的底面半径为 R，圆柱的底面半径为 r，

则 $R=OC=2$，$AC=4$，

$AO=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

如图所示易知$\triangle AEB\backsim\triangle AOC$，

所以$\frac{AE}{AO}=\frac{EB}{OC}$，



栏目导引

即$\frac{2\sqrt{3}-h}{2\sqrt{3}}=\frac{r}{2}$,

所以 $h=2\sqrt{3}-\sqrt{3}r$,

$S_{圆柱侧}=2\pi rh=2\pi r(2\sqrt{3}-\sqrt{3}r)$

$=-2\sqrt{3}\pi r^2+4\sqrt{3}\pi r$,

所以当 $r=1$，$h=\sqrt{3}$时，圆柱的侧面积最大，

其最大值为 $2\sqrt{3}\pi$.

规律方法

求组合体的表面积与体积的步骤

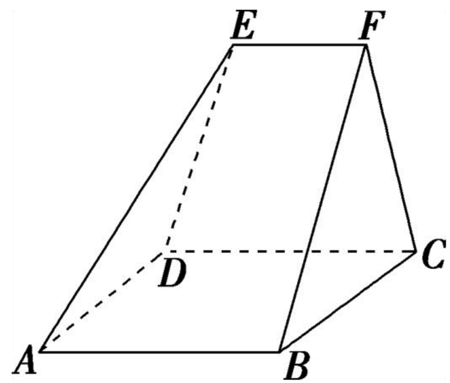
(1)分析结构特征：弄清组合体的组成形式，找准有关简单几何体的关键量.

(2)设计计算方法：根据组成形式，设计计算方法，特别要注意“拼接面”面积的处理，利用“切割”“补形”的方法求体积.

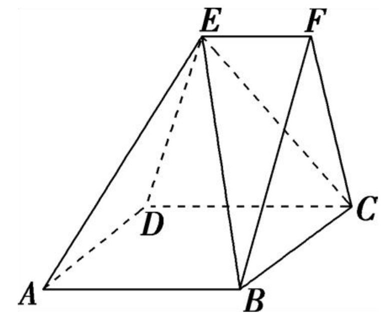
(3)计算求值：根据设计的计算方法求值.

跟踪训练

1．如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，已知面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，$EF \parallel AB$，$EF=2$，EF 上任意一点到平面 $ABCD$ 的距离均为 3，求该多面体的体积.



解：如图，连接 EB，EC.四棱锥 $E\text{-}ABCD$ 的体积



$V_{\text{四棱锥 } E\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}\times 4^2\times 3=16.$

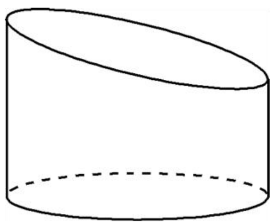
因为 $AB=2EF$，$EF\parallel AB$，所以 $S_{\triangle EAB}=2S_{\triangle BEF}$.所以 $V_{\text{三棱锥 } F\text{-}EBC}$

$=V_{\text{三棱锥 } C\text{-}EFB}=\frac{1}{2}V_{\text{三棱锥 } C\text{-}ABE}$

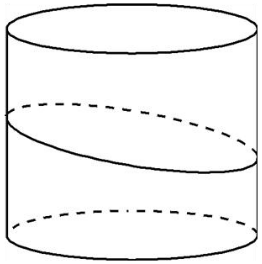
$=\frac{1}{2}V_{\text{三棱锥 } E\text{-}ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}V_{\text{四棱锥 } E\text{-}ABCD}=4.$

所以多面体的体积 $V=V_{\text{四棱锥 } E\text{-}ABCD}+V_{\text{三棱锥 } F\text{-}EBC}=16+4=20.$

2．如图，一个底面半径为 2 的圆柱被一平面所截，截得的几何体的最短和最长母线长分别为 2 和 3，求该几何体的体积.



解：用一个完全相同的几何体把题中几何体补成一个圆柱，如图，则圆柱的体积为 $\pi\times2^2\times5=20\pi$，故所求几何体的体积为 10π.



1．已知某长方体同一顶点上的三条棱长分别为 1，2，3，则该长方体的表面积为(　　)

A．22　　B．20

C．10　　D．11

解析：选 A.所求长方体的表面积 $S=2\times(1\times2)+2\times(1\times3)+2\times(2\times3)=22$.

栏目导引

2．正三棱锥的高为 3，侧棱长为 $2\sqrt{3}$，则这个正三棱锥的体积为(　　)

A.$\frac{27}{4}$　　B.$\frac{9}{4}$

C.$\frac{27\sqrt{3}}{4}$　　D.$\frac{9\sqrt{3}}{4}$

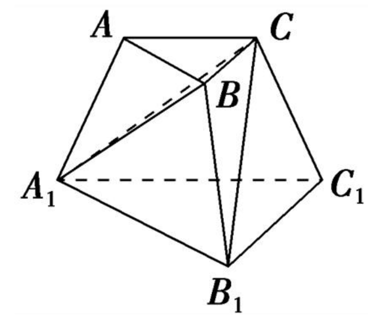
解析：选 D.由题意可得底面正三角形的边长为 3，所以 $V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times3^2\times3=\frac{9\sqrt{3}}{4}$.故选 D.

3．已知圆台的上、下底面的面积之比为 9∶25，那么它的中截面截得的上、下两台体的侧面积之比是________．

解析：圆台的上、下底面半径之比为 3∶5，设上、下底面半径为 $3x$，$5x$，则中截面半径为 $4x$，设上台体的母线长为 l，则下台体的母线长也为 l，上台体侧面积 $S_1=\pi(3x+4x)l=7\pi xl$，下台体侧面积 $S_2=\pi(4x+5x)l=9\pi xl$，所以 $S_1∶S_2=7∶9$.

答案：7∶9

4.如图，三棱台 ABC　$A_1B_1C_1$ 中，$AB∶A_1B_1=1∶2$，求三棱锥 A_1　ABC，三棱锥 B　A_1B_1C，三棱锥 C　$A_1B_1C_1$ 的体积之比.



解：设棱台的高为 h，$S_{\triangle ABC}=S$，则 $S_{\triangle A_1B_1C_1}=4S$.

所以 $V_{A_1\text{-}ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{3}Sh$，

$V_{C\text{-}A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot h=\frac{4}{3}Sh$.

又 $V_{台}=\frac{1}{3}h(S+4S+2S)=\frac{7}{3}Sh$，

所以 $V_{B\text{-}A_1B_1C}=V_{台}-V_{A_1\text{-}ABC}-V_{C\text{-}A_1B_1C_1}$

$=\frac{7}{3}Sh-\frac{Sh}{3}-\frac{4Sh}{3}=\frac{2}{3}Sh$，

所以体积比为 1∶2∶4.