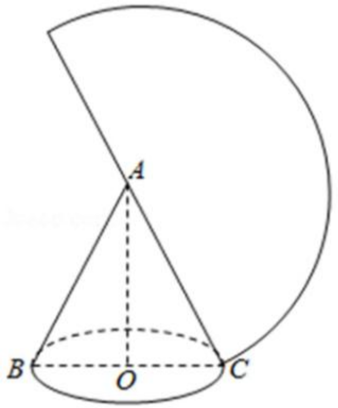
真题提升课

考点一　空间几何体的侧面积和表面积

6.（2020•浙江）已知圆锥的侧面积（单位：cm^2）为 2π，且它的侧面展开图是一个半圆，则这个圆锥的底面半径（单位：cm）是____.

【详细解析】∵圆锥侧面展开图是半圆，面积为 $2\pi cm^2$，



设圆锥的母线长为 acm，则 $\frac{1}{2}\times a^2\pi=2\pi$，$\therefore a=2cm$，

∴侧面展开扇形的弧长为 $2\pi cm$，

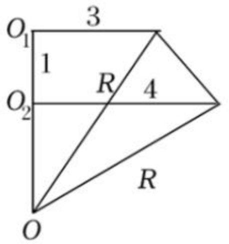
设圆锥的底面半径 $OC=rcm$，则 $2\pi r=2\pi$，解得 $r=1cm$．

故答案为：$1cm$．

7.（2022•新高考Ⅱ）已知正三棱台的高为1，上、下底面边长分别为$3\sqrt{3}$和$4\sqrt{3}$，其顶点都在同一球面上，则该球的表面积为(　　)

A．100π　　B．128π　　C．144π　　D．192π

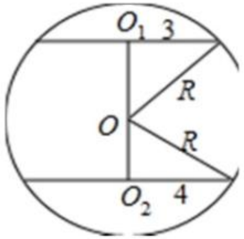
【详细解析】当球心在台体外时，由题意得，上底面所在平面截球所得圆的半径为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sin 60^{\circ}}=3$，下底面所在平面截球所得圆的半径为$\dfrac{4\sqrt{3}}{2\sin 60^{\circ}}=4$，如图，



设球的半径为R，则轴截面中由几何知识可得$\sqrt{R^2-3^2}-\sqrt{R^2-4^2}=1$，解得$R=5$，

$\therefore$该球的表面积为$4\pi R^2=4\pi\times 25=100\pi$．

当球心在台体内时，如图，



此时$\sqrt{R^2-3^2}+\sqrt{R^2-4^2}=1$，无解．

综上，该球的表面积为100π．

故选：A．

考点二 空间几何体的体积

10．（2022•新高考Ⅰ）南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库．已知该水库水位为海拔 $148.5m$ 时，相应水面的面积为 $140.0km^2$；水位为海拔 $157.5m$ 时，相应水面的面积为 $180.0km^2$．将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔 $148.5m$ 上升到 $157.5m$ 时，增加的水量约为 $(\sqrt{7} \approx 2.65)$(　　)

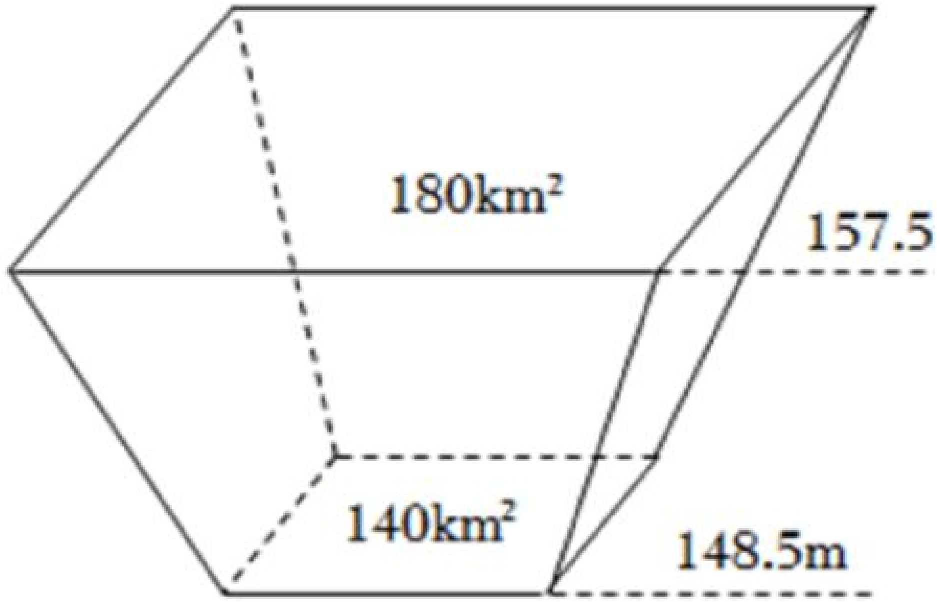
A．$1.0\times10^9m^3$　　B．$1.2\times10^9m^3$　　C．$1.4\times10^9m^3$　　D．$1.6\times10^9m^3$

【详细解析】$140km^2=140\times10^6m^2$，$180km^2=180\times10^6m^2$，

根据题意，增加的水量约为 $\dfrac{140\times10^6+180\times10^6+\sqrt{140\times10^6\times180\times10^6}}{3}\times(157.5-148.5)$

$=\dfrac{(140+180+60\sqrt{7})\times10^6}{3}\times9$

$\approx(320+60\times2.65)\times10^6\times3=1437\times10^6\approx1.4\times10^9m^3$．故选：$C$．



12.【多选】(2023•新高考Ⅰ) 下列物体中，能够被整体放入棱长为 1（单位：m)的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有(　　)

A. 直径为 $0.99m$ 的球体

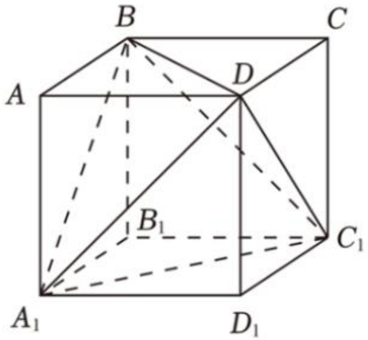
B. 所有棱长均为 $1.4m$ 的四面体

C. 底面直径为 $0.01m$，高为 $1.8m$ 的圆柱体

D. 底面直径为 $1.2m$，高为 $0.01m$ 的圆柱体

【详细解析】对于 A，棱长为 1 的正方体内切球的直径为$1>0.99$，选项 A 正确；

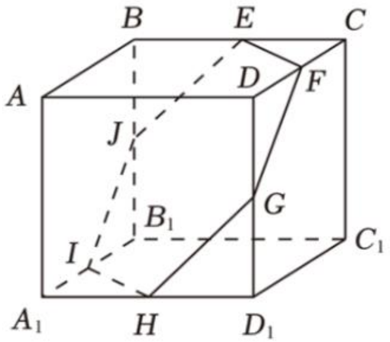
对于 B，如图，

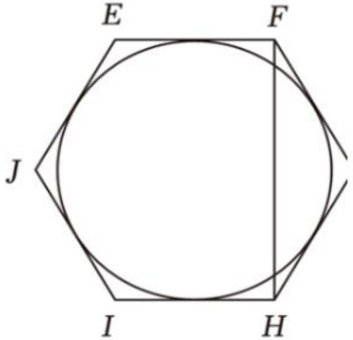


正方体内部最大的正四面体 $D-A_1BC_1$ 的棱长为 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}>1.4$，选项 B 正确；

对于 C，棱长为 1 的正方体的体对角线为 $\sqrt{3}<1.8$，选项 C 错误；

对于 D，如图，六边形 $EFGHIJ$ 为正六边形，E，F，G，H，I，J 为棱的中点，





高为 0.01 米可忽略不计，看作直径为 1.2 米的平面圆，

六边形 $EFGHIJ$ 棱长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 米，$\angle GFH=\angle GHF=30^\circ$，

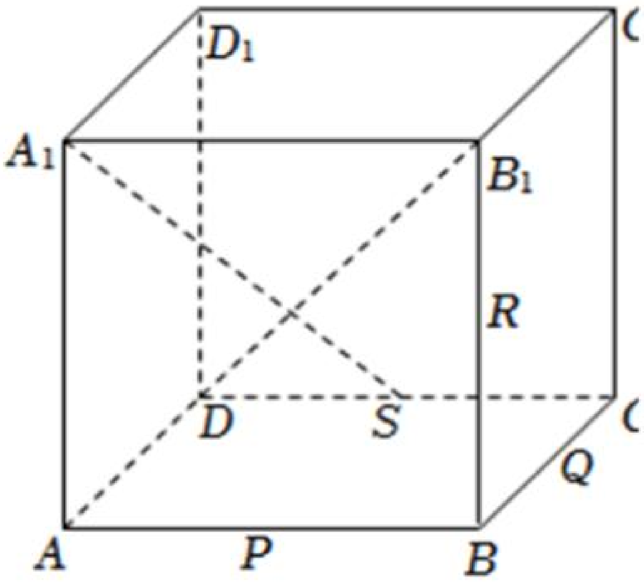
所以 $FH=\sqrt{3}FG=\sqrt{3}GH=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 米，故六边形 $EFGHIJ$ 内切圆半径为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 米，

而 $(\frac{\sqrt{6}}{2})^2=\frac{3}{2}>(1.2)^2=1.44$，选项 D 正确.

故选：ABD.

考点三 空间中直线与直线之间的位置关系

20.（2022•上海）如图正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P、Q、R、S分别为棱AB、BC、BB_1、CD的中点，联结A_1S，B_1D．空间任意两点M、N，若线段MN上不存在点在线段A_1S、B_1D上，则称MN两点可视，则下列选项中与点D_1可视的为(　　)

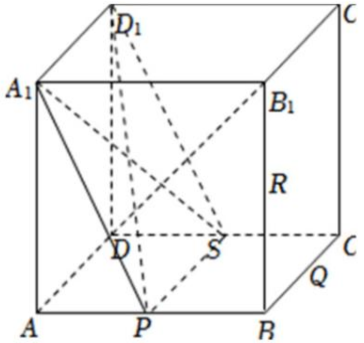


A．点P　　B．点B　　C．点R　　D．点Q

【详细解析】线段 MN 上不存在点在线段 A_1S 、B_1D 上，即直线 MN 与线段 A_1S 、B_1D 不相交，因此所求与 D_1 可视的点，即求哪条线段不与线段 A_1S 、B_1D 相交，

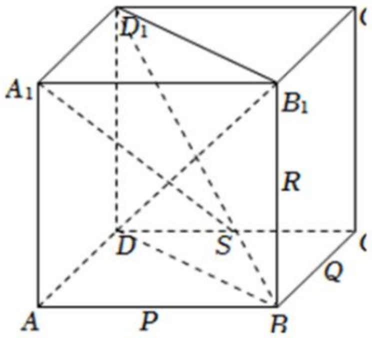
对 A 选项，如图，连接 A_1P 、PS 、D_1S ，因为 P 、S 分别为 AB 、CD 的中点，

$\therefore$ 易证 $A_1D_1//PS$ ，故 A_1 、D_1 、P 、S 四点共面，$\therefore D_1P$ 与 A_1S 相交，$\therefore A$ 错误；



对 B 、C 选项，如图，连接 D_1B 、DB ，易证 D_1 、B_1 、B 、D 四点共面，

故 D_1B 、D_1R 都与 B_1D 相交，$\therefore B$ 、C 错误；



对 D 选项，连接 D_1Q ，由 A 选项分析知 A_1 、D_1 、P 、S 四点共面记为平面 A_1D_1PS ，

$\because D_1 \in$ 平面 A_1D_1PS ，$Q \notin$ 平面 A_1D_1PS ，且 $A_1S \subset$ 平面 A_1D_1PS ，点 $D_1 \notin A_1S$ ，

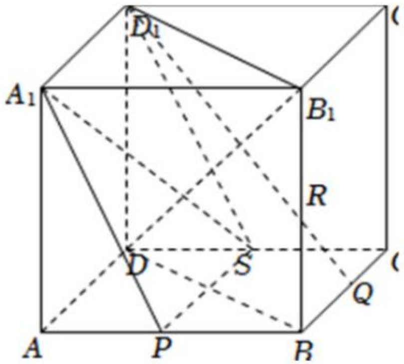
$\therefore D_1Q$ 与 A_1S 为异面直线，

同理由 B ，C 选项的分析知 D_1 、B_1 、B 、D 四点共面记为平面 D_1B_1BD ，

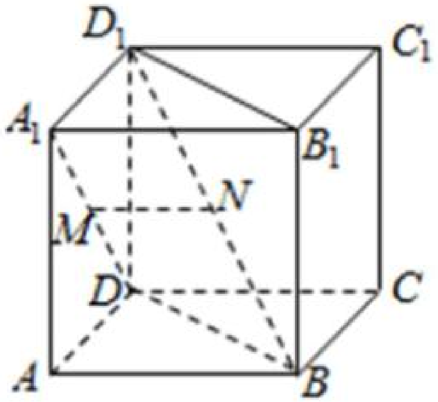
$\because D_1 \in$ 平面 D_1B_1BD ，$Q \notin$ 平面 D_1B_1BD ，且 $B_1D \subset$ 平面 D_1B_1BD ，点 $D_1 \notin B_1D$ ，

$\therefore D_1Q$ 与 B_1D 为异面直线，

故 D_1Q 与 A_1S ，B_1D 都没有公共点，$\therefore D$ 选项正确．



21.（2021•浙江）如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ， M ， N 分别是 A_1D ， D_1B 的中点，则(　　)



A. 直线 A_1D 与直线 D_1B 垂直，直线 $MN//$ 平面 $ABCD$

B. 直线 A_1D 与直线 D_1B 平行，直线 $MN\perp$ 平面 BDD_1B_1

C. 直线 A_1D 与直线 D_1B 相交，直线 $MN//$ 平面 $ABCD$

D. 直线 A_1D 与直线 D_1B 异面，直线 $MN\perp$ 平面 BDD_1B_1

【详细解析】连接 AD_1，如图：

由正方体可知 $A_1D \perp AD_1$， $A_1D \perp AB$， $\therefore A_1D \perp$ 平面 ABD_1，

$\therefore A_1D \perp D_1B$，由题意知 MN 为$\triangle D_1AB$ 的中位线，$\therefore MN // AB$，

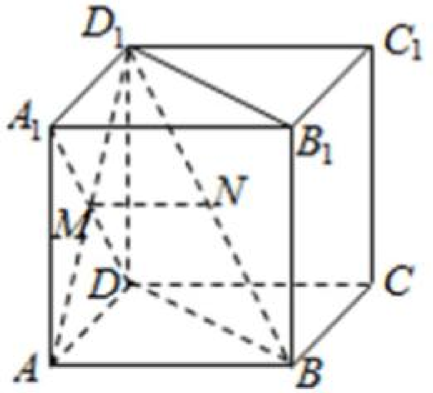
又$\because AB \subset$ 平面 $ABCD$， $MN \not\subset$ 平面 $ABCD$， $\therefore MN //$ 平面 $ABCD$． $\therefore A$ 对；

由正方体可知 A_1D 与平面 BDD_1 相交于点 D， $D_1B \subset$ 平面 BDD_1， $D \notin D_1B$，

$\therefore$直线 A_1D 与直线 D_1B 是异面直线，$\therefore B$、C 错；

$\because MN // AB$， AB 不与平面 BDD_1B_1 垂直，$\therefore MN$ 不与平面 BDD_1B_1 垂直，$\therefore D$ 错．

故选： A．



考点四 异面直线以及所成角

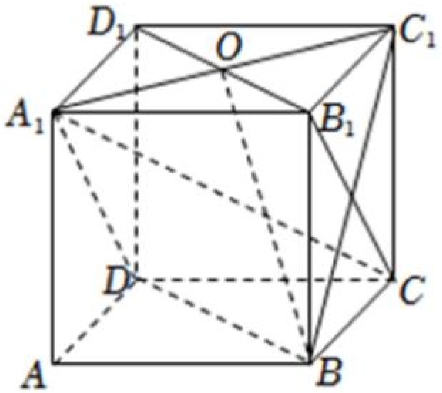
24.【多选】（2022•新高考Ⅰ）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则(　　)

A．直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 $90°$

B．直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 $90°$

C．直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 $45°$

D．直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$



连接 B_1C，由 $A_1B_1//DC$， $A_1B_1=DC$，得四边形 DA_1B_1C 为平行四边形，

可得 $DA_1//B_1C$， $\because BC_1\perp B_1C$， $\therefore$ 直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 $90°$，故 A 正确；

$\because A_1B_1\perp BC_1$， $BC_1\perp B_1C$， $A_1B_1\cap B_1C=B_1$， $\therefore BC_1\perp$ 平面 DA_1B_1C， 而 $CA_1\subset$ 平面 DA_1B_1C，

$\therefore BC_1\perp CA_1$，即直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 $90°$，故 B 正确；

设 $A_1C_1\cap B_1D_1=O$，连接 BO，可得 $C_1O\perp$ 平面 BB_1D_1D，即 $\angle C_1BO$ 为直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角，

$\because \sin\angle C_1BO=\dfrac{OC_1}{BC_1}=\dfrac{1}{2}$， $\therefore$ 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 $30°$，故 C 错误；

$\because CC_1\perp$ 底面 $ABCD$， $\therefore\angle C_1BC$ 为直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$，故 D 正确.

故选： ABD.

考点五 空间中直线与平面之间的位置关系

25.（2019•上海）已知平面α、β、γ两两垂直，直线 a、b、c 满足：$a\subseteq\alpha$，$b\subseteq\beta$，$c\subseteq\gamma$，则直线 a、b、c 不可能满足以下哪种关系（　　）

A．两两垂直　　B．两两平行　　C．两两相交　　D．两两异面

【详细解析】如图 1，可得 a、b、c 可能两两垂直；

如图 2，可得 a、b、c 可能两两相交；

如图 3，可得 a、b、c 可能两两异面；

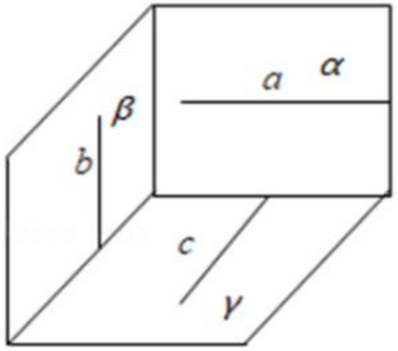


图1

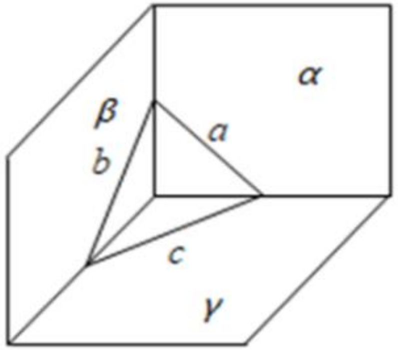


图2

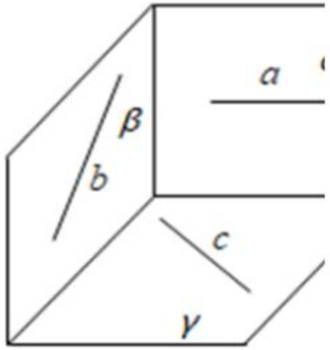


图3

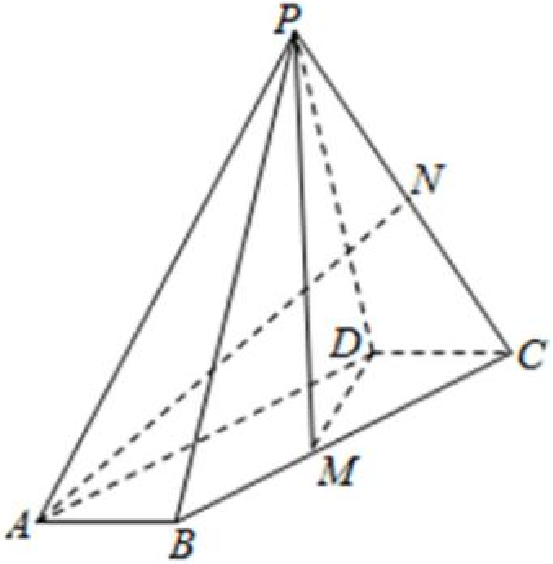
故选：B．

考点六 直线与平面所成的角

29.（2021•浙江）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle ABC=120^{\circ}$，$AB=1$，$BC=4$，$PA=\sqrt{15}$，M，N 分别为 BC，PC 的中点，$PD\perp DC$，$PM\perp MD$.

（Ⅰ）证明：$AB\perp PM$；

（Ⅱ）求直线 AN 与平面 PDM 所成角的正弦值.



【详细解析】（Ⅰ）证明：在平行四边形 $ABCD$ 中，由已知可得，$CD=AB=1$，

$CM=\frac{1}{2}BC=2$，$\angle DCM=60^\circ$，

$\therefore$ 由余弦定理可得，$DM^2=CD^2+CM^2-2CD\times CM\times\cos60^\circ$

$=1+4-2\times1\times2\times\frac{1}{2}=3$，

则 $CD^2+DM^2=1+3=4=CM^2$，即 $CD\perp DM$，

又 $PD\perp DC$，$PD\bigcap DM=D$，$\therefore CD\perp$ 平面 PDM，

而 $PM\subset$ 平面 PDM，$\therefore CD\perp PM$，

$\because CD//AB$，$\therefore AB\perp PM$；

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）知，$CD\perp$平面PDM，

又$CD\subset$平面$ABCD$，$\therefore$平面$ABCD\perp$平面PDM，

且平面$ABCD\cap$平面$PDM=DM$，

$\because PM\perp MD$，且$PM\subset$平面PDM，$\therefore PM\perp$平面$ABCD$，

连接AM，则$PM\perp MA$，

在ΔABM中，$AB=1$，$BM=2$，$\angle ABM=120^\circ$，

可得$AM^2=1+4-2\times1\times2\times(-\dfrac{1}{2})=7$，

又$PA=\sqrt{15}$，在$\mathrm{Rt}\Delta PMA$中，求得$PM=\sqrt{PA^2-MA^2}=2\sqrt{2}$，

取AD中点E，连接ME，则$ME//CD$，可得ME、MD、MP两两互相垂直，

以M为坐标原点，分别以MD、ME、MP为x、y、z轴建立空间直角坐标系，

则$A(-\sqrt{3}，2，0)$，$P(0，0，2\sqrt{2})$，$C(\sqrt{3},-1,0)$，

又N为PC的中点，$\therefore N(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AN}=(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-\dfrac{5}{2},\sqrt{2})$，

平面PDM的一个法向量为$\vec{n}=(0,1,0)$，

设直线AN与平面PDM所成角为θ，

则$\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{AN},\vec{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{AN}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{AN}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{25}{4}+2}\times1}=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$.

故直线AN与平面PDM所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{15}}{6}$.