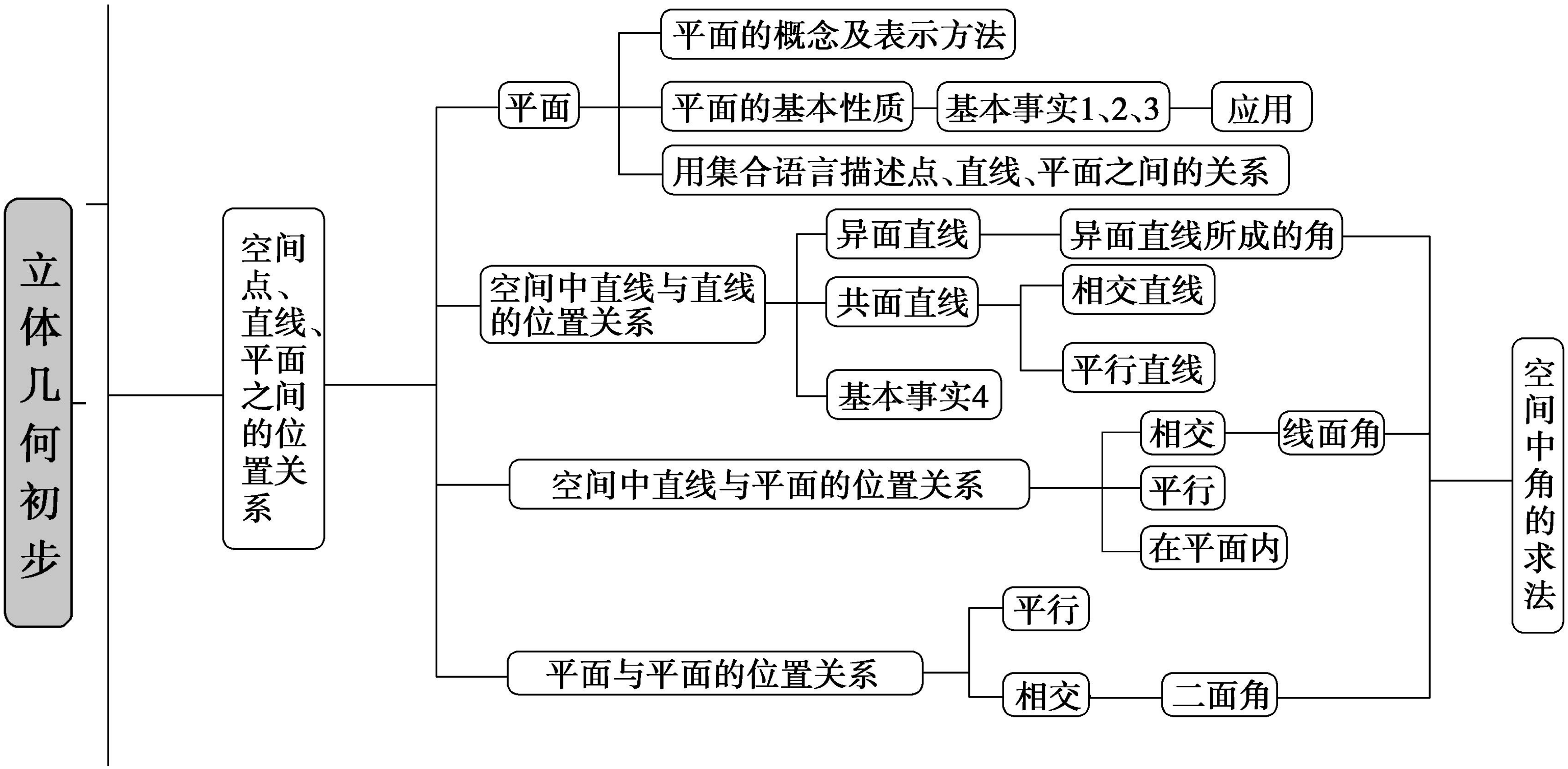
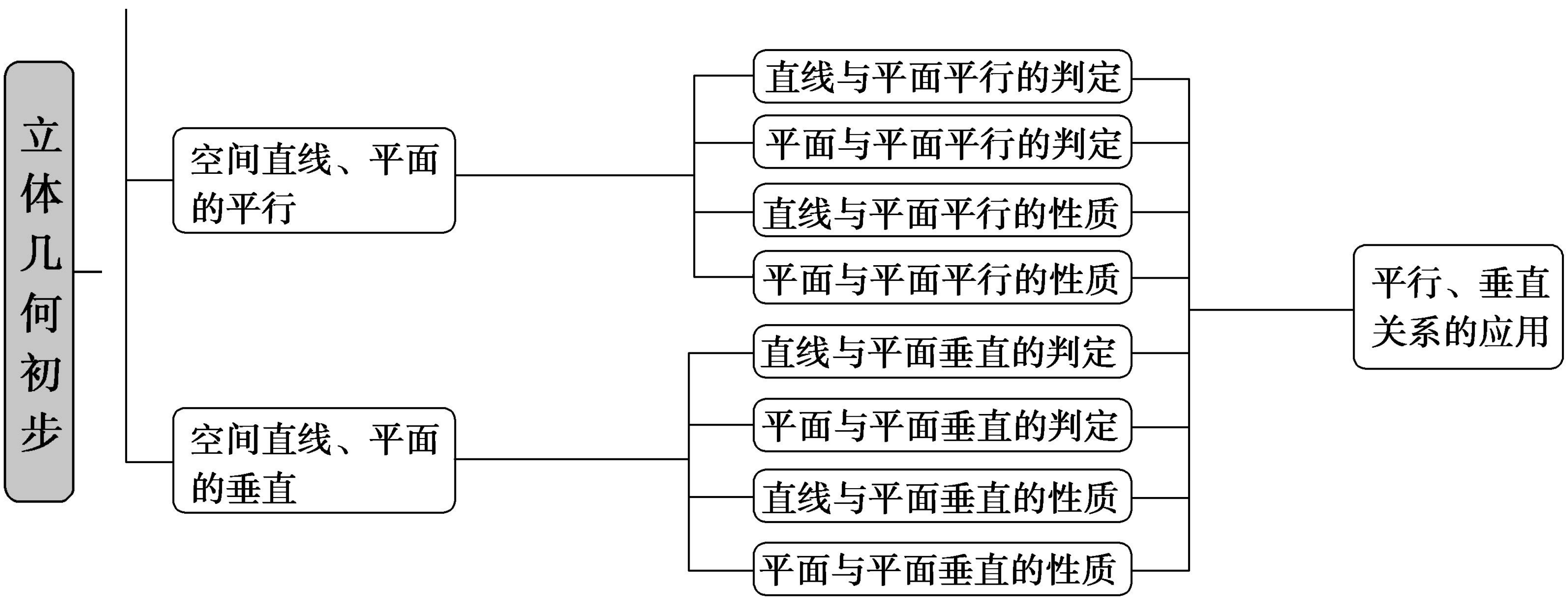
第五章 立体几何复习

知识网络·体系构建

织网·把脉·贯通

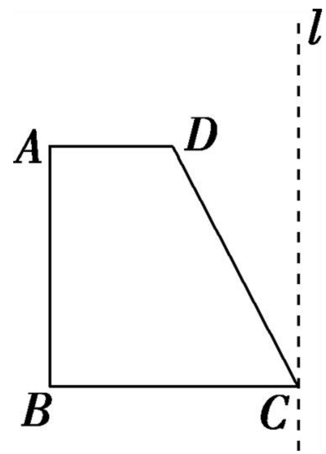
- 立体几何初步
  - 基本立体图形
    - 柱体
      - 棱柱
      - 圆柱
    - 锥体
      - 棱锥
      - 圆锥
    - 台体
      - 棱台
      - 圆台
    - 球体
    - 简单组合体
  - 立体图形的直观图
    - 水平放置的平面图形的直观图
    - 空间几何体的直观图
  - 简单几何体的表面积、体积
    - 柱体：$V=Sh$，$S_{表}=S_{侧}+S_{底}$
    - 锥体：$V=\frac{1}{3}Sh$，$S_{表}=S_{侧}+S_{底}$
    - 台体：$V=\frac{1}{3}(S+\sqrt{SS'}+S')h$，$S_{表}=S_{侧}+S_{底}$
    - 球：$V=\frac{4}{3}\pi R^3$，$S_{表}=4\pi R^2$


立体几何初步
空间点、直线、平面之间的位置关系
平面
平面的概念及表示方法
平面的基本性质
基本事实1、2、3
应用
用集合语言描述点、直线、平面之间的关系
空间中直线与直线的位置关系
异面直线
异面直线所成的角
共面直线
相交直线
平行直线
基本事实4
空间中直线与平面的位置关系
相交
线面角
平行
在平面内
平面与平面的位置关系
平行
相交
二面角
空间中角的求法

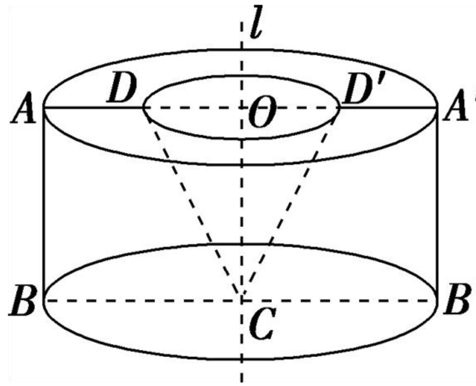

立体几何初步
空间直线、平面的平行
空间直线、平面的垂直
直线与平面平行的判定
平面与平面平行的判定
直线与平面平行的性质
平面与平面平行的性质
直线与平面垂直的判定
平面与平面垂直的判定
直线与平面垂直的性质
平面与平面垂直的性质
平行、垂直关系的应用

主题1　空间几何体的表面积与体积

例1　如图所示，梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle ABC=90°$，$AD=a$，$BC=2a$，$\angle DCB=60°$，在平面 $ABCD$ 内过点 C 作 $l\perp CB$，以 l 为轴旋转一周.求旋转体的表面积和体积.



【解】　由题易知以 l 为轴将梯形 $ABCD$ 旋转一周后形成的几何体如图所示，即圆柱中挖去一个倒置的且与圆柱等高的圆锥.



在梯形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=90°$，$AD\parallel BC$，$AD=a$，$BC=2a$，$\angle DCB=60°$，

所以 $CD=\dfrac{BC-AD}{\cos 60°}=2a$，$AB=CD\sin 60°=\sqrt{3}a$，

所以 $DD'=AA'-2AD=2BC-2AD=2a$，

所以 $DO=\dfrac{1}{2}DD'=a$.

由上述计算知，圆柱的母线长为$\sqrt{3}a$，底面半径为 $2a$；

圆锥的母线长为 $2a$，底面半径为 a.

所以圆柱的侧面积 $S_1=2\pi\cdot 2a\cdot\sqrt{3}a=4\sqrt{3}\pi a^2$，

圆锥的侧面积 $S_2=\pi\cdot a\cdot 2a=2\pi a^2$，

圆柱的底面积 $S_3=\pi(2a)^2=4\pi a^2$，

圆锥的底面积 $S_4=\pi a^2$，

所以组合体上底面面积 $S_5=S_3-S_4=3\pi a^2$，

故旋转体的表面积

$S=S_1+S_2+S_3+S_5=(4\sqrt{3}+9)\pi a^2$.

又由题意知形成的几何体的体积为一个圆柱的体积减去一个圆锥的体积，且 $V_{柱}=\pi\cdot(2a)^2\cdot\sqrt{3}a=4\sqrt{3}\pi a^3$，$V_{锥}=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot a^2\cdot\sqrt{3}a$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$，

故旋转体的体积 $V=V_{柱}-V_{锥}=4\sqrt{3}\pi a^3-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3=\frac{11\sqrt{3}}{3}\pi a^3$.

规律方法

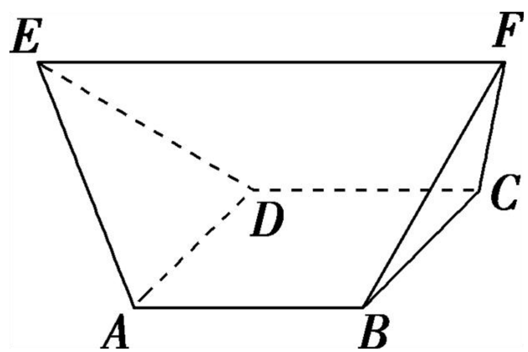
空间几何体表面积、体积的求法

（1）多面体的表面积是各个面的面积之和；组合体的表面积注意衔接部分的处理.

（2）旋转体的表面积问题注意其侧面展开图的应用.

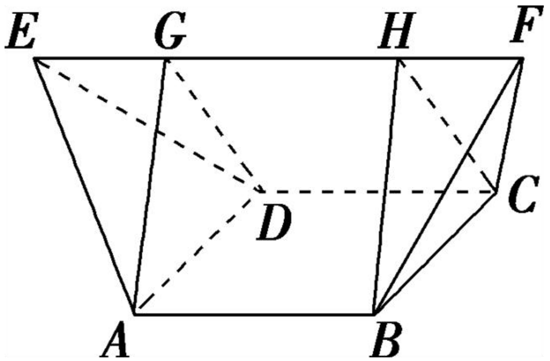
（3）求复杂几何体的体积时，常用割补法和等体积法求解.

跟踪训练　如图所示，在多面体 $FEABCD$ 中，已知 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，且 $\triangle ADE$，$\triangle BCF$ 均为正三角形，$EF /\!/ AB$，$EF=2$，求该多面体的体积 V.



解：如图所示，分别过 A，B 作 EF 的垂线 AG，BH，垂足分别为 G，H.连接 DG，CH，容易求得 $EG=HF=\frac{1}{2}$.

所以 $AG=GD=BH=HC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，



$S_{\triangle AGD}=S_{\triangle BHC}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

$V=V_{E\text{-}ADG}+V_{F\text{-}BHC}+V_{AGD\text{-}BHC}$

$=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\times 2+\frac{\sqrt{2}}{4}\times 1$

$=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

主题2　球与其他几何体的组合问题

例2　已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，$\triangle ABC$ 是边长为1的正三角形，SC 为球 O 的直径，且 $SC=2$，则此棱锥的体积为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

栏目导引

【解析】　设△ABC外接圆的圆心为O_1，

则$OO_1=\sqrt{OC^2-O_1C^2}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

三棱锥$S\quad ABC$的高为$2OO_1=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

所以三棱锥$S\quad ABC$的体积

$V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{6}$.故选 A.

【答案】　A

规律方法

解决与球有关组合体问题的常用方法

（1）与球有关的组合体，一种是内切，一种是外接，解题时要认真分析图形，充分发挥空间想象能力，做到以下几点：

①明确切点和接点的位置；

②确定有关元素间的数量关系；

③作出合适的截面图.

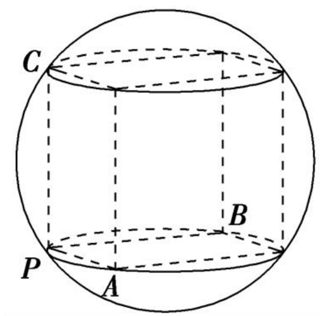
（2）一般地，作出的截面图中应包括每个几何体的主要元素，能反映出几何体与球体之间的主要位置关系和数量关系，将立体问题转化为平面问题解决.

栏目导引

跟踪训练

1.已知 PA，PB，PC 两两垂直且 $PA=\sqrt{2}$，$PB=\sqrt{3}$，$PC=2$，则过 P，A，B，C 四点的球的体积为________.

解析：以 PB，PA，PC 为长方体的长、宽、高作长方体，则长方体的对角线长为 $\sqrt{PA^2+PB^2+PC^2}=3$，



即球的半径为 $\frac{3}{2}$，$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{9}{2}\pi$.

答案：$\frac{9}{2}\pi$

2.已知两个圆锥有公共底面，且两圆锥的顶点和底面的圆周都在同一个球面上.若圆锥底面面积是这个球面面积的$\frac{3}{16}$，则这两个圆锥中，体积较小者的高与体积较大者的高的比值为__________.

解析：设圆锥的底面半径为 r，球面半径为 R，

则 $\pi r^2=\frac{3}{16}\times 4\pi R^2$，

解得 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}R$，

所以对应球心距为$\frac{1}{2}R$，

故小圆锥的高为 $R-\frac{1}{2}R=\frac{1}{2}R$，

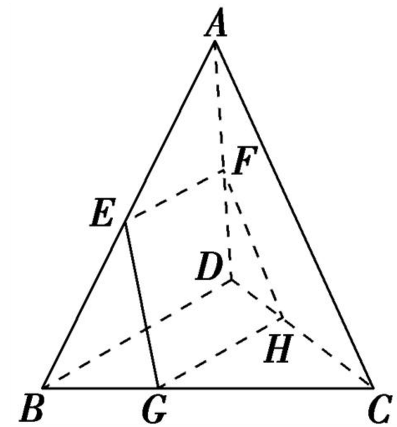
大圆锥的高为 $R+\frac{1}{2}R=\frac{3}{2}R$，

所以比值为$\frac{1}{3}$.

答案：$\frac{1}{3}$

主题3　空间中的共点、共线、共面问题

例3　如图所示，空间四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别为 AB，AD 的中点，G，H 分别在 BC，CD 上，且 $BG:GC=DH:HC=1:2$.



求证：（1）E、F、G、H 四点共面；

（2）GE 与 HF 的交点在直线 AC 上.

【证明】　（1）因为 $BG:GC=DH:HC$，

所以 $GH\parallel BD$，又因为 E、F 分别为 AB，AD 的中点，

所以 $EF\parallel BD$，所以 $EF\parallel GH$，

所以 E、F、G、H 四点共面.

（2）因为 G、H 不是 BC、CD 的中点，所以 $EF\neq GH$.

又 $EF\parallel GH$，

所以 EG 与 FH 不平行，

则必相交，设交点为 M，

$$\left.\begin{array}{l}EG\subset\text{平面}ABC\\HF\subset\text{平面}ACD\end{array}\right\}\Rightarrow M\in\text{平面 }ABC\text{ 且 }M\in\text{平面 }ACD$$

$\Rightarrow M$ 在平面 ABC 与平面 ACD 的交线上

$\Rightarrow M\in AC$.

所以 GE 与 HF 的交点在直线 AC 上.

规律方法

证明共点、共线、共面问题的方法

三点共线问题	证明空间三点共线问题，通常证明这些点都在两个面的交线上，即先确定出某两点在某两个平面的交线上，再证第三点是两个平面的公共点，则此点必在两个平面的交线上
共面问题	证明共面问题，一般有两种证法：一是由某些元素确定一个平面，然后证明其余元素在这个平面内；二是分别由不同元素确定若干个平面，然后证明这些平面重合
三线共点问题	证明三线共点问题，先证两条直线交于一点，再证明第三条直线经过这点，把问题转化为证明点在直线上的问题

跟踪训练　在四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB \parallel DC$，AB，BC，DC，AD（或延长线）分别与平面 α 相交于点 E，F，G，H.求证：E，F，G，H 必在同一直线上.

证明：因为 $AB \parallel CD$，

所以四边形 $ABCD$ 是一个平面图形，

即 AB，CD 确定一个平面 β，则 $AB \subset \beta$，$AD \subset \beta$.

因为 $E \in AB$，

所以 $E \in \beta$，

因为 $H\in AD$，所以 $H\in\beta$.

又因为 $E\in\alpha$，$H\in\alpha$，

所以 $\alpha\cap\beta=EH$.

因为 $DC\subset\beta$，$G\in DC$，

所以 $G\in\beta$.

又因为 $G\in\alpha$，

所以点 G 在 α 与 β 的交线 EH 上.

同理，点 F 在 α 与 β 的交线 EH 上.

所以 E，F，G，H 必在同一条直线上.

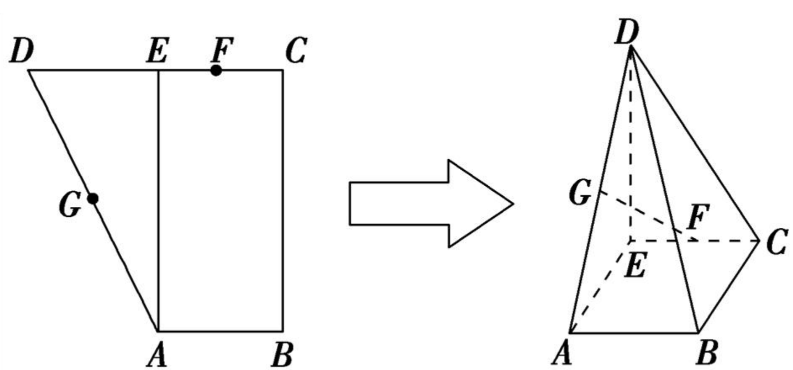
主题4　平行、垂直关系

例4　如图，已知直角梯形 $ABCD$ 中，E 为 CD 边中点，且 $AE\perp CD$，又 G，F 分别为 DA，EC 的中点，将$\triangle ADE$ 沿 AE 折叠，使得 $DE\perp EC$.

（1）求证：$AE\perp$平面 CDE；

（2）求证：$FG\parallel$平面 BCD；

（3）在线段 AE 上找一点 R，使得平面 $BDR\perp$平面 DCB，并说明理由.

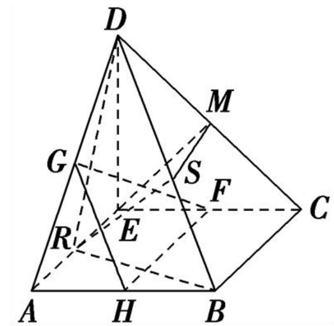


【解】　(1)证明：由已知得 $DE\perp AE$，$AE\perp EC$.

因为 $DE\cap EC=E$，DE，$EC\subset$平面 DCE，

所以 $AE\perp$平面 CDE.

（2）证明：取 AB 的中点 H，



连接 GH，FH，

所以 $GH \parallel BD$，$FH \parallel BC$，

因为 $GH \not\subset$ 平面 BCD，$BD \subset$ 平面 BCD，

所以 $GH \parallel$ 平面 BCD.

同理 $FH \parallel$ 平面 BCD，

又 $GH \cap FH = H$，

所以平面 $FHG \parallel$ 平面 BCD，

因为 $GF \subset$ 平面 FHG，

所以 $GF \parallel$ 平面 BCD.

（3）取线段 AE 的中点 R，

则平面 $BDR\perp$平面 DCB.

证明如下：

取线段 DC 的中点 M，取线段 DB 的中点 S，

连接 MS，RS，BR，DR，EM.

则 $MS \underline{\parallel} \frac{1}{2}BC$，

又 $RE \underline{\parallel} \frac{1}{2}BC$，

所以 $MS \underline{\parallel} RE$，

所以四边形 $MERS$ 是平行四边形，

所以 $RS\parallel ME$.

在$\triangle DEC$中，$ED=EC$，M是CD的中点，

所以 $EM\perp DC$.

由（1）知 $AE\perp$平面CDE，$AE\parallel BC$，

所以 $BC\perp$平面CDE.

因为 $EM\subset$平面CDE，

所以 $EM\perp BC$.

因为 $BC\cap CD=C$，

所以 $EM\perp$ 平面 BCD，

因为 $EM\parallel RS$，

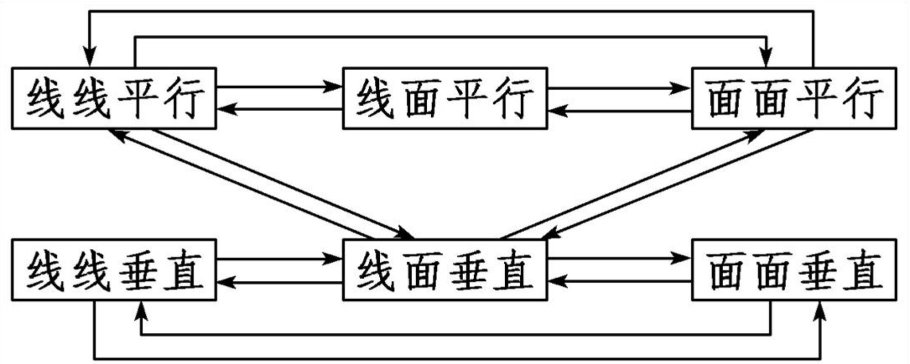
所以 $RS\perp$ 平面 BCD.

因为 $RS\subset$ 平面 BDR，

所以平面 $BDR\perp$ 平面 DCB.

规律方法

（1）平行、垂直关系的相互转化



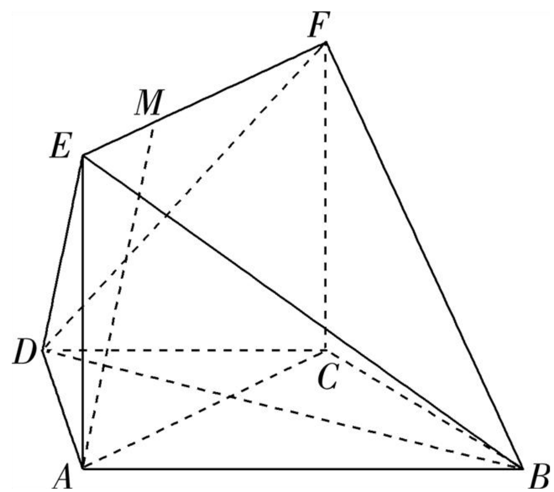
（2）证明空间线面平行或垂直需注意三点

①由已知想性质，由求证想判定；

②适当添加辅助线（或面）是解题的常用方法之一；

③用定理时要先明确条件，再由定理得出相应结论.

跟踪训练　如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AD=DC=CB=a$，$\angle ABC=60°$，平面 $ACFE\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ACFE$ 是平行四边形，点 M 在线段 EF 上.



（1）求证：$BC\perp$ 平面 $ACFE$；

（2）当 EM 为何值时，$AM\parallel$ 平面 BDF？证明你的结论.

解：（1）证明：在梯形 $ABCD$ 中，

因为 $AB // CD$，$AD=DC=CB=a$，$\angle ABC=60°$，

所以四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，$\angle ADC=\angle BCD=120°$，

所以 $\angle DCA=\angle DAC=30°$，

所以 $\angle ACB=90°$，所以 $AC\perp BC$，

又平面 $ACFE\perp$平面 $ABCD$，平面 $ACFE\cap$平面 $ABCD=AC$，$BC\subset$平面 $ABCD$，

所以 $BC\perp$平面 $ACFE$.

（2）当 $EM=\frac{\sqrt{3}}{3}a$ 时，AM∥平面 BDF.

证明如下：

在梯形 $ABCD$ 中，

设 $AC\cap BD=N$，连接 FN（图略），

因为 $AC\perp BC$，$\angle BAC=30°$，$CB=a$，

所以 $AB=2a$，$AC=\sqrt{3}a$.

因为 $AB\parallel CD$，

所以 $CN:NA=CD:AB=a:2a=1:2$.

因为 $EM=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，$EF=AC=\sqrt{3}a$，

所以 $EM:MF=1:2$.

又 $EF \parallel AC$，$EF=AC$，

所以 $MF \parallel AN$，$MF=AN$，

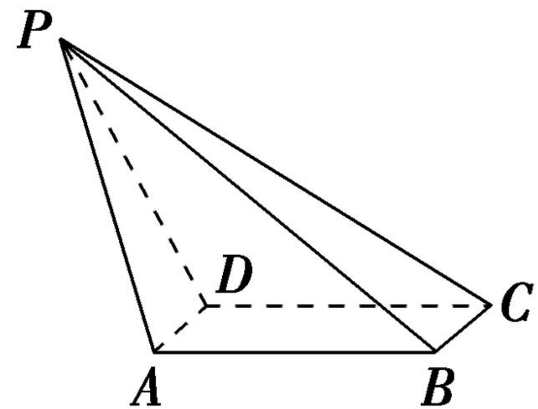
所以四边形 $ANFM$ 是平行四边形，所以 $AM \parallel NF$.

又 $NF \subset$ 平面 BDF，$AM \not\subset$ 平面 BDF，

所以 $AM \parallel$ 平面 BDF.

主题5　空间角的计算

例5　如图所示，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$AD\perp PD$，$BC=1$，$PC=2\sqrt{3}$，$PD=CD=2$.



(1)求异面直线 PA 与 BC 所成角的正切值；

(2)证明平面 $PDC\perp$ 平面 $ABCD$；

(3)求直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值.

【解】　(1)在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，因为底面 $ABCD$ 是矩形，所以 $AD=BC$ 且 $AD\parallel BC$.故 $\angle PAD$ 为异面直线 PA 与 BC 所成的角.

又因为 $AD\perp PD$，在 $\mathrm{Rt}\triangle PDA$ 中，

$$\tan\angle PAD=\frac{PD}{AD}=2,$$

所以异面直线 PA 与 BC 所成角的正切值为 2.

(2)证明：由于底面 $ABCD$ 是矩形，故 $AD\perp CD$.

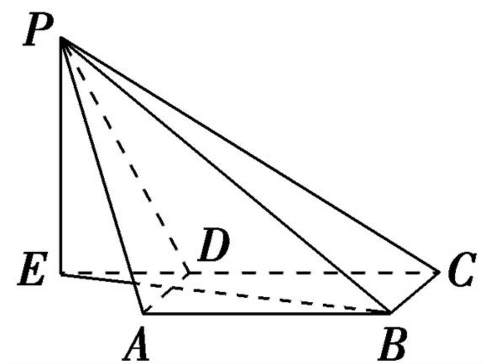
又因为 $AD\perp PD$，$CD\cap PD=D$，

所以 $AD\perp$ 平面 PDC.

而 $AD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以平面 $PDC\perp$ 平面 $ABCD$.

（3）在平面 PDC 内，过点 P 作 $PE\perp CD$ 交直线 CD 于点 E，连接 EB（如图）.



由于平面 $PDC\perp$平面 $ABCD$，而直线 CD 是平面 PDC 与平面 $ABCD$ 的交线，故 $PE\perp$平面 $ABCD$.由此得$\angle PBE$ 为直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角.

在$\triangle PDC$ 中，由于 $PD=CD=2$，$PC=2\sqrt{3}$，

可得$\angle PCD=30°$.

栏目导引

在 Rt△PEC 中，$PE=PC\sin 30°=\sqrt{3}$.

由 $AD \parallel BC$，$AD\perp$平面 PDC，

得 $BC\perp$平面 PDC，因此 $BC\perp PC$.

在 Rt△PCB 中，

$PB=\sqrt{PC^2+BC^2}=\sqrt{13}$.

在 Rt△PEB 中，

$\sin\angle PBE=\frac{PE}{PB}=\frac{\sqrt{39}}{13}$.

所以直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{39}}{13}$.

规律方法

空间角的求法

（1）找异面直线所成的角的三种方法

①利用图中已有的平行线平移；

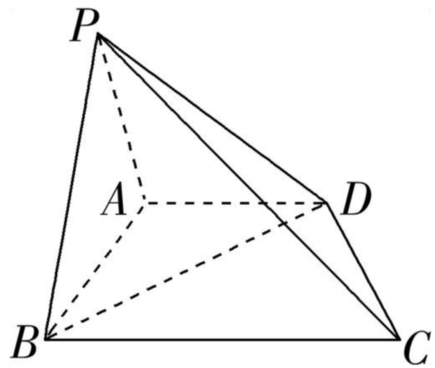
②利用特殊点（线段的端点或中点）作平行线平移；

③补形平移.

（2）线面角：求斜线与平面所成的角关键是找到斜线在平面内的射影，即确定过斜线上一点向平面所作垂线的垂足.通常是解由斜线段、垂线段、斜线在平面内的射影所组成的直角三角形.

（3）二面角：利用几何体的特征作出所求二面角的平面角，再把该平面角转化到某三角形或其他平面图形中求解.

跟踪训练　（2019·南阳检测）如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形，$\angle DAB=\angle ABC=90°$，且 $AB=BC=2AD=2$，侧面 $PAB\perp$底面 $ABCD$，$\triangle PAB$ 是等边三角形.



（1）求证：$BD\perp PC$；

（2）求二面角 $B\text{-}PC\text{-}D$ 的大小.

解析：（1）证明：如图，取 AB 的中点 O，连接 PO，CO.

因为$\triangle PAB$ 是等边三角形，所以 $PO\perp AB$.

又侧面 $PAB\perp$底面 $ABCD$，所以 $PO\perp$底面 $ABCD$，

又 $BD\subset$平面 $ABCD$，所以 $PO\perp BD$.

又 $AB=BC=2AD=2$，$\angle ABC=\angle DAB=90°$，

所以$\triangle DAB\cong\triangle OBC$，

所以$\angle BCO=\angle ABD$，所以 $BD\perp OC$，

又 OC，$PO\subset$平面 POC，$OC\cap PO=O$，

所以 $BD\perp$平面 POC，

又 $PC\subset$平面 POC，所以 $BD\perp PC$.

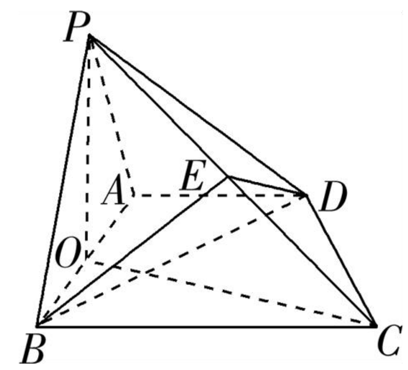
（2）如图，取 PC 的中点 E，连接 BE，DE，

因为 $PB=BC$，所以 $BE\perp PC$.

又 $BD\perp PC$，$BE\cap BD=B$，

所以 $PC\perp$平面 BDE，所以 $PC\perp DE$，

所以$\angle BED$ 是二面角 $B\text{-}PC\text{-}D$ 的平面角.



因为 $BC\perp AB$，平面 $PAB\cap$平面 $ABCD=AB$，

平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$，$AD\perp AB$，

所以 $AD\perp$平面 PAB，$BC\perp$平面 PAB.

所以 $BC\perp PB$，$AD\perp PA$，

由平面几何知识，可求得 $BE=\frac{1}{2}PC=\sqrt{2}$，$PD=BD=\sqrt{5}$，所以 $DE=\sqrt{3}$，

所以 $BE^2+DE^2=BD^2$，所以$\angle BED=90°$，

即二面角 $B\text{-}PC\text{-}D$ 的大小为 $90°$．