

# 幾何畸變之辨析與校正：從相機校準到單應性約束的綜合性技術報告

## 第一部分：解構畸變：電腦視覺中幾何像差的基礎分析

本部分旨在為後續的技術探討建立一個堅實的理論基礎，其核心目標是直接處理並釐清一個在電腦視覺領域普遍存在，卻至關重要的概念混淆。透過對兩種本質截然不同的幾何畸變——光學（鏡頭）畸變與透視畸變——進行嚴格的定義與區分，本報告將為理解其各自的校正方法論鋪平道路。整個報告的清晰度與實用價值，均建立在本部分所提供的概念框架之上。

### 1.1 畸變的兩種面貌：一個關鍵的區分

在電腦視覺的實踐中，「畸變」一詞常被籠統地用來描述任何導致影像看起來「不自然」或與現實世界幾何形態不符的現象<sup>1</sup>。然而，這種模糊的用法掩蓋了兩種在成因、數學模型及校正策略上完全不同的像差。一個專業的解決方案必須始於精確的診斷，而精確的診斷則源於對這兩種現象的清晰辨析。

#### 光學（鏡頭）畸變

光學畸變，或稱鏡頭畸變，是一種源於相機系統物理光學元件的像差。它並非場景本身的屬性，而是鏡頭設計與製造的固有結果，其根本原因是光線在通過曲面鏡片時，不同視場位置的光線折射率不均勻，導致影像的放大率並非在整個畫面上保持恆定<sup>1</sup>。這種畸變的直接後果是，在三維世界中筆直的線條，在投影到二維影像平面後會呈現為曲線<sup>4</sup>。

光學畸變主要表現為以下幾種類型：

- **桶狀畸變 (Barrel Distortion)**：也稱為負畸變，其特徵是影像的放大率隨視場角的增加而減小，導致影像向中心「膨脹」，畫面邊緣的直線向外彎曲，如同木桶的側面<sup>4</sup>。從數學上看，視場中的點會比其在理想模型中的位置更靠近影像中心<sup>1</sup>。這種畸變在廣角鏡頭和魚眼鏡頭中尤為常見，因為這些鏡頭需要將極寬的視場角壓縮到有限的感光元件上<sup>4</sup>。
- **枕狀畸變 (Pincushion Distortion)**：也稱為正畸變，其特徵與桶狀畸變相反，影像的放大率隨視場角的增加而增大，導致影像向中心「收縮」，畫面邊緣的直線向內彎曲，如同一個被按壓的枕頭<sup>4</sup>。此時，視場中的點會比其理想位置更遠離影像中心<sup>1</sup>。枕狀畸變常見於長焦鏡頭<sup>4</sup>。
- **複雜或鬍鬚狀畸變 (Complex/Moustache Distortion)**：這是一種更複雜的非線性畸變，

通常是桶狀和枕狀畸變的組合。例如，影像中心區域可能表現為桶狀畸變，而邊緣區域則轉變為枕狀畸變，使得水平線呈現出如同 handlebar moustache 的形狀<sup>4</sup>。這種畸變多見於結構複雜的變焦鏡頭。

## 透視畸變

與光學畸變不同，透視畸變並非由鏡頭的光學缺陷引起，而是三維世界投影到二維平面這一過程的自然幾何結果<sup>6</sup>。它是由相機的視點（即其在空間中的位置和朝向）相對於場景的幾何關係所決定的<sup>3</sup>。事實上，透視畸變是我們人類視覺系統感知深度和距離的基本方式<sup>6</sup>。

透視畸變的主要表現形式包括：

- 收斂線 (**Converging Lines**)：在三維空間中相互平行的線條（如鐵軌、建築物的垂直邊緣），在二維影像中會表現為向遠處的某個「消失點」(vanishing point) 收斂<sup>2</sup>。
- 近大遠小 (**Foreshortening**)：距離相機較近的物體在影像中會顯得不成比例地大，而距離較遠的物體則顯得異常小，這種距離的拉伸感被稱為「擴展畸變」(extension distortion)<sup>12</sup>。反之，使用長焦鏡頭從極遠處拍攝時，遠近物體之間的距離感會被壓縮，稱為「壓縮畸變」(compression distortion)<sup>12</sup>。

## 1.2 為何此區分對校正策略至關重要

對這兩種畸變的嚴格區分，其重要性遠超學術層面的分類。它直接決定了我們應當採用何種數學工具和演算法來進行校正。將用於校正一種畸變的工具誤用於另一種，不僅效果不佳，在根本上是數學模型的錯配。

- 工具的錯配：光學畸變是一種非線性、徑向相關的像素位移。校正它的方法必須能夠模擬這種複雜的非線性映射，這通常是透過基於相機內參和畸變係數的多項式模型來實現的<sup>13</sup>。而透視畸變則是一種射影變換，它在齊次座標下是線性的，並且保持線的直線性。校正它的工具是單應性變換 (Homography)，其作用是透過一個 3x3 的矩陣來恢復場景中的平行關係<sup>3</sup>。因此，試圖用線性的單應性變換去校正非線性的桶狀畸變，無異於用一把直尺去測量曲線的長度，其結果必然是錯誤的。
- 成因的差異：一個更深層次的區別在於它們的成因。光學畸變是鏡頭的函數，而透視畸變是視點的函數。這意味著，如果你對一張照片中的桶狀畸變不滿意，更換一個更高質量的鏡頭可能會解決問題。但如果你對廣角鏡頭下人像的鼻子顯得過大（一種透視畸變）不滿意，問題的根源並非鏡頭本身的光學缺陷，而是為了將人物納入畫面而不得不採取的過近拍攝距離<sup>6</sup>。正確的解決方案不是在後製中應用某種濾鏡，而是在拍攝時後退幾步，並換用一個更長焦距的鏡頭來獲得相同的構圖<sup>6</sup>。

這種對根本原因的理解，是從單純的影像處理者轉變為專業的電腦視覺工程師的關鍵一步。它將問題從「如何修復這張照片」提升到「如何從源頭上避免或正確地建模這個現象」。

為了將上述概念差異固化為一個清晰的參考框架，下表對兩種畸變進行了多維度的比較。這個表格將作為貫穿本報告的基礎，為後續所有關於校正技術的討論提供一個明確的分類依據。

表1: 幾何畸變的比較分類學

特徵	光學(鏡頭)畸變	透視畸變
成因	鏡頭的物理光學特性(玻璃曲率、組件排列) <sup>1</sup>	相機相對於場景的視點(位置與方向) <sup>3</sup>
視覺效果	直線變曲線(桶狀、枕狀) <sup>2</sup>	平行線變收斂線, 近大遠小 <sup>2</sup>
數學模型	非線性、徑向相關的多項式模型 <sup>13</sup>	線性射影變換(3x3單應性矩陣) <sup>15</sup>
校正工具	相機校準(Camera Calibration) <sup>15</sup>	單應性變換(Homography) <sup>17</sup>
現實世界類比	透過一個有瑕疵的放大鏡觀察世界	人類眼睛觀察一條延伸至遠方的長路

## 第二部分：鏡頭畸變的標準解決方案：相機校準

在明確了光學畸變的成因與特性後，本部分將深入探討其標準且最為精確的校正方法——相機校準。此過程並非簡單的影像濾波，而是一種嚴謹的系統辨識(system identification)過程，旨在精確測量出特定相機與鏡頭組合的內部光學參數。一旦這些參數被確定，便可應用於後續所有由該系統拍攝的影像，以數學方式逆轉畸變過程，恢復場景的幾何真實性。

### 2.1 數學框架：Brown-Conrady模型

為校正鏡頭畸變，我們需要一個能夠精確描述其行為的數學模型。目前業界和學術界最廣泛使用的模型是Brown-Conrady模型，也被稱為Plumb-Line模型，它將畸變分解為徑向和切向兩個主要部分<sup>13</sup>。其核心思想是，將影像中每個被畸變的像素點(xdistorted,ydistorted)的位置，視為其在理想針孔模型下無畸變位置(x,y)經過一系列變換後的結果。校準的目標就是找出這個逆變換。

- **徑向畸變(Radial Distortion)**：這是最主要的光學畸變成分，它導致像素點沿著以畸變中心(通常接近影像中心)為原點的徑向方向發生位移。位移的幅度是像素點到畸變中心距離r的函數，其中 $r^2 = x^2 + y^2$ 。該變換通常用一個偶次多項式來建模<sup>13</sup>：

$$x_{corrected} = x_{distorted}(1 + k_1r^2 + k_2r^4 + k_3r^6)$$

$$y_{corrected} = y_{distorted}(1 + k_1r^2 + k_2r^4 + k_3r^6)$$

其中， $k_1, k_2, k_3$  是徑向畸變係數。通常情況下，使用前兩個係數  $k_1$  和  $k_2$  就足以校正大多數鏡頭的畸變。對於畸變非常嚴重的廣角或魚眼鏡頭，則可能需要引入第三個係數  $k_3$ <sup>19</sup>。 $k_1$  的正負值直接對應枕狀畸變和桶狀畸變。

- **切向畸變(Tangential Distortion)**：這種畸變的成因是鏡頭組件與感光元件平面未能完全平行安裝，導致輕微的傾斜<sup>13</sup>。它會引起像素點在切向方向上的位移，由兩個參數  $p_1$  和  $p_2$  描述：

$$x_{corrected} = x + [2p_1xy + p_2(r^2 + 2x^2)]$$

$$y_{corrected}=y+[p_1(r^2+2y^2)+2p_2xy]$$

切向畸變的影響通常遠小於徑向畸變。

綜合起來，校準過程的目標就是精確地估計出這組畸變係數 ( $k_1, k_2, p_1, p_2, k_3$ )。

- **相機內參 (Intrinsic Parameters)**：在估計畸變係數的同時，校準過程還會求解相機的內參矩陣。這個矩陣描述了相機從其自身的三維座標系到二維影像平面的理想投影關係，包含了焦距 ( $f_x, f_y$ ) 和主點座標 ( $c_x, c_y$ ) 等核心參數<sup>14</sup>。

## 2.2 標準流程：使用平面標定板進行校準

要解出上述包含多個未知數的複雜非線性方程組，我們需要一組數據，其中包含大量已知的三維世界點及其在影像中對應的二維像素位置<sup>19</sup>。使用一個具有已知幾何結構的標定板，是獲取這種對應關係最可靠和普遍的方法。

- **標定板的選擇**：棋盤格 (Checkerboard) 是最常用的標定板。其優勢在於，黑白方塊的交點 (角點) 在影像中對比度高，可以被演算法以亞像素級的精度穩定地偵測出來。更重要的是，這些角點在標定板這個二維平面上的相對物理位置是預先精確已知的<sup>22</sup>。
- **校準流程詳解**：
  1. **影像採集**：這是校準成功與否的關鍵第一步。需要使用待校準的相機，從不同的角度、距離和方位拍攝標定板。通常建議拍攝15到20張高質量的影像。拍攝時應確保標定板出現在畫面的不同區域 (中心、邊緣、角落)，以便充分採樣整個視場的畸變情況<sup>21</sup>。
  2. **角點偵測**：對採集到的每一張影像，使用電腦視覺函式庫 (如OpenCV中的 `cv.findChessboardCorners()` 函數) 來自動偵測棋盤格角點的二維像素座標 ( $u, v$ )<sup>14</sup>。
  3. **建立對應關係**：為偵測到的二維角點建立其對應的三維世界座標 ( $X, Y, Z$ )。由於標定板是一個平面，我們可以方便地在其表面定義一個二維座標系，並將所有角點的  $Z$  座標設為0。例如，可以將左上角的角點定義為原點 ( $0, 0, 0$ )，其右側的點為 ( $s, 0, 0$ )，下方的點為 ( $0, s, 0$ )，其中  $s$  是棋盤格方塊的實際物理邊長<sup>14</sup>。
  4. **參數優化**：將所有影像中建立的數百個「三維世界點 - 二維影像點」對應關係，作為一個大型優化問題的輸入。諸如OpenCV的 `cv.calibrateCamera()` 函數，其內部實作了基於張正友標定法等先進演算法，透過迭代優化，尋找一組最佳的相機內參矩陣和畸變係數，使得所有三維點根據這些參數投影到影像平面上的位置 (重投影點) 與實際偵測到的二維角點位置之間的總誤差 (重投影誤差) 最小化<sup>14</sup>。
  5. **影像去畸變**：校準完成後，我們就得到了一組描述該相機光學特性的「指紋」——即相機內參矩陣和畸變係數。對於後續用該相機拍攝的任何新影像，都可以使用 `cv.undistort()` 函數，或效率更高的 `cv.initUndistortRectifyMap()` 結合 `cv.remap()` 的方式，來應用這些參數，生成一張去除了鏡頭畸變的、幾何上更精確的影像<sup>14</sup>。

這個過程的本質，並非一種通用的影像處理濾鏡，而是一種針對特定硬體 (某個相機+某個鏡頭) 的精密測量。這也意味著，一旦相機的焦距或對焦距離發生改變，之前測得的校準參數便會失效，需要重新進行校準<sup>23</sup>。這種對硬體狀態的嚴格依賴性，突顯了相機校準作為一種系統辨識過程的科學嚴謹性。

## 2.3 另一種哲學：Plumb-Line方法

除了依賴於特定標定板的標準方法外，還存在一種更為靈活的校準哲學，即Plumb-Line（鉛垂線）方法。這種方法利用了一個強大的幾何先驗知識：在一個理想的針孔相機模型中，三維世界中的直線在投影後必然也是直線。而鏡頭畸變的標誌性特徵，正是它會破壞這種直線性，使直線變為曲線<sup>26</sup>。

- 核心原理：Plumb-Line方法將校準問題重新表述為一個優化問題：尋找一組畸變參數，當應用這組參數對原始影像進行校正後，能使得影像中原本彎曲的線條變得「最直」。
- 實現方法：
  1. 邊緣偵測：首先，在待校正的影像中偵測出所有可能的邊緣點（edgels）。
  2. 直線性度量：需要一個量化指標來評估影像中所有邊緣點的「直線性」。霍夫變換（Hough Transform）是一個理想的工具。在霍夫參數空間中，共線的點會匯集到一個峰值上。因此，一個充滿直線的影像，其霍夫空間的能量分佈會非常集中；而一個充滿曲線的影像，其能量分佈則會很分散。這種分佈的集中程度可以用資訊熵（entropy）來衡量：熵越低，代表線條越直<sup>26</sup>。
  3. 迭代優化：演算法會迭代地嘗試不同的畸變參數組合。在每一次迭代中，用當前的參數對原始邊緣點進行校正，然後計算校正後點集的霍夫空間熵。優化的目標就是找到一組能使熵最小化的畸變參數。
- 優劣分析：Plumb-Line方法的最大優勢在於其靈活性，它不需要特殊的標定板，原則上可以從任何包含足夠多直線結構的單張影像（如建築、室內場景）中估計畸變參數<sup>26</sup>。然而，這種靈活性也帶來了穩健性的挑戰。它依賴於場景中必須存在可供利用的直線，並且邊緣偵測和線條擬合的準確性會直接影響最終結果。在紋理複雜或缺乏直線結構的自然場景中，其性能可能會下降<sup>30</sup>。

這兩種方法——基於標定板的控制測量法和基於場景先驗的Plumb-Line法——體現了電腦視覺中一個根本性的權衡：是在一個受控的環境中追求極致的精度，還是在一個不受控的「野外」環境中追求更廣泛的適用性。對於需要進行精密測量或三維重建的應用，基於標定板的傳統校準方法因其無可比擬的精度和可靠性，至今仍是黃金標準。

## 第三部分：單應性變換：透視的校正工具，而非鏡頭的

本部分將直接回應使用者查詢中關於「homography」的部分，將其從鏡頭畸變的討論中剝離出來，並放置到其正確的理論與應用脈絡中。透過對單應性變換的數學原理、應用領域及其根本性假設的深入剖析，本節旨在徹底釐清其與光學畸變校正的區別，從而鞏固第一部分建立的核心概念框架。

### 3.1 單應性變換的數學框架

單應性（Homography）是射影幾何中的一個核心概念，在電腦視覺中，它特指描述兩個平面之間射影關係的變換<sup>17</sup>。假設空間中有一個平面

$\Pi$ ，有兩台針孔相機從不同位置觀察這個平面，那麼，平面  $\Pi$  上的同一個物理點在兩台相機各自成像平面上的投影點之間，存在一種唯一的映射關係，這個映射就由一個單應性矩陣  $H$  來描述。

- 數學定義：單應性變換由一個  $3 \times 3$  的非奇異矩陣  $H$  表示。如果點  $p=[x,y,1]^T$  是第一個影像平面上某點的齊次座標，而  $p'=[x',y',1]^T$  是其在第二個影像平面上對應點的齊次座標，那麼它們之間的關係可以表示為<sup>15</sup>：

$$p' \sim H p$$

這裡的  $\sim$  符號表示等式在一個非零的尺度因子下成立，即  $p'=\lambda H p$ 。儘管  $H$  矩陣有9個元素，但由於這個尺度模糊性，它實際上只有8個獨立的自由度 (Degrees of Freedom)<sup>33</sup>。

- 核心性質：單應性變換最重要的性質是它保持共線性 (collinearity)，即原來在同一直線上的點集，經過單應性變換後依然在同一直線上<sup>33</sup>。
- 估計方法：要唯一地求解出具有8個自由度的  $H$  矩陣，至少需要4對不共線的對應點<sup>17</sup>。從一組點對應中估計

$H$  的標準演算法是直接線性變換 (Direct Linear Transform, DLT)。在實際應用中，由於特徵點匹配可能存在誤差 (外點, outliers)，通常會將 DLT 嵌入到一個更穩健的框架中，如隨機抽樣一致性 (RANSAC)，以從包含大量錯誤匹配的數據中估算出可靠的  $H$  矩陣<sup>15</sup>。

## 3.2 真實的應用領域：平面對齊與視角校正

理解了單應性變換的數學本質後，其應用領域便顯而易見。它的所有應用都圍繞著一個核心能力：將一個平面視角的影像「扭曲」成另一個平面視角的影像。

- 透視校正 (Perspective Correction)：這是單應性最經典的應用。當我們從一個傾斜的角度拍攝一個平面物體 (如一本書、一幅畫或一座建築的立面) 時，會產生透視畸變。透過找到影像中該平面的四個角點，並將它們映射到一個標準的矩形 (例如，目標影像的四個角點)，我們可以計算出一個單應性矩陣。將這個矩陣應用於原始影像，就可以生成一個彷彿是從正前方拍攝的、無透視畸變的校正影像<sup>3</sup>。
- 影像拼接 (Image Stitching)：在創建全景圖時，需要將多張有重疊區域的影像無縫地拼接在一起。單應性變換是實現這一目標的關鍵。對於相鄰的兩張影像，演算法會在其重疊區域找到足夠多的對應特徵點，計算出將一張影像的坐標系變換到另一張影像坐標系所需的單應性矩陣，然後對影像進行變換 (warping)，使其完美對齊，最終融合成一張寬視角的全景圖<sup>17</sup>。
- 擴增實境 (Augmented Reality)：在 AR 應用中，經常需要將虛擬的二維圖像 (如一個海報或一個標誌) 疊加到現實世界的某個平面上 (如牆壁或桌面)。透過即時追蹤現實平面上的特徵點，系統可以持續計算出從虛擬圖像平面到當前相機視角成像平面的單應性矩陣，從而對虛擬圖像進行實時的透視變換，使其看起來像是無縫地「貼」在現實物體表面上<sup>17</sup>。

## 3.3 釐清誤解：為何單應性對鏡頭畸變無效

至此，單應性變換與鏡頭畸變校正之間的根本性不相容性已經非常清晰。

- 數學上的矛盾：單應性變換的一個基本公理是「保直線性」。它是一個線性的射影變換，只能

將直線映射為直線。而鏡頭畸變的定義性特徵恰恰是它「破壞直線性」，將直線映射為曲線<sup>3</sup>。因此，從數學上講，不存在任何一個 $3 \times 3$ 的單應性矩陣能夠模擬或逆轉桶狀、枕狀這種非線性的徑向位移。

- 正確的工作流程：當一張影像同時受到鏡頭畸變和透視畸變的影響時（這在廣角鏡頭拍攝建築時非常常見），正確的校正流程必須遵循一個嚴格的順序。這個流程在同時處理這兩種問題的研究中得到了明確的闡述<sup>3</sup>：

1. 第一步：鏡頭畸變校正。首先，必須應用從相機校準中獲得的非線性畸變模型，對影像進行去畸變處理。這一步的目標是將所有彎曲的線條恢復為直線，使影像符合理想的針孔模型。
2. 第二步：透視畸變校正。在經過第一步處理後得到的、幾何上呈直線性的影像基礎上，再應用單應性變換來校正由相機視點引起的透視效果（例如，使建築物的垂直線相互平行）。

顛倒這個順序，或者試圖用單應性直接處理帶有鏡頭畸變的影像，都會導致錯誤的結果。因為在一個彎曲的座標系中，透視變換的假設前提（平面上的點）已經不再成立。

這個分析揭示了單應性變換的一個核心前提，即平面性假設（**Planarity Assumption**）<sup>17</sup>。單應性之所以在上述應用中有效，是因為它處理的對象——無論是建築立面、白板還是全景圖中的遠景——都可以被近似為一個三維空間中的平面。這也解釋了為何在使用者提供的關於羽球場特徵偵測的研究材料中<sup>15</sup>，單應性會成為一個核心概念。羽球場地正是一個理想的平面，因此場地上所有點在不同視角下的投影關係，都可以由一個唯一的單應性矩陣來精確描述。然而，這並不意味著單應性可以用於校正拍攝羽球場的相機本身的鏡頭畸變。它僅僅是在鏡頭畸變被校正（或被忽略）之後，用於處理視角變化問題的正確工具。

## 第四部分：單應性損失：從影像校正到幾何一致性的範式轉移

本部分將直接分析使用者查詢中提到的「homography loss」這一概念，並將其從傳統的影像校正語境中剝離，重新放置到現代深度學習模型訓練的框架內。分析將表明，單應性損失並非一種用於修正輸入影像畸變的技術，而是一種先進的正規化（regularization）方法，其目標是向神經網路的學習過程注入幾何先驗知識，以約束其輸出的結構一致性。

### 4.1 重新定義問題：單應性損失的真實意圖

在深度學習的背景下，特別是在如使用者提供的研究材料中所述的場景中<sup>15</sup>，單應性損失的核心思想發生了根本性的轉變。它不再是一個作用於影像像素的後處理步驟，而是作為一個可微分的模組，被直接嵌入到神經網路的損失函數中。

- 核心目標：單應性損失的目標不是校正輸入影像的任何畸變。相反，它對模型的輸出施加了一個強大的全域幾何約束。這個約束可以被通俗地表述為：「你（模型）預測出的所有關鍵點，它們在空間上的排列組合必須是幾何上合理的，必須符合它們是從同一個三維平面經過一次射影變換得到的這一物理規律。」<sup>15</sup>。它懲罰的是那些雖然單個點看起來位置合理，但整體佈局卻違反了射影幾何定律的預測結果。

這種方法代表了電腦視覺領域的一個重要趨勢：將經典的幾何學工具，從作為預處理或後處理的

獨立模組，轉變為能夠在訓練過程中指導模型學習的、可微分的損失項。我們不再是先讓模型做出可能有瑕疵的預測，然後再用幾何工具去「修復」它；而是直接在訓練中「教導」模型，讓它從一開始就學會生成幾何上一致的預測。

## 4.2 架構詳解：單應性損失的計算機制

根據使用者提供的研究材料<sup>15</sup>，單應性損失的計算流程是一個精巧的自監督(self-supervised)過程，它利用模型自身的預測來構建一個衡量「自我一致性」的指標。

- 計算流程：

1. 定義標準點集(**Canonical Points**)：首先，需要一個固定不變的幾何參考基準。在羽毛球場的案例中，這是一個根據官方規則繪製的標準二維鳥瞰圖，其中包含了所有場地交點的精確座標，記為  $P_{canonical}$ 。
2. 獲取模型預測(**Predicted Points**)：在訓練的每一步中，將一張帶有透視畸變的場地影像輸入模型(例如YOLO-Pose)。模型輸出一組預測的關鍵點座標，記為  $P_{pred}$ 。
3. 估計單應性矩陣(**Estimate Homography**)：利用  $P_{canonical}$  和  $P_{pred}$  之間的對應關係，使用DLT演算法計算出一個「最佳擬合」的單應性矩陣  $H_{pred}$ ，這個矩陣描述了將標準鳥瞰圖變換到當前模型預測視角所需的變換。
4. 重投影(**Reproject**)：將計算出的  $H_{pred}$  應用於標準點集  $P_{canonical}$ ，得到一組重投影點  $P_{reproj} = H_{pred} \cdot P_{canonical}$ 。 $P_{reproj}$  代表了「如果模型的預測是完全幾何一致的，那麼這些點應該在的位置」。
5. 計算損失(Calculate Loss)：最終的單應性損失，是模型原始預測的點集  $P_{pred}$  與經過幾何約束後「理想化」的重投影點集  $P_{reproj}$  之間的差異。通常使用L1距離來計算這個誤差：

$$L_{homography} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|p_{pred,i} - p_{reproj,i}\|_1$$

- 可微分性的挑戰與解決方案：將上述流程整合到梯度下降的訓練循環中，最大的技術障礙在於第三步。標準的DLT演算法依賴於奇異值分解(SVD)來求解線性方程組。然而，標準SVD的反向傳播在特定情況下是數值不穩定的<sup>15</sup>。悖論在於，當模型的預測  $P_{pred}$  越準確、越符合共面約束時，DLT求解的矩陣就越接近奇異，導致其最小奇異值趨近於零，這恰恰是會引發梯度爆炸的條件<sup>15</sup>。

為了解決這個根本性衝突，最實用且穩健的工程解決方案是使用專為深度學習設計的可微分幾何函式庫，其中Kornia是最傑出的代表。Kornia提供了一個 `kornia.geometry.homography.find_homography_dlt` 函數，它被封裝成一個標準的PyTorch層。其內部不僅執行了DLT演算法，更重要的是，它實現了一個客製化的、數值穩定的反向傳播梯度，確保了梯度能夠安全地流過這個幾何計算模組，從而實現了真正的端到端訓練<sup>15</sup>。

## 4.3 比較分析：全域約束 vs. 局部幾何約束



單應性損失代表了一種\*\*全域(Global)幾何約束。為了更全面地評估其價值，有必要將其與更簡單的局部(Local)\*\*幾何約束進行比較，例如在<sup>15</sup>中提到的基於角度的損失。

- 局部幾何約束(如角度損失):這種損失獨立地作用於模型預測的每一個幾何特徵。例如，對於每一個被預測為「L型交點」的特徵，計算其內部線條構成的角度，並懲罰其與90度的偏差。這種方法的優點是計算成本低，且對離群點穩健——即使模型只正確檢測到一個交點，它也能提供有效的修正訊號。
- 全域幾何約束(單應性損失):這種損失同時作用於模型預測的所有特徵點的集合。它不僅約束了局部角度，還同時隱含地約束了所有點之間的長度比例、共線性等所有射影幾何屬性。它的約束力遠比局部損失更強、更全面。然而，它的計算成本更高，並且對離群點更敏感——一個嚴重的錯誤預測點就可能扭曲整個單應性矩陣的估計，從而污染所有點的梯度。此外，它需要至少4個大致準確的點預測才能開始提供有意義的訊號<sup>15</sup>。

這兩種約束並非相互排斥，而是互補的。一個精巧的訓練策略，可以採用課程學習(Curriculum Learning)的方式:在訓練初期，當模型預測還很嘈雜時，主要依賴穩健的局部損失;當模型性能穩定後，再逐漸引入權重，啟用強大的全域單應性損失，對模型的預測進行精修<sup>15</sup>。

表2:幾何一致性損失的比較分析

屬性	局部約束(如角度損失)	全域約束(單應性損失)
約束範圍	局部(單個特徵)	全域(所有特徵的集合)
強制資訊	局部角度正確性	所有射影幾何屬性(角度、比例、共線性等)
計算成本	低	中等(涉及SVD)
對離群點穩健性	較高	較低
數據需求	每個交點的局部影像塊	至少4個跨影像的對應點
理想訓練階段	早期(提供穩定初始訊號)	中後期(進行全域精修)

最後，這種設計體現了一種工程上的優雅協同。為計算單應性損失而構建的可微分DLT模組，在模型訓練完成後，可以直接被複用為一個強大的推斷工具。對於任何新的影像幀，只需將模型預測的關鍵點輸入該模組，即可即時計算出將當前視角校正到標準鳥瞰圖所需的單應性矩陣，直接賦能下游的戰術分析和視覺化應用<sup>15</sup>。

## 第五部分:深度學習前沿:現代鏡頭畸變校正方法

傳統的相機校準方法雖然精確，但其依賴於特定的標定板或場景結構，限制了其在處理來源未知、未經校準的「野生」影像時的應用。針對這一局限性，深度學習提供了一種全新的範式:從海量數據中學習「盲」幾何畸變校正，即在沒有相機先驗資訊的情況下，僅從單張輸入影像中恢復其無畸變的版本。本部分將探討這一領域的前沿方法，這也正是使用者在尋求「比...更好的方法」時，所真正觸及的技術前沿。

### 5.1 範式轉移:從顯式建模到數據驅動校正

- 傳統方法的局限:如第二部分所述,傳統方法需要一個受控的校準流程。對於網路上隨處可見的、由不同設備拍攝的數十億張照片,我們無法為每一張都進行這樣的校準。這是一個巨大的應用瓶頸<sup>35</sup>。
- 深度學習的承諾:深度學習方法的核心思想是,無畸變的自然影像在統計上具有某些共通的規律(例如,直線結構、對稱性),而鏡頭畸變會系統性地破壞這些規律。透過在一個龐大的、包含畸變影像與其對應無畸變影像的數據集上進行訓練,一個深度神經網路可以學會辨識這些由畸變引入的「不自然」的模式,並學習如何逆轉它們<sup>36</sup>。

## 5.2 盲畸變校正的網路架構

當前,基於深度學習的盲畸變校正方法主要可以分為兩大類,它們在學習目標的抽象層次上有所不同。

### 方法一:參數預測網路

- 核心思想:這種方法並未完全拋棄傳統的物理模型,而是將深度學習作為一個強大的參數估計器。網路的任務是直接從輸入的畸變影像中,回歸出描述該畸變的物理模型參數<sup>35</sup>。
- 實現方式:通常採用一個標準的卷積神經網路(CNN)架構(如ResNet或Xception),其最後一層是一個全連接層,輸出幾個數值。這些數值直接對應於Brown-Conrady模型中的畸變係數,如(k1,k2,cx,cy)。一旦網路預測出這些參數,就可以將它們代入傳統的數學公式中,對任意解析度的原始影像進行去畸變處理<sup>39</sup>。
- 優點:
  - 可解釋性與緊湊性:輸出是幾個有物理意義的參數,易於理解和存儲。
  - 解析度無關:由於學習到的是畸變模型本身,而非像素級的映射,因此可以用於校正比訓練影像解析度高得多的影像<sup>39</sup>。
- 缺點:
  - 模型限制:其校正能力的上限受制於所選物理模型的表達能力。它只能校正那些能被Brown-Conrady模型很好描述的畸變類型。

### 方法二:位移場/光流預測網路

- 核心思想:這種方法完全繞過了任何顯式的物理模型,將畸變校正視為一個密集的像素級影像到影像的轉換問題。網路的任務是為輸入影像中的每一個像素,預測一個二維向量,該向量指示了該像素應該移動到哪個位置才能形成無畸變的影像<sup>36</sup>。
- 實現方式:通常採用編碼器-解碼器(Encoder-Decoder)架構,如U-Net。編碼器部分逐步下採樣,提取影像的深層語義特徵並擴大感受野;解碼器部分則逐步上採樣,並結合來自編碼器的跳躍連接(skip connections),將特徵圖恢復到原始解析度,最終輸出一個與輸入影像大小相同的、包含x和y方向位移的雙通道「位移場」(displacement field)或「光流」(flow)<sup>36</sup>。

- 優點：
  - 靈活性與通用性：這是一種非參數方法，理論上可以學習並校正任意複雜的幾何畸變，遠不止徑向和切向畸變，甚至包括一些由影像處理軟體產生的波浪形變等<sup>36</sup>。
- 缺點：
  - 黑箱操作：網路學習到的是一個隱式的像素映射，缺乏物理可解釋性。
  - 解析度依賴：通常只能處理與訓練時相同解析度的影像。

### 5.3 訓練的基石：合成數據的關鍵作用

無論採用哪種架構，訓練深度畸變校正模型都需要一個核心要素：大規模的成對訓練數據，即大量的（畸變影像，無畸變真值）對。在現實世界中大規模採集這樣的數據極其困難。因此，合成數據生成成為了推動這一領域發展的關鍵技術<sup>36</sup>。

- 生成流程：研究人員通常從一個大型的、高質量的無畸變自然影像數據集（如COCO）出發。然後，編寫腳本，以程式化的方式對每一張乾淨的影像應用隨機生成的、但參數已知的畸變。例如，隨機採樣一組  $(k_1, k_2, \dots)$  參數，應用Brown-Conrady模型生成一張畸變影像。這樣，我們就免費獲得了一個完美的訓練樣本：畸變影像是輸入，而原始的乾淨影像（或用於生成畸變的參數/位移場）就是監督學習的真值（ground truth）。

### 5.4 無監督學習：回歸幾何第一性原理

一個更前沿的研究方向是無監督或自監督的畸變校正，它旨在擺脫對成對數據的依賴。這些方法的智慧之處在於，它們將經典的幾何先驗（如Plumb-Line原理）重新引入到深度學習的損失函數中<sup>40</sup>。

- 實現思路：網路的輸入是一張畸變影像，輸出是一張校正後的影像。損失函數並非基於與某個真值影像的比較，而是直接在校正後的影像上計算一個「直線性分數」。例如，在校正後的影像上運行直線偵測演算法，如果偵測到的線條不夠直，就會產生一個很大的損失。網路透過梯度下降，學習生成那種能使損失最小化（即線條最直）的校正輸出<sup>40</sup>。

這種無監督的方法，可以看作是傳統Plumb-Line方法的一次現代化、基於學習的重塑。傳統方法使用顯式的迭代優化演算法和手工設計的直線性度量（如霍夫熵）來尋找最佳參數；而無監督深度學習方法則使用一個高度參數化的函數逼近器（CNN）和基於梯度的優化，來學習一個能直接實現相同目標的端到端變換。這揭示了電腦視覺發展的一個深刻趨勢：核心的幾何與物理原理是持久的，但實現這些原理的技術手段，正從顯式演算法設計，逐步演變為從數據中學習的隱式函數。

## 第六部分：綜合分析與戰略性建議

經過對幾何畸變的基礎辨析、傳統校正方法的深入剖析、單應性變換的正確定性和深度學習前沿技術的探討，本報告的最後一部分將對所有資訊進行綜合，為從業者提供一個清晰的比較框架和一套具有可操作性的戰略性決策指南。

## 6.1 比較框架：傳統方法 vs. 深度學習方法

為了在不同應用場景下做出明智的技術選型，有必要對傳統相機校準和現代深度學習校正這兩種範式進行多維度的比較。

表3: 畸變校正範式的戰略性比較

維度	傳統校準(標定板法)	Plumb-Line方法	深度學習(盲校正)
核心原理	透過已知3D/2D點對應，求解物理光學模型參數 <sup>22</sup>	透過優化畸變參數，最大化校正後影像的線條直線性 <sup>26</sup>	從大規模數據中學習從畸變影像到無畸變影像的直接映射 <sup>36</sup>
適用場景	對已知相機進行高精度測量、三維重建、機器人視覺 <sup>41</sup>	對包含大量直線的單張「野生」影像進行校準(如建築攝影) <sup>30</sup>	對來源未知、未經校準的大量影像進行自動化、快速校正 <sup>35</sup>
數據需求	需要拍攝一組(15-20張)特定標定板的影像 <sup>21</sup>	需要輸入影像本身包含足夠的直線結構 <sup>30</sup>	訓練階段需要海量(通常是合成的)成對數據；推斷階段僅需單張影像 <sup>35</sup>
精度	極高，被視為計量學的黃金標準 <sup>41</sup>	精度依賴於場景內容和線條偵測的準確性，通常低於標定板法 <sup>30</sup>	精度高，優於多數傳統方法，但可能在訓練分佈外的奇異畸變上泛化能力較差 <sup>42</sup>
通用性	極低。校準結果僅對單一相機、鏡頭和設置有效 <sup>23</sup>	中等。適用於多種相機，但要求場景滿足特定幾何假設	極高。一個訓練好的模型可應用於任何相機拍攝的影像 <sup>35</sup>
計算成本	校準過程為一次性的離線計算，計算量中等。去畸變應用很快 <sup>36</sup>	迭代優化過程，計算成本可能較高 <sup>30</sup>	訓練成本極高(需要強大GPU進行數天)；推斷成本低，可在GPU上實現即時處理 <sup>30</sup>
優點	精度最高、最可靠、物理模型清晰	無需標定板，更靈活	全自動、速度快、通用性強
缺點	流程繁瑣，需要受控環境，不適用於「野生」影像	對場景內容有要求，穩健性不如標定板法	依賴大規模訓練數據，模型可能是「黑箱」，對域外數據可能失效

## 6.2 回答核心問題：是否存在「更好」的方法？

綜合上述分析，對於使用者最初的問題——「有沒有比homography loss更好的方法來對抗枕形和桶狀畸變？」——我們可以給出一個層次分明且精確的回答。

首先，這個問題的提問方式本身建立在一個需要被修正的基礎上。單應性(Homography)及其對應的損失函數，其設計目標並非校正枕形和桶狀這類光學畸變。因此，任何直接的比較都是不恰當的。

在釐清了這一點後，我們可以對「更好」的校正方法進行探討，結論是：不存在一個在所有維度上都絕對「更好」的方法，最佳選擇高度依賴於具體的應用情境。

- 對於追求極致測量精度的應用，例如工業質檢、機器人抓取或攝影測量學，當你可以控制相機並進行一次性的離線設置時，傳統的基於標定板的相機校準方法至今仍然是無可替代的「最好」選擇。它的精度和可靠性是所有其他方法的基準。
- 對於需要處理大量來源未知的用戶上傳內容或對即時視訊流進行盲校正的應用，例如社交媒體影像增強或自動駕駛中的視覺感知，基於深度學習的方法是顯然「更好」的選擇。它的通用性、速度和全自動化的特性是傳統方法無法比擬的。
- 單應性損失(Homography Loss)本身並非一個畸變校正方法，但它在一個特定的領域內是「更好」的。當你的任務是訓練一個深度學習模型來理解平面場景的幾何結構時(如偵測羽球場上的關鍵點)，引入單應性損失作為一個全域幾何正規化項，是比沒有任何幾何先驗約束「更好」的訓練策略。

## 6.3 從業人員決策指南

為了將上述結論轉化為可執行的策略，以下提供一個決策流程圖，幫助從業人員根據自身需求選擇最合適的技術路徑：

1. 第一步：診斷畸變類型
  - 問題是否是影像中的直線變成了曲線(桶狀/枕狀)？
    - 是：這是光學(鏡頭)畸變。請繼續至第二步。
    - 否：問題是否是三維空間中的平行線在影像中收斂(近大遠小)？
      - 是：這是透視畸變。你的工具是單應性變換(Homography)。
      - 否：請重新評估問題。
2. 第二步：評估應用場景(針對光學畸變)
  - 你是否控制相機，並且可以進行一次性的離線校準？
    - 是，且應用對精度要求極高(如計量學、三維重建)：選擇傳統相機校準(使用棋盤格等標定板)。
    - 是，但無法使用標定板，且你的場景富含直線結構(如建築)：可以考慮Plumb-Line方法。
    - 否，你需要處理來自未知或多種相機的影像：請繼續至第三步。
3. 第三步：選擇深度學習策略(針對盲校正)
  - 你的應用目標是什麼？
    - 目標是校正影像本身，使其在視覺上無畸變：選擇一個深度學習盲校正網路。
      - 如果需要可解釋的物理參數或解析度無關性，考慮參數預測網路。
      - 如果需要校正複雜或非標準的畸變，考慮位移場預測網路。
    - 目標是訓練一個模型，使其在預測平面上的特徵點時，能保持幾何一致性：在你的模型訓練流程中，引入\*\*單應性損失(Homography Loss)\*\*作為一個正規化項。

最後，值得注意的是，這些技術範式並非靜態不變，而是處於持續的融合與演進之中。前沿的研

究正探索將傳統幾何模型的嚴謹性與深度學習的強大表示能力相結合的混合方法。例如，使用神經網路來預測傳統物理模型的參數<sup>38</sup>，或將傳統的幾何演算法重構為網路中的可微分層。未來的突破，很可能就蘊藏在如何更智慧地融合這兩種思想，實現真正意義上的、從像素到幾何、再到語義的全面場景理解。

## 引用的著作

1. Distortion | Edmund Optics, 檢索日期:8月 2, 2025, <https://www.edmundoptics.com/knowledge-center/application-notes/imaging/distortion/>
2. 3 Key Facts About Lens Distortion Systems - Computer Vision Resources from UnitX, 檢索日期:8月 2, 2025, <https://resources.unitxlabs.com/lens-distortion-machine-vision-systems/>
3. accedacris.ulpgc.es, 檢索日期:8月 2, 2025, <https://accedacris.ulpgc.es/bitstream/10553/35433/2/automatic-correction-perspective.pdf>
4. Understanding Lens Distortion - American Cinematographer, 檢索日期:8月 2, 2025, <https://theasc.com/articles/understanding-lens-distortion>
5. Distortion and Curvature of Field - HyperPhysics, 檢索日期:8月 2, 2025, <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/geoopt/aber3.html>
6. Behind the Magic - Camera lens distortion - Optical & perspective what is the difference?, 檢索日期:8月 2, 2025, <https://katiemortimore.com/distortion-camera-lens-optical-perspective-difference/>
7. www.edmundoptics.co.uk, 檢索日期:8月 2, 2025, <https://www.edmundoptics.co.uk/knowledge-center/application-notes/imaging/distortion/#:~:text=In%20simple%20lenses%2C%20there%20are,distorted%2C%20shown%20in%20Figure%202.>
8. Barrel and pincushion distortion - ISB WWW2, 檢索日期:8月 2, 2025, [http://www2.isb.ac.th/physics\\_isb/physicsb/index/pincush/pincush.htm](http://www2.isb.ac.th/physics_isb/physicsb/index/pincush/pincush.htm)
9. What are Barrel and Pincushion Distortion? - YouTube, 檢索日期:8月 2, 2025, [https://www.youtube.com/watch?v=6CrL\\_1bHcn8&pp=0gcJCfwAo7VqN5tD](https://www.youtube.com/watch?v=6CrL_1bHcn8&pp=0gcJCfwAo7VqN5tD)
10. Distortion (optics) - Wikipedia, 檢索日期:8月 2, 2025, [https://en.wikipedia.org/wiki/Distortion\\_\(optics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Distortion_(optics))
11. Barrel distortion & pincushion distortion in Photogrammetry? | 3D Forensics - YouTube, 檢索日期:8月 2, 2025, [https://www.youtube.com/watch?v=7q1rwM\\_kbew](https://www.youtube.com/watch?v=7q1rwM_kbew)
12. Perspective distortion - Wikipedia, 檢索日期:8月 2, 2025, [https://en.wikipedia.org/wiki/Perspective\\_distortion](https://en.wikipedia.org/wiki/Perspective_distortion)
13. Camera calibration With OpenCV, 檢索日期:8月 2, 2025, [https://docs.opencv.org/4.x/d4/d94/tutorial\\_camera\\_calibration.html](https://docs.opencv.org/4.x/d4/d94/tutorial_camera_calibration.html)
14. Camera Calibration - OpenCV, 檢索日期:8月 2, 2025, [https://docs.opencv.org/4.x/dc/dbb/tutorial\\_py\\_calibration.html](https://docs.opencv.org/4.x/dc/dbb/tutorial_py_calibration.html)
15. 羽球場地標線交點識別與定位\_.pdf
16. Mastering Perspective Correction - Number Analytics, 檢索日期:8月 2, 2025,

- <https://www.numberanalytics.com/blog/mastering-perspective-correction>
17. Homography for Computer Vision Product Managers, 檢索日期: 8月 2, 2025, <https://www.productteacher.com/quick-product-tips/homography-for-computer-vision-product-managers>
  18. Camera Calibration and 3D Reconstruction - OpenCV Documentation, 檢索日期: 8月 2, 2025, [https://docs.opencv.org/4.x/d9/d0c/group\\_calib3d.html](https://docs.opencv.org/4.x/d9/d0c/group_calib3d.html)
  19. What Is Camera Calibration? - MATLAB & Simulink - MathWorks, 檢索日期: 8月 2, 2025, <https://www.mathworks.com/help/vision/ug/camera-calibration.html>
  20. Camera Calibration with Python - OpenCV - GeeksforGeeks, 檢索日期: 8月 2, 2025, <https://www.geeksforgeeks.org/python/camera-calibration-with-python-opencv/>
  21. How to Make Camera Calibration with OpenCV and Python | by NasuhcaN | Medium, 檢索日期: 8月 2, 2025, <https://medium.com/@nasuhcanturker/how-to-make-camera-calibration-with-opencv-and-python-3cd7c4586349>
  22. Camera Calibration using OpenCV - LearnOpenCV, 檢索日期: 8月 2, 2025, <https://learnopencv.com/camera-calibration-using-opencv/>
  23. OpenCV Tutorial Part 1 - Camera Calibration - AlphaPixel Software Development, 檢索日期: 8月 2, 2025, <https://alphapixeldev.com/opencv-tutorial-part-1-camera-calibration/>
  24. Camera Calibration with OpenCV - Medium, 檢索日期: 8月 2, 2025, <https://medium.com/analytics-vidhya/camera-calibration-with-opencv-f324679c6eb7>
  25. Camera Calibration in less than 5 Minutes with OpenCV - YouTube, 檢索日期: 8月 2, 2025, <https://www.youtube.com/watch?v=-BTKiamRTg>
  26. Camera distortion self-calibration using the plumb-line constraint and minimal Hough entropy - ResearchGate, 檢索日期: 8月 2, 2025, [https://www.researchgate.net/publication/2213546\\_Camera\\_distortion\\_self-calibration\\_using\\_the\\_plumb-line\\_constraint\\_and\\_minimal\\_Hough\\_entropy](https://www.researchgate.net/publication/2213546_Camera_distortion_self-calibration_using_the_plumb-line_constraint_and_minimal_Hough_entropy)
  27. Camera distortion self-calibration using the plumb-line constraint and minimal Hough entropy. - Dr Edward Rosten, 檢索日期: 8月 2, 2025, [https://www.edwardrosten.com/work/rosten\\_2008\\_camera.pdf](https://www.edwardrosten.com/work/rosten_2008_camera.pdf)
  28. Wide Angle Lens Distortion Correction with Straight Lines - Hugo Hadfield, 檢索日期: 8月 2, 2025, <https://hh409.user.srcf.net/blog/lens-distortion-correction-lines.html>
  29. ucuapps/single-view-autocalib: Single-View Auto-Calibration from Lens-Distorted Images of Urban Scenes. In WACV (2021) - GitHub, 檢索日期: 8月 2, 2025, <https://github.com/ucuapps/single-view-autocalib>
  30. Deep Single Image Camera Calibration with Radial Distortion Supplementary material - CVF Open Access, 檢索日期: 8月 2, 2025, [https://openaccess.thecvf.com/content\\_CVPR\\_2019/supplemental/Lopez\\_Deep\\_Single\\_Image\\_CVPR\\_2019\\_supplemental.pdf](https://openaccess.thecvf.com/content_CVPR_2019/supplemental/Lopez_Deep_Single_Image_CVPR_2019_supplemental.pdf)
  31. en.wikipedia.org, 檢索日期: 8月 2, 2025, [https://en.wikipedia.org/wiki/Homography\\_\(computer\\_vision\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Homography_(computer_vision))
  32. What is Homography? How to estimate homography between two images? -

- GeeksforGeeks, 檢索日期:8月 2, 2025,  
<https://www.geeksforgeeks.org/computer-vision/what-is-homography-how-to-estimate-homography-between-two-images/>
33. Homography - And how to calculate it? | by Siddharth Agarwal | all things about robotics and computer vision | Medium, 檢索日期:8月 2, 2025,  
<https://medium.com/all-things-about-robotics-and-computer-vision/homography-and-how-to-calculate-it-8abf3a13ddc5>
  34. Homography: The main idea behind many CV applications | Vaibhav Yadav's Blog, 檢索日期:8月 2, 2025,  
<https://vaibhavyadav.github.io/2020/12/14/Image-Stitching.html>
  35. Prediction of Camera Calibration and Distortion Parameters Using Deep Learning and Synthetic Data - arXiv, 檢索日期:8月 2, 2025,  
<https://arxiv.org/html/2501.14510v1>
  36. Blind Geometric Distortion Correction on Images Through Deep Learning - CVF Open Access, 檢索日期:8月 2, 2025,  
[https://openaccess.thecvf.com/content\\_CVPR\\_2019/papers/Li\\_Blind\\_Geometric\\_Distortion\\_Correction\\_on\\_Images\\_Through\\_Deep\\_Learning\\_CVPR\\_2019\\_paper.pdf](https://openaccess.thecvf.com/content_CVPR_2019/papers/Li_Blind_Geometric_Distortion_Correction_on_Images_Through_Deep_Learning_CVPR_2019_paper.pdf)
  37. [1909.03459] Blind Geometric Distortion Correction on Images Through Deep Learning, 檢索日期:8月 2, 2025, <https://arxiv.org/abs/1909.03459>
  38. [2501.14510] Deep-BrownConrady: Prediction of Camera Calibration and Distortion Parameters Using Deep Learning and Synthetic Data - arXiv, 檢索日期:8月 2, 2025, <https://arxiv.org/abs/2501.14510>
  39. Deep Convolutional Neural Networks for estimating lens distortion parameters - V-SENSE - Trinity College Dublin, 檢索日期:8月 2, 2025,  
[https://v-sense.scss.tcd.ie/wp-content/uploads/2019/08/IMVIP\\_\\_Lens\\_distortion1.pdf](https://v-sense.scss.tcd.ie/wp-content/uploads/2019/08/IMVIP__Lens_distortion1.pdf)
  40. Unsupervised Fisheye Image Correction through Bidirectional Loss with Geometric Prior | Request PDF - ResearchGate, 檢索日期:8月 2, 2025,  
[https://www.researchgate.net/publication/337044067\\_Unsupervised\\_Fisheye\\_Image\\_Correction\\_through\\_Bidirectional\\_Loss\\_with\\_Geometric\\_Prior](https://www.researchgate.net/publication/337044067_Unsupervised_Fisheye_Image_Correction_through_Bidirectional_Loss_with_Geometric_Prior)
  41. COMPARISON OF METHODS FOR GEOMETRIC CAMERA CALIBRATION, 檢索日期:8月 2, 2025, <https://isprs-archives.copernicus.org/articles/XXXIX-B5/595/2012/>
  42. CS231A Project Final Report: Comparing Multiple Methods for Camera Calibration, 檢索日期:8月 2, 2025,  
[https://web.stanford.edu/class/cs231a/prev\\_projects\\_2022/CS231A\\_project\\_milestone\\_1.pdf](https://web.stanford.edu/class/cs231a/prev_projects_2022/CS231A_project_milestone_1.pdf)
  43. Mastering Lens Distortion in Computer Vision - Number Analytics, 檢索日期:8月 2, 2025,  
<https://www.numberanalytics.com/blog/mastering-lens-distortion-computer-vision>
  44. Distortion Correction of Single Image Based on Deep Learning - Researching, 檢索日期:8月 2, 2025, <https://www.researching.cn/articles/OJd5571e0068790bea>
  45. Performance Comparison of Classical Methods and Neural Networks for Colour Correction, 檢索日期:8月 2, 2025,  
[https://www.researchgate.net/publication/374536475\\_Performance\\_Comparison](https://www.researchgate.net/publication/374536475_Performance_Comparison)



[of Classical Methods and Neural Networks for Colour Correction](#)

46. An Accuracy vs. Complexity Comparison of Deep Learning Architectures for the Detection of COVID-19 Disease - MDPI, 檢索日期: 8月 2, 2025,  
<https://www.mdpi.com/2079-3197/9/1/3>