doi：10.3969/j.issn.1008-1399.2014.04.024

判别级数敛散性的一种方法

李佳骏[1]，李志明[2]

（1. 中国地质大学 信息工程学院，湖北 武汉 430074； 2. 中国地质大学 数理学院，湖北 武汉 430074）

摘 要 对不能直接利用莱布尼茨判别法的交错级数，可将其拆分为两个敛散性易知的级数之和，进而判别其敛散性.举例说明该方法的应用.

关键词 级数；收敛；发散

中图分类号 O173 **文献标识码** A **文章编号** 1008-1399(2014)04-0080-03

A Method of Testing the Convergence of Series

LI Jiajun[1]， LI Zhiming[2]

（1. Faculty of Information Engineering, China University of Geosciences, Wuhan 430074, PRC;
2. School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan 430074, PRC）

Abstract: For alternating series that Leibniz method can't be used directly, we express the series as a sum of two new series whose convergences can be determined easily. Examples are given to show the application of our method.

Keywords: series, convergence, divergence

级数理论中有下面两条基本性质.

性质 1[1] 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 收敛.

性质 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散.

性质 2 实则是性质 1 的推论，因其应用广泛，故总和性质 1 相提并论.

这两条性质表面上看很普通，但用处很大.在判断某些级数的敛散性时，没有直接的法则可以运用，可考虑将其分解为两个级数，且这两个级数的敛散性容易判定.分而治之，得到原级数的敛散性.

例 1[2] 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ 的敛散性.

收稿日期：2013-05-26；修改日期：2014-03-29

基金项目：湖北省高等学校教学研究项目(2012139,2012142)；中国地质大学(武汉)教学研究项目(2013A35)

作者简介：李佳骏(1994－)，男，广西桂林人，信息工程专业 2012 级本科生. Email:ll5851732@163.com

李志明(1976－)，男，河南巩义人，博士研究生，副教授，从事信息处理研究. Email:lzmer@126.com

分析 此为交错级数，但 $\frac{1}{n+(-1)^n}$ 不是单调减，不满足莱布尼茨判定条件，无法直接利用莱布尼茨判定定理.

解 原级数为

$$\frac{1}{2+1}-\frac{1}{3-1}+\frac{1}{4+1}-\frac{1}{5-1}+\cdots.$$

考虑级数

$$\frac{1}{2+1}-\frac{1}{3+1}+\frac{1}{4+1}-\frac{1}{5+1}+\cdots$$

和级数

$$0+\left(\frac{1}{3+1}-\frac{1}{3-1}\right)+0+\left(\frac{1}{5+1}-\frac{1}{5-1}\right)+\cdots+0+\left(\frac{1}{2n-1+1}-\frac{1}{2n-1-1}\right)+\cdots,$$

原级数即为这两个级数逐项相加所得.前一级数为交错级数，且满足莱布尼茨判定条件，故收敛；后一级数的敛散性等同于级数

$$\left(\frac{1}{3+1}-\frac{1}{3-1}\right)+\left(\frac{1}{5+1}-\frac{1}{5-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1+1}-\frac{1}{2n-1-1}\right)+\cdots,$$

即级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1+1}-\frac{1}{2n-1-1}\right)=$$

$$-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2-1},$$

易知其收敛. 故由性质 1 得原级数收敛.

例 2[3]　判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}$ 的敛散性.

分析　此为交错级数，但 $\frac{1}{(-1)^n+\sqrt{n}}$ 不是单调减，不满足莱布尼茨判定条件，无法直接利用莱布尼茨判定定理.

解　原级数为

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{4}+1}-\frac{1}{\sqrt{5}-1}+\cdots.$$

考虑级数

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}+1}-\frac{1}{\sqrt{5}+1}+\cdots+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}+\cdots$$

和级数

$$0+\left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}-1}\right)+0+\left(\frac{1}{\sqrt{5}+1}-\frac{1}{\sqrt{5}-1}\right)+\cdots+0+\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}+1}-\frac{1}{\sqrt{2n-1}-1}\right)+\cdots,$$

原级数即为这两个级数逐项相加所得. 前一级数为交错级数，且满足莱布尼茨判定条件，故收敛；后一级数的敛散性等同于级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}-1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}+1}-\frac{1}{\sqrt{5}-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}+1}-\frac{1}{\sqrt{2n-1}-1}\right)+\cdots=$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}+1}-\frac{1}{\sqrt{2n-1}-1}\right)=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1},$$

易知其发散. 故由性质 2 得原级数发散.

注 1　例 1 和例 2 也可用以下方法判断敛散性. 事实上，因为

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n[n-(-1)^n]}{n^2-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n n}{n^2-1}-\frac{1}{n^2-1}\right],$$

故由 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2-1}$ 及 $\sum_{n=2}^{\infty}-\frac{1}{n^2-1}$ 均收敛可知原级数收敛. 另因

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n[\sqrt{n}-(-1)^n]}{n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1}\right],$$

故由 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ 收敛而 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散，可知原级数发散.

上述解法把原来不满足莱布尼茨条件的级数分解为两个级数，其中一个满足莱布尼茨条件，而另一个的敛散性比较容易判定，从而将问题化难为易，顺利解决.

分解的手法主要是加零项和作置换，将级数改写，而一个级数无论加减多少零项，其敛散性都保持不变. 这种分解方法可以进一步推广，灵活运用.

例 3[2]　判断级数

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

的敛散性.

分析　此级数不是交错级数，无法直接利用莱布尼茨判定定理.

解　考虑级数

$$0+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+0+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

和级数

$$1+0-0+\frac{1}{4}+0-0+\cdots,$$

原级数即为这两个级数逐项相加所得. 前一级数的敛散性等同于级数

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots,$$

即交错级数，由莱布尼茨判别法知其收敛；后一级数的敛散性等同于级数

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2},$$

易知其发散. 故由性质 2 得原级数发散.

例 4[2]　判断级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\cdots$$

的敛散性.

分析　此级数不是交错级数，无法直接利用莱布尼茨判定定理.

解　考虑级数

(下转第 85 页)

的特征向量系当且仅当 BA 有完全的特征向量系，从而 AB 可对角化当且仅当 BA 可对角化.

证法 3（极小多项式无重根）

设 BA 的极小多项式为

$$m(\lambda)=\lambda^k+c_1\lambda^{k-1}+\cdots+c_k.$$

因为 BA 为非异阵，故 $c_k\neq 0$. 另设

$$g(\lambda)=\lambda^l+d_1\lambda^{l-1}+\cdots+d_l$$

为 AB 的极小多项式. 将 AB 代入多项式 $\lambda m(\lambda)$ 中有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{AB}((\boldsymbol{AB})^k+c_1(\boldsymbol{AB})^{k-1}+\cdots+c_k\boldsymbol{I}_n)=\\&(\boldsymbol{AB})^{k+1}+c_1(\boldsymbol{AB})^k+\cdots+c_k(\boldsymbol{AB})=\\&\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})^k\boldsymbol{B}+c_1\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})^{k-1}\boldsymbol{B}+\cdots+c_k\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{B}=\\&\boldsymbol{A}((\boldsymbol{BA})^k+c_1(\boldsymbol{BA})^{k-1}+\cdots+c_k\boldsymbol{I}_m)\boldsymbol{B}=\\&\boldsymbol{A}m(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O},\end{aligned}$$

即 AB 适合多项式 $\lambda m(\lambda)$，从而

$$g(\lambda)\mid\lambda m(\lambda).$$

同理可证 BA 适合多项式 $\lambda g(\lambda)$，从而

$$m(\lambda)\mid\lambda g(\lambda).$$

若 BA 可对角化，则 $m(\lambda)$ 无重根. 注意到 0 不是 $m(\lambda)$ 的根，故 $\lambda m(\lambda)$ 无重根，从而 $g(\lambda)$ 也无重根，于是 AB 也可对角化. 反之，若 AB 可对角化，则 $g(\lambda)$ 无重根，从而 $\lambda g(\lambda)$ 无非零重根. 注意到 0 不是 $m(\lambda)$ 的根，故 $m(\lambda)$ 也无重根，于是 BA 也可对角化.

最后，我们利用例 3 来给出第三届全国大学生数学竞赛决赛第五题的简单解法.

例 4　设 A 为 3×2 矩阵，B 为 2×3 矩阵且

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}8&0&-4\\-\frac{3}{2}&9&-6\\-2&0&1\end{pmatrix},$$

求 BA.

解　经计算可得

$$|\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{AB}|=\lambda(\lambda-9)^2,$$

故由降阶公式知

$$|\lambda\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{BA}|=(\lambda-9)^2.$$

因此 BA 的两个特征值都为 9，特别地，BA 是非异阵. 经计算可得

$$\mathrm{r}(9\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{AB})=1,$$

故特征值 9 的几何重数为 2，因此 AB 有完全的特征向量系，从而 AB 可对角化. 由例 3 的结论知，BA 也可对角化，于是

$$\boldsymbol{BA}=9\boldsymbol{I}_2.$$

致谢　本文得到复旦大学数学科学学院姚慕生教授，吴泉水教授以及朱胜林教授的热心指导和大力斧正，在此谨表示衷心的感谢.

参考文献

[1] 姚慕生，吴泉水. 高等代数学[M]. 2 版. 上海：复旦大学出版社，2008：281-294.

[2] 姚慕生. 大学数学学习方法指导丛书：高等代数[M]. 2 版. 上海：复旦大学出版社，2007：220-221.

（上接第 81 页）

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\cdots$$

和级数

$$0+\frac{2}{2}+0+0-\frac{2}{5}+0+0+\frac{2}{8}+0+0-\frac{2}{11}+0+0+\cdots,$$

原级数即为这两个级数逐项相加所得. 前一级数为交错级数，由莱布尼茨判别法知其收敛；后一级数的敛散性等同于级数

$$\frac{2}{2}-\frac{2}{5}+\frac{2}{8}-\frac{2}{11}+\cdots=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1},$$

由莱布尼茨判别法知其收敛. 故由性质 1 可知原级数收敛.

从以上几道题目的解答可以看出，原级数分解所得两个新的级数都很简单，可直接判断出每一个的敛散性. 此分解方法是研究级数敛散性的一种思路和途径.

致谢

审稿专家和责任编辑对本文提出了宝贵的修改意见，谨致谢意！

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学：下册[M]. 6 版. 北京：高等教育出版社，2008：248-269.

[2] 费定晖，周学圣. 吉米多维奇数学分析习题集题解 4[M]. 4 版. 济南：山东科学技术出版社，2012：10-42.

[3] 彭放，刘安平，刘小雅，等. 工科数学分析：下册[M]. 武汉：中国地质大学出版社，2010：71.