4.2 poisson Arrival process

사건 발생확률

$$\frac{\text{발생횟수}}{\text{단위시간}} \times \Delta t = \frac{\Delta t}{\text{단위시간}} \times \text{발생횟수}$$

· $N(t)$ = t 시간까지의 총 도착 횟수 $(t \ge 0)$

· 중요한 가정

① 시간구간 $(t, t+\Delta t)$에서 사건이 발생할 확률은 $\lambda \Delta t$로 t에 대해 독립적이며, 여기서 λ는 단위 시간당 발생하는 사건의 평균횟수로 상수이다.

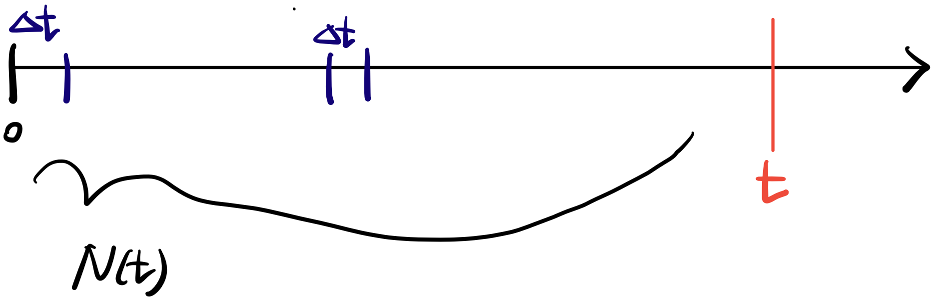
② 시간구간 $(t, t+\Delta t)$에서 두개 이상의 사건이 발생할 확률은 0으로 수렴

③ 겹치지 않는 구간에서 도착횟수는 독립적이다.

ex) 바로 전에 많이 도착했다고, 그 다음에 적게 도착하는 것은 아니다. 독립적이다.

④ $\Delta t \to 0$

⇒ 이 가정들은 푸아송 분포가 memoryless property를 가지며, 이는 각 사건이 독립적으로 발생한다는 것을 의미



· 특정구간에서 정확히 n번의 사건이 발생할 확률 $= (\lambda \Delta t)^n (1-\lambda \Delta t)^{N-n}$

· 시간 $[0, t]$에서 n개의 도착이 발생할 확률 $P_n(t)$

$$P_n(t) = \lim_{N\to\infty} \binom{N}{n} \left(\frac{\lambda t}{N}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda t}{N}\right)^{N-n}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \left(1 - \frac{\lambda t}{N}\right)^{N-n} \cdot \frac{N}{N} \frac{N-1}{N} \cdots \frac{N-n+1}{N}$$

$$= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

$$\therefore \text{Prob}\{N(t)=k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

- $E[N(t)] = \lambda t$

  $E[N^2(t)] = \lambda^2 t^2 + \lambda t$ 증명은 생략!!

  $Var(N(t)) = E[N^2(t)] - E^2[N(t)] = \lambda t.$

- poisson process의 또 다른 특성들.

  ① 동일한 길이의 간격에서 발생한 사건의 수는 동일한 분포를 가짐

  ⇒ 푸아송 process가 정상성(stationarity)을 가진다.

  ex) $N(t) - N(s)$는 $N(t+h) - N(s+h)$와 같은 간격을 가지므로 같은 분포를 따른다.

t대신 t-s.

$$P_n(t-s) = \frac{[\lambda(t-s)]^n}{n!} e^{-\lambda(t-s)}$$

② 도착간의 시간은 지수분포를 따른다.

T: inter-arrival time.

- $Pr\{T \geq t\} = Pr\{\text{no arrival in time } t\}$

$$= P_0(t) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

- $Pr\{T \leq t\} = 1 - Pr\{T \geq t\} = 1 - e^{-\lambda t}$

  ⇒ t의 CDF

  누적분포함수.

4.2.1 Sum of Independent poisson process

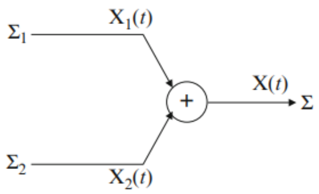


Fig. 4.5: Sum of independent Poisson processes

→ 독립적인 두 포아송 process 합이 여전히 포아송 process이다.
독립적인 두 사건의 평균 발생률을 각각 λ_1, λ_2 라 할때,
이 두과정의 합은 평균 발생률이 $\lambda_1 + \lambda_2$ 인 새로운 포아송
과정을 형성한다.

4.2.2 Random splitting of a poisson process

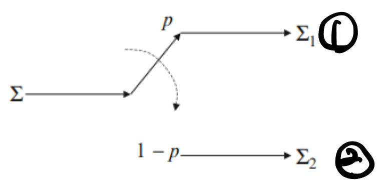


Fig. 4.6: Random splitting of a Poisson process

→ 포아송 process가 두 개의 출력라인으로 무작위 분할될 때, 각
라인에서의 출력 프로세스가 여전히 포아송 분포를 따른다.
그림 4.6 을 보면 도착이 ①에서 p의 확률로 ②에서 1-p의 확률로
전환된다는 가정 하에 그 평균율은 각각 $p\lambda$와 $(1-p)\lambda$ 이다.
이 모델은 네트워크에서 트래픽 라우팅을 모델링 하는데 사용가능하다.

Q1. 콜센터에는 평균적으로 시간당 15건의 전화가 걸려온다. 고객이 10분동안
전화를 기다려야할 확률은?

4.3 Birth-Death Markov chains

: 이웃하는 상태 간에만 전환이 발생할 수 있는 연속시간 마르코프체인의 한 유형.

시스템이 하나의 단위를 "얻거나", "잃는" 경우에 유용하며, 각각 birth(출생)과 Death(사망)으로 명명된다.

- λ_i : 상태 i에서 $i+1$로의 평균 출생률

  ex) 상태 i : 큐에 i명의 고객이 대기하고 있는 상황.

  λ_i : 평균 i명의 고객이 있는 큐에 새로운 고객이 추가로 도착할 확률.

출생률이 높을수록 큐에 더 많은 고객이 대기하고 있음을 의미

- μ_i : 상태 i에서 $i-1$로의 평균 사망률.

상태확률 P_n이 시간에 의존하지 않는다.

- 이 시스템은 정상 상태 행동을 가정하고 평형상태에서 분석된다.

↳ 필요충분조건

: $\exists$ an index k_0 so that $\frac{\lambda_k}{\mu_k} < 1 \quad \forall k \ge k_0$

"어떤 인덱스 k_0가 존재하여 모든 k가 k_0 이상일 때, 상태 k에서의 $\frac{\lambda_k}{\mu_k}$ 비율이 1 미만이 된다."

시스템의 매개변수에 따라 달라짐. 예를들어 서비스속도가 출생률을 초과하는 시점을 k_0로 설정할수있다.

⇒ 큐 시스템이 무한대로 성장하지 않는다는것을 보장.

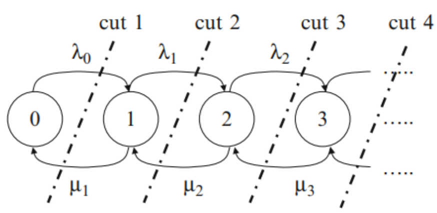
- 

Fig. 4.8: Cuts for the balance equations at equilibrium

균형조건 : 상태 $i-1$에서 i로 출생하는 개체의 평균속도가 상태 i에서 $i-1$로 사망하는 개체의 평균속도와 같다.

P_i : 특정상태 i에 있을 확률

$$\lambda_{i-1} P_{i-1} = \mu_i P_i$$

수식으로 표현.

$$\Rightarrow P_i = \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right) P_{i-1}$$

이 확률들은 P_0부터 시작하여 재귀적으로 결정됨.

- 정규화.

정규화조건 : 어떤 시스템이 있을 때, 시스템이 어떤 상태에 있을 확률의 총합은 항상 100% 또는 1이 되어야 한다.

수식적표현

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1$$

$$P_i = \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right) P_{i-1} = \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)\left(\frac{\lambda_{i-2}}{\mu_{i-1}}\right) P_{i-2} = \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)\left(\frac{\lambda_{i-2}}{\mu_{i-1}}\right)\left(\frac{\lambda_{i-3}}{\mu_{i-1}}\right) P_{i-3}$$

이런식으로 진행됨

$$P_0 + \sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1$$

$$P_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{i} \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_0 = 1$$

$$P_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{i} \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \right) = 1$$

$$\boxed{P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{i} \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}}}$$

결론

Q2. 한 인터넷 카페에서는 한 명의 서버가 동시에 한명의 고객만 서비스할 수 있다. 고객은 평균적으로 매 10분마다 도착하며, 서버는 평균적으로 고객 한명을 8분마다 서비스할 수 있다. 이 시스템은 Birth-Death Markov chain으로 모델링 한다고 했을 때

① 시스템이 정상상태에 있다고 가정하고, 시스템이 비어있는 (대기중인 고객 X) 확률 P_0를 찾아라

② 시스템에 정확히 한명의 고객이 대기하고 있을 확률 P_1을 찾아라.

(hint1: 도착률 $\lambda = \frac{1}{10}$ 고객/분

서비스율 $\mu = \frac{1}{8}$ 고객/분.)

(hint2: P_0는 구할때 무한 등비급수의 합 공식을 이용해야함.

첫째항 a 공비 r

무한 등비급수 합 $= \frac{a}{1-r}$)