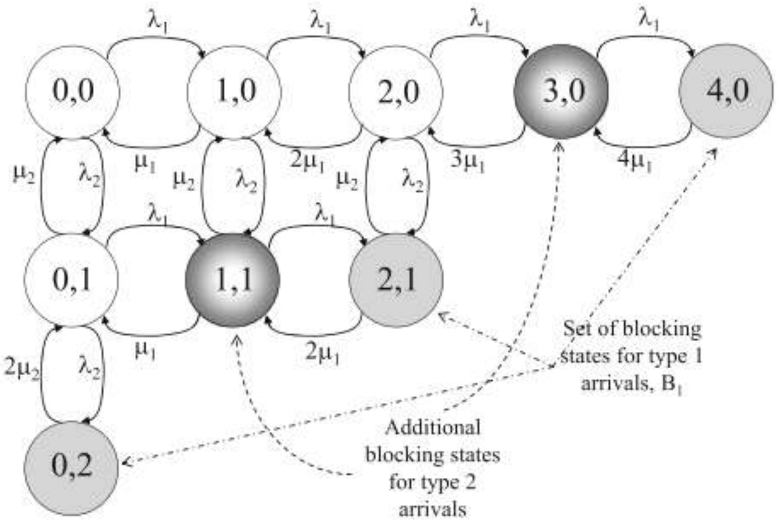
(결론) : 2D 마르코프 체인을 위한 단일 해결 방법은 없음. 손실 대기 시스템과 같이 다양한 서비스 속도를 가진 시스템을 분석하기 위한 간단한 방법부터, 복잡한 시스템을 효율적으로 분석할 수 있는 알고리즘 방법까지 여러 방법이 존재함.

(Continue..) Erlang-B 공식을 사용하는 방식으로 차단 확률 계산

시스템의 용량 한계가 있고, 두 유형의 도착이 동일한 차단 조건을 경험하는 특수한 경우를 다루자.



1) 시스템 용량(C) : 전체 시스템의 용량은 C로 주어지며, 이는 두 서비스 클래스 C1과 C2가 공유한다.

2) 상태 공간(Ω) : 상태 공간은 가능한 모든 상태 (i,j)의 집합으로, 여기서 i와 j의 합이 시스템의 최대 수용량 l($l = \frac{C}{C_1} = \frac{C}{C_2}$)을 초과하지 않는다. (i는 유형 1 요청의 수, j는 유형 2 요청의 수)

3) 차단 상태(B) : 차단 상태는 i와 j의 합이 정확히 l과 같을 때로 정의된다. (이는 시스템이 가득 차서 더 이상 요청을 받아들일 수 없는 상태를 의미한다.)

4) 차단 확률(P_B) 계산 : 차단 확률은 도착하는 요청이 서비스를 받지 못하고 차단되는 비율을 나타낸다.

$$P_B = \sum_B P(i,j) = \sum_{i=0}^{\ell} P(i,\ell - i) = \frac{1}{G(\Omega)} \sum_{i=0}^{\ell} \frac{\rho_1^i}{i!} \frac{\rho_2^{\ell-i}}{(\ell-i)!}$$

$$= \frac{1}{G(\Omega)} \sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} \frac{\rho_1^i \rho_2^{\ell-i}}{\ell!} = \frac{1}{G(\Omega)} \frac{(\rho_1+\rho_2)^{\ell}}{\ell!}$$

뉴턴의 이항 정리
: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

(P(i,j) : 시스템이 상태 (i,j)에 있을 확률 / l : 시스템이 수용할 수 있는 최대 요청 수)

정규화 상수 G(Ω) : 상태 공간 Ω 내의 모든 상태 확률의 합

$$G(\Omega) = \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell-i} \frac{\rho_1^i}{i!} \frac{\rho_2^j}{j!} \underset{k=i+j}{\overset{\text{using}}{=}} \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{k=i}^{\ell} \frac{\rho_1^i}{i!} \frac{\rho_2^{k-i}}{(k-i)!} = \text{reorganizing the terms of the double sum in a different way}$$

$$= \sum_{k=0}^{\ell} \sum_{i=0}^{k} \frac{\rho_1^i}{i!} \frac{\rho_2^{k-i}}{(k-i)!} = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{\rho_2^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^i = \text{using the Newton binomial formula}$$

$$= \sum_{k=0}^{\ell} \frac{\rho_2^k}{k!} \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(\rho_2+\rho_1)^k}{k!}$$

(∴)

$$\boxed{P_B = \frac{(\rho_1 + \rho_2)^{\ell}}{\ell! \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(\rho_2+\rho_1)^k}{k!}}}$$

5) 본 방법 적용 예시 : 이 방법은 두 개 이상의 클래스를 가진 손실 대기열 시스템을 해결하는 데에 적용할 수 있다. 예를 들어, 유형 1 도착이 C1의 용량을, 유형 2 도착이 C2의 용량을, 유형 3 도착이 전체 용량 C 중에서 C3의 용량을 필요로 하는 일반적인 경우를 고려하자.

① 상태 공간(Ω) : 가능한 모든 시스템 상태의 집합이다. 각 상태는 세 가지 유형의 도착에 대한 수 (i, j, k)를 나타낸다.

$$\Omega = \{(i,j,k) \mid iC_1 + jC_2 + kC_3 \le C\}$$

② 상태 확률 (P(i, j, k)) : 시스템이 특정 상태 (i, j, k)에 있을 확률을 나타낸다.

$$P(i,j,k) = \frac{1}{G(\Omega)} \frac{\rho_1^i \rho_2^j \rho_3^k}{i!j!k!}$$

③ 정규화 상수 (G(Ω))

$$G(\Omega) = \sum_{(i,j,k)\in\Omega} \frac{\rho_1^i \rho_2^j \rho_3^k}{i!j!k!}$$

Kaufman과 Robert의 반복적 방법으로 차단 확률 계산

1) 사용 중인 총 용량

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{N} n_i C_i$$

- C : 시스템 전체가 처리할 수 있는 최대 트래픽 양이나 서비스 용량
- $C_1, C_2, \ldots, C_N$: 각 서비스 클래스가 요구하는 링크 용량
- n_i : 각 클래스별로 현재 진행 중인 서비스의 수
- n : 각 클래스별 서비스의 수를 나타내는 벡터로, $n = \{n_1, n_2, \ldots, n_N\}$로 표현됨.
- b : 각 클래스별로 필요한 용량을 나타내는 벡터로, $b = \{C_1, C_2, \ldots, C_N\}$로 표현됨.

2) 정규화 상수 (G(Ω))

$$G(\Omega) = \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!} \frac{\rho_2^{n_2}}{n_2!} \cdots \frac{\rho_N^{n_N}}{n_N!}$$

3) Ω(c) : 시스템이 총 용량 c를 사용하고 있는 모든 상태의 집합

$$\Omega(c) = \{\mathbf{n} : \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = c\}, \text{for } c = 0, \ \ldots, \ C$$

4) G(c) : Ω(c)에 속하는 각 상태에 대한 비정규화된 확률

$$G(c) = G(\Omega(c)) = \sum_{\mathbf{n} \in \Omega(c)} \frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!} \frac{\rho_2^{n_2}}{n_2!} \cdots \frac{\rho_N^{n_N}}{n_N!}$$

5) 차단 확률 P_{B_i} : i번째 클래스의 차단 확률. 이는 사용 가능한 용량이 C_i보다 적어서 i번째 클래스의 요청을 수용할 수 없는 상태에 있는 확률.

$$P_{B_i} = \frac{\sum_{c=C-C_i+1}^{C} G(c)}{\sum_{c=0}^{C} G(c)}, \text{for } i = 0, \ \ldots, \ N$$

6) Kaufman-Robert 반복 알고리즘 사용 : G(c)를 반복적으로 계산하여 각 c값에 대해 업데이트한다.

$$G(c) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho_i C_i}{c} G(c - C_i)$$

(ρ_i는 i번째 클래스의 서비스 요청의 도착률과 서비스율의 비율)

7) 차단 확률 계산 예시

=> 두 개의 트래픽 클래스를 가지고 있다. C1 = 1 unit, C2 = 2 unit, C = 4 units, ρ1 = 2 Erl, and ρ2 = 1 Erl.

$$G(c) = \frac{2}{c}G(c-1) + \frac{2}{c}G(c-2)$$

$$G(c) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho_i C_i}{c} G(c-C_i)$$

① 초기화

: G(0)을 1로 설정. (시스템이 비어 있는 상태의 확률)

: G(c)는 c가 0보다 작을 때 0으로 설정.

② 반복 계산

: c가 0부터 4까지의 다음 반복 계산을 수행.

$$G(1) = 2G(0) + 2G(-1) = 2$$
$$G(2) = G(1) + G(0) = 3$$
$$G(3) = \frac{2}{3}G(2) + \frac{2}{3}G(1) = \frac{10}{3}$$
$$G(4) = \frac{1}{2}G(3) + \frac{1}{2}G(2) = \frac{19}{6}$$

③ 차단 확률 P_{B_1}, P_{B_2}

$$P_{B_1} = \frac{G(4)}{G(0)+G(1)+G(2)+G(3)+G(4)} = \frac{19}{75} \approx 0.253$$
$$P_{B_2} = \frac{G(3)+G(4)}{G(0)+G(1)+G(2)+G(3)+G(4)} = 0.52$$