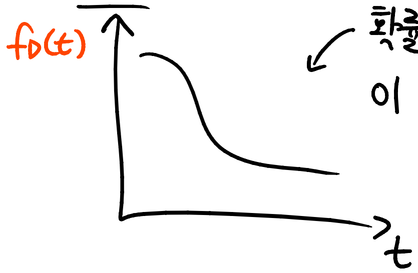
4.14 PDF 구하기

2024년 2월 12일 월요일 오후 2:10

M/M/1에서

한 대기가 얼마나 기다릴지 확률적으로 결정됨.

확률 변수 T_D.



확률 밀도 함수로 표현된다!

이 $f_D(t)$를 구하는 것이 목표.

using 라플라스 변환.

$$T_D(s) = \mathcal{L}[f_D(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f_D(t)\,dt$$

P_n : 임의의 시점에서 상태 n일 확률.

① 그 때의 공식... $P_0 = 1-\rho$

$$P_i = P_0 \rho^i$$

② t 시간동안 대기에 n개 발생할 확률 $\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$] 확률

×

t시간동안일 확률 $f_D(t)$] 가중치

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} f_D(t)\,dt$$

① = ② $\Rightarrow$ PGF ① = PGF ②

PGF ①

$$P(z) = \frac{1-\rho}{1-z\rho}$$

PGF ②

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} f_D(t)\,dt \sim = \int_0^\infty f_D(t) e^{-\lambda t(1-z)}\,dt$$

$$= T_D(s)\big|_{s=\lambda(1-z)}$$

$$\therefore\ T_D(s) = P(z)\big|_{z=1-s/\lambda} \sim = \frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda+s}$$

$$\therefore\ f_D(t) = (\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}$$

T_D : 한 대기가 서비스를 다 받을 때까지 걸리는 시간

T_{sv} : 〃 서비스를 받는데 걸리는 시간

T_w : 〃 서비스를 받기 까지 걸리는 시간. $f_w(t)$를 구해보자!

$$T_D = T_w + T_{sv}$$

라플라스.

$$T_D(s) = T_w(s) \times T_{sv}(s)$$

$$T_w(s) = \frac{T_D(s)}{T_{sv}(s)} = \frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda+s}\cdot\frac{\mu+s}{\mu} = \frac{\mu-\lambda}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu}\frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda+s}$$

$$\left[\begin{array}{l} T_D(s) = \overset{*}{\sum_{n=0}^{\infty}} T_{sv}^{n+1}(s)P_n \sim = T_{sv}(s)\times P(z)\big|_{z=T_{sv}(s)} \\ T_{sv}(s) = \dfrac{\mu}{\mu+s} \end{array}\right]$$

$$f_w(t) = \frac{\mu-\lambda}{\mu}\delta(t) + \frac{\lambda}{\mu}(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}$$