Chapter 10.

Part I.

1. 정방행렬에서는 행과 열의 개수가 같다.
True.
2. 행렬에서는 덧셈에 대한 교환법칙과 결합법칙이 모두 성립한다.
True.
3. 행렬의 곱에서는 일반적으로 교환법칙이 성립한다.
False.
4. 전치행렬에 다시 전치한 것은 대칭행렬이 된다.
False.
5. 행렬식은 정방행렬에 대해서만 정의될 수 있다.
True
6. 사루스의 공식을 이용하면 어떤 크기의 정방행렬의 행렬식의 값도 구할 수 있다.
False
7. 임의의 두 행이나 두 열이 서로 같으면 행렬식은 항상 0이 된다.
True
8. 행렬식에서 임의의 두 행을 교환하더라도 행렬식은 변함이 없다.
False.
9. 주어진 행렬 A의 역행렬에 다시 역행렬을 만들면 원래의 행렬 A와는 다소 다른 결과가 나온다.
False.
10. 주어진 행렬 A와 항등행렬 I의 첨가행렬에서 역행렬을 구하는 방법을 가우스-조던 방법이라고 한다.
True.

Part 2.

1. 다음 중 행렬 이론에 맞는 것은??

행렬의 곱셈에서는 분배법칙이 성립. ∴(4)

2. 행렬의 합과 곱이 성립되는 임의의 행렬 A.B.C에 대하여 행렬의 연산을 나타낸 보기 중 틀린 것은?

$ABC \neq ACB \neq BAC$ ∴(4)

행렬의 곱셈에서는 교환법칙이 성립하지 않는다.

3. 행렬 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$과 행렬 $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$과의 곱을 구하면 어떤 행렬이 되는가?

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}$ ∴(2)

4. 다음 중 왼쪽의 행렬을 오른쪽에 표시한 것이 옳지 않은 것은?

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$는 3×4 행렬이므로 정방행렬이 아니다. ∴(4)

5. 다음 ( ) 안에 적당한 것은?

모든 원소가 0인 행렬을 영행렬이라 한다. ∴(3)

6. 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$는 무슨 행렬인가?

대각선을 기준으로 위의 원소가 다 영이므로 Lower triangular matrix 이다. ∴(1)

7. 다음 중 행 사다리꼴이 아닌 것을 찾으시오.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$은 2행의 피벗과 3행의 피벗이 같은 열에 있으므로 행 사다리꼴이 아니다. ∴(3)

8. 다음 중 행렬식의 값이 0인 것은?

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 0 \qquad \therefore (1)$$

9. 행렬식 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 라고 할 때, $|A|$의 성질로서

맞지 않는 것은?

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ k \cdot a_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = 0$$

$$\neq k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \therefore (3)$$

10. 다음 중 역행렬의 성질로서 맞는 것은?

'역행렬이 존재한다'랑 '행렬식의 값이 0이 아니다.'는 동치이다. $\therefore (1)$

Part 3.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ 일 때,

$A+B$, $A-B$를 구하시오.

$$A+B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

2. 다음의 행렬 A, B에 대하여 $AB \neq BA$임을 보이시오.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 15 & 10 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\therefore AB \neq BA$$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(1) A의 크기는 (3×3)이고, B^T의 크기는 (3×2)이다.

(2) $a_{12} = (2)$이고, $a_{23} = (-5)$이다.

(3) B의 크기는 (2×3)이다.

(4) $b_{12} = (4)$이고, $b_{21} = (2)$이다.

(5) $(i, j) = (1, 2)$일 때, $b_{ij} = 4$이다.

4. 행렬 A와 B가 다음과 같을 때, $AB = O$이 됨을 보이시오.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. 다음 각 행렬들의 대각합을 구하시오.

(1) $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = 7+5 = 12$

(2) $\begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 0+0 = 0$

6. 다음 행렬들의 전치행렬을 구하시오.

(1) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

7. 다음 행렬식의 값을 각각 구하시오.

(1) $D = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10-12 = -2$

(2) $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

$= 1\cdot(-2)\cdot(-4) = 8$

8. 다음 행렬식의 값을 사루스의 공식을 이용하여 각각 구하시오.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 1\cdot 3 - 2\cdot 4 = -5$

(2) $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 4\cdot1\cdot6 - 4\cdot(-7)\cdot0 - 6\cdot0\cdot6 + 6\cdot(-7)\cdot0 + 5\cdot0\cdot0 - 5\cdot0\cdot1$

$= 24$

(3) $\begin{bmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 4\cdot2\cdot(-3) - 4\cdot5\cdot2 - 7\cdot3\cdot(-3) + 7\cdot1\cdot2 - 1\cdot3\cdot5 + 1\cdot2\cdot1$

$= -24 - 40 + 63 + 14 - 15 + 2$

$= 0$

9. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ 이고 $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ 일 때,

$|AB|$ 와 $|BA|$를 구하시오.

$A\cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 24 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow |AB| = 84 - 216 = -132$

$B\cdot A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 32 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

$|B\cdot A| = 156 - 288 = -132$

10. A^{-1}을 구하시오.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & +\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

11. 행렬 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$의 역행렬을 구하시오.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

12. 다음 행렬 A의 역행렬을 구하시오.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

13. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -4 & -4 & -4\\ 5 & 6 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\ 0 & 3 & -2\\ 1 & 2 & -4\end{bmatrix}$

(1) $A\cdot B$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -4 & -4 & -4\\ 5 & 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\ 0 & 3 & -2\\ 1 & 2 & -4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5 & 7 & -15\\ -12 & 0 & 20\\ 17 & 7 & -35\end{bmatrix}$$

(2) $B\cdot A$

$$BA=\begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\ 0 & 3 & -2\\ 1 & 2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -4 & -4 & -4\\ 5 & 6 & 7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}27 & 30 & 33\\ -22 & -24 & -26\\ -27 & -30 & -33\end{bmatrix}$$

14. 다음 행렬식의 값을 각각 계산하시오.

(1) $\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -1\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & -3\end{vmatrix}=2\cdot3\cdot(-3)-2\cdot(-1)\cdot(-1)$$
$$=-18-2=-20.$$

(2) $\begin{vmatrix}3 & -1 & 5\\ -1 & 2 & 1\\ -2 & 4 & 3\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}3 & -1 & 5\\ -1 & 2 & 1\\ -2 & 4 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 5 & 8\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 5 & 8\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=-(-1)\cdot5\cdot1=5.$$

(3) $\begin{vmatrix}2 & 4 & 3\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}2 & 4 & 3\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 10 & 3\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & -2\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix}=(-1)\cdot2\cdot(-2)=4$$

(4) $\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 7\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 8\end{vmatrix}=1\cdot2\cdot8=16$$

15. 다음 행렬식에 대한 값을 각각 구하시오.

(1) $\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7\\ 8 & 9 & 1\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & -\frac{3}{2} & -3\\ 0 & -3 & -15\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & -\frac{3}{2} & -3\\ 0 & 0 & -9\end{vmatrix}=2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(-9)$$
$$=27.$$

(2) $\begin{vmatrix}4 & -6 & 8 & 9\\ 0 & -2 & 7 & -3\\ 0 & 0 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix}$

$$=4\cdot(-2)\cdot5\cdot3=-120.$$