

# 基于轮廓波变换的图像压缩感知处理<sup>\*</sup>

倪 雪, 陈 斌, 薛 红

(解放军理工大学通信工程学院电子信息工程系, 江苏 南京 210007)

**摘 要:** 由于轮廓波变换 (contourlet transform) 能够更好地对图像进行稀疏表示, 文章提出了基于轮廓波变换的图像压缩感知算法。将图像进行轮廓波变换后得到图像的稀疏表示, 采用随机高斯矩阵对高频系数进行测量, 实现数据压缩, 然后采用正交匹配追踪算法恢复系数, 再进行轮廓波反变换重构图像。实验结果表明, 与原压缩感知算法相比, 该算法有效地提高了重构图像质量的主观视觉效果和峰值信噪比。

**关键词:** 轮廓波; 压缩感知; 随机高斯矩阵; 图像重构

**中图分类号:** TN 911.7 **文献标识码:** B **文章编号:** CN 32-1289 (2012) 02-0085-04

## Image Compressed Sensing Based on Contourlet Transform

NI Xue, CHEN Bin, XUE Hong

(Department of Electronic Information Engineering ICE, PLAUST, Nanjing 210007 China)

**Abstract** According to the powerful sparse representation ability for the image of contourlet transform, a new compressed sensing algorithm based on contourlet transform was proposed. The images were firstly represented sparsely by contourlet, and then Gaussian random matrices was used to measure the high-pass coefficients in order to realize data compression. For the reconstruction, by using the Orthogonal Matching Pursuit (OMP) algorithm, coefficients can be recovered by the measurements. Then the image can be reconstructed by the inverse contourlet transform. As the experiments show, compared with the old compressed sensing algorithm, the proposed algorithm improves the quality of the recovered image significantly.

**Key words** contourlet transform; compressed sensing; Gaussian random matrices; image reconstruction

压缩感知<sup>[1-3]</sup>CS (Compressed Sensing) 是 2004 年由 Candes 和 Donoho 提出, 建立在信号稀疏表示和逼近理论基础上的一个全新的信息获取与处理理论。该理论指出, 如果信号本身或在某个变换域是稀疏的或者可压缩的, 可以利用一个与变换矩阵非相干的测量矩阵把高维空间上的信号或变换系数投影到低维空间上, 利用低维空间上的少量采样值 (远低于奈奎斯特采样率) 高概率精确重构原始信号<sup>[4-5]</sup>。这一新理论突破了奈奎斯特采样定律的限制, 极大地降低了信号的采样频率、信号处理的时间以及数据存储和传输的代价, 其理论与应用具有重要的研究意义<sup>[6-8]</sup>。

压缩感知主要包含三个方面内容: 稀疏表示、测量矩阵以及重构算法。其中, 稀疏表示是压缩感知的理论基础和前提。所谓“稀疏”表示是指用较少的系数就能描述信号的主要信息。实际信号往往都是非零的, 但在某种变换基 (例如: 小波基) 下大部分系数取值很小, 只有少量系数取值较大, 承载了信号的绝大部分信息。CS 理论指出信号越稀疏, 重构信号就越准确。因此, 选择合适的变换基, 才能保证系数具有足够的稀疏性, 才能减少压缩测量的同时保证压缩感知的重建精度。目前, 常用的变换主要有傅里叶变换、离

\* 收稿日期: 2012-01-27 修回日期: 2012-03-18

作者简介: 倪 雪, (1984-), 女, 硕士。

散余弦变换 DCT (Discrete Cosine Transform)、小波变换 (wavelet transform) 等。

在高维空间中, 小波分解的水平、垂直、对角三个方向的信息无法充分利用图像的几何正则性, 不能实现图像“最优”或者“最稀疏”的表示。2002年 Minh N. Do 和 Martin Vetterli 提出一种新的非自适应的方向多尺度变换—contourlet 变换<sup>[9]</sup> (也称: 轮廓波变换)。轮廓波变换理论证明了可以用最少的系数来逼近奇异曲线, 并且逼近精度远高于小波。因此, 在图像表示方面, 轮廓波变换相比小波变换具有更优的稀疏表示能力。

提出了一种基于轮廓波变换的图像压缩感知算法。通过轮廓波变换得到图像的稀疏表示, 采用随机测量矩阵对变换系数进行测量, 得到降维后的数据, 从而实现压缩传输的目的, 最后通过最优化问题求解图像的近似逼近实现图像的精确重构。仿真结果表明, 相比 DCT 压缩感知算法及小波压缩感知算法, 本文算法重构图像质量有较大提高。

## 1 压缩感知理论简介

压缩感知理论指出只要信号在正交空间下具有稀疏性或可压缩性, 就可以利用随机投影得到的少量观测值采集信号, 并通过某种优化算法即可重构该信号。

设信号  $x \in \mathbf{R}^N$  是  $N \times 1$  维列向量, 在正交基或紧框架  $J \in \mathbf{R}^{N \times N}$  下是稀疏的, 即信号  $x$  在正交基  $J$  上仅有  $K$  ( $K \ll N$ ) 个非零系数 (或远大于零的系数), 则:

$$x = J s \quad (1)$$

其中,  $s$  表示稀疏系数,  $J$  为信号  $x$  的稀疏基。通过变换可知  $s = J^T x$ 。

采用一个与正交基  $J$  不相关的观测矩阵  $H \in \mathbf{R}^{M \times N}$  ( $M \ll N$ ) 对信号的稀疏系数  $s$  进行测量, 得到观测向量  $y \in \mathbf{R}^M$ :

$$y = H s = H J^T x = A x \quad (2)$$

其中,  $A$  称为测量矩阵 ( $A_{M \times N} = H_{M \times N} J_{N \times N}^T$ )。可以看到, 压缩感知将信号  $x$  从  $N$  维降为  $M$  维观测信号  $y$ 。显然采样后信号的维数降低了。要想根据  $M$  个测量值恢复信号  $x$  其实是一个病态问题, Chen, Donoho 和 Saunders 提出了利用  $l_1$  范数下的最优化问题求解  $x$  的精确或近似逼近, 即:

$$\min \|J^T x\|_1 \quad \text{s.t.} \quad y = H J^T x \quad (3)$$

由于  $s = J^T x$ , 可将式 (3) 的最优化问题转化为:

$$\min \|s\|_1 \quad \text{s.t.} \quad y = H s \quad (4)$$

求解稀疏系数估计  $\hat{s}$  再做反变换, 就可以得到重构后的信号  $\hat{x}$ 。常用的求解方法有基追踪 BP (Basis Pursuit)、匹配追踪法 MP (Matching Pursuit) 和正交匹配追踪法 OMP (Orthogonal Matching Pursuit) 等。

## 2 轮廓波变换

Minh N. Do 和 Martin Vetterli 提出的 contourlet 变换, 也称塔型方向滤波器组 PDFB (Pyramidal Directional Filter Bank) 是一种多分辨率、局域的、多方向的图像表示方法, contourlet 变换基的支撑区间具有随尺度而长宽比变化的“长条形结构”, 因此相比于小波分析, 轮廓波变换能更“稀疏”地表示图像。

contourlet 变换的基本思想是首先用一个类似小波的多尺度分解捕捉边缘奇异点, 再根据方向信息将位置相近的奇异点汇集成轮廓段。其算法实现主要是由拉普拉斯金字塔分解 (LP) 和方向滤波器组 (DFB) 两个部分组成。

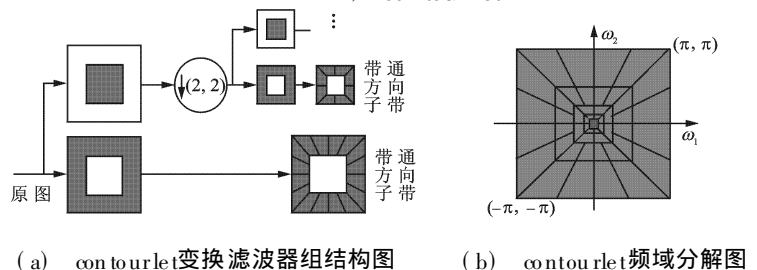


图 1 contourlet 变换原理图

具体实现过程见图 1 (a)。LP 用来实现多尺度分解, 每一级分解得到一个低通子带和高通子带, 然后将高通子带采用方向性滤波器组进行分解, 进一步将图像分解到不同的频带。采用这种理想的滤波器, 轮廓波变换将高频子带分解为一个个“楔状”区域, 见图 1 (b)。

3 基于轮廓波变换的压缩感知算法

小波变换压缩感知算法 (W-CS) 中, 首先将大小  $N \times N$  的图像进行小波变换, 然后构造测量矩阵  $H$  (目前, 测量矩阵主要有服从  $(0, 1/N)$  分布的随机高斯矩阵、贝努里分布的  $\pm 1$  矩阵等), 利用  $H$  对小波变换后的系数进行测量, 得到  $M \times N$  ( $M \ll N$ ) 大小的测量系数矩阵。恢复图像时, 根据  $H$  和  $M \times N$  大小的测量系数, 通过 OMP 算法等恢复出原图像。

- 本文算法与 W-CS 算法相比, 有以下调整和改进
- (1) 采用轮廓波变换取代小波变换。小波变换每一层分解都得到 3 个高频分量 (水平、垂直和对角线), 轮廓波变换在任意尺度能分解成 2 的任意次方个方向子带, 具有多方向性。
  - (2) W-CS 算法采用测量矩阵对全部变换系数进行测量, 本文仅对轮廓波变换后的高频系数进行测量。由于低频系数是原图像在不同尺度下的逼近信号, 不能认为是稀疏的。

- 本文提出的算法具体实现如下。
- 步骤 1 对  $N \times N$  的图像进行 1 级轮廓波分解 (LP 结构采用“9-7”小波分解, DFB 的方向数为 8), 从而得到图像的变换高频系数  $s$ 。
  - 步骤 2 选择合适的  $M$  值 ( $1 \leq M \ll N$ ), 构造  $M \times N$  大小的服从  $(0, 1/N)$  高斯分布的测量矩阵  $H$  对  $s$  进行测量, 即  $y = Hs$ , 得到  $M \times N$  维的测量系数矩阵。
  - 步骤 3 利用 OMP 算法求解高频系数矩阵  $s$  的精确估计。
  - 步骤 4 将变换系数矩阵进行轮廓波反变换得到恢复的图像。

4 仿真结果与分析

为了验证本文算法的有效性, 采用  $256 \times 256$  大小的 Lena 图像和 Boat 图像进行仿真测试, 并将该算法与 DCT-CS 和 W-CS 进行比较。实验中, W-CS 选取“sym8”小波函数对图像进行 4 层分解, 得到  $256 \times 256$  大小的变换系数矩阵。本文算法中选取“9-7”小波函数进行单层分解, 方向数为 8, 得到  $128 \times 128$  的低频系数和  $256 \times 256$  的高频系数。为保证测量后的系数点个数相同,  $M$  值分

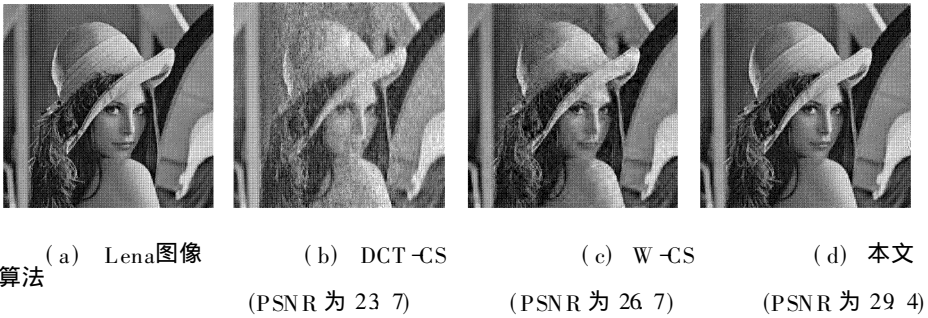


图 2 Lena 图像重构效果图

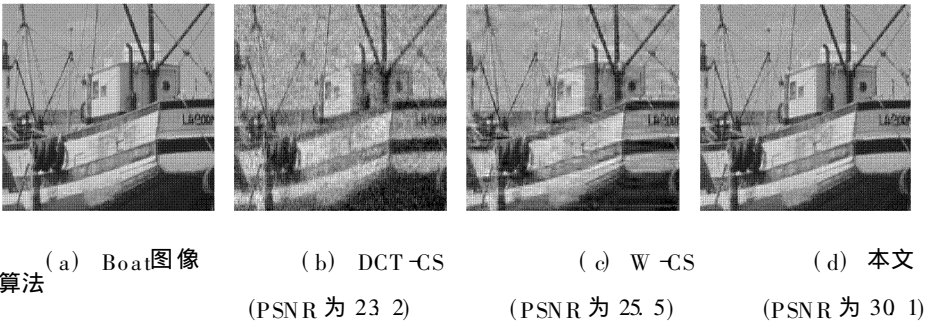


图 3 Boat 图像重构效果图

别取 128、128 和 64。实验结果如图 2 和图 3 所示, 重构图像的质量以峰值信噪比 (PSNR) 作为测度指标。

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

从实验效果图中可以明显看出,采用 DCT-CS 算法图像重构质量不佳,失真较明显。W-CS 方法重构后的图像有轻微失真,而本文算法重构图像质量得到较大提升,与原始图像较为逼近。Lena 图像测试中本文算法的 PSNR 值较 DCT-CS 和 W-CS 相比分别提高了 5.7 dB 和 2.7 dB。Boat 图像测试中本文算法的 PSNR 值较 DCT-CS 和 W-CS 相比分别提高了 6.9 dB 和 4.6 dB。

为了进一步说明本文算法的有效性,我们对 Lena 和 Boat 两幅图像在不同采样率(随机投影数量与像素数之比)下图像重构的 PSNR 值进行了对比,结果如图 4 和图 5 所示。可以看出在不同采样率下本文算法图像重构的 PSNR 值明显高于 DCT-CS 和 W-CS。尤其对于 Boat 图像本文算法重构效果更好,该结果进一步说明对于含曲线较丰富的图像,轮廓波具有更优的逼近能力和稀疏表示。

## 5 结束语

本文首先简要介绍了压缩感知算法的原理及其实现方法,利用轮廓波变换对图像具有更优的稀疏表示能力,提出了一种基于轮廓波变换的压缩感知算法,实现图像的压缩感知。与现有的 DCT 和小波变换的压缩感知算法进行了对比,从实验结果上看,重构图像质量得到了明显改善。对于含曲线较丰富的图像,本文算法效果更佳。

### 参考文献:

- [1] Donoho D L. Compressed sensing [J]. IEEE Transaction on Information Theory, 2006, 52 (4): 1289-1306
- [2] Candes E J. Compressive sampling [C]// Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Madrid: Spanish European Mathematical Society, 2006: 1433-1452
- [3] Baraniuk R. A lecture on compressive sensing [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24 (4): 118-121.
- [4] Candes E J, Tao T. Near optimal signal recovery from random projections: universal encoding strategies [J]. IEEE Transaction on Information Theory, 2006, 52 (12): 5406-5425
- [5] Candes E J, Romberg J, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements [J]. Communication on Pure and Applied Mathematics, 2006, 59 (8): 1207-1223
- [6] 石光明, 刘丹华, 高大化, 等. 压缩感知理论及其研究进展 [J]. 电子学报, 2009, 37 (5): 1070-1081
- [7] 练秋生, 肖莹. 基于小波树结构和迭代收缩的图像压缩感知算法研究 [J]. 电子与信息学报, 2011, 33 (4): 967-971
- [8] 戴琼海, 付长军, 季向阳. 压缩感知研究 [J]. 计算机学报, 2011, 34 (3): 425-434
- [9] Do M N, Vetterli M. Contourlets: a directional multi-resolution image representation [C]// Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing. Rochester, USA: IEEE Press, 2002: 357-360

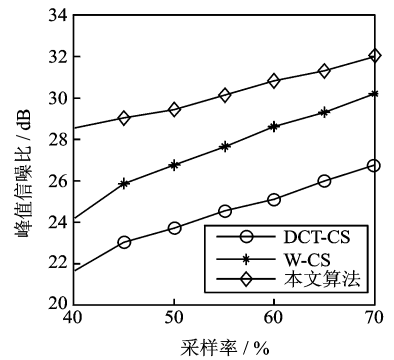


图 4 不同采样率下 Lena 重构图像 PSNR 比较

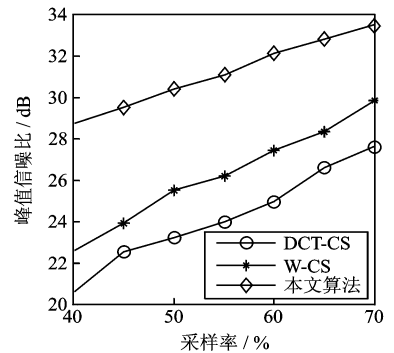


图 5 不同采样率下 Boat 重构图像 PSNR 比较