Phân tích & Thiết kế thuật toán (Algorithms Design & Analysis)

L/O/G/O

GV: HUỲNH THỊ THANH THƯƠNG

Email: thuonghtt@uit.edu.vn

Bài tập 1

1-1 Comparison of running times

For each function $f(n)$ and time t in the following table, determine the largest size n of a problem that can be solved in time t, assuming that the algorithm to solve the problem takes $f(n)$ microseconds.

Lưu ý: cần giải thích cách làm (cách tính toán) chứ không phải chỉ điền số vào bảng. Không cần giải thích hết các hàm, chỉ cần giải thích với 4 hàm (nlogn, n^3 2^n, n!) và 3 mốc thời gian (1 giây, 1 year, 1 century). Nếu viết code thì đưa code vào để giải thích cũng được

Notes for Chapter 1 15

	1 second	1 minute	1 hour	1 day	1 month	1 year	1 century
$\lg n$							
$\sqrt{n}$							
n							
$n \lg n$							
n^2							
n^3							
2^n							
$n!$							

HW#03: Big-O notation

- **Bài tập 2**: Với mỗi nhóm hàm bên dưới, hãy sắp xếp tăng dần "theo Big-O nhỏ nhất", có giải thích ngắn gọn cách so sánh

Group 1:

$$f_1(n) = \binom{n}{100}$$
$$f_2(n) = n^{100}$$
$$f_3(n) = 1/n$$
$$f_4(n) = 10^{1000}n$$
$$f_5(n) = nlogn$$

Group 2:

$$\begin{aligned} f_1(n) &= 2^{2^{1000000}} \\ f_2(n) &= 2^{100000n} \\ f_3(n) &= \binom{n}{2} \\ f_4(n) &= n\sqrt{n} \end{aligned}$$

Group 3:

$$\begin{aligned} f_1(n) &= n^{\sqrt{n}} \\ f_2(n) &= 2^n \\ f_3(n) &= n^{10} \cdot 2^{n/2} \\ f_4(n) &= \sum_{i=1}^{n}(i+1) \end{aligned}$$

Ký hiệu: log là log cơ số 2, $\binom{n}{k}$ là tổ hợp chập k của n

HW#03: Big-O notation

Group 4: $f_6(n) = n^{\sqrt{n}}$ $f_7(n) = \pi^n$ $f_8(n) = 2^{n^4}$ $f_9(n) = n^{4\log n}$	**Group 5:** $f_6(n) = n^{\sqrt{n}}$ $f_7(n) = \mathrm{n}^{\log n}$ $f_8(n) = 2^{n/2}$ $f_9(n) = 3^{\sqrt{n}}$ $f_{10}(n) = 4^{n^{1/4}}$

Group 6:

$$
\begin{aligned}
f_1(n) &= n^{0.999999} \log n \\
f_2(n) &= 10000000n \\
f_3(n) &= 1.000001^n \\
f_4(n) &= n^2
\end{aligned}
$$

Group 7:

$$f_1(n) = n^\pi \qquad f_2(n) = \pi^n \qquad f_3(n) = \binom{n}{5} \qquad f_4(n) = \sqrt{2^{\sqrt{n}}}$$

$$f_5(n) = \binom{n}{n-4} \qquad f_6(n) = 2^{\log^4 n} \qquad f_7(n) = n^{5(\log n)^2} \qquad f_8(n) = n^4\binom{n}{4}$$

HW#03: Các ký hiệu tiệm cận khác

Bài tập 3: Chứng minh, dùng định nghĩa của các ký hiệu tiệm cận (không dùng lim)

a. $n^4 + n + 1 \notin O(n^2)$

b. $O(C.f(n)) = O(f(n))$ với C là hằng số

c. Nếu $f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \in O(h(n))$ thì $f(n) \in O(h(n))$

d. $\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$

e. $g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow O(g(n)) \subseteq O(h(n))$

f. $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$.

g. $n + n^2O(\ln n) = O(n^2 \ln n)$

$f(n) = n^3 + O(n^2)$
means
$f(n) = n^3 + h(n)$
for some $h(n) \in O(n^2)$

$n^2 + O(n) = O(n^2)$
means
for any $f(n) \in O(n)$:
$n^2 + f(n) = h(n)$
for some $h(n) \in O(n^2)$

HW#03: Các ký hiệu tiệm cận khác

❖ **Bài tập 4: Các khẳng định bên dưới là đúng hay sai? Vì sao?**

a. Nếu $f(n) = \Theta(g(n))$ và $g(n) = \Theta(h(n))$, thì $h(n) = \Theta(f(n))$

b. Nếu $f(n)= O(g(n))$ và $g(n)= O(f(n))$, thì $f(n)= g(n)$

c. $f(n) + O(f(n)) = \Theta(f(n))$

d. $2^{10n} = O(2^n)$

e. $2^{n+10} = O(2^n)$

f. $\log_a n = \Theta(\log_b n)$

$f(n) = n^3 + O(n^2)$
means
$f(n) = n^3 + h(n)$
for some $h(n) \in O(n^2)$

$n^2 + O(n) = O(n^2)$
means
for any $f(n) \in O(n)$:
$n^2 + f(n) = h(n)$
for some $h(n) \in O(n^2)$

dùng định nghĩa của các ký hiệu tiệm cận (không dùng lim) để giải thích

Bài tập 5: Ước lượng nhanh độ phức tạp của giải thuật đệ quy dùng Định lý Master

❖Giải bằng định lý Master. Ghi rõ Áp dụng trường hợp nào (Case 1, Case 2, Case 3) của Định lý số mấy (Dạng đơn giản – 1 hay Dạng tổng quát – 2) ? Câu nào không áp dụng được định lý Master thì giải thích vì sao?

$$1.\ T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

$$2.\ T(n) = 7T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$$

$$3.\ T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + \frac{n}{2}$$

$$4.\ T(n) = 16T\left(\frac{n}{4}\right) + n$$

$$5.\ T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + n^{0.51}$$

$$6.\ T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$$7.\ T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + \sqrt{(n)}$$

$$8.\ T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + cn$$

$$9.\ T(n) = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + 5n$$

$$10.\ T(n) = 5T\left(\frac{n}{4}\right) + 4n$$

❖ Giải bằng định lý Master. Ghi rõ Áp dụng trường hợp nào (Case 1, Case 2, Case 3) của Định lý số mấy (Dạng đơn giản – 1 hay Dạng tổng quát – 2) ? Câu nào không áp dụng được định lý Master thì giải thích vì sao?

11. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{5}\right) + 5n$

12. $T(n) = 25T\left(\frac{n}{5}\right) + n^2$

13. $T(n) = 10T\left(\frac{n}{3}\right) + 17n^{1.2}$

14. $T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$

15. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + logn$

16. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{5}\right) + logn$

17. $T(n) = \sqrt{(2)}T\left(\frac{n}{2}\right) + logn$

18. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + nlogn$

19. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn$

20. $T(n) = 6T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2logn$

❖Giải bằng định lý Master. Ghi rõ Áp dụng trường hợp nào (Case 1, Case 2, Case 3) của Định lý số mấy (Dạng đơn giản – 1 hay Dạng tổng quát – 2) ? Câu nào không áp dụng được định lý Master thì giải thích vì sao?

$$21. T(n) = 3T\left(\frac{n}{5}\right) + log^2 n$$

$$22. T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{logn}$$

$$23. T(n) = 2^n T\left(\frac{n}{2}\right) + n^n$$

$$24. T(n) = 0.5T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$$25. T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n(2 - cosn)$$

$$26. T(n) = 64T\left(\frac{n}{8}\right) - n^2 logn$$

$$27. T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 2^n$$

$$28. T(n) = 16T\left(\frac{n}{4}\right) + n!$$