

BÀI TẬP

1. Cho (Z_n) là dãy các ĐLNN rời rạc xác định bởi

$$P\{Z_n = n^\alpha\} = \frac{1}{n}, \quad P(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Chứng minh rằng Z_n hội tụ tới 0 theo bình phương trung bình nếu và chỉ nếu $\alpha < \frac{1}{2}$.

2. Cho X_1, X_2, \dots, X_{12} là các ĐLNN độc lập với $EX_i = 16$ và $DX_i = 1$ với mọi i . Sử dụng bất đẳng thức Trebusép để tìm các hằng số a, b sao cho

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{12} X_i \leq b\right\} \geq 0,99.$$

3. Gieo một con xúc sắc cân đối n lần. Gọi X là số lần xuất hiện mặt lục. Chứng minh rằng

$$P\left\{\frac{n}{6} - \sqrt{n} < X < \frac{n}{6} + \sqrt{n}\right\} \geq \frac{31}{36}.$$

4. Giả sử tiền điện anh phải trả trong một tháng là một ĐLNN với kì vọng 16 nghìn, và độ lệch tiêu chuẩn là 1 nghìn. Sử dụng bất đẳng thức Trebusép hãy tìm số a nhỏ nhất để với xác suất 0,99, anh có thể tin rằng số tiền điện trả trong một năm không vượt quá a .

5. Giả sử X là ĐLNN có $EX = 5$ và $DX = 0,16$. Chứng minh rằng

a) $P\{3 < X < 7\} \geq 0,96$;

b) $P\{2 < X < 8\} \geq 0,98$;

c) $P\left\{3 < \frac{X_1 + \dots + X_9}{9} < 7\right\} \geq 0,99$

ở đó X_1, \dots, X_9 là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố với X .

6. Cho dãy các ĐLNN độc lập (X_n) xác định như sau :

$$P\{X_n = n^\alpha\} = \frac{1}{2} ;$$

$$P\{X_n = -n^\alpha\} = \frac{1}{2}$$

Chứng minh rằng nếu $\alpha < \frac{1}{2}$ thì dãy (X_n) tuân theo luật số lớn.

7. Cho dãy các ĐLNN độc lập (X_n) xác định như sau :

$$P\{X_n = 2^n\} = \frac{1}{2^{2n+1}}$$

$$P\{X_n = -2^n\} = \frac{1}{2^{2n+1}}$$

$$P\{X_n = 0\} = 1 - \frac{1}{2^{2n}}.$$

Chứng tỏ rằng dãy (X_n) tuân theo luật số lớn.

8. Một xí nghiệp sản xuất máy tính có xác suất làm ra sản phẩm không đạt tiêu chuẩn chất lượng là 2%. Chọn vô tư 250 máy tính để kiểm tra. Tính xác suất để :

- a) Có đúng hai máy không đạt tiêu chuẩn chất lượng ;
- b) Có không quá hai máy không đạt tiêu chuẩn chất lượng ;

9. Xác suất để một hạt giống không nảy mầm là 3%. Gieo 150 hạt. Tính xác suất để có ít nhất 6 hạt giống không nảy mầm.

10. Một khu nhà có 158 hộ gia đình. Xác suất để một hộ có sự cố về điện vào mỗi buổi tối là 0,02. Tính xác suất để trong một buổi tối :

- a) Có đúng 4 gia đình có sự cố ;
- b) Số gia đình có sự cố về điện nằm trong đoạn $[2,5]$.

11. Gieo một con xúc xắc 120 lần. Tính xác suất để số lần xuất hiện mặt "lục" bé hơn 15 trong các trường hợp sau :

- a) Con xúc xắc được chế tạo cân đối ;
- b) Con xúc xắc không cân đối và xác suất xuất hiện lục trong một lần gieo là $\frac{1}{10}$.

12. Ở một thành phố nào đó, mỗi ngày nhận 50 thí sinh đến thi lấy bằng lái xe. Xác suất để một người thi đạt là $\frac{1}{3}$. Xác định số k sao cho ít nhất 95% số ngày trong đó số người được nhận bằng lái xe là lớn hơn k .

13. Một kì thi gồm 45 câu hỏi, với mỗi câu hỏi thí sinh cần chọn một trong 4 câu trả lời kèm theo, trong đó chỉ có duy nhất một câu trả lời đúng (kiểu thi này được gọi là trắc nghiệm khách quan (multiple choice test)). Một sinh viên hoàn toàn không học gì khi thi chỉ chọn ngẫu nhiên một trong 4 câu trả lời. Hãy tính xác suất để :

- a) Sinh viên đó trả lời đúng ít nhất 16 câu hỏi.
- b) Sinh viên trả lời đúng nhiều nhất 9 câu.
- c) Số câu trả lời đúng của sinh viên là từ 8 đến 12.

14. Trong một thành phố nào đó có 46% dân số là dưới 30 tuổi. Chọn ngẫu nhiên 100 người. Tính xác suất để có hơn một nửa số người trong mẫu là dưới 30 tuổi. Xác suất đó là bao nhiêu nếu mẫu được chọn gồm 225 người ?

15. Một cơ quan có 80 nhân viên. Xác suất để một nhân viên đang kí đi nghỉ mát trong dịp hè là $\frac{1}{5}$.

Tìm số k nhỏ nhất để với xác suất ít nhất là 99%, có thể khẳng định rằng số người đang kí đi nghỉ mát không vượt quá k .

16. Xác suất làm ra một phế phẩm của một nhà máy là 0,02.

Đối với một lô hàng gồm 25000 sản phẩm, hãy xác định các số nguyên a, b để ta có $P\{a < X < b\} = 0,95$, ở đó X kí hiệu số sản phẩm phế phẩm.

17. Ở một thành phố nào đó 54% dân số là phụ nữ.

- a) Chọn một mẫu ngẫu nhiên 450 người. Tính xác suất để tỉ lệ phụ nữ trong mẫu bé hơn 50%.
- b) Xác định kích thước mẫu n để với xác suất 0,01 tỉ lệ phụ nữ trong mẫu bé hơn 50%.

18. Chọn ngẫu nhiên 250 chiếc xe máy ta thấy có 185 xe Honda.

a) Hãy ước lượng tỉ lệ θ xe Honda trong tổng số xe máy với độ tin cậy 95%.

b) Xác định hằng số c sao cho với độ tin cậy 99%, ta có thể khẳng định $\theta > c$.

19. Chọn ngẫu nhiên 200 người, ta thấy có 42 người hút thuốc. Hãy đánh giá tỉ lệ người hút thuốc trong toàn bộ dân số với độ tin cậy 95%.

20. Một tỉnh A tuyên bố rằng tỉ lệ thi đỗ tốt nghiệp của tỉnh là 80%. Một thanh tra của Bộ tin rằng tỉ lệ này nhỏ hơn 80%, đã chọn ngẫu nhiên 72 học sinh của tỉnh A, thì thấy có 50 em tốt nghiệp.

a) Có bao nhiêu phần trăm số mẫu kích thước 72 có số học sinh tốt nghiệp nhiều nhất là 50, nếu giả thiết tỉ lệ $p = 80\%$ là đúng?

b) Bộ có cơ sở để bác bỏ báo cáo của tỉnh không?

21. Trọng lượng trung bình của một giống bò là μ (chưa biết) còn độ lệch tiêu chuẩn là 38,2kg. Chọn ngẫu nhiên 250 con bò ta tìm được trọng lượng trung bình của chúng là 215,4kg. Từ số liệu này hãy cho một ước lượng về μ với độ tin cậy 95%.

22. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 400 con gà được chọn và ta tính được trung bình mẫu là 2,08kg với độ lệch tiêu chuẩn là 0,22kg. Với độ tin cậy bao nhiêu có thể cho rằng trọng lượng trung bình của toàn bộ các con gà nằm giữa 2,06 và 2,10kg? Lớn hơn 2,07kg?

23. Thời gian sống trung bình của một giống chuột nuôi trong phòng thí nghiệm là 258 ngày với độ lệch tiêu chuẩn 45 ngày. Chọn ngẫu nhiên 36 con chuột và cho uống thử một loại thuốc nào đó hằng ngày. Thời gian sống trung bình của nhóm chuột này là 274 ngày.

a) Nếu giả thiết rằng loại thuốc đó không có ảnh hưởng tới thời gian sống của chuột thì có bao nhiêu phần trăm mẫu chuột (kích thước 36) có thời gian sống trung bình không nhỏ hơn 274 (ngày).

b) Thí nghiệm có chứng tỏ loại thuốc trên làm tăng thời gian sống trung bình của chuột hay không?

ĐÁP SỐ VÀ CHỈ DẪN

1. $E|Z_n|^2 = n^{2\alpha-1} \rightarrow 0$ khi và chỉ khi $2\alpha - 1 < 0$.

2. $S = \sum_{i=1}^{12} X_i$, $ES = 192$ và

$$DS = 12, \quad P\{|S - 192| > \varepsilon\} \leq \frac{12}{\varepsilon^2} \text{ suy ra } \varepsilon \geq 34,64.$$

Từ đó $a = 192 - 34,64 = 157,36$

$b = 192 + 34,64 = 226,64$.

3. $X \sim B\left(\frac{n}{6}, \frac{5n}{36}\right)$. Theo Trebúsép

$$P \geq 1 - \frac{DX}{n} = 1 - \frac{51}{36} = \frac{31}{36}.$$

4. $a = 226,64$

5. a) 0,96 ; b) 0,982 ; c) 0,995

6. Chứng minh rằng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n DX_k}{n^2} = \frac{\sum_{k=1}^n k^{2\alpha}}{n^2} = 0.$$

7. Tương tự bài 6.

8. $X \sim B(250, 0,02)$. X xấp xỉ phân bố Poat Xông với $\lambda = 5$.

a) 0,0842 ; b) 0,1247.

9. Xấp xỉ Poat Xông $\lambda = 4,5$; $P = 0,2971$.

10. a) 0,1763 ; b) 0,7226.

11. a) $P = 1 - \Phi(1,22) = 0,1131$;

b) $P = \Phi(0,912) = 0,8159$.

12.

$$P(X > k) \approx 1 - \Phi \left(\frac{(k + 0,5) - \frac{50}{3}}{\sqrt{50 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}} \right) \geq 0,95$$

$$\Rightarrow \frac{(k + 0,5) - 16,667}{3,333} \leq -1,645$$

Từ đó $k \leq 10,68 \Rightarrow k = 10$.

13. a) $P(X \geq 16) = P\{\tilde{X} > 15,5\} = 1 - \Phi(1,463) = 0,0717$;

b) $P(X \leq 9) = P\{\tilde{X} < 9,5\} = 0,2737$;

c) $P(8 \leq X \leq 12) = P(7,5 < \tilde{X} < 12,5) = 0,5681$.

14. $P(X > 50) = P\{\tilde{X} > 50,5\} = 0,1833$ nếu mẫu là 100 (người).

Nếu mẫu là 225 thì xác suất là

$$P(X \geq 113) = P\{\tilde{X} > 112,5\} = 0,1144$$

15.

$$P(X \leq k) = P(\tilde{X} < k + 0,5) \geq 0,99$$

$$\Rightarrow \frac{(k + 0,5) - 16}{3,578} \geq 2,326 \Rightarrow k \geq 23,8, k = 24.$$

16. Trong khoảng 457 và 543.

17. a) $\frac{X}{n}$ có trung bình 0,54 và độ lệch tiêu chuẩn 0,02349.

$$P\left(\frac{X}{n} < 0,5\right) = 0,0443$$

b) $P\left(\frac{X}{n} < 0,5\right) = 0,01 = \Phi(-2,326)$

$$\Rightarrow \frac{n}{(0,54)(0,46)} = \frac{(2,326)^2}{(0,04)^2} \Rightarrow n = 840$$

18. a) $0,686 < \theta < 0,794$.

b) Với độ tin cậy 99% $\theta > 0,675$.

19. Khoảng tin cậy 95% là $0,154 < p < 0,266$.

20. $P\{X \leq 50\} = P\{\tilde{X} < 50,5\} = \Phi(-2,09) \approx 0,02$.

b) Có cơ sở.

$$210,66 \text{ kg} < \mu < 220,14 \text{ kg}.$$

22. $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,011$.

a) $P\{\bar{X} - 0,02 < \mu < \bar{X} + 0,02\} = 0,93$.

b) $P\{\mu > \bar{X} - 0,01\} = P\{\bar{X} - \mu < 0,01\} = 0,818$.

23. a)
$$P(\bar{X} \geq 274) = 1 - \Phi\left(\frac{(274 - 258)45}{\sqrt{36}}\right)$$
$$= 1 - \Phi(2,133) = 0,0165.$$

b) Có.