CHƯƠNG 3: CHUỖI SỐ

1. KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ CHUỖI SỐ
2. CHUỖI SỐ DƯƠNG
3. CHUỖI SỐ CÓ DẤU BẤT KỲ
4. CHUỖI LŨY THỪA

§1. KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ CHUỖI SỐ

1.1. Định nghĩa

• Cho dãy số có vô hạn các số hạng $u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n, \ldots$

Biểu thức

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

được gọi là *chuỗi số*.

• Các số $u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n, \ldots$ là các số hạng và u_n được gọi là số hạng tổng quát của chuỗi số.

• Tổng n số hạng đầu tiên $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ được gọi là *tổng riêng thứ* n của chuỗi số.

• Nếu dãy $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến số S hữu hạn thì ta nói chuỗi số *hội tụ* và có tổng là S, ta ghi là $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$. Ngược lại, ta nói chuỗi số *phân kỳ*.

VD 1. Xét sự hội tụ của chuỗi nhân $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ với $a \neq 0$.

Giải

• $q = 1$: $S_n = na \to +\infty \Rightarrow$ chuỗi phân kỳ.

• $q \neq 1$: $S_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q} = a.\dfrac{1-q^n}{1-q}$

Với $|q| < 1$ thì $S_n \to \dfrac{a}{1-q} \Rightarrow$ chuỗi hội tụ.

Với $|q| > 1$ thì $S_n \to +\infty \Rightarrow$ chuỗi phân kỳ.

Vậy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ hội tụ $\Leftrightarrow |q| < 1.$

VD 2. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Giải. Ta có:

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \Rightarrow \text{chuỗi hội tụ.}$$

VD 3. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Giải. Ta có: $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$

$$\Rightarrow S_n = (-\ln 1 + \ln 2) + (-\ln 2 + \ln 3) + (-\ln 3 + \ln 4) + \ldots + [-\ln n + \ln(n+1)]$$

$$= \ln(n+1) \to +\infty \Rightarrow \text{chuỗi phân kỳ.}$$

VD 4. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Giải. $S_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow S_n > n.\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty \Rightarrow$ chuỗi phân kỳ.

1.2. Điều kiện cần để chuỗi số hội tụ

• Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$,

ngược lại nếu $\lim_{n \to \infty} u_n \neq 0$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

VD 5. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3n^4 + n + 2}$.

Giải. Ta có:

$$u_n = \frac{n^4}{3n^4 + n + 2} \to 1 \neq 0 \Rightarrow \text{chuỗi phân kỳ.}$$

VD 6. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n^4+1}$.

Giải. Ta có:

$$u_n = \frac{n^5}{n^4+1} \to +\infty \neq 0 \Rightarrow \text{chuỗi phân kỳ.}$$

1.3. Tính chất

- Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n .$$

- Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì: $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.
- Tính chất hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số không đổi nếu ta thêm hoặc bớt đi hữu hạn số hạng.

§2. CHUỖI SỐ DƯƠNG

2.1. Định nghĩa

- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là *chuỗi số dương* nếu $u_n \geq 0,\ \forall n$.

Khi $u_n > 0,\ \forall n$ thì chuỗi số là dương thực sự.

2.2. Các định lý so sánh

***Định lý* 1.** Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ thỏa:

$$0 \leq u_n \leq v_n,\ \forall n \geq n_0.$$

- Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.
- Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ.

VD 1. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n}$.

Giải. Ta có: $\frac{1}{n.2^n} \le \frac{1}{2^n}, \forall n \ge 1.$

Do $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n}$ hội tụ.

VD 2. Xét sự hội tụ của chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ bằng cách so sánh với $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Giải. Xét hàm số $f(t) = t - \ln(1+t)$ ta có:

$$f'(t) = \frac{t}{1+t} > 0,\ \forall t > 0 \Rightarrow f(t) > 0,\ \forall t > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0,\ \forall n \geq 1.$$

Do $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ phân kỳ nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ.

Định lý 2

Cho hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ thỏa:

$u_n > 0$ và $v_n > 0$ với n đủ lớn và $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = k$.

- Nếu $k = 0$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ.
- Nếu $k = +\infty$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ.
- Nếu $0 < k < +\infty$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cùng tính chất.

VD 3. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n.3^{n+1}}$ bằng cách so sánh với $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Giải. Ta có $\frac{2^n(n+1)}{n.3^{n+1}} : \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{n+1}{3n} \to \frac{1}{3}$.

Do $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ hội tụ nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n.3^{n+1}}$ hội tụ.

Chú ý

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ khi $\alpha > 1$ và phân kỳ khi $\alpha \leq 1$.

VD 4. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{\sqrt{2n^5+3}}$.

Giải. Ta có $\dfrac{n+1}{\sqrt{2n^5+3}} : \dfrac{1}{\sqrt{n^3}} \to \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Do $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$ hội tụ nên $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{\sqrt{2n^5+3}}$ hội tụ.

Cách khác

Khi $n \to \infty$ thì: $\dfrac{n+1}{\sqrt{2n^5+3}} \sim \dfrac{n}{\sqrt{2}.n^{\frac{5}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}.n^{\frac{3}{2}}}$.

Do $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}.n^{\frac{3}{2}}}$ hội tụ nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n^5+3}}$ hội tụ.

2.3. Các tiêu chuẩn hội tụ

2.3.1. Tiêu chuẩn D'Alembert

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = D$.

- Nếu $D < 1$ thì chuỗi hội tụ.
- Nếu $D > 1$ thì chuỗi phân kỳ.
- Nếu $D = 1$ thì chưa thể kết luận.

VD 5. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Giải. Ta có: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{3^{n+1}}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} : \dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$

$$= \frac{n+2}{3(n+1)}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n \to \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \text{chuỗi hội tụ.}$$

VD 6. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n!)^2}{(2n)!}$.

Giải. Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!} : \frac{5^n . n! n!}{(2n)!}$

$$= \frac{5(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to \frac{5}{4} > 1 \Rightarrow \text{chuỗi phân kỳ.}$$

2.3.2. Tiêu chuẩn Cauchy

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$.

- Nếu $C < 1$ thì chuỗi hội tụ.
- Nếu $C > 1$ thì chuỗi phân kỳ.
- Nếu $C = 1$ thì chưa thể kết luận.

VD 7. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}$.

Giải. Ta có: $\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 < 1 \Rightarrow$ chuỗi hội tụ.

VD 8. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n}$.

Giải. Ta có: $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{3} \to +\infty \Rightarrow$ chuỗi phân kỳ.

2.3.3 Tiêu chuẩn tích phân

Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm và đơn điệu giảm trên $[k,+\infty),\ k \in N^*$

Khi đó Chuỗi $\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$ hội tụ $\Leftrightarrow \int_{k}^{+\infty} f(x)\,dx$ hội tụ

VD 9. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$.

Giải. Ta có:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \text{ phân kỳ} \Rightarrow \text{chuỗi } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \text{ phân kỳ.}$$

VD 10. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$.

Giải. Ta có:

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^3} \text{ hội tụ} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n} \text{ hội tụ.}$$

§3. CHUỖI SỐ CÓ DẤU TÙY Ý

3.1. Chuỗi đan dấu

a) Định nghĩa. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ được gọi là *chuỗi số đan dấu* nếu $u_n > 0,\ \forall n$.

VD 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n+1}{2^{n+1}}$ là các chuỗi đan dấu.

b) Định lý Leibnitz

Nếu dãy $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ giảm *nghiêm ngặt* và $u_n \to 0$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ hội tụ. Khi đó, ta gọi là *chuỗi Leibnitz*.

VD 2. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Giải. Dãy $u_n = \frac{1}{n}$ giảm ngặt và $\frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow$ chuỗi hội tụ.

VD 3. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n + 1}{2^{n+1}}$.

Giải. $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \to \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$ không có kết luận.

Đặt $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n + 1}{2^{n+1}}$, ta có:

- Với $n = 2k : v_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^{2k+1}} \to \dfrac{1}{2}.$
- Với $n = 2k + 1 : v_n = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{2k+2}} \to -\dfrac{1}{2}.$

Do $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ nên $v_n \not\to 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ.

VD 4. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Giải

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n\left[\sqrt{n}-(-1)^n\right]}{n-1} = \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}$$

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ là chuỗi điều hòa nên phân kỳ.
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ là chuỗi Leibnitz nên hội tụ.

Vậy chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ phân kỳ.

3.2. Chuỗi có dấu tùy ý

a) Định nghĩa

- Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n \in \mathbb{R}$ được gọi là *chuỗi có dấu tùy ý*.
- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là *hội tụ tuyệt đối* nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ.
- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là *bán hội tụ* nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ.

<u>VD 5.</u> Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ là bán hội tụ.

b) Định lý

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ hội tụ thì chuỗi có dấu tùy ý $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ.

VD 6. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(n^n)}{n^2}$.

Giải

Do $|u_n| \le \dfrac{1}{n^2}$ và $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ hội tụ nên $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\cos(n^n)|}{n^2}$ hội tụ.

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ tuyệt đối.

VD 7. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+(-2)^{n+1}}{3^n}$.

Giải. Ta có:

$$\frac{(-1)^n + (-2)^{n+1}}{3^n} = \frac{(-1)^n}{3^n} + \frac{(-2)^{n+1}}{3^n}.$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Do $\left|\frac{(-2)^{n+1}}{3^n}\right| = 2.\left(\frac{2}{3}\right)^n$ nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{3^n}$ hội tụ.

Vậy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + (-2)^{n+1}}{3^n}$ hội tụ.

………………………………………………………………………

4. CHUỖI LŨY THỪA

4.1. Định nghĩa

Chuỗi lũy thừa là chuỗi có dạng $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

Bằng phép biến đổi $X=(x-x_0)$

ta đưa chuỗi trên về dạng $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$

Do đó các kết quả về chuỗi lũy thừa chỉ cần xét cho

trường hợp chuỗi có dạng $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

Rõ ràng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x = 0$

4.2. Định nghĩa bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa.

* Số $R > 0$ sao cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ với mọi $x : |x| < R$ và phân kỳ với mọi $x : |x| > R$ được gọi là **bán kính hội tụ** của chuỗi.

* Khoảng (-R, R) được gọi là **khoảng hội tụ** của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

4.2. Định nghĩa bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa *(tt)*

*Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

hội tụ $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$ ta cho $\boldsymbol{R} = +\infty$.

*Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

phân kỳ $\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ta cho $\boldsymbol{R} = \mathbf{0}$.

4.3. Cách tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa.

a) Định lý Abel: Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$

Khi đó bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

là: $$R=\begin{cases} 0 & , \ \rho=+\infty \\ \dfrac{1}{\rho} & , \ 0<\rho<+\infty \\ +\infty, & \rho=0 \end{cases}$$

4.3. Cách tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa *(tt)*

b. Định lý Cauchy:

Giả sử $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$

khi đó bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

là: $$R = \begin{cases} 0 & , \quad \rho = +\infty \\ \dfrac{1}{\rho} & , \quad 0 < \rho < +\infty \\ +\infty, & \rho = 0 \end{cases}$$

Chú ý: Để tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

4.4. Cách tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

* Bước 1: Ta dựa vào hai định lý trên để tìm bán kính hội tụ R.

* Bước 2: Khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa này là: $-R < x < R$

* Bước 3: Xét sự hội tụ của chuỗi **tại các đầu mút** của khoảng hội tụ.

Từ đó ta sẽ có được miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

4.5. Một số ví dụ

VD1: Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Ta có: $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n}{n+1} \to 1$

Vậy $R = 1$

* Khoảng hội tụ của chuỗi là $-1 < x < 1$

*Xét sự hội tụ của chuỗi tại 2 đầu mút $x = \pm 1$

✓Tại $x = 1$ ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ

4.5. Một số ví dụ - VD 1*(tt)*

✓Tại $x = -1$ ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Vậy miền hội tụ của chuỗi là **$-1 \leq x < 1$**

VD2: Tìm miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n.3^n}$

Đặt $X = (x+2)$ chuỗi ban đầu trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n.3^n}$

4.5. Một số ví dụ - VD2*(tt)*

Ta có: $a_n = \dfrac{1}{n.3^n} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{3\sqrt[n]{n}} \to \dfrac{1}{3}$

Vậy $R = 3$

*Khoảng hội tụ của chuỗi là

$$-3 < X < 3 \Leftrightarrow -3 < (x+2) < 3$$

$$\Leftrightarrow -5 < x < 1$$

4.5. Một số ví dụ - VD2*(tt)*

* Xét sự hội tụ của chuỗi tại 2 đầu mút $x = -5$ và $x = 1$:

✓ Tại $x = -5$ ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ hội tụ.

✓ Tại $x = 1$ ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi là: $\mathbf{-5 \le x < 1}$

4.5. Một số ví dụ *(tt)*:

VD3: Tìm miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n.9^n}$

Đặt $X = x^2$, chuỗi ban đầu trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$

Ta có: $a_n = \frac{1}{n.9^n}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{9\sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{9}$$

Vậy $R = 9$

4.5. Một số ví dụ - VD3*(tt)*

* Khoảng hội tụ của chuỗi là

$$x^2 < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

* Xét sự hội tụ của chuỗi tại 2 đầu mút $x = \pm 3$:

✓ Tại $x = \pm 3$ ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi là: **$-3 < x < 3$**

4.5. Một số ví dụ *(tt)*

VD4: Tìm miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

Đặt $X = \frac{1-x}{1+x}$

Chuỗi ban đầu trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} X^n$

Ta có: $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2n+1}{2n+3} \to 1 \Rightarrow R = 1$$

4.5. Một số ví dụ - VD4 *(tt)*

* Khoảng hội tụ của chuỗi là

$$-1 < X < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{1-x}{1+x} < 1 \Leftrightarrow x > 0$$

* Xét sự hội tụ của chuỗi tại đầu mút $x = 0$:

Tại $x = 0$ ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Vậy miền hội tụ của chuỗi là: $\mathbf{0 \le x < +\infty}$