CHƯƠNG 6
DẠNG SONG TUYẾN TÍNH VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG

I. Dạng song tuyến tính

I.1 Định nghĩa dạng tuyến tính

Cho X, Y là hai không gian vectơ. Ánh xạ f : X -> Y là ánh xạ tuyến tính nếu f thỏa mãn 2 điều kiện:

$$1)\ f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \forall x,y \in X$$

$$2)\ f(\alpha x)=\alpha f(x) \quad \forall x \in X, \forall \alpha \in K$$

Hay

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y) \quad \forall x,y \in X, \forall \alpha,\beta \in K$$

I. Dạng song tuyến tính

I.2 Định nghĩa dạng song tuyến tính

- Xét V và W là các KGVT trên K
- Lúc này, ánh xạ $f : V \times W \to K$

$$(\alpha, \beta) \mapsto f(\alpha, \beta)$$

đgl dạng song tuyến tính nếu f tuyến tính theo từng biến , nghĩa là

$$\begin{cases} f(c\alpha + \alpha', \beta) = cf(\alpha, \beta) + f(\alpha', \beta) \\ f(\alpha, c\beta + \beta') = cf(\alpha, \beta) + f(\alpha, \beta') \end{cases}$$

$$\forall \alpha, \alpha' \in V; \forall \beta, \beta' \in W; \forall c \in K$$

I. Dạng song tuyến tính

I.2 Định nghĩa dạng song tuyến tính

✍ Ví dụ xét V là KGVT các hàm liên tục trên R

W là KGVT các hàm có đạo hàm mọi cấp trên R

và f là ánh xạ $f : V \times W \to R$

$$(g,h) \mapsto \int_0^1 g(x)h(x)e^x dx$$

☞ f tuyến tính theo từng biến

☞ f là 1 dạng song tuyến tính trên VxW

I. Dạng song tuyến tính

I.2 Định nghĩa dạng song tuyến tính

✍ Ví dụ 2 xét $f: Q^2 \times Q^3 \to Q$

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}_{\alpha}, \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{\beta} \right) \mapsto f(\alpha, \beta) = 2u_1v_1 + 5u_1v_3 - 7u_2v_2 + 8u_2v_3$$

☞ f tuyến tính theo từng biến (kiểm chứng dễ dàng)

☞ f là 1 dạng song tuyến tính trên Q^2xQ^3

I. Dạng song tuyến tính

I.3 Dạng song tuyến tính đối xứng

- Xét dạng song tuyến tính $\boxed{f : V \times V \to F}$
- Lúc này, ta nói

f đối xứng, nếu $\boxed{f(\beta,\alpha) = f(\alpha,\beta)}$ $;\forall \alpha,\beta \in V$

f không đối xứng, nếu $\exists \alpha,\beta : \boxed{f(\alpha,\beta) \neq f(\beta,\alpha)}$

I. Dạng song tuyến tính

I.3 Biểu diễn dạng song tuyến tính trên không gian n chiều

- Cho $V = V_n$: không gian n chiều
- Giả sử ψ(x,y) là một dạng song tuyến trên V_n
- Trong V_n ta chọn một cơ sở xác định:

$$S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

- Khi đó $x, y \in V_n$ có biểu diễn:

Trong đó $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ là tọa độ của x, $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ là tọa độ của y trong cơ sở S

I. Dạng song tuyến tính

I.3 Biểu diễn dạng song tuyến tính trên không gian n chiều

Vậy $\psi(x, y)$ có biểu thức

$$\psi(x,y) = \psi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_i$$

Trong đó $a_{ij} = \psi(e_{i,} e_j)$ gọi là biểu thức tọa độ của ψ trong cơ sở S

Ma trận $A = [a_{ij}] = [\psi(e_i, e_j)]$: ma trận của dạng song tuyến ψ trong cơ sở S

I. Dạng song tuyến tính

I.3 Biểu diễn dạng song tuyến tính trên không gian n chiều

Chú ý:

- Ma trận vuông $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ bất kỳ là ma trận của dạng song tuyến nào đó trong cơ sở $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$
- Nếu các tọa độ của các vectơ trong cơ sở S viết dưới dạng ma trận cột

$$[x]_S = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad [y]_S = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad [x]_S^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Thì $\psi(x, y) = [x]_S^T A [y]$

I. Dạng song tuyến tính

I.3 Biểu diễn dạng song tuyến tính trên không gian n chiều

✍ Ví dụ

$$\begin{aligned} f: R^3 \times R^2 &\to R \\ (X,Y) &\mapsto f(X,Y) \end{aligned} \quad \text{, với} \quad \begin{cases} X = (x_1, x_2, x_3) \\ Y = (y_1, y_2) \end{cases}$$

và

$$f(X,Y) = 3x_1y_1 + 6x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2 - 5x_3y_1$$

☞ Và do

$$\begin{cases} R^3 \text{ có cơ sở } & a = \beta_0 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} \\ R^2 \text{ có cơ sở } & \beta = \beta_0' = \{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} = f(\varepsilon_1, \varepsilon'_1) = 3 & ; a_{12} = f(\varepsilon_1, \varepsilon'_2) = 6 \\ a_{21} = f(\varepsilon_2, \varepsilon'_1) = -2 & ; a_{22} = f(\varepsilon_2, \varepsilon'_2) = 4 \\ a_{31} = f(\varepsilon_3, \varepsilon'_1) = -5 & ; a_{32} = f(\varepsilon_3, \varepsilon'_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = [f]_{a,\beta} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 2}} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

I. Dạng song tuyến tính

I.3 Biểu diễn dạng song tuyến tính trên không gian n chiều

Lưu ý:

- Hạng của DSTT f (x,y) là hạng của ma trận của nó trong một cơ sở nào đó và kí hiệu là rankf. Vậy rankf = r(A).
- DSTT f (x,y) cho trong KGTT X n chiều gọi là không suy biến (tương ứng, suy biến), nếu rankf = n (tương ứng, rankf < n).

II. Dạng toàn phương

II.1 Định nghĩa dạng toàn phương

Định nghĩa dạng toàn phương

✍ Xét V là KGVT trên K

- Cho f(x,y) là dạng song tuyến tính đối xứng .
- Biểu thức f(x,x) thu được khi thay y = x

$f(x,x) \coloneqq f(x,y)|_{y=x}$ gọi là một dạng toàn phương trên V.

=> Dạng song tuyến f(x,y) gọi là dạng song tuyến gốc sinh ra dạng toàn phương f(x,x)

II. Dạng toàn phương

II.1 Định nghĩa dạng toàn phương

Phân loại các dạng toàn phương

✍ Xét V là KGVT trên K, dạng toàn phương f(x,x):

- xác định dương nếu

$$f(x,x) > 0 \quad \forall x \in V, x \neq 0$$

- nửa xác định dương (hay xác định không âm)nếu

$$f(x,x) \geq 0 \quad \forall x \in V, x \neq 0$$

- xác định âm nếu

$$f(x,x) < 0 \quad \forall x \in V, x \neq 0$$

- nửa xác định âm (hay xác định không dương) nếu

$$f(x,x) \leq 0 \quad \forall x \in V, x \neq 0$$

- dấu không xác định nếu nó có thể dương cũng như âm

II. Dạng toàn phương

II.2 Biểu diễn dạng toàn phương trên không gian n chiều

- Cho $V = V_n$: không gian n chiều, ψ(x,y) là một dạng song tuyến trên V_n
- Trong V_n ta chọn một cơ sở xác định: $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Khi đó

$$\psi(x, y) = \psi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_i$$

Nếu $A = [a_{ij}] = [a_{ji}]$, tức là ma trận A đối xứng, ta có

$$\psi(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

là dạng toàn phương trong cơ sở S của không gian V

$trong$ đó $a_{ij} = a_{ji}, x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$

II. Dạng toàn phương

II.2 Biểu diễn dạng toàn phương trên không gian n chiều

- Ta có thể viết $\psi(x,x)$ dưới dạng

$$\psi(x,x) = [x]_S^T A [x]_S$$
$$= a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i\neq j}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

Với

$$[x]_S = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$[x]_S^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$A = [a_{ij}] = [a_{ji}]$ là ma trận của dạng toàn phương trong cơ sở S

II. Dạng toàn phương

II.2 Biểu diễn dạng toàn phương trên không gian n chiều

Chuyển đổi cơ sở

- Giả sử V_n có 2 cơ sở $a \quad và \quad a'$

$$P = P(a \to a')$$

$$f : V_n \to F$$ là dạng toàn phương

- Ta có $$\boxed{[f]_{a'} = P^t [f]_a P}$$

Với: $$[f]_a = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$$

II. Dạng toàn phương

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

Định nghĩa :

- Cho $V = V_n$: không gian n chiều, f(x,x) là một dạng toàn phương trên V_n
- Trong V_n ta chọn một cơ sở xác định: $\alpha = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

Khi đó biểu thức f(x,x) trong cơ sở α chỉ chứa các số hạng bình phương:

(*)

(*) gọi là dạng chính tắc của dạng toàn phương f(x,x) trong cơ sở α

$\lambda_k (k \in \overline{1,n})$ các hệ số chính tắc

$\alpha = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ cơ sở chính tắc tương ứng

II. Dạng toàn phương

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

- Ma trận của dạng chính tắc của dạng toàn phương f(x,x) trong cơ sở α là một ma trận chéo

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

- Cho dạng toàn phương $\boxed{f: V_n \to K}$ (V_n có cơ sở α)

$$\forall x \in V_n \quad \text{mà} \quad [x]_a = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ và } f(x,x) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i \neq j}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

- Ta muốn tìm cơ sở β của V_n sao cho

$$\forall x \in V_n \text{ mà } [x]_\beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{thì} \quad \boxed{f(x,x) = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \cdots + \lambda_n x_n'^2}$$

(quá trình này đgl chính tắc hóa dạng toàn phương)

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

II.3.1. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao.

- Giả sử V_n là một không gian n chiều, α là một cơ sở của V.
- Xét trong cơ sở α dạng toàn phương:

$$f(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = [X]_\alpha^t A[X]_\alpha$$

- Trong đó $A = [a_{ij}]$ là ma trận đối xứng nên nó có n vector riêng trực chuẩn

$$f_1, f_2, \dots, f_n$$

ứng với trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

II.3.1. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao.

- Trong V_n chọn một cơ sở trực chuẩn mới: $\beta = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$
- Gọi P : ma trận chuyển cơ sở từ α sang β : $[X]_\alpha = P[X]_\beta$

Với

$$[x]_\beta = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

Vì α, β trực chuẩn nên $P^t = P^{-1}$ và $P^{-1}AP = P^t AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

II.3.1. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao.

- Thay vào f(x,x) ta có

$$f(x,x) = [x]_\alpha^t A [x]_\alpha$$

$$= ([x]_\beta^t P^t) A (P[x]_\beta)$$

$$= [x]_\beta^t P^t A P [x]_\beta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(x,x) = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \cdots + \lambda_n x_n'^2}$$

ta đã chính tắc hóa dạng toàn phương bằng phép biến đổi trực giao ma trận A

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

II.3.1. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao.

$\Rightarrow$ Các bước đưa DTP về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao:

- Chéo hóa trực giao ma trận A, tìm ma trận trực giao Q và ma trận chéo B:

$$B = Q^{-1}.A.Q$$

- Tìm dạng chính tắc của DTP f(x,x):

$$f(x,x) = \lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2 + \ldots + \lambda_n x'^2_n$$

Với $\lambda_k (k \in \overline{1,n})$ là trị riêng của A

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \text{ hay } \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

II.3.1. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao.

Ví dụ 5: Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao.

$$f(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Giải: Ma trận của dạng toàn phương f (trong cơ sở trực chuẩn $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$ là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

II.3.1. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao.

Thực hiện chéo hóa trực giao ma trân A ta thu được:

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vậy DTP f được đưa về dạng chính tắc:

$$f=5x_1'^2-x_2'^2-x_3'^2$$

Với

$$\begin{cases} x'_1=\frac{1}{\sqrt{3}}x_1+\frac{1}{\sqrt{3}}x_2+\frac{1}{\sqrt{3}}x_3 \\ x'_2=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 \qquad\qquad -\frac{1}{\sqrt{2}}x_3 \\ x'_2=-\frac{1}{\sqrt{6}}x_1+\frac{2}{\sqrt{6}}x_2-\frac{1}{\sqrt{6}}x_3 \end{cases}$$

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

II.3.1. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao.

Định lý: Q(x,x) là một dạng toàn phương trong cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid n chiều với ma trận đối xứng A. Gọi $\lambda_i, i = 1,2,\dots,n$ là các trị riêng của A. Khi đó dạng toàn phương sẽ:

- Xác định dương ⇔ $\lambda_i > 0\ với\ 1 \le i \le n$
- Nửa xác định dương ⇔ $\lambda_i \ge 0$ với $1 \le i \le n$
- Xác định âm ⇔$\lambda_i < 0\ với\ 1 \le i \le n$
- Nửa xác định âm ⇔ $\lambda_i \le 0\ với\ 1 \le i \le n$
- Dấu không xác định ⇔ vừa có giá trị riêng dương vừa có trị riêng âm

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

II.3.2 Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange

Giả sử V_n là một không gian n chiều, α là một cơ sở của V.
Xét trong cơ sở α dạng toàn phương:

$$f(\mathrm{X}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \,, \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

Hay

$$f(X) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i<j}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

Xét 2 trường hợp:

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

II.3.2 Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange

☞ TH1: nếu $\boxed{\exists j \in \{1,2,\ldots,n\} : a_{jj} \neq 0}$ ->Chẳng hạn như giả sử $a_{11} \neq 0$

➢ Ta viết lại

$$f(X) = \underbrace{\left(a_{11}x_1^2 + \sum_{t=2}^{n} a_{1t}x_1x_t\right)}_{\text{có } x_1} + \underbrace{g(x_2,\ldots,x_n)}_{\text{không có } x_1}$$

$$= a_{11}\left(x_1^2 + \frac{1}{a_{11}}\sum_{t=2}^{n} a_{1t}x_1x_t\right) + g(x_2,\ldots,x_n)$$

$$= a_{11}\left[\left(x_1 + \frac{1}{2a_{11}}\sum_{t=2}^{n} a_{1t}x_t\right)^2\right] - a_{11}\left(\frac{1}{2a_{11}}\sum_{t=2}^{n} a_{1t}x_t\right)^2 + g(x_2,\ldots,x_n)$$

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

II.3.2 Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange

$$\Rightarrow f(X) = a_{11}y_1^2 + \underbrace{h(x_2, \ldots, x_n)}$$

dạng toàn phương theo (n-1) biến là $x_2, \ldots, x_n$

☞ Tiếp tục làm (theo tinh thần quy nạp)

$$\Rightarrow \boxed{f(X) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2}$$

$P = P(\beta \to \alpha)$

✍ Đặt

$$[x]_\beta \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad [x]_\alpha$$

đang tìm

đã cho

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

II.3.2 Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange

✍ Ta biết $P = P(\beta \to \alpha)$

$$\Rightarrow Q = P(\alpha \to \beta) = P^{-1}$$

mà ta đã biết cơ sở α

☞ cơ sở β(theo định nghĩa)

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

II.3.2 Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange

TH2: $\boxed{a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 0}$ $\Rightarrow f(X) = \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j \neq 0$

, nghĩa là $\exists k < l : a_{kl} \neq 0$

✍ Đổi biến $\begin{cases} z_k = \frac{1}{2}(x_k + x_l) \\ z_l = \frac{1}{2}(x_k - x_l) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_k = z_k + z_l \\ x_l = z_k - z_l \end{cases}$ $\boxed{z_j = x_j}$ với các j còn lại

$$\Rightarrow f(X) = a_{kl} x_k x_l + \cdots = a_{kl}(z_k + z_l)(z_k - z_l) + \cdots$$

$$= a_{kl} z_k^2 - a_{kl} z_l^2 + \cdots$$

☞ Ta chuyển qua thực hiện các bước theo trường hợp 1

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

II.3.2 Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange

Ví dụ: Xét dạng toàn phương trên R^2 xác định bởi

$$Q(x,x) \coloneqq 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2$$

Tìm dạng chính tắc của DTP Q(x,x)

Giải: Ta viết: $Q(x,x) = 5\left(x_1^2 - \frac{4}{5}x_1x_2\right) + 8x_2^2$

$$= 5\left(x_1 - \frac{2}{5}x_2\right)^2 - 5\left(\frac{2}{5}\right)^2 x_2^2 + 8x_2^2 = 5\left(x_1 - \frac{2}{5}x_2\right)^2$$

Đặt $y_1 = x_1 - \frac{2}{5}x_2\,, y_2 = x_2$

Ta được $\boxed{Q(x,x) = 5y_1^2 + \frac{36}{5}y_2^2}$ ➡ Đây là dạng chính tắc cần tìm

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

II.3.2 Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange

Ví dụ : Cho DTP:

$$f(x,x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3.$$

Hãy đưa DTP f về DCT bằng phương pháp Lagrange. Xác định cơ sở mới mà trong đó f có DCT trên.

Giải: (Trong cơ sở $(e) = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ x có tọa độ $x = (x_1, x_2, x_3)$)

$$f(x,x) = 2(x_1^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3) + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 3x_2x_3 =$$

$$= 2(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_2x_3 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 3x_2x_3 =$$

$$= 2(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3)^2 + \frac{5}{2}x_2^2 - x_2x_3 + 2x_3^2 =$$

$$= 2(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3)^2 + \frac{5}{2}(x_2 - \frac{x_3}{5})^2 + \frac{9}{10}x_3^2.$$

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

II.3.2 Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange

Đặt $\begin{cases} x_1' = x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 + x_3 \\ x_2' = x_2 - \dfrac{1}{5}x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' + \dfrac{1}{2}x_2' - \dfrac{9}{10}x_3 \\ x_2 = x_2' + \dfrac{1}{5}x_3' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$

DTP f được đưa về DCT:

$$f = 2x_1'^2 + \frac{5x_2'^2}{5} + \frac{9}{10}x_3'^2.$$

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

II.3.2 Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange

Ma trận $T_{e\overline{e}}$ chuyển từ cơ sở $(e)=\{e_1,\ e_2,\ldots,\ e_n\}$ sang cơ sở $(\overline{e})=\{\overline{e}_1,\ \overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n\}$ để f có DCT trên:

$$T_{e\overline{e}}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{9}{10} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy cơ sở mới $(\overline{e})$ là $\overline{e}_1=(1,0,0)$, $\overline{e}_2=\left(\frac{1}{2},1,0\right)$, $\overline{e}_3=\left(-\frac{9}{10},\frac{1}{5},1\right)$.

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

II.3.2 Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange

Ví dụ : Bằng phương pháp Lagrange hãy đưa DTP sau về DCT:

$$f(x,x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$$

Tìm cơ sở để f có DCT tắc.

Giải: Đặt $\begin{cases} x_1 = x_1' - x_2' \\ x_2 = x_1' + x_2' \\ x_3 = x_3' \\ x_4 = x_4' \end{cases}$. Thay vào DTP đã cho ta có:

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

II.3.2 Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange

$$f(x,x) = x_1'^2 - x_2'^2 + x_1'x_3' + x_2'x_3' + x_3'x_4' =$$

$$= (x_1'^2 + 2x_1'\frac{x_3'}{2} + \frac{x_3'}{4}) - x_2'^2 + x_2'x_3' + x_3'x_4' - \frac{x_3'}{4} =$$

$$= (x_1' + \frac{x_3'}{2})^2 - (x_2'^2 - 2x_2'\frac{x_3'}{2} + \frac{x_3'}{4}) + x_3'x_4' =$$

$$= (x_1' + \frac{x_3'}{2})^2 - (x_2' - \frac{x_3'}{2})^2 + x_3'x_4'.$$

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

II.3.2 Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange

$$\text{Đặt } \begin{cases} \overline{x}_1 = x'_1 + \dfrac{x'_2}{2} \\ \overline{x}_2 = x'_2 - \dfrac{x'_3}{2} \\ \overline{x}_3 = \dfrac{x'_3 + x'_4}{2} \\ \overline{x}_4 = \dfrac{x'_4 - x'_3}{2} \end{cases} \quad (4^*).$$

Khi đó f có DCT trong cơ sở mới $(\overline{e}) = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4\}$: $f(x,x) = \overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2 + \overline{x}_3^2 - \overline{x}_4^2$.

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

II.3.2 Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange

Để tìm ma trận chuyển cơ sở $T_{e\overline{e}}$ từ hệ (4*), ta có:

$$\begin{cases} x_1' = \overline{x}_1 - \dfrac{\overline{x}_3}{2} + \dfrac{\overline{x}_4}{2} \\ x_2' = \overline{x}_2 - \dfrac{\overline{x}_3}{2} + \dfrac{\overline{x}_4}{2} \\ x_3' = \overline{x}_3 - \overline{x}_4 \\ x_4' = \overline{x}_3 + \overline{x}_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \overline{x}_1 - \overline{x}_2 \\ x_2 = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 - \overline{x}_3 + \overline{x}_4 \\ x_3' = \overline{x}_3 - \overline{x}_4 \\ x_4' = \overline{x}_3 + \overline{x}_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_{e\overline{e}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy cơ sở mới $(\overline{e})$: $\overline{e}_1 = (1,1,0,0)$; $\overline{e}_2 = (-1,1,0,0)$; $\overline{e}_3 = (0,-1,1,1)$; $\overline{e}_4 = (0,1,-1,1)$.

II.3 Chính tắc hóa dạng toàn phương

II.3.3 Luật quán tính

=> Một dạng toàn phương có thể có nhiều dạng chính tắc khác nhau (trong những cơ sở khác nhau)

Định luật quán tính : Khi một dạng toàn phương được đưa về dạng chính tắc bằng hai cách khác nhau (tức là trong hai cơ sở mới khác nhau) thì số các hệ số dương bằng nhau và số các hệ số âm bằng nhau.

=>Từ phát biểu trên ta suy ra: số các hệ số bằng không cũng bằng nhau.