Dùng vi phân cấp 1 để tính gần đúng

Cho hàm f(x,y) khả vi tại (x_0,y_0). Khi đó ta có:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy \quad (1)$$

Công thức (1) dùng để tính gần đúng giá trị của f tại (x,y).

Công thức (1) có thể viết lại: $f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy$

hay ta có: $\Delta f \approx df$

Qui tắc dùng vi phân cấp 1 để tính gần đúng

Để tính gần đúng giá trị của hàm f tại điểm cho trước (x,y). Ta thực hiện

1) Chọn một điểm (x_0,y_0) gần với điểm (x,y) sao cho $f(x_0,y_0)$ được tính dễ dàng

2) Tính giá trị $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0, f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)$.

3) Sử dụng công thức:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y \quad (1)$$

Chú ý: Nếu điểm (x_0,y_0) xa với điểm (x,y) thì giá trị tính được không phù hợp.

Chứng tỏ $f = xe^{xy}$ khả vi tại (1,0). Sử dụng kết quả này để tính gần đúng giá trị $f(1.1,-0.1)$

Giải. $f_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}; f_y(x,y) = x^2e^{xy}$

Các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên R^2, nên liên tục trong lân cận của (1,0). Theo định lý (đk đủ khả vi) $f = xe^{xy}$ khả vi tại (1,0).

Chọn $x_0 = 1; y_0 = 0 \Rightarrow \Delta x = x - x_0 = 1.1 - 1.0 = 0.1$

$$\Delta y = y - y_0 = -0.1 - 0 = -0.1$$

$$f(1.1,-0.1) \approx f(1,0) + f_x'(1,0)\Delta x + f_y'(1,0)\Delta y = 1 + 1(0.1) + 1(-0.1) = 1$$

So sánh với giá trị thực: $f(1.1,-0.1) = (1.1)e^{-0.11} \approx 0.98542$

Chú ý 4: Khi $\Delta x, \Delta y$ khá bé ta có thể xem $\Delta f \approx df$, tức là:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y$$

Ví dụ 3: Tính gần đúng $\operatorname{arctg}\frac{1,02}{0,95}$.

Xét hàm số $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Ta thấy $z'_x = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $z'_y = \frac{x}{x^2+y^2}$.

$$\operatorname{arctg}\frac{1,02}{0,95} = z(1-0,05, 1+0,02) \approx z(1,1) + \frac{1.0,02+1.0,05}{2}$$

$$= \operatorname{arctg}1 + 0.035 = \frac{\pi}{4} + 0,035 = 0,82 \text{ rad.}$$

Công thức Taylor – Maclaurint

Cho hàm $f = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp n + 1 trong lân cận V của điểm $M_0 = (x_0, y_0)$.

Công thức Taylor của *f* đến cấp n tại điểm M_0 là

$$f(x,y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f}{k!}(x_0, y_0) + R_n(\Delta x, \Delta y)$$

trong đó $R_n(\Delta x, \Delta y)$ là phần dư cấp n.

Khai triển Taylor tại điểm $M_0(0,0)$ được gọi là khai triển Maclaurint

Có hai cách thường dùng để biểu diễn phần dư:

1) Nếu cần đánh giá phần dư, thì sử dụng phần dư ở dạng Lagrange:

$$R_n(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \cdot \Delta x, x_0 + \theta \cdot \Delta y)$$

trong đó $0 < \theta < 1$

2) Nếu không quan tâm phần dư, thì sử dụng phần dư ở dạng Peano:

$$R_n(\Delta x, \Delta y) = o(\rho^n)$$

trong đó $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

Ví dụ.

Cho hàm $f(x,y) = x^2 + 2xy$ và một điểm $M_0 = (1,2)$

Tìm công thức Taylor của f tại M_0 đến cấp hai.

$$f(x,y) = f(1,2) + \frac{df(1,2)}{1!} + \frac{d^2 f(1,2)}{2!} + o(\rho^2)$$

$$f(x,y) = f(1,2) + \frac{f'_x(1,2)(x-1) + f'_y(1,2)(y-2)}{1!} +$$

$$+ \frac{f''_{xx}(1,2)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(1,2)(x-1)(y-2) + f''_{yy}(1,2)(y-2)^2}{2!} + o(\rho^2)$$

$$\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

tính tất cả các đạo hàm riêng trong công thức, thay vào!!

Chú ý:

Tìm khai triển Taylor bằng công thức rất mất thời gian, nên trong đa số trường hợp ta sử dụng cách sau.

Tìm khai triển Taylor của $f = f(x,y)$ tại $M_0(x_0,y_0)$:

1) Đặt $X = x - x_0, Y = y - y_0 \Leftrightarrow x = X + x_0; y = Y + y_0$

2) Tìm khai triển Maclaurint của hàm $f(X,Y)$, sử dụng khai triển Maclaurint của hàm một biến.

3) Đổi $f(X,Y)$ sang $f(x,y)$ (thay $X = x - x_0, Y = y - y_0$)

4) Sắp xếp theo thứ tự tăng dần các bậc của $x - x_0, y - y_0$

Ví dụ.

Tìm khai triển Taylor đến cấp hai của $f(x,y)=\dfrac{1}{2x+3y}$ tại $M_0=(1,2)$.

Đặt $X=x-1, Y=y-2 \quad \Leftrightarrow x=X+1; y=Y+2$

$$f=\frac{1}{2(X+1)+3(Y+2)} =\frac{1}{2X+3Y+8}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1+2X/8+3Y/8}$$

Sử dụng khai triển hàm một biến $g(t)=\dfrac{1}{1+t}=1-t+t^2+o(t^2),\ t=\dfrac{2X}{8}+\dfrac{3Y}{8}$

$$f=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{2X}{8}+\frac{3Y}{8}\right)+\left(\frac{2X}{8}+\frac{3Y}{8}\right)^2\right]+o(\rho^2)$$

Khai triển, bỏ bậc cao hơn 2, đổi biến lại, sắp xếp theo thứ tự.

$$f=\frac{1}{8}-\frac{2}{8^2}(x-1)-\frac{3}{8^2}(y-2)+\frac{4}{8^3}(x-1)^2+\cdots$$

Ví dụ.

Tìm khai triển Maclaurint đến cấp ba của $f(x,y)=e^x\sin y$.

Sử dụng khai triển hàm một biến

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3) \qquad \sin y=y-\frac{y^3}{3!}+o(y^4)$$

$$f(x,y)=e^x\sin y=\left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]\cdot\left[y-\frac{y^3}{3!}+o(y^4)\right]$$

$$f(x,y)=y-\frac{y^3}{6}+xy-\frac{xy^3}{6}+\frac{x^2y}{2}-\frac{x^2y^3}{36}+\frac{x^3y}{6}-\frac{x^3y^3}{36}+o(\rho^3)$$

Khai triển, bỏ bậc cao hơn 3, đổi biến lại, sắp xếp theo thứ tự.

$$f(x,y)=y+xy+\frac{x^2y}{2}-\frac{y^3}{6}+o(\rho^3)$$