ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

BÀI TẬP CHƯƠNG 2:

SỐ ĐẾM

GVBM: **CAO THANH TÌNH**

BÀI TẬP THUYẾT TRÌNH NHÓM I

<u>Bài 1</u> : Có n lá thư và n phong bì ghi sẵn địa chỉ. Bỏ ngẫu nhiên các lá thư vào các phong bì. Hỏi xác suất để xảy ra không một lá thư nào đúng địa chỉ.

Giải

Mỗi phong bì có n cách bỏ thư vào, nên có tất cả n! cách bỏ thư. Vấn đề còn lại là đếm số cách bỏ thư sao cho không lá thư nào đúng địa chỉ. Gọi U là tập hợp các cách bỏ thư và A_m là tính chất lá thư thứ m bỏ đúng địa chỉ. Khi đó theo công thức về nguyên lý bù trừ ta có:

$$\overline{N} = n! - N_1 + N_2 - ... + (-1)^n N_n,$$

trong đó N_m ($1 \le m \le n$) là số tất cả các cách bỏ thư sao cho có m lá thư đúng địa chỉ. Nhận xét rằng, N_m là tổng theo mọi cách lấy m lá thư từ n lá, với mỗi cách lấy m lá thư, có (n-m)! cách bỏ để m lá thư này đúng địa chỉ, ta nhận được:

$$N_m = C_n^m (n - m)! = \frac{n!}{k!} \text{ và } \overline{N} = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + (-1)^n \frac{1}{n!})$$

trong đó $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ là tổ hợp chập m của tập n phần tử (số cách chọn m đối tượng trong n đối tượng được cho).

Từ đó xác suất cần tìm là: $\mathbf{1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}}$.

<u>Bài 2</u> : Số mã vùng cần thiết nhỏ nhất là bao nhiêu để đảm bảo 25 triệu máy điện thoại khác nhau. Mỗi điện thoại có 9 chữ số dạng 0XX-8XXXXX với X nhận giá trị từ 0-9

Giải

Vì số mã vùng có dạng 0XX-8XXXXX, với X nhận các giá trị từ 0-9, có 7 ký tự X do vậy những 10^7 trường hợp. Do đó theo nguyên lý Dirichet với 10 triệu máy điện thoại thì cần có số mã vùng là : $\left\lceil \frac{25000000}{1000000} \right\rceil = \lceil 2{,}5 \rceil = 3$. Vậy số mã vùng cần thiết để thỏa yêu cầu là **3**.

<u>Bài 3</u> : Trong một tháng gồm 30 ngày, một đội bóng chuyền thi đấu mỗi ngày ít nhất 1 trận nhưng chơi không quá 45 trận. Chứng minh rằng tìm được một giai đoạn gồm một số ngày liên tục nào đó trong tháng sao cho trong giai đoạn đó đội chơi đúng 14 trận.

Giải

Gọi a_j là số trận mà đội đã chơi từ ngày đầu tháng đến hết ngày j. Khi đó

$$1 \le a_1 < a_2 < ... < a_{30} < 45$$

$$15 \le a_1+14 < a_2+14 < \dots < a_{30}+14 < 59.$$

Sáu mươi số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_{30}, a_1+14, a_2+14, \dots, a_{30}+14$ nằm giữa 1 và 59. Do đó theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 2 trong 60 số này bằng nhau. Vì vậy tồn tại i và j sao cho ai = aj + 14 (j < i). Điều này có nghĩa là từ ngày j + 1 đến hết ngày i đội đã chơi đúng 14 trận.

Bài 4 : Chứng tỏ rằng trong n + 1 số nguyên dương không vượt quá 2n, tồn tại ít nhất một số chia hết cho số khác.

Giải

Ta viết mỗi số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ dưới dạng $a_j = 2^{k_j} q_j$ trong đó k_j là số nguyên không âm còn q_j là số dương lẻ nhỏ hơn 2n. Vì chỉ có n số nguyên dương lẻ nhỏ hơn 2n nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại i và j sao cho $q_i = q_j = q$. Khi đó $a_i = 2^{k_i} q$ và $a_j = 2^{k_j} q$. Vì vậy, nếu $k_i \le k_j$ thì a_j chia hết cho a_i còn trong trường hợp ngược lại ta có a_i chia hết cho a_j.

Bài 5 : Mỗi người sử dụng máy tính dùng password có 6 -> 8 ký tự. Các ký tự có thể là chữ số hoặc
chữ cái, mỗi password phải có ít nhất 01 chữ số. Tìm tổng số password có thể có.

Giải

Phân biệt chữ thường với chữ hoa.
Chữ cái thường: 26
Chữ cái hoa: 26
Chữ số: 10
Do đó, tổng cộng có 26 + 26 + 10 = 62 ký tự khác nhau.

Nếu password có n ký tự thì ta có :

Tổng số trường hợp = 62^n

Số trường hợp không có chữ số = 52^n

Vậy số trường hợp có ít nhất 1 chữ số là = 62^n-52^n

Với n = 6,7,8 ta có tổng số trường hợp là

$$n = n_6 + n_7 + n_8 = 62^6 - 52^6 + 62^7 - 52^7 + 62^8 - 52^8$$
$$= 167.410.949.583.040$$

Bài 6 : Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 10:

a) Bắt đầu bằng 00 hoặc kết thúc bằng 11.

b) Bắt đầu bằng 00 và kết thúc bằng 11.

Giải:

a) Bắt đầu bằng 00 hoặc kết thúc bằng 11.

Xâu nhị phân bắt đầu bằng 00 có dạng: 00.xxxx.xxxx. Ký tự x có thể là 0 hoặc 1, có 8 ký tự x do
vậy có 2^8xâu.

Xâu nhị phân kết thúc bằng 11 có dạng: xx.xxxx.xx11. Tương tư ta cũng tính được có 2^8 xâu.

Xâu nhị phân bắt đầu bằng 00 và kết thúc bằng 11 có dạng 00.xxxx.xx11. Tương tự như trên, ta
cũng tính được có 2^6 xâu.

Vậy số xâu nhị phân bắt đầu bằng 00 hay kết thúc bằng 11 là:

$n = 2^{*}2^8 - 2^6 = 512 – 64 =448$ xâu.

Bắt đầu bằng 00 và kết thúc bằng 11.

Xâu nhị phân thỏa mãn đề bài phải có dạng: 00.xxxx.xx11. Hai ký tự đầu và 02 ký tự cuối là
không đổi, do vậy chỉ còn 06 ký tự ở giữa. Do đó số xâu nhị phân thỏa mãn đề bài là: $\mathbf{2^6}$ xâu.

Bài 7 : Biết rằng số n nguyên dương thỏa mản biểu thức:

$$C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$$

Tính giá trị biểu thức: $M = \frac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$

Giải:

Xét phương trình: $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$ (1)

Khi $n + 1 \geq 2 \Rightarrow n + 2 > 2; n + 3 > 2; n + 4 > 2.$

Vậy đk để (1) có nghĩa là $n \geq 1,\ n$ là số nguyên.
Áp dụng công thức tính số tổ hợp ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} + 2\frac{(n+2)!}{n!2!} + 2\frac{(n+3)!}{(n+1)!2!} + \frac{(n+4)!}{(n+2)!2!} = 149$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)(n+2) + (n+2)(n+3) + \frac{(n+3)(n+4)}{2} = 149$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 4n - 45 = 0 \Leftrightarrow n = 5 \text{ hoặc } n = -9 (loại)$$

Khi n=5, dễ dàng thấy M= $\frac{A_6^4 + 3A_5^3}{6!} = \frac{3}{4}$

<u>Bài 8</u> : Cho hình thập giác lồi, hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của thập giác lồi nhưng cạnh không phải là cạnh của thập giác lồi?

Giải:

Gọi A là tất cả các tam giác có đỉnh là đỉnh của thập giác lồi.

B là tam giác có đỉnh của là đỉnh của thập giác nhưng có it nhất 1 cạnh là cạnh của thập giác.

C lá tam giác cần tìm.

Ta có: |C| = |A| - |B| (1)

Dễ thấy |A| = $C_{10}^3 = 120$ (2)

Gọi B_1 là tam giác có 1 cạnh là cạnh của thập giác.

B_2 là tam giác có 2 cạnh là cạnh của thập giác.

$|B| = |B_1| + |B_2|$ (3)

Tính B_1

- Chọn 1 cạnh của thập giác. Số cạnh là $n_1 = 10$.
- Chọn đỉnh của tam giác là 6 đỉnh còn lại $n_2 = 6$.

$|B_1| = 10.6 = 60.$

Ta có $|B_2| = 10.$

Theo đó $|B| = 60 + 10 = 70.$(4)

Từ (2)(3)(4) ta có $|C| = 120 - 70 = 50.$

Vậy có 50 tam giác thỏa yêu cầu.

<u>Bài 9</u> : Một thầy giáo có 12 cuốn sách đôi 1 khác nhau, gồm 5 cuốn văn học, 4 âm nhạc, 3 hội họa. Ông lấy 6 cuốn sách ra tặng cho 6 học sinh, mỗi hs 1 cuốn sau khi tặng xong mỗi loại còn lại ít nhất 1 cuốn. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

Giải:

Gọi A là tập hợp tất cả các cách tặng sách

B là tập hợp cách tặng sách không thỏa yêu cầu.

C là tập hợp cách tạng sách đủ yêu cầu.

|C| = |A| - |B| (1)

Ta có |A| = $C_{12}^{6}6! = 665280$.(2)

Vì không thể xảy ra trường hợp còn lại 1 loại sách.

Nên gọi $|B_1|$ $|B_2|$ $|B_3|$ lần lượt là tập hợp tất cả các cách sau khi tặng xong hết sách văn học, hội họa, âm nhạc.

$$|B_1| = C_7^1 6! = 5040$$

$$|B_2| = C_8^2 6! = 20160$$

$$|B_3| = C_9^3 6! = 60480$$

|B|= 5040 + 20160 + 60480 = 85680

Từ (1)(2)(3) suy ra |C| = 665280 – 85680 = 579600

<u>Bài 10</u> : Có bao nhiêu cách chọn 5 tờ giấy bạc từ một két đựng tiền gồm những tờ 1000đ, 2000đ, 5000đ, 10.000đ, 20.000đ, 50.000đ, 100.000đ. Giả sử thứ tự mà các tờ tiền được chọn là không quan trọng, các tờ tiền cùng loại là không phân biệt và mỗi loại có ít nhất 5 tờ.

Giải:

Vì ta không kể tới thứ tự chọn tờ tiền và vì ta chọn đúng 5 lần, mỗi lần lấy một từ 1 trong 7 loại tiền nên mỗi cách chọn 5 tờ giấy bạc này chính là một tổ hợp lặp chập 5 từ 7 phần tử.

Do đó số cần tìm là C_{7+5-1}^{5}= 462.

<u>Bài 11</u> : Có bao nhiêu cách chia những xấp bài 5 quân cho mỗi một trong 4 người chơi từ một cỗ bài chuẩn 52 quân?

Giải:

Người đầu tiên có thể nhận được 5 quân bài bằng C_{52}^{5} cách.

Người thứ hai có thể được chia 5 quân bài bằng C_{47}^{5} cách.

Vì chỉ còn 47 quân bài.

Người thứ ba có thể nhận được 5 quân bài bằng C_{42}^{5} cách.

Cuối cùng, người thứ tư nhận được 5 quân bài bằng C_{37}^{5} cách.

Vì vậy, theo nguyên lý nhân tổng cộng có

$$C_{52}^{5}.C_{47}^{5}.C_{42}^{5}.C_{37}^{5}=\frac{52!}{5!.5!.5!.5!.32!}$$

cách chia cho 4 người mỗi người một xấp 5 quân bài.

<u>Bài 12</u> *:* Giả sử một người gửi 10.000 đô la vào tài khoản của mình tại một ngân hàng với lãi suất kép 11% mỗi năm. Sau 30 năm anh ta có bao nhiêu tiền trong tài khoản của mình?

Giải:

Gọi P_n là tổng số tiền có trong tài khoản sau n năm.

Vì số tiền có trong tài khoản sau n năm bằng số có sau n – 1 năm cộng lãi suất của năm thứ n, nên ta thấy dãy $\{P_n\}$ thoả mãn hệ thức truy hồi sau:

$$P_n = P_{n-1} + 0,11P_{n-1} = (1,11)P_{n-1}$$

với điều kiện đầu $P_0 = 10.000$ đô la. Từ đó suy ra $P_n = (1,11)^n.10.000$. Thay n = 30 cho ta $P_{30} = 228922,97$ đô la.

<u>Bài 13</u> : Cho hai tập hợp *A* và *B* biết tập $A\cap B$ có số phần tử bằng một nửa số phần tử của *B* và $A\cup B$ có 7 phần tử. Hãy tìm số phần tử của mỗi tập hợp.

Giải:

Gọi *x* là số phần tử của tập *A*, *y* là số phần tử của tập *B*.

Từ giả thiết và $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ ta có $x+y-\frac{y}{2}=7$ hay $2x+y=14$.

Lại do $A\cup B$ có 7 phần tử suy ra $0\le|B|\le 7$ hay $0\le y\le 7$ mà $|A\cap B|=\frac{y}{2}\Rightarrow y\,\vdots\,2$

Từ các kết quả trên ta có $y\in\{0;2;4;6\}$, tương ứng ta có *x* nhận các giá trị 7; 6; 5;4.

<u>Bài 14</u> : Tính số các số tự nhiên đôi một khác nhau có 6 chữ số tạo thành từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 sao cho 2 chữ số 3 và 4 đứng cạnh nhau.