ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BỘ MÔN TOÁN – LÝ

ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN XSTK
Học kỳ 2, năm học 2021-2022.
Ngày thi: .../.../2022
Thời gian làm bài: 60 phút.
Được sử dụng tài liệu giấy.

Câu 1.(2 điểm) Cho A, B, C là các biến cố. Giả sử

$$P(A) = 0.5,\ P(B) = 0.6,\ P(C) = 0.7,\ P(A|B) = 0.2,\ P(B \cup C) = 0.85.$$

a) Hỏi hai biến cố A và B có độc lập nhau không?
b) Hỏi hai biến cố B và C có độc lập nhau không?

Đáp án:
a) $P(A|B) \neq P(A)$ suy ra A,B không độc lập. **(1đ)**
b) $P(B \cap C) = P(B) + P(C) - P(B \cup C) = 0.45$ **(0.5 đ)**
$P(B \cap C) \neq P(B).P(C)$ suy ra B,C không độc lập. **(0.5đ)**

Câu 2.(3 điểm) Cho X là thời gian sử dụng của một loại pin (tính bằng năm). Giả sử hàm mật độ xác suất của X được cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x/2}, & \forall x > 0, \\ 0 & \forall x \leq 0. \end{cases}$$

a. Tính thời gian sử dụng trung bình của loại pin đó.
b. Giả sử có một viên pin loại này đã được sử dụng 2 năm. Tính xác suất để pin này sử dụng được ít nhất 3 năm.

Đáp án:
a) $E(X) = \int_0^\infty x\frac{1}{2}e^{-x/2}dx = 2.$

Đúng công thức 1đ, ra đúng kết quả tích phân 0.5đ, tổng cộng 1.5đ (phần tính tích phân sinh viên có thể dùng máy tính rồi ghi kết quả)

b) $P(X \geq 3|X \geq 2) = \dfrac{P((X \geq 2) \cap (X \geq 3))}{P(X \geq 2)} = \dfrac{\int_3^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-x/2}dx}{\int_2^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-x/2}dx} = 0,606.$

Đúng công thức 1đ, ra đúng kết quả tích phân 0.5đ, tổng cộng 1.5đ (phần tính tích phân sinh viên có thể dùng máy tính rồi ghi kết quả)

Câu 3.(3 điểm) Một loại virus máy tính mới tấn công một thư mục bao gồm 1350 tệp. Mỗi tệp bị hỏng với xác suất 0.75 độc lập với các tệp khác.
a. Xác suất có 1000 tệp bị hỏng là bao nhiêu?

b. Xác suất có từ 1000 đến 1020 tệp bị hỏng là bao nhiêu?

Đáp án

Gọi X là số tệp bị hỏng trong 1350 tệp. Ta có $X \sim B(n;p)$ với $n = 1350$ và $p = 0,75$. Vì $np = 1350.0,75 = 1012,5$ và $n(1-p) = 1350.0,25 = 337,5$ nên có thể dùng xấp xỉ phân phối chuẩn $X \approx N(\mu, \sigma^2)$ với $\mu = np = 1012,5$ và $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1350.0,75.0,25} = 15,91$. **(1đ)**

a. Dùng hiệu chỉnh liên tục và xấp xỉ phân phối chuẩn để tính

$$\begin{aligned}
P(X = 1000) &= P(999,5 < X < 1000,5) \\
&= P(\frac{999,5 - 1012,5}{15,91} < Z < \frac{1000,5 - 1012,5}{15,91}) \\
&= P(-0,82 < Z < -0,75) \\
&= \Phi(-0,75) - \Phi(-0,82) = 0,2266 - 0,2061 = 0,0205 \quad (\mathbf{1}\text{đ})
\end{aligned}$$

b. Dùng hiệu chỉnh liên tục và xấp xỉ phân phối chuẩn

$$\begin{aligned}
P(1000 \leq X \leq 1020) &= P(999,5 < X < 1020,5) \\
&\approx P(\frac{999,5 - 1012,5}{15,91} < Z < \frac{1020,5 - 1012,5}{15,91}) \\
&= P(-0,82 < Z < 0,5) \\
&= \Phi(0,5) - \Phi(-0,82) \\
&= 0,6915 - 0,2061 = 0,4854 \quad (\mathbf{1}\text{đ})
\end{aligned}$$

Nếu sinh viên không biết dùng xấp xỉ và không tính ra được kết quả nhưng biết đưa về công thức tính theo phân phối Nhị thức thì cho nửa số điểm cho mỗi phần, tức là tổng điểm tối đa 1.5đ.

Câu 4.(2 điểm) Giả sử kit xét nghiệm nhanh covid của công ty A sản xuất có hiệu quả như sau: chỉ có 60% người bị nhiễm covid khi xét nghiệm nhanh bằng loại kit đó nhận kết quả dương tính; chỉ có 70% người không bị nhiễm covid khi xét nghiệm nhanh bằng loại kit đó nhận kết quả âm tính.
Giả sử tỉ lệ nhiễm covid ở thành phố H là 30%.

a) Một người ở thành phố H xét nghiệm covid bằng kit xét nghiệm của công ty A lần thứ nhất cho kết quả âm tính. Tính xác suất người đó bị nhiễm covid ?

b) Một người ở thành phố H xét nghiệm covid bằng kit loại đó lần thứ nhất ra kết quả âm tính nên liền xét nghiệm thêm lần nữa và cũng ra kết quả âm tính. Hỏi xác suất người đó bị nhiễm covid là bao nhiêu ?

Đáp án:

Gọi A_i là biến cố xét nghiệm cho ra kết quả là âm tính ở lần thứ i. Ta có A_1, A_2 độc lập nhau và $P(A_1) = P(A_2)$.

Gọi B là biến cố bị nhiễm covid.

$$P(B) = 0.3, P(\bar{A}_i|B) = 0.6, P(A_i|\bar{B}) = 0.7. \quad (\mathbf{0.5}\text{đ})$$

a) $P(A_1) = P(A_1|B)P(B) + P(A_1|\bar{B})P(\bar{B}) = 0.61$ **(0.5đ)**

$P(B|A_1) = \dfrac{P(A_1|B)P(B)}{P(A_1)} = \dfrac{0.3 \times 0.4}{0.61} = 0.1967.$ **(0.5đ)**

b)

$$
\begin{aligned}
P(B|A_1A_2) &= \frac{P(A_1A_2|B)P(B)}{P(A_1A_2)} = \frac{P(A_1|B).P(A_2|B)P(B)}{P(A_1).P(A_2)} \\
&= \frac{0.4^2 \times 0.3}{0.61^2} = 0.129 \quad (\mathbf{0.5}\text{đ})
\end{aligned}
$$