……………………………

§1. BỔ TÚC VỀ HÀM SỐ

1.1. Khái niệm cơ bản

1.1.1. Định nghĩa hàm số

• Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$ khác rỗng.

Ánh xạ $f : X \to Y$ với $x \mapsto y = f(x)$ là một hàm số.

Khi đó:

– Miền xác định (MXĐ) của f, ký hiệu D_f, là tập X.

– Miền giá trị (MGT) của f là:

$$G = \left\{ y = f(x) \middle| x \in X \right\}.$$

– Nếu $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ thì f là *đơn ánh*.

– Nếu $f(X) = Y$ thì f là *toàn ánh*.

– Nếu f vừa đơn ánh vừa toàn ánh thì f là *song ánh*.

VD 1.

a) Hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa $y = f(x) = 2^x$ là đơn ánh.

b) Hàm số $f: \mathbb{R} \to [0; +\infty)$ thỏa $f(x) = x^2$ là toàn ánh.

c) Hsố $f: (0; +\infty) \to \mathbb{R}$ thỏa $f(x) = \ln x$ là song ánh.

• Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm chẵn nếu:

$$\boxed{f(-x) = f(x),\ \forall x \in D_f.}$$

• Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm lẻ nếu:

$$\boxed{f(-x) = -f(x),\ \forall x \in D_f.}$$

Nhận xét

– Đồ thị của hàm số chẵn đối xứng qua trục tung.

– Đồ thị của hàm số lẻ đối xứng qua gốc tọa độ.

1.1.2. Hàm số hợp

• Cho hai hàm số *f* và *g* thỏa điều kiện $G_g \subset D_f$.

Khi đó, hàm số $h(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)]$ được gọi là hàm số hợp của *f* và *g*.

Chú ý

$$\boxed{(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x).}$$

VD 2. Hàm số $y = 2(x^2 + 1)^2 - x^2 - 1$ là hàm hợp của

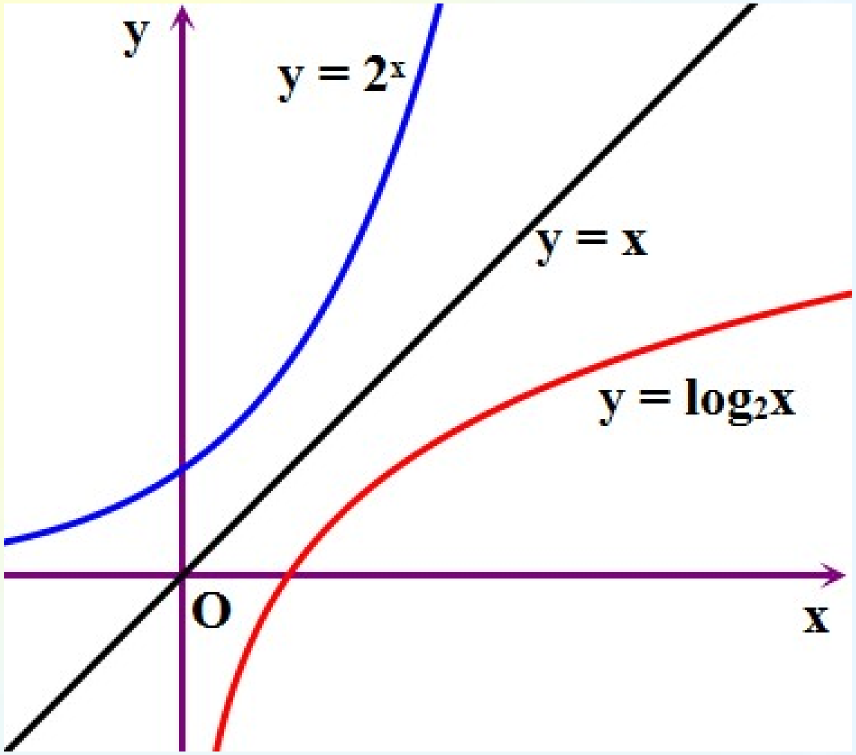
$$f(x) = 2x^2 - x \text{ và } g(x) = x^2 + 1.$$

1.1.3. Hàm số ngược

• Hàm số *g* được gọi là hàm số ngược của *f*, ký hiệu $g = f^{-1}$, nếu $x = g(y),\ \forall y \in G_f$.

Nhận xét

– Đồ thị hàm số $y = f^{-1}(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y = f(x)$ qua đường thẳng $y = x$.



VD 3. Cho $f(x) = 2^x$ thì $f^{-1}(x) = \log_2 x$, mọi $x > 0$.

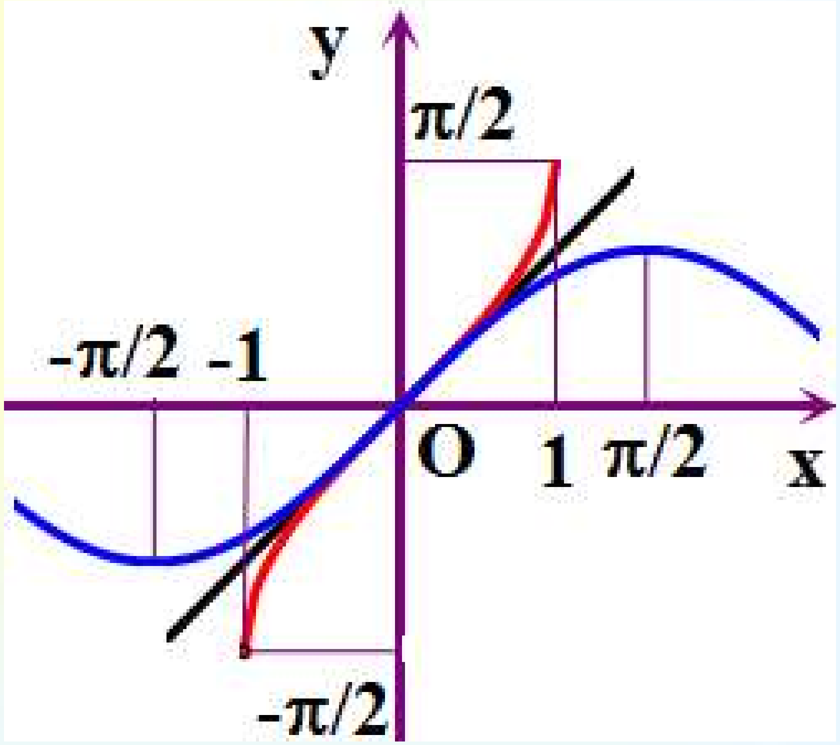
1.2. Hàm số lượng giác ngược

1.2.1. Hàm số *y* = arcsin *x*

• Hàm số $y = \sin x$ có hàm ngược trên $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ là

$$f^{-1}: [-1;\ 1] \to \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x \mapsto y = \arcsin x.$$



VD 4. $\arcsin 0 = 0;$

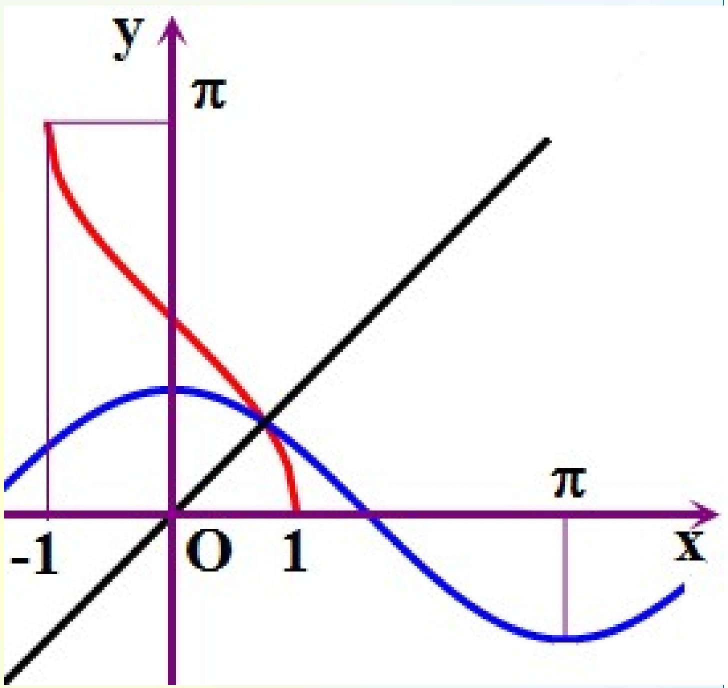
$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

1.2.2. Hàm số y = arccos x

• Hàm số $y = \cos x$ có hàm ngược trên $[0;\ \pi]$ là

$$f^{-1} : [-1;\ 1] \to [0;\ \pi]$$
$$x \mapsto y = \arccos x.$$



<u>VD 5.</u> $\arccos 0 = \dfrac{\pi}{2};$

$\arccos(-1) = \pi;$

$\arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{6};\ \arccos \dfrac{-1}{2} = \dfrac{2\pi}{3}.$

<u>Chú ý</u>

$$\boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ \forall x \in [-1;\ 1].}$$

1.2.3. Hàm số *y* = arctan *x*

• Hàm số $y = \tan x$ có hàm ngược trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ là

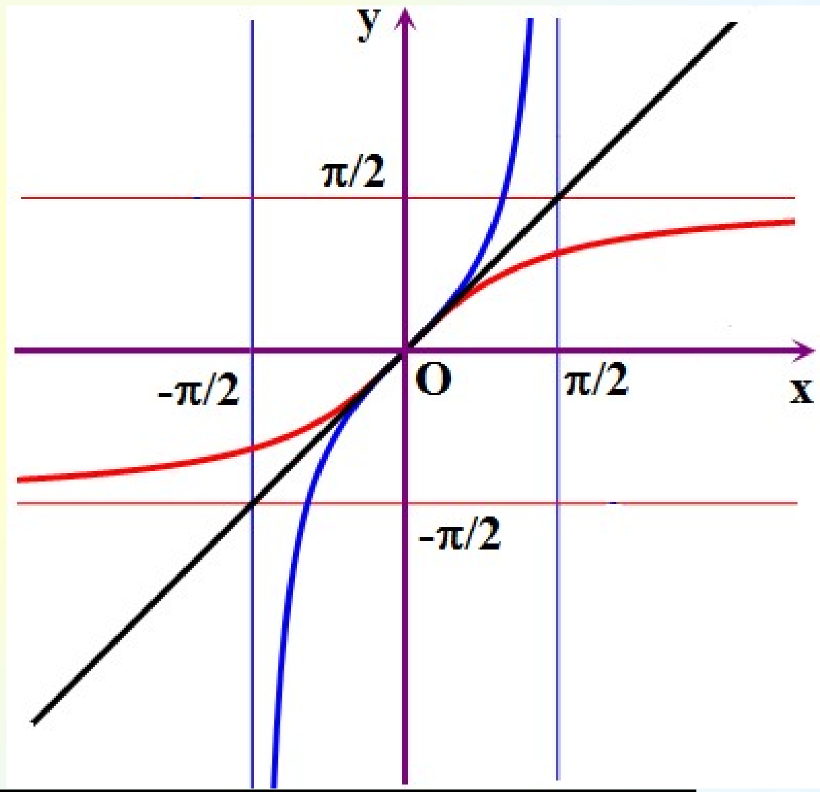
$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$$

$$x \mapsto y = \arctan x.$$

VD 6. $\arctan 0 = 0;$

$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4};$$

$$\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$



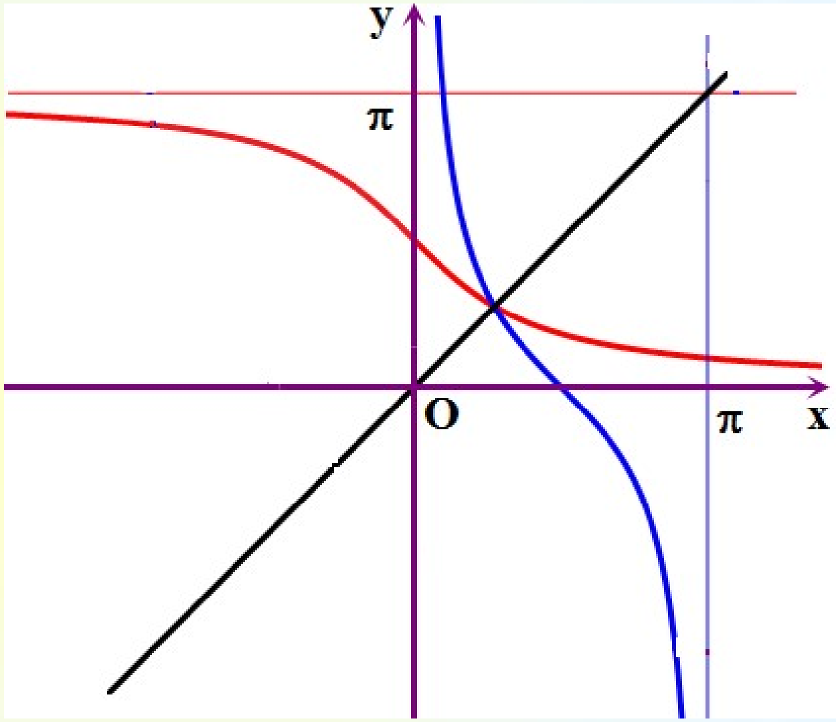
Quy ước. $\boxed{\arctan(+\infty) = \dfrac{\pi}{2},\ \arctan(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}.}$

1.2.4. Hàm số *y = arccot x*

• Hàm số $y = \cot x$ có hàm ngược trên $(0;\ \pi)$ là

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to (0;\ \pi)$$

$$x \mapsto y = arc\cot x.$$



VD 7. $arc\cot 0 = \dfrac{\pi}{2};$

$$arc\cot(-1) = \frac{3\pi}{4};$$

$$arc\cot\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Quy ước. $\boxed{arc\cot(+\infty) = 0,\ arc\cot(-\infty) = \pi.}$

……………………………………………

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

2.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1

• Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; b)$. Ta nói $f(x)$ có giới hạn là L (hữu hạn) khi $x \to x_0 \in [a;\ b]$, ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, nếu $\forall \varepsilon > 0$ cho trước ta tìm được $\delta > 0$ sao cho khi $0 < |x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Định nghĩa 2 (định nghĩa theo dãy)

• Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; b)$. Ta nói $f(x)$ có giới hạn là L (hữu hạn) khi $x \to x_0 \in [a;\ b]$, ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, nếu mọi dãy $\{x_n\}$ trong $(a;\ b) \setminus \{x_0\}$ mà $x_n \to x_0$ thì $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Định nghĩa 3 (giới hạn tại vô cùng)

- Ta nói $f(x)$ có giới hạn là L (hữu hạn) khi $x \to +\infty$, ký hiệu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, nếu $\forall \varepsilon > 0$ cho trước ta tìm được $N > 0$ đủ lớn sao cho khi $x > N$ thì $\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$.
- Tương tự, ký hiệu $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$, nếu $\forall \varepsilon > 0$ cho trước ta tìm được $N < 0$ có *trị tuyệt đối* đủ lớn sao cho khi $x < N$ thì $\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$.

Định nghĩa 4 (giới hạn vô cùng)

- Ta nói $f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \to x_0$, ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, nếu $\forall M > 0$ lớn tùy ý cho trước ta tìm được $\delta > 0$ sao cho khi $0 < \left| x - x_0 \right| < \delta$ thì $f(x) > M$.

- Tương tự, ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, nếu $\forall M < 0$ có *trị tuyệt đối* lớn tùy ý cho trước ta tìm được $\delta > 0$ sao cho khi $0 < |x - x_0| < \delta$ thì $f(x) < M$.

Định nghĩa 5 (giới hạn 1 phía)

- Nếu $f(x)$ có giới hạn là L (có thể là vô cùng) khi $x \to x_0$ với $x > x_0$ thì ta nói $f(x)$ có *giới hạn phải* tại x_0 (hữu hạn), ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = L$ hoặc $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.
- Nếu $f(x)$ có giới hạn là L (có thể là vô cùng) khi $x \to x_0$ với $x < x_0$ thì ta nói $f(x)$ có *giới hạn trái* tại x_0 (hữu hạn), ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = L$ hoặc $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

Chú ý. $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L.}$

2.2. Tính chất

Cho $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$. Khi đó:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} [C.f(x)] = C.a$ (C là hằng số).

2) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b$.

3) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = ab$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}, \;\; b \neq 0$;

5) Nếu $f(x) \le g(x), \forall x \in (x_0 - \varepsilon;\; x_0 + \varepsilon)$ thì $a \le b$.

6) Nếu $f(x) \le h(x) \le g(x), \forall x \in (x_0 - \varepsilon;\; x_0 + \varepsilon)$ và

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L \text{ thì } \lim_{x \to x_0} h(x) = L.$$

Định lý

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = a > 0,\ \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = b$ thì:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}[u(x)]^{v(x)} = a^b.}$$

VD 1. Tìm giới hạn $L = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{x+3}\right)^{\frac{2x}{x-1}}.$

A. $L = 9;$ B. $L = 4;$ C. $L = 1;$ D. $L = 0.$

Giải. Ta có: $L = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{x+3}\right)^{2.\frac{x}{x-1}} = 2^2 \Rightarrow B.$

Các kết quả cần nhớ

1) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty, \ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty.$

2) Xét $L = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0}$, ta có:

a) $L = \dfrac{a_n}{b_n}$ nếu $n = m$;

b) $L = 0$ nếu $n < m$;

c) $L = \infty$ nếu $n > m$.

3) $\lim\limits_{\alpha x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \lim\limits_{\alpha x\to 0} \dfrac{\tan \alpha x}{\alpha x} = 1.$

4) Số e:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e.}$$

VD 2. Tìm giới hạn $L=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3x}{2x^2+1}\right)^{2x}$.

A. $L=\infty$; B. $L=e^3$; C. $L=e^2$; D. $L=1$.

Giải. $L=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3x}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{3x}}\right]^{2x.\frac{3x}{2x^2+1}}$.

Khi $x \to \infty$ thì $\dfrac{3x}{2x^2+1} \to 0,\ 2x.\dfrac{3x}{2x^2+1} \to 3$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{3x}} = e \Rightarrow L = e^3 \Rightarrow B.$$

VD 3. Tìm giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\tan^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{4x}}$.

A. $L=\infty$; B. $L=1$; C. $L=\sqrt[4]{e}$; D. $L=\sqrt{e}$.

Giải. $$L = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(1+\tan^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\tan^2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{1}{4x}.\tan^2\sqrt{x}}$$

$$= \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(1+\tan^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\tan^2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{1}{4}.\left(\frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2} = \sqrt[4]{e} \Rightarrow C.$$

....

§3. ĐẠI LƯỢNG VÔ CÙNG BÉ – VÔ CÙNG LỚN

3.1. Đại lượng vô cùng bé

a) Định nghĩa

Hàm số $\alpha(x)$ được gọi là ***đại lượng vô cùng bé*** (VCB) khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ (x_0 có thể là vô cùng).

VD 1. $\alpha(x) = \tan^3\left(\sin\sqrt{1-x}\right)$ là VCB khi $x \to 1^-$;

$$\beta(x) = \frac{1}{\ln^2 x} \text{ là VCB khi } x \to +\infty.$$

b) Tính chất của VCB

1) Nếu $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là các VCB khi $x \to x_0$ thì $\alpha(x) \pm \beta(x)$ và $\alpha(x).\beta(x)$ là VCB khi $x \to x_0$.

2) Nếu $\alpha(x)$ là VCB và $\beta(x)$ bị chặn trong lân cận x_0 thì $\alpha(x).\beta(x)$ là VCB khi $x \to x_0$.

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = a + \alpha(x)$, trong đó $\alpha(x)$ là VCB khi $x \to x_0$.

c) So sánh các VCB

• **Định nghĩa**

Cho $\alpha(x),\ \beta(x)$ là các VCB khi $x \to x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k.$

Khi đó:

– Nếu $k = 0$, ta nói $\alpha(x)$ là VCB ***cấp cao hơn*** $\beta(x)$, ký hiệu $\boxed{\alpha(x) = 0(\beta(x))}$.

– Nếu $k = \infty$, ta nói $\alpha(x)$ là VCB ***cấp thấp hơn*** $\beta(x)$.

– Nếu $0 \neq k \neq \infty$, ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB ***cùng cấp***.

– Đặc biệt, nếu $k = 1$, ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB ***tương đương***, ký hiệu $\boxed{\alpha(x) \sim \beta(x)}$.

<u>VD 2.</u>

- $1 - \cos x$ là VCB cùng cấp với x^2 khi $x \to 0$ vì:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}{4\left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

- $\sin^2 3(x-1) \sim 9(x-1)^2$ khi $x \to 1$.

• **Tính chất của VCB tương đương khi $x \to x_0$**

1) $\alpha(x) \sim \beta(x) \Leftrightarrow \alpha(x) - \beta(x) = 0(\alpha(x)) = 0(\beta(x))$.

2) Nếu $\alpha(x) \sim \beta(x),\ \beta(x) \sim \gamma(x)$ thì $\alpha(x) \sim \gamma(x)$.

3) Nếu $\alpha_1(x) \sim \beta_1(x),\ \alpha_2(x) \sim \beta_2(x)$ thì

$$\alpha_1(x)\alpha_2(x) \sim \beta_1(x)\beta_2(x).$$

4) Nếu $\alpha(x) = 0(\beta(x))$ thì $\alpha(x) + \beta(x) \sim \beta(x)$.

• Quy tắc ngắt bỏ VCB cấp cao

Cho $\alpha(x),\ \beta(x)$ là ***tổng các VCB khác cấp*** khi $x \to x_0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ bằng giới hạn tỉ số hai VCB ***cấp thấp nhất*** của tử và mẫu.

<u>VD 3.</u> Tìm giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 - \cos x + 1}{x^4 + x^2}$.

<u>Giải.</u> $L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 + (1-\cos x)}{x^4 + x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

- **Các VCB tương đương cần nhớ khi $x \to 0$**

1) $\sin x \sim x$; 2) $\tan x \sim x$;

3) $\arcsin x \sim x$; 4) $\arctan x \sim x$

5) $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$; 6) $e^x - 1 \sim x$;

7) $\ln(1 + x) \sim x$; 8) $\sqrt[n]{1 + x} - 1 \sim \dfrac{x}{n}$.

Chú ý

Nếu $u(x)$ là VCB khi $x \to 0$ thì ta có thể thay x bởi $u(x)$ trong 8 công thức trên.

VD 4. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 - 2x\sin^2 x)}{\sin x^2 . \tan x}$.

Giải. Khi $x \to 0$, ta có:

$$\frac{\ln(1 - 2x\sin^2 x)}{\sin x^2 . \tan x} \sim \frac{-2x\sin^2 x}{x^2 . x} \sim \frac{-2x . x^2}{x^2 . x} = -2.$$

Vậy $L = -2$.

VD 5. Tính $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\left(\sqrt{x+1} - 1\right) + x^2 - 3\tan^2 x}{\sin x^3 + 2x}$.

Giải. Khi $x \to 0$, ta có:

$$\tan^2 x \sim x^2 \text{ (cấp 2)}, \ \sin x^3 \sim x^3 \text{ (cấp 3)},$$

$$\sin\left(\sqrt{x+1} - 1\right) \sim \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2} \text{ (cấp 1)}.$$

$$\text{Vậy } L = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{2}}{2x} = \frac{1}{4}.$$

Chú ý

Quy tắc VCB tương đương ***không áp dụng được*** cho hiệu hoặc tổng của các VCB nếu chúng làm ***triệt tiêu*** tử hoặc mẫu của phân thức.

VD 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)+(e^{-x}-1)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+(-x)}{x^2}=0\ \textbf{(Sai!)}.$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3}{\tan x-x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3}{x-x}=-\infty\ \textbf{(Sai!)}.$$

3.2. Đại lượng vô cùng lớn

a) Định nghĩa

Hàm số $f(x)$ được gọi là ***đại lượng vô cùng lớn*** (VCL) khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ (x_0 có thể là vô cùng).

VD 7. $\dfrac{\cos x + 1}{2x^3 - \sin x}$ là VCL khi $x \to 0$;

$\dfrac{x^3 + \sqrt{x} - 1}{x^2 - \cos 4x + 3}$ là VCL khi $x \to +\infty$.

Nhận xét. Hàm số $f(x)$ là VCL khi $x \to x_0$ thì

$\dfrac{1}{f(x)}$ là VCB khi $x \to x_0$.

b) So sánh các VCL

• **Định nghĩa**

Cho $f(x),\ g(x)$ là các VCL khi $x \to x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$.

Khi đó:

– Nếu $k = 0$, ta nói $f(x)$ là VCL ***cấp thấp hơn*** $g(x)$.

– Nếu $k = \infty$, ta nói $f(x)$ là VCL ***cấp cao hơn*** $g(x)$.

– Nếu $0 \neq k \neq \infty$, ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là các VCL ***cùng cấp***.

– Đặc biệt, nếu $k = 1$, ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là các VCL ***tương đương***. Ký hiệu $\boxed{f(x) \sim g(x)}$.

VD 8.

• $\dfrac{3}{x^3}$ là VCL khác cấp với $\dfrac{1}{2x^3+x}$ khi $x \to 0$ vì:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^3} : \frac{1}{2x^3+x}\right) = 3\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+x}{x^3} = 3\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3} = \infty.$$

• $2\sqrt{x^3} + x - 1 \sim 2\sqrt{x^3}$ khi $x \to +\infty$.

- **Quy tắc ngắt bỏ VCL cấp thấp**

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là *tổng các VCL* khác cấp khi $x \to x_0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ bằng giới hạn tỉ số hai VCL ***cấp cao nhất*** của tử và mẫu.

VD 9. Tính các giới hạn:

$$A = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - \cos x + 1}{3x^3 + 2x}; \; B = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{2\sqrt{x^7} - \sin^2 x}.$$

Giải. $$A = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3}.$$

$$B = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{2\sqrt{x^7}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0.$$

....

§4. HÀM SỐ LIÊN TỤC

4.1. Định nghĩa

- Số $x_0 \in D_f$ được gọi là *điểm cô lập* của $f(x)$ nếu
  $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in (x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ thì $x \notin D_f$.
- Hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Hàm số $f(x)$ liên tục trên tập X nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \in X$.

<u>Quy ước</u>

- Hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi điểm cô lập của nó.

4.2. Định lý

- Tổng, hiệu, tích và thương của các hàm số liên tục tại x_0 là hàm số liên tục tại x_0.
- Hàm số sơ cấp xác định ở đâu thì liên tục ở đó.
- Hàm số liên tục trên một đoạn thì đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn đó.

4.3. Hàm số liên tục một phía

- **Định nghĩa**

Hàm số $f(x)$ được gọi là ***liên tục trái (phải)*** tại x_0 nếu

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \; \left(\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \right).$$

- **Định lý**

Hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 nếu

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).}$$

VD 1. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3\tan^2 x + \sin^2 \sqrt{x}}{2x}, & x > 0 \\ \alpha, & x \le 0 \end{cases}.$

Giá trị của α để hàm số liên tục tại $x = 0$ là:

A. $\alpha = 0$; B. $\alpha = \dfrac{1}{2}$; C. $\alpha = 1$; D. $\alpha = \dfrac{3}{2}$.

Giải. Ta có $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = \alpha.$

Mặt khác, khi $x \to 0^+$ ta có:

$$\frac{3\tan^2 x + \sin^2 \sqrt{x}}{2x} \sim \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow B.$$

VD 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(\cos x)}{\arctan^2 x + 2x^2}, & x \neq 0 \\ 2\alpha - 3, & x = 0 \end{cases}$.

Giá trị của α để hàm số liên tục tại $x = 0$ là:

A. $\alpha = \dfrac{17}{12}$; B. $\alpha = -\dfrac{17}{12}$; C. $\alpha = -\dfrac{3}{2}$; D. $\alpha = \dfrac{3}{2}$.

Giải. Khi $x \to 0$, ta có:

$$\arctan^2 x + 2x^2 \sim 3x^2;$$

$$\ln(\cos x) = \ln[1 + (\cos x - 1)] \sim \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(\cos x)}{\arctan^2 x + 2x^2} \sim \frac{-\dfrac{x^2}{2}}{3x^2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{6}.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow -\frac{1}{6} = 2\alpha - 3 \Rightarrow A.$$

4.4. Phân loại điểm gián đoạn

- Nếu hàm số $f(x)$ ***không liên tục*** tại x_0 thì x_0 được gọi là ***điểm gián đoạn*** của $f(x)$.

- Nếu tồn tại các giới hạn:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^-), \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$$

nhưng $f(x_0^-)$, $f(x_0^+)$ và $f(x_0)$ ***không đồng thời bằng nhau*** thì ta nói x_0 là điểm ***gián đoạn loại một***.

Ngược lại, x_0 là điểm ***gián đoạn loại hai***.

....