CHƯƠNG 5
TRỊ RIÊNG- VECTOR RIÊNG
CHÉO HÓA MA TRẬN VUÔNG

I. Trị Riêng – Vector Riêng

I.1. Định nghĩa Trị Riêng – Vector Riêng – Không gian Riêng

- Cho $A = (a_{ij}) \epsilon M_n(K), \lambda \epsilon K$
- Nếu $\exists\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\tau \in K^n, x \neq \theta$ sao cho:

$$Ax = \lambda x \ (*) \quad \left(A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right)$$

☞ λ : trị riêng của A

☞ x: vector riêng của A ứng với trị riêng λ

I. Trị Riêng – Vector Riêng

I.1. Định nghĩa Trị Riêng – Vector Riêng – Không gian Riêng

Từ (*) ta có: $(A - \lambda I_n)x = 0 \ (1)$

Đặt

$$\boxed{E_c = \{x \in K^n | (A - \lambda I_n)x = 0\}}$$

E_c: không gian nghiệm của phương trình (1)

Ta gọi E_c là không gian riêng của A ứng với trị riêng λ

Lưu ý: Nếu x là VTR của A ứng với trị riêng λ , thì cx (c ≠ 0) cũng là VTR của A ứng với trị riêng λ

I. Trị Riêng – Vector Riêng

I.1. Định nghĩa Trị Riêng – Vector Riêng – Không gian Riêng

✍ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(Q)$$

✍ Xét $\boxed{\lambda = -3 \in Q}$, ta có $\boxed{E_{-3} = \{X \in Q^3 \mid (A+3I_3)X = O\}}$

☞ Tiếp theo, ta giải $(A+3I_3)X = O$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{giải}} \boxed{x = y = z = 0}$$

$$\Rightarrow E_{-3} = \{O = (0,0,0)\}$$

$\Rightarrow \lambda = -3$ không là trị riêng của A

I. Trị Riêng – Vector Riêng

I.1. Định nghĩa Trị Riêng – Vector Riêng – Không gian Riêng

Xét $\boxed{\lambda = 2 \in Q}$, ta có $\boxed{E_2 = \{X \in Q^3 \mid (A - 2I_3)X = O\}}$

Tiếp theo, ta giải $(A - 2I_3)X = O$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{giải}} \text{vô số nghiệm (2 ẩn tự do)} \quad \begin{cases} x_1 = b - 2a \\ x_2 = a \\ x_3 = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_2 \neq \{O = (0,0,0)\}$$

=> λ=2 là trị riêng của A (trên Q), và

E_2 là không gian riêng (ứng với trị riêng 2)

và mỗi $\boxed{\alpha \in E_2 \setminus \{O\}}$ là vector riêng (ứng với trị riêng 2) của A

I. Trị Riêng – Vector Riêng

I.2. Tính chất Trị Riêng – Vector Riêng

TC1: Nếu x là VTR của A ứng với TR λ , thì cx ($c \neq 0$) cũng là VTR của A ứng với TR λ

TC2: Hai ma trận $A, B \in M_n(K)$ gọi là đồng dạng nếu tồn tại ma trận P không suy biến (det P$\neq$ 0) sao cho:

$$B = P^{-1}AP.$$

☞ Hai ma trận đồng dạng có cùng trị riêng

I. Trị Riêng – Vector Riêng

I.3 Đa thức đặc trưng của ma trận vuông

- Xét $A \in M_n(K)$
- Lập ma trận $(xI_n - A)$
- Đặt $p_A(x) = \det(xI_n - A)$ ☞ gọi là đa thức đặc trưng của A

$$= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

hệ số của bậc cao nhất luôn = 1

Phương trình $p_A(\lambda) = 0$

là phương trình đặc trưng của A

I. Trị Riêng – Vector Riêng

I.3 Đa thức đặc trưng của ma trận vuông

✍ Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \in M_2(C)$ ☞ tìm $p_A(x)$

☞ Ta có $xI_2 - A = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+7 & -1 \\ -2 & x+5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow p_A(x) = \begin{vmatrix} x+7 & -1 \\ -2 & x+5 \end{vmatrix} = x^2 + 12x + 33$$

I. Trị Riêng – Vector Riêng

I.4 Cách tìm trị riêng, vector riêng của ma trận vuông A.

Ta tiến hành các bước sau:

1) Giải phương trình đặc trưng

$$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \quad (**)}$$

Nghiệm của (**) là *trị riêng* của A.

2) Giả sử λ_k là một nghiệm của (**). Ta giải hệ phương trình thuần nhất sau:

$$\boxed{(A - \lambda_k I)x = \theta \quad (3*)}$$

Nghiệm không tầm thường của (3*) là *vector riêng* của A ứng với trị riêng λ_k .

I. Trị Riêng – Vector Riêng

I.4 Cách tìm trị riêng, vector riêng của ma trận vuông A.

Ví dụ 1. Tìm TR, VTR, cơ sở của KGR và các KGR của ma trận A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Giải: a) Giải phương trình đặc trưng $P_A(\lambda) = 0$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) - (1-\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1).$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \lambda_1 = -1 & (m_1 = 1) \\ \lambda_2 = 1 & (m_2 = 2) \end{array}\right.$$

I. Trị Riêng – Vector Riêng

I.4 Cách tìm trị riêng, vector riêng của ma trận vuông A.

$\lambda_1 = -1\ (m = 1)$ ☞ Giải hệ phương trình $\boxed{(A+I)x = \theta}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+I)x = \theta \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = 0, \\ x_3 = t \end{cases} \quad t \in R \setminus \{0\}.$$

- VTR của A ứng với GTR $\lambda_1 = -1$ có dạng:

  $x = (-t, 0, t) = t(-1, 0, 1), \quad t \in R \setminus \{0\}.$

- Một cơ sở của KGR $S_1 (\dim S_1 = 1)$ của A ứng với GTR $\lambda_1 = -1$: $a_1 = (-1, 0, 1)$.
- KGR $S_1 = \text{span}\{a_1\} = \{x \in R^3 \mid x = t(-1,0,1), t \in R\}$

I. Trị Riêng – Vector Riêng

I.4 Cách tìm trị riêng, vector riêng của ma trận vuông A.

$\lambda_1 = 1(m_2 = 2)$ ☞ Giải hệ phương trình $\boxed{(A - I)x = \theta}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A - I)x = \theta \Leftrightarrow -x_1 + x_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = v, \quad t, v \in R : t^2 + v^2 \neq 0. \end{cases}$$

- VTR của A ứng với GTR $\lambda_2 = 1$ có dạng:

  $x = (t, v, t) = t(1,0,1) + v(0,1,0), \quad t, v \in R : t^2 + v^2 \neq 0.$

- Một cơ sở của KGR $S_2 (\dim S_2 = 2)$ của A ứng với GTR $\lambda_2 = 1$:

  $a_2 = (1,0,1), a_3 = (0,1,0).$

- KGR $S_2 = \mathrm{span}\{a_2, a_3\} = \{x \in R^3 | x = t(1,0,1) + v(0,1,0), t, v \in R\}$

II. Chéo hóa ma trận

1.Định nghĩa

Cho ma trận vuông A, $A \in \mathrm{M}_n(K)$

nếu tồn tại ma trận khả đảo T sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận đường chéo thì ta nói rằng ma trận A chéo hóa được và ma trận T làm chéo hóa ma trận A hay ma trận A đưa được về dạng chéo hóa nhờ ma trận T

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{pmatrix}$$

II. Chéo hóa ma trận

2.Định lý

Định lý 1 : Nếu ma trận A đưa được về dạng chéo B thì các phần tử trên đường chéo chính của B là các trị riêng của A.

Định lý 2 : p vector riêng ứng với p trị riêng khác nhau của A là độc lập tuyến tính (đltt).

Định lý 3: Nếu λ_k là nghiệm bội m_k của phương trình đặc trưng của A và nếu

$$\boxed{r(A-\lambda_k I)=n-m_k}$$

thì A có $m_k$vector riêng đltt ứng với trị riêng λ_k đó.

II. Chéo hóa ma trận

3. Điều kiện chéo hóa được của một ma trận.

Cho $A \in \mathrm{M}_n(K)$

Đk1: Điều kiện cần và đủ để ma trận A chéo hóa được là nó có n vector riêng độc lập tuyến tính.

Đk2: Ma trận vuông A cấp n chéo hóa được khi và chỉ khi với mỗi trị riêng λ_k bội m_k của A có

$$\boxed{r(A - \lambda_k I) = n - m_k \quad (\forall k = 1, 2, \ldots, p).} \quad (m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n)$$

Chú ý: Nếu ma trận vuông A cấp n có n trị riêng phân biệt thì A chéo hóa được.

II. Chéo hóa ma trận

Ví dụ

$$\text{Cho } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có:

$$A - \lambda_k I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \Rightarrow P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \lambda_1 = -1 & (m_1 = 1) \\ \lambda_2 = 1 & (m_2 = 2) \end{array} \right. .$$

=> $r(A - \lambda_1 I) = 2 = 3 - 1$

=> $r(A - \lambda_2 I) = 1 = 3 - 2$

Vậy A chéo hóa được

II. Chéo hóa ma trận

Ví dụ

$$\text{Cho } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda).$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \lambda_1 = -1 & (m_1 = 1) \\ \lambda_2 = 1 & (m_2 = 1) \\ \lambda_3 = 2 & (m_3 = 1) \end{array}\right. .$$

Vì A la ma trận vuông cấp 3 có 3 GTR phân biệt nên A chéo hóa được.

II. Chéo hóa ma trận

4. Cách chéo hóa ma trận

1. Giải pt đặc trưng $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ để tìm các trị riêng của A:

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ *với* bội tương ứng $m_1, m_2, \dots, m_p$.

2. Kiểm tra điều kiện chéo hóa:

a. Nếu p=n thì A chéo hóa được.

b. Nếu $\forall k (k = 1,2, \dots, p): r(A - \lambda_k I) = n - m_k$ thì A chéo hóa được.

c. Nếu $\exists k: r(A - \lambda_k I) \neq n - m_k$ thì A không chéo hóa được.

II. Chéo hóa ma trận

4. Cách chéo hóa ma trận

- **Chú ý**: Nếu A chéo hóa được thì A được đưa về ma trận chéo B có dạng:

$$\text{a)}\quad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\text{b)}\quad B = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}\right\} m_1 & & \\ & \cdots & \\ & & \left.\begin{matrix} \lambda_p & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \end{matrix}\right\} m_p \end{pmatrix}$$

II. Chéo hóa ma trận

4. Cách chéo hóa ma trận

3. Ta tìm ma trận T không suy biến $(\det T \neq 0)$: $B = T^{-1}AT$

a.Ứng với mỗi trị riêng λ_k , giải hệ phương trình $(A - \lambda_k I)x = \theta$, tìm

được m_k VTR đltt $a_1^k, a_2^k, \ldots, a_m^k$ *ứng với* λ_k

b. Sau đó ta lập hệ

$$(a) = \{a_1^1, a_2^1, \ldots, a_{m_1}^1, \ldots, a_1^p, a_2^p, \ldots, a_{m_p}^p\}$$

là cơ sở của không gian K^n, bao gồm các VTR

c. Lập ma trận T là ma trận mà có cột thứ j là vectơ thứ j trong cơ sở (a)

$$T = \begin{pmatrix} | & & | & & | & & | \\ a_1^1 & \cdots & a_{m_1}^1 & \cdots & a_1^p & \cdots & a_{m_p}^p \\ | & & | & & | & & | \end{pmatrix}$$

II. Chéo hóa ma trận

4. Cách chéo hóa ma trận

***Chú ý:** Nếu A là ma trận chéo hóa được thì ta luôn tìm được ma trận T và ma trận chéo B như trong phương pháp trên: $A = TBT^{-1}$.Khi đó

$$A^2 = A.A = (TBT^{-1}).(TBT^{-1}) = TB(T^{-1}T)BT^{-1} = TB^2T^{-1}$$

$$A^3 = A^2.A = (TB^2T^{-1}).(TBT^{-1}) = TB^3T^{-1}$$

....

$$A^n = A^{n-1}.A = TB^{n-1}T^{-1}.TBT^{-1} = TB^nT^{-1}$$

II. Chéo hóa ma trận

Ví dụ : Chéo hóa ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Giải: Trong ví dụ trước đã chỉ ra rằng ma trận A chéo hóa được. A có 1 cơ sở mới bao gồm các VTR

$$a_1 = (-1,0,1), \quad a_2 = (1,0,1), \quad a_3 = (0,1,0),$$

Lập ma trận T

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B = T^{-1}AT = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. Chéo hóa ma trận

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm A^n.

$$A^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ (-1)^n & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^n + 1 & 2 & (-1)^{n+1} + 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ (-1)^{n+1} + 1 & 0 & (-1)^n + 1 \end{pmatrix}.$$

III. Chéo hóa ma trận đối xứng thực

III.1. Ma trận trực giao.

Định nghĩa : Ma trận trực giao là ma trận vuông có tổng bình phương các phần tử của mỗi hàng bằng 1, còn tổng các tích các phần tử tương ứng của hai hàng khác nhau thì bằng 0

Ví dụ: Các ma trận sau đây là ma trận trưc giao:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

III. Chéo hóa ma trận đối xứng thực

III.1. Ma trận trực giao.

Định nghĩa : Cho $A \in M_n(R), det\ A \neq 0$. Ma trận A là ma trận trực giao nếu

$$\boxed{A^T = A^{-1}}$$

Định lý : Cho A là ma trận đối xứng thực. Khi đó

a) Mọi trị riêng của ma trận đối xứng thực A là các số thực.

b) Nếu λ_k là một trị riêng bội m_k của A thì không gian riêng ứng với λ_k là

không gian m_k chiều, nghĩa là nó có m_k vector riêng (ứng λ_k) đltt.

III. Chéo hóa ma trận đối xứng thực

III.2. Phương pháp chéo hóa ma trận đối xứng bằng ma trận trực giao.

1. Giải phương trình đặc trưng $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$

2. Tìm một cơ sở trực chuẩn cho KGR ứng với mỗi trị riêng.

a) Nếu λ_k bội $m_k = 1$, thì lấy một VTR bất kỳ ứng với λ_k , rồi chuẩn hóa nó.

b) Nếu λ_k bội $m_k > 1$, thì có thể tìm cơ sở trực chuẩn của KGR ứng với λ_k bằng cách tìm một cơ sở của KGR ứng với λ_k , sau đó áp dụng quá trình trực chuẩn hóa Gram-Schmidt.

Cuối cùng ta được cơ sở trực chuẩn của KGR ứng với $\lambda_k, \forall k$. Và ghép chúng lại ta được cơ sở trực chuẩn gồm các VTR.

III. Chéo hóa ma trận đối xứng thực

III.2. Phương pháp chéo hóa ma trận đối xứng bằng ma trận trực giao.

Ví dụ 10: Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hãy tìm ma trận trực giao Q để đưa A về dạng chéo $B = Q^{-1}.A.Q$.
Tìm ma trận chéo B.

III. Chéo hóa ma trận đối xứng thực

III.2. Phương pháp chéo hóa ma trận đối xứng bằng ma trận trực giao.

Giải:

Trước hết ta nhận xét A là ma trận đối xứng nên A chéo hóa trực giao được

1) Giải phương trình đặc trưng:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(5-\lambda)(1+\lambda)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 5\,(m_1 = 1) \\ \lambda_2 = -1\,(m_2 = 2) \end{array} \right.$$

2) Tìm một cơ sở trực chuẩn của từng KGR:

III. Chéo hóa ma trận đối xứng thực

III.2. Phương pháp chéo hóa ma trận đối xứng bằng ma trận trực giao.

- $\lambda_1 = 5\ (m_1 = 1)$

Giải hệ phương trình $(A - 5I)x = \theta$.

Ta có:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\dots} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\dots} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow (A - I)x = \theta \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t, \quad t \in R \setminus \{0\}. \\ x_3 = t \end{cases}$$

Lấy $a_1 = (1,1,1)$, chuẩn hóa a_1 được $a_1' = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

III. Chéo hóa ma trận đối xứng thực

III.2. Phương pháp chéo hóa ma trận đối xứng bằng ma trận trực giao.

- $\lambda_2 = -1\,(m_2 = 2)$

Giải hệ phương trình $(A+I)x = \theta \Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = v \\ x_3 = -t - v \end{cases}, \quad t, v \in R : t^2 + v^2 \neq 0.$$

Để tìm cơ sở trực chuẩn của KGR ứng với $\lambda_2 = -1$, ta làm như sau:

Lấy $a_2 = (1,0,-1)$, $a_3 = (0,1,-1)$ là cơ sở.

Đặt $a_2' = \dfrac{a_2}{\|a_2\|} = (\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}})$,

$$\bar{a}_3 = a_3 - \langle a_3, a_2' \rangle a_2' = (0,1,-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow a_3' = \frac{\bar{a}_3}{\|\bar{a}_3\|} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$$

III. Chéo hóa ma trận đối xứng thực

III.2. Phương pháp chéo hóa ma trận đối xứng bằng ma trận trực giao.

3) Ma trận Q và B cần tìm là:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Chú ý: Ma trận Q không là duy nhất vì Q phụ thuộc vào cách chọn Vector riêng