

CỰC TRỊ TỰ DO, CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN, GTLN-GTNN

1. Tính cực trị của các hàm sau:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$

b) $f(x, y) = 4 - \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}$

c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y$

d) $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

e) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z$

g) $f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z), \quad 0 < x, y, z < \pi$

2. Tính cực trị có điều kiện của các hàm sau:

a) $f(x, y) = x + 2y, \quad x^2 + y^2 = 5$

b) $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y, \quad y - x = \frac{\pi}{4}$

c) $f(x, y, z) = xyz, \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

3. Tìm GTLN, GTNN của các hàm sau:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x - 16y, \quad D: x^2 + y^2 \leq 25$

b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y, \quad D: x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3$

c) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y), \quad D: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

Đáp án:

1.
 - a) CT tại (1,1), $f_{CT} = -1$
 - b) CT tại (x_0, y_0) : $x_0 - y_0 + 1 = 0$, $f_{CT} = 0$
 - c) CĐ tại (0,0), $f_{CĐ} = 4$
 - d) CĐ tại (4,4), $f_{CĐ} = 12$
 - e) CT tại (-1,-1), (1,1), $f_{CT} = -2$
 - f) CT tại (2,-3,1), $f_{CT} = -14$
 - g) CĐ tại $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f_{CĐ} = 4$
2.
 - a) CĐ tại (1,2), CT tại (-1,-2)...
 - b) Tại $(-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2})$ CĐ nếu $k = 2m$, CT nếu $k = 2m+1 \dots$
 - c) CT tại $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), (\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$
CĐ tại $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}), (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}), (\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$
3.
 - a) GTNN tại (3,4), $f_{\min} = -75$,
GTLN tại (-3,-4), $f_{\max} = 125$
 - b) GTNN tại (-1,1), $f_{\min} = -1$,
GTLN tại (-3,0), (0,-3), $f_{\max} = 6$
 - c) GTNN tại (0,0), $f_{\min} = 0$,
GTLN tại $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$, $f_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$