CHƯƠNG 4
KHÔNG GIAN EUCLIDE

I. Không gian Euclide

I.1. Tích vô hướng của hai vector

Cho V – KGVT trên R. Ta gọi tích vô hướng của hai vectơ $u, v \in V$ là ánh xạ

$$<,>: V \times V \to R$$

$$(u,v) \to <u,v>$$

Thỏa 4 tiên đề sau: $\forall u, v, w \in V, \forall k \in R$

1. $<u,v> = <v,u>$
2. $<u+v,w> = <u,w> + <v,w>$
3. $<ku,v> = k<u,v>$
4. $<u,u> \geq 0, <u,u> = 0 \Leftrightarrow u = \theta$

I. Không gian Euclide

I.2. Không gian Euclide

- Không gian Euclide là KGVT thực, có trang bị thêm một tích vô hướng

Kí hiệu : $Eu = (V, < \mid >)$

Ví dụ 1: Trong KGVT R2, R3 các vectơ tự do trong mặt phẳng và không gian, ta xét tích vô hướng của 2 vectơ theo ý nghĩa thông thường:

$$<\vec{u}, \vec{v}> = |\vec{u}| . |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

thì R2, R3 là các KG Euclide.

Ví dụ 2: Xét KGVT R^n với $u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = v_1, v_2, v_n)$, ta định nghĩa:

$$<u, v> = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

⇒ $(R^n, < , >)$ là KGVT Euclide

I. Không gian Euclide

I.3. Độ dài và góc trong không gian Euclide

1. Độ dài (môđun)

✍ Cho KG Euclide $Eu = (V, < \mid >)$ Trên $\mathbb{R}$

Với mỗi u ∈ V ta định nghĩa và ký hiệu độ dài (môđun) hay chuẩn của u:

$$\|u\| := \sqrt{< u, u >}$$

Nếu || u || = 1 thì u được gọi là vectơ đơn vị.

Ví dụ : Trong $R^n, u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, ta có:

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2} = (u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2)^{1/2}$$

I. Không gian Euclide

I.3. Độ dài và góc trong không gian Euclide

1. Độ dài (môđun)

BĐT Cauchy-Schwartz

$$|<u|v>| \leq \|u\|.\|v\|, \forall u, v \in V$$

(dấu = xảy ra khi và chỉ khi u,v cùng phương)

Các tính chất của độ dài của vectơ :

1. $\|u\| \geq 0, \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \theta$

2. $\|ku\| = |k|\,\|u\|$

3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

I. Không gian Euclide

I.3. Độ dài và góc trong không gian Euclide

1. Độ dài (môđun)

Khoảng cách giữa 2 vector

$$d(u,v) = \|u - v\| = \|v - u\| = d(v,u)$$

Các tính chất của khoảng cách giữa 2 vectơ :

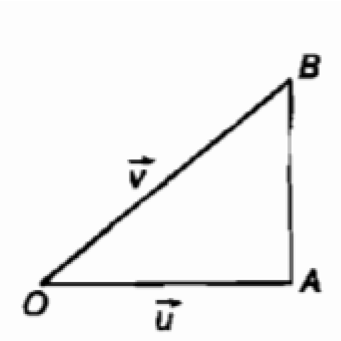
D1. $d(u,v) \geq 0$

D2. d(u,v)=0 ⇔ u=v

D3. d(u,v) = d(v,u)

D4. d(u,v)≤ d(u,w)+d(w,v)

(BĐT tam giác)



I. Không gian Euclide

I.3. Độ dài và góc trong không gian Euclide

2. Góc giữa hai vector

Góc giữa hai vectơ u,v $\in$ V được cho bởi công thức:

$$\cos(\widehat{u,v}) := \frac{<u,v>}{\|u\|.\|v\|}$$

II. Hệ trực giao – trực chuẩn

- Cho KG Euclide $\boxed{Eu = (V, < \ | \ >)}$ trên $\mathbb{R}$
- Cho các vector $\alpha, \beta \in V$ và tập hợp $A, B \subset V$
  - Ta nói

    a) $\alpha \perp \beta$ nếu $< \alpha \mid \beta >= 0$

    b) $\alpha \perp A$ nếu $\alpha \perp \gamma, \quad \forall \gamma \in A$

    c) $A \perp B$ nếu $\forall \gamma \in A, \forall \delta \in B: \quad \gamma \perp \delta$

    d) $A + B = \{\gamma + \delta \mid \gamma \in A, \delta \in B\}$

    e) $\alpha + A = \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in A\}$

II. Hệ trực giao – trực chuẩn

Định nghĩa

✍ Cho KG Euclide $\boxed{Eu = (V, <\ \ |\ \ >)}$ trên $\mathbb{R}$

✍ Cho tập hợp S trên Eu

☞ Ta nói

a) S là tập hợp (hệ) trực giao nếu $\forall \alpha, \beta \in S : \alpha \perp \beta \quad (\alpha \neq \beta)$

b) S là tập hợp (hệ) trực chuẩn nếu

+ S là trực giao,

+ Độ dài mọi vector trong S đều =1 $\left(\|\alpha\| = 1, \forall \alpha \in S\right)$

II. Hệ trực giao – trực chuẩn

Mệnh đề

✍ Cho KG Euclide $Eu = (V, < \ | \ >)$ trên $\mathbb{R}$

✍ Cho tập hợp S trên Eu

☞ Ta nói

a) Nếu S là tập hợp trực giao và $O \notin S$ thì S là ĐLTT

b) Nếu S là tập hợp trực chuẩn thì S là ĐLTT

c) Nếu S là trực giao thì

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in S :$$

$$\|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m\|^2 = \|\alpha_1\|^2 + \|\alpha_2\|^2 + \cdots + \|\alpha_m\|^2$$

(định lý Pythagore mở rộng)

II. Hệ trực giao – trực chuẩn

Cơ sở trực giao và trực chuẩn

- Cho KG Euclide $Eu = (V, < \mid >)$ trên $\mathbb{R}$ và một cơ sở a

- Nếu a trực giao thì ta nói a là cơ sở trực giao

- Nếu a trực chuẩn thì ta nói a là cơ sở trực chuẩn

- Ví dụ: Trên không gian Euclide $(\mathbb{R}^3, < \mid >)$ cho cơ sở

$$a = \{\alpha_1 = (1,2,2), \alpha_2 = (-2,2,-1), \alpha_3 = (2,1,-2)\}$$

- Ta có $\alpha_1 \perp \alpha_2;\ \alpha_2 \perp \alpha_3;\ \alpha_1 \perp \alpha_3$, do

$$< \alpha_1 \mid \alpha_2 >= 0;\quad < \alpha_2 \mid \alpha_3 >= 0;\quad < \alpha_1 \mid \alpha_3 >= 0$$

- Nên a là cơ sở trực giao

II. Hệ trực giao – trực chuẩn

Cơ sở trực giao và trực chuẩn

- Ta thấy

$$\|\alpha_1\| = \|\alpha_2\| = \|\alpha_3\| = 3$$

- Ta đặt

$$\beta_1 = \frac{1}{3}\alpha_1; \quad \beta_2 = \frac{1}{3}\alpha_2; \quad \beta_3 = \frac{1}{3}\alpha_3$$

thì lúc này $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$

do $$\beta_1 \perp \beta_2; \quad \beta_2 \perp \beta_3; \quad \beta_1 \perp \beta_3$$

và $$\|\beta_1\| = \|\beta_2\| = \|\beta_3\| = 1$$

II. Hệ trực giao – trực chuẩn

Cơ sở trực giao và trực chuẩn

Định lý: Nếu P là một ma trận chuyển cơ sở từ một cơ sở trực chuẩn sang một cơ sở trực chuẩn khác trong một không gian Euclid n chiều thì P là ma trận trực giao, theo nghĩa:

$$\boxed{P^T P = 1}$$

Do đó:

$$\boxed{P^{-1} = P^T}$$

II. Hệ trực giao – trực chuẩn

Trực giao & trực chuẩn hóa bằng pp Gram-Schmidt

- Cho KG Euclide $\boxed{Eu = (V_n, <\ |\ >)}$ và một cơ sở $a = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$
- Đặt

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{<\alpha_2 | \beta_1>}{\|\beta_1\|^2}\beta_1 \\ \beta_3 = \alpha_3 - \dfrac{<\alpha_3 | \beta_2>}{\|\beta_2\|^2}\beta_2 - \dfrac{<\alpha_3 | \beta_1>}{\|\beta_1\|^2}\beta_1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \beta_n = \alpha_n - \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \dfrac{<\alpha_n | \beta_j>}{\|\beta_j\|^2}\beta_j \end{cases}$$

II. Hệ trực giao – trực chuẩn

Trực giao & trực chuẩn hóa bằng pp Gram-Schmidt

- Đặt $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$

  thì β là một cơ sở trực giao của $Eu = (V_n, < \;|\; >)$

- Đặt tiếp $\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|} \\ \gamma_2 = \dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \gamma_n = \dfrac{\beta_n}{\|\beta_n\|} \end{cases}$ thì $\zeta = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$

  là cơ sở trực chuẩn của

  $Eu = (V_n, < \;|\; >)$

II. Hệ trực giao – trực chuẩn

Trực giao & trực chuẩn hóa bằng pp Gram-Schmidt

Ví dụ: Hãy trực chuẩn hóa hệ $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ trong R^3

- $$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

- $$\overline{v}_2 = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = (-1,1,1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\|\overline{v}_2\| = \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{\overline{v}_2}{\|\overline{v}_2\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

- $$\overline{v}_3 = u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2 =$$

$$= (1,2,1) - \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\|\overline{v}_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_3 = \frac{\overline{v}_3}{\|\overline{v}_3\|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Vậy $S' = \{v_1, v_2, v_3\}$

là hệ trực chuân hóa của hệ S.

II. Hệ trực giao – trực chuẩn

Tọa độ vector theo cơ sở trực chuẩn

- Cho KG Euclide $\boxed{Eu = (V_n, <\ |\ >)}$

  và một cơ sở trực chuẩn $a = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$

- Lúc này $\forall \alpha \in V_n$ ta có $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n$

  với $c_1 = <\alpha | \alpha_1>; c_2 = <\alpha | \alpha_2>; \ldots; c_n = <\alpha | \alpha_n>$

- Kết luận

$$[\alpha]_a = \begin{pmatrix} <\alpha | \alpha_1> \\ <\alpha | \alpha_2> \\ \vdots \\ <\alpha | \alpha_n> \end{pmatrix}$$

tọa độ vector theo cơ sở trực chuẩn

II. Hệ trực giao – trực chuẩn

Tọa độ vector theo cơ sở trực chuẩn

- Ví dụ: Trên không gian Euclide $(\mathbb{R}^3, < \quad | \quad >)$

  cho cơ sở trực chuẩn

$$a = \{\alpha_1 = \frac{1}{3}(1,2,2), \alpha_2 = \frac{1}{3}(-2,2,-1), \alpha_3 = \frac{1}{3}(2,1,-2)\}$$

và vector $\alpha = (6,-7,1) \in \mathbb{R}^3$

- Tìm $[\alpha]_a = ?$

II. Hệ trực giao – trực chuẩn

Tọa độ vector theo cơ sở trực chuẩn

Giải: Ta có $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$

với
$$\begin{cases} c_1 = <\alpha \mid \alpha_1> = \dfrac{1}{3}\left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = -2 \\ c_2 = <\alpha \mid \alpha_2> = \dfrac{1}{3}\left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = -9 \\ c_3 = <\alpha \mid \alpha_3> = \dfrac{1}{3}\left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \end{cases}$$

Như vậy

$$\alpha = (6,-7,1) = -2\alpha_1 - 9\alpha_2 + 1\alpha_3$$

$$\Rightarrow [\alpha]_a = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$$