CHƯƠNG 1: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

I. Ma Trận
I.1. Định nghĩa

Định nghĩa: Ma trận cỡ m×n trên $\mathbb{R}$ là một bảng gồm m.n số thực được viết thành m hàng và n cột như sau:

$$\begin{array}{ll} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} ☞\ \text{hàng 1} \\ ☞\ \text{hàng 2} \\ \\ ☞\ \text{hàng m} \end{array} \\ \qquad\quad \text{cột 1} \qquad\qquad\quad \text{cột n} & \end{array}$$

Kí hiệu: $A = [a_{ij}]_{mxn}$ a_{ij}: Phần tử nằm ở hàng *i* cột *j* m×n : gọi là cấp của ma trận

* Khi m = n (số hàng = số cột) ta nói A là ma trận vuông cấp n.

I.1. Định nghĩa ma trận

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ -3 & 1.5 & 5 \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$a_{21}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -6 \\ 2 & 9 & 0 \\ 0 & -7 & -2 \end{bmatrix}_{3x3}$$

đường chéo chính

I.1. Định nghĩa ma trận

Kí hiệu:

$M_{m\times n}(R)$ = tập hợp tất cả các ma trận cấp (mxn) trên R

$M_n(R)$ = tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n trên R

I.1. Định nghĩa ma trận

I.1.2 Các ma trận đặc biệt:

1. *Ma trận không:*

$$a_{ij} = 0, \forall i, j.$$

(tất cả các phần tử đều = 0)

Ví dụ:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I.1. Định nghĩa ma trận

I.1.2 Các ma trận đặc biệt:

2. Ma trận chéo: là ma trận vuông có:

$$a_{\mathrm{ij}} = 0, \forall i \neq j.$$

(các phần tử ngoài đường chéo chính = 0)

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

I.1. Định nghĩa ma trận

I.1.2 Các ma trận đặc biệt:

3. Ma trận đơn vị: là ma trận chéo có:

$$a_{ii} = 1, \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ký hiệu: I, I_n.

Ví dụ:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ .. & .. & \ldots & .. \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

I.1. Định nghĩa ma trận

I.1.2 Các ma trận đặc biệt:

4. Ma trận tam giác: là ma trận vuông có

$$a_{ij} = 0, \forall i > j.$$ (tam giác trên)

$$a_{ij} = 0, \forall i < j.$$ (tam giác dưới)

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

MT tam giác trên

MT tam giác dưới

I.1. Định nghĩa ma trận

I.1.2 Các ma trận đặc biệt:

5. Ma trận hàng: là ma trận có *m=1.*

Ma trận hàng có dạng:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \, a_{12} \ldots a_{1n} \end{bmatrix}$$

6. Ma trận cột: là ma trận có *n=1.*

Ma trận cột có dạng:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ .. \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

I.1. Định nghĩa ma trận

I.1.2 Các ma trận đặc biệt:

7. Ma trận chuyển vị:

Cho ma trận $A=[a_{ij}]_{m \times n}$.

Ma trận chuyển vị của ma trận A ký hiệu A^T và xác định

$$A^T=[b_{ij}]_{n \times m} \text{ với } b_{ij}=a_{ji} \text{ với mọi } i,j.$$

$$A \xrightarrow[\text{các cột thành các dòng}]{\text{các dòng thành các cột}} A^T$$

* Khi A = A^T thì A được gọi là ma trận đối xứng.

I.1. Định nghĩa ma trận

I.1.2 Các ma trận đặc biệt:

Dạng của ma trận chuyển vị:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}_{2\times 3} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad A = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

I.2. Các phép toán trên ma trận

1. Phép cộng hai ma trận:

$$\left[a_{ij}\right]_{m\times n} + \left[b_{ij}\right]_{m\times n} = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n}$$

(cộng theo từng vị trí tương ứng)

Ví dụ:

$$1+0=1 \qquad 2+3=5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

I.2. Các phép toán trên ma trận

1. Phép cộng hai ma trận:

Các tính chất: Giả sử A,B,C,O là các ma trận cùng cấp, khi đó:

$$i)\ A+B=B+A$$

$$ii)\ A+O=A+O=A$$

$$iii)\ A+(B+C)=(A+B)+C$$

I.2. Các phép toán trên ma trận

2. Phép nhân một số với một ma trận:

$$\lambda\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[\lambda.a_{ij}\right]_{m\times n},\lambda\in\mathbb{R}$$

(các phần tử của ma trận đều được nhân cho λ)

Ví dụ:

$$2.(-2)=-4$$

$$2.3=6$$

$$2\begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ 7 & 4 & 5\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & & 0\\ 14 & 8 & 10\\ 0 & -4 & 2\end{bmatrix}\quad 2.0=0$$

I.2. Các phép toán trên ma trận

2. Phép nhân một số với một ma trận:

Các tính chất

$\forall \alpha, \beta \in R, \forall A, B$ là hai ma trận cùng cấp, khi đó

$$i)\ \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

$$ii)\ (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$iii)\ \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$

$$iv)\ 1A = A$$

I.2. Các phép toán trên ma trận

- Chú ý: $A - B = A + (-1)B$

Nếu A = - A^T thì A được gọi là ma trận phản đối xứng.

Ví dụ

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = -A^T$$

I.2. Các phép toán trên ma trận

3. Phép nhân hai ma trận:

Cho hai ma trận $A_{m\times p}; B_{p\times n},$

Khi đó ma trận $\boxed{A_{m\times p}B_{p\times n} = [c_{ij}]_{m\times n}}$

gọi là tích của hai ma trận *A, B*. Trong đó:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}, \forall i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}.$$

$a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{ip} \rightarrow$ Hàng thứ *i* của ma trận *A.*

$b_{1j} \quad b_{2j} \quad b_{pj} \rightarrow$ Cột thứ *j* của ma trận *B.*

Như vậy c_{Ij} *= hàng thứ i của ma trận A nhân tương ứng với cột thứ j của ma trận B rồi cộng lại.*

I.2. Các phép toán trên ma trận

3. Phép nhân hai ma trận:

Ví dụ: Nhân hai ma trận sau:

3 2 1 = 2 0 -1 =3.2+2.0+1.(-1)=5 5

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} \; & \; \\ \; & \; \\ \; & \; \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

số cột của *A* = số hàng của *B* =

Chú ý: hàng 1 nhân cột 2 viết vào vị trí c_{12}

3. Phép nhân hai ma trận:

Ví dụ: Nhân hai ma trận sau:

Hàng 2 Cột 1 $=0.1+(-1).3+4.4=\mathbf{13}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ & \\ 7 & -4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Hàng 2 Cột 2 $=0.2+1.0+4.(-1)=\mathbf{-4}$

I.2. Các phép toán trên ma trận

3. Phép nhân hai ma trận:

Các tính chất:

Ta giả sử các ma trận có cấp phù hợp để tồn tại ma trận tích, khi đó tích các ma trận có các tính chất sau:

$$i)\ A(BC) = (AB)C$$

$$ii)\ A(B+C) = AB + AC$$

$$iii)\ (A+B)C = AC + BC$$

$$iv)\ \forall k \in R,\ k(AB) = (kA)B = A(kB)$$

$$v)\ AI = A\ (IA = A)$$

I.2. Các phép toán trên ma trận

Đối với ma trận chuyển vị, các phép toán trên ma trận có các tính chất sau

$$i)\ (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$ii)\ (kA)^T = kA^T, \forall k \in R$$

$$iii)\ (AB)^T = B^T A^T$$

4. Phép tính với ma trận vuông

Phép lũy thừa (k nguyên ≥0)

✍ Xét ma trận $\boxed{A \in M_n(R)}$ ta định nghĩa

$$A^0 = I_n$$

$$A^1 = A$$

$$A^2 = A \times A$$

$$A^k = (A^{k-1})A = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{\text{k lần}}$$

và ta luôn có $A^k \in M_n(R), \forall k \geq 0$

4. Phép tính với ma trận vuông

Phép lũy thừa (k nguyên ≥0)

✍ Ví dụ cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(Q)$. Tính $A^k, \forall k \geq 0$

☞ ta có $A^{0} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^{1} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^{2} = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{3} = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

☞ dự đoán $\boxed{A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \forall k \geq 0}$ (*)

4. Phép tính với ma trận vuông

Phép lũy thừa (k nguyên ≥0)

✍ Thật vậy, giả sử (*) đúng với $\boxed{n = k}$

ta cần cm (*) đúng với $\boxed{n = k + 1}$

☞ ta có $A^{k+1} = A^k \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

(nghĩa là (*) đúng với $n = k + 1$)

☞ đpcm

5. Đa thức của ma trận :

Cho đa thức $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ và ma trận vuông $A = [a_{ij}]_n$

Khi đó:

$$\boxed{P_n(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_n I_n}$$

(trong đó I_n là ma trận đơn vị cùng cấp với ma trận A)

Ví dụ: Cho $P_2(x) = x^2 - 3x + 5$ và ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

Khi đó: $P_2(A) = A^2 - 3A + 5I_2$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Đa thức của ma trận :

Ví dụ: Cho $f(x) = x^2 + 3x - 5$ và $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Tính f(A)?

- Ta có: $f(A) = A^2 + 3A - 5I_2$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^2 + 3\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 35 \\ 7 & 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 50 \\ 10 & 28 \end{bmatrix}$$

I.2. Các phép toán trên ma trận

- **Bài tập:**

1. Cho $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 5\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$

- Tính $AB;\ A^2;\ A^T A;\ AB-3B.$

2. Cho $f(x)=x^2+3x-4$ và ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

Tính f(A) =?

II. Định thức

II.1. Định nghĩa định thức

Với mỗi ma trận vuông A cấp n tồn tại một số thực c_A được gọi là định thức của ma trận A, được ký hiệu

$\boxed{c_A = \det(A)}$ hay $\boxed{c_A = |A|}$

II.2. Tính chất của định thức

Cho A là một ma trận vuông cấp n trên R

- Tính chất 1: Định thức của ma trận không thay đổi qua phép chuyển vị

$$det(A^t) = det(A).$$

- **Ví dụ:** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2.$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$

II.2. Tính chất của định thức

Tính chất 2: Nếu đổi chỗ hai hàng bất kỳ của một ma trận thì định thức của nó đổi dấu.

- **Ví dụ:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2; \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Tính chất 3: Nếu nhân một hàng nào đó của A với một số $\lambda \in R$ thì định thức của nó cũng được nhân với λ.

- **Ví dụ:**

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7$$

$$\mathrm{A}' = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -14$$

II.2. Tính chất của định thức

Tính chất 4:

$$\boxed{det(\lambda A) = \lambda^n det A,\ \lambda \in \mathbb{R}.}$$

- **Ví dụ:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix};\ 2A = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(2A) = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2.2 & 2.5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2.3 & 2.4 \end{vmatrix}$$

$$= 2.2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2^2 \det(A).$$

II.2. Tính chất của định thức

+Tính chất 5: Nếu A có một hàng (cột) bằng không thì định thức của nó bằng không.

+Tính chất 6: Nếu A có hai hàng (cột) bằng nhau hay tỉ lệ với nhau thì định thức của nó bằng không.

+Tính chất 7: Nếu nhân mỗi phần tử của hàng (cột) thứ i với cùng một số rồi cộng vào hàng (cột) k thì định thức không đổi.

II.3. Một số phương pháp tính định thức

A. Đối với ma trận chéo A hoặc ma trận tam giác A:

Định thức của ma trận A bằng tích các phần tử nằm trên đường chéo chính.

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1.3.2.5 = 30$$

B. Đối với ma trận A bất kỳ:

1. Nếu n=1: $\boxed{A = (a)}$ thì $\boxed{|A| = a}$

2. Nếu n=2: $\boxed{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$ thì $\boxed{|A| = ad - bc}$

✍ Ví dụ $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 4(-7) - 5(3) = -43$

II.3. Một số phương pháp tính định thức

3. Nếu n=3 (Quy tắc Sarrus)

✍ Xét $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{pmatrix} \begin{matrix} a & b \\ u & v \\ p & q \end{matrix}$

$$\Rightarrow |A| = [(\qquad\qquad\qquad\qquad) - (\qquad\qquad\qquad\qquad)]$$

✍ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 5 & 8 & -6 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = [(-2)8(-4) + (-3)(-6)2 + 4.5.7]$$

$$-[4.8.2 + (-3)5(-4) + (-2)(-6)7]$$

$$\Rightarrow |A| = 240 - 208 = 32$$

II.3. Một số phương pháp tính định thức

4. Nếu n≥ 3 ta tính định thức bằng cách triển khai định thức như sau:

+ triển khai theo hàng thứ i

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \ \forall i = 1, 2, \ldots n.$$

+ triển khai theo cột thứ j

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \ \forall j = 1, 2, \ldots n.$$

Với A_{ij} là phần bù đại số của a_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij}).$$

Trong đó M_{ij} là ma trận được tạo thành từ ma trận A sau khi bỏ đi hàng i và cột j.

II.3. Một số phương pháp tính định thức

- **Ví dụ:** Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 8 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\det(M_{11}) = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\det(M_{12}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\det(M_{13}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 56$$

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 2.(-6) + 4.(-4) + (-3).56 = -196$$

II.3. Một số phương pháp tính định thức

5. Trường hợp định thức phức tạp (n>=3) ta dùng các tính chất của định thức để tính định thức bằng cách sử dụng các phép biến đổi sau để đưa định thức về dạng tam giác:

$$A \xrightarrow{h_i=\lambda h_i (c_i=\lambda c_i), \lambda\neq 0} B \Rightarrow \det(B) = \lambda \det(A),$$

$$A \xrightarrow{h_i \leftrightarrow h_j (c_i \leftrightarrow c_j)} B \Rightarrow \det(B) = -\det(A),$$

$$A \xrightarrow{h_i=h_i+\lambda h_j (c_i=c_i+\lambda c_j)} B \Rightarrow \det(B) = \det(A),$$

II.3. Một số phương pháp tính định thức

- **Ví dụ:** Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 6 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & -2 & 7 \end{vmatrix} \overset{h_2 = h_2 - 2h_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\underset{h_4 = h_4 - 3h_1}{\overset{h_3 = h_3 + h_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \underset{h_4 = h_4 - 2h_2}{\overset{h_3 = h_3 + 8h_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 28 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} =$$

II.3. Một số phương pháp tính định thức

$$\overset{c_3 \leftrightarrow c_4}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -1.(-1).(-7).(-5) = 35.$$

II.3. Một số phương pháp tính định thức

- **Hay**

$$D=\begin{vmatrix}1&2&-1&3\\2&3&1&5\\-1&6&5&-2\\3&4&-2&7\end{vmatrix}\overset{h_2=h_2-2h_1}{=}\begin{vmatrix}1&2&-1&3\\0&-1&3&-1\\-1&6&5&-2\\3&4&-2&7\end{vmatrix}$$

$$\underset{h_4=h_4-3h_1}{\overset{h_3=h_3+h_1}{=}}\begin{vmatrix}1&2&-1&3\\0&-1&3&-1\\0&8&4&1\\0&-2&1&-2\end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix}-1&3&-1\\8&4&1\\-2&1&-2\end{vmatrix}=\dots$$

II.3. Một số phương pháp tính định thức

- **Bài tập:** Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} \overset{h_1 \leftrightarrow h_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{h_4 = h_4 - 4h_1}{\overset{h_3 = h_3 + 2h_1}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \ldots$$

III. Hạng của ma trận

III.1 Định nghĩa hạng của ma trận

Cho A: ma trận cấp m×n

- Ma trận con cấp r của A: Ma trận được tạo thành từ các phần tử nằm ở phần giao giữa r hàng và r cột của ma trận A
- Định thức của ma trận con cấp r của A = định thức con cấp r của A .
- Hạng của ma trận A là cấp cao nhất của các định thức con khác 0 có trong A.

Kí hiệu: rank(A) hay r(A)

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A_{12}^{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_{12}^{24} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A_{123}^{234} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

III. Hạng của ma trận

III.1 Định nghĩa hạng của ma trận

Nhận xét:

i. Ma trận không có hạng bằng 0.

ii. Nếu A là ma trận cấp mxn thì $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$

iii. Nếu ma trận A vuông cấp n có

det(A)$\neq 0$ thì r(A)=n

det(A)=0 thì r(A)<n

III. Hạng của ma trận

III.2 Phương pháp tìm hạng của ma trận

1. ***Ma trận hình thang:*** là ma trận cấp m×n thỏa các điều kiện sau:

a. Các hàng bằng không (nếu có) nằm ở dưới các hàng khác không.

b. Phần tử khác 0 đầu tiên của hàng dưới nằm về bên phải phần tử khác 0 đầu tiên của hàng trên.

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

III. Hạng của ma trận

III.2 Phương pháp tìm hạng của ma trận

2. *Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận:*

i.Nhân một số khác không với một hàng (cột) của ma trận.

$$A \xrightarrow{h_i = \lambda h_i} B$$

ii. Đổi chỗ hai hàng (cột) của ma trận. Ký hiệu:

$$A \xrightarrow{h_i \leftrightarrow h_j} B$$

iii. Cộng vào một hàng (cột) với một hàng (cột) khác đã nhân thêm một số khác không. Ký hiệu:

$$A \xrightarrow{h_i = h_i + \lambda h_j} B$$

Lưu ý: Hạng của ma trận không thay đổi qua các phép biến đổi sơ cấp

Nếu A là một ma trận hình thang thì r(A) bằng số hàng khác 0 của A

III. Hạng của ma trận

III.2 Phương pháp tìm hạng của ma trận

3. Qui tắc thực hành tìm hạng của ma trận

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\text{biến đổi sơ cấp}} \mathbf{B} \text{ (có dạng hình thang)}$$

Khi đó:

r(A) = r(B)(số dòng khác không của B)

III. Hạng của ma trận

III.2 Phương pháp tìm hạng của ma trận

Ví dụ:

VD1:Tìm hạng ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 3$$

III. Hạng của ma trận

III.2 Phương pháp tìm hạng của ma trận

- **Ví dụ:** Tìm hạng ma trận

-5=-1+(-2)2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{h_3 = h_3 + 4h_1 \\ h_4 = h_4 + h_1}]{h_2 = h_2 - 2h_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 9 & 10 & -1 \\ 0 & 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Ta làm cho phần dưới đường chéo chính = 0.

Ta lặp lại như trên cho phần ma trận này

?=1+(-2)1=-1

III. Hạng của ma trận

III.2 Phương pháp tìm hạng của ma trận

VD: Tìm hạng ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{h_3+4h_1 \\ h_4+1h_1}]{h_2+(-2)h_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 9 & 10 & -1 \\ 0 & 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_4+8h_2]{h_3+9h_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -35 & 26 \\ 0 & 0 & -35 & 26 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_4+(-1)h_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -35 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

III. Hạng của ma trận

III.2 Phương pháp tìm hạng của ma trận

- VD:Tìm hạng của ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{h_3 = h_3 - 4h_1 \\ h_4 = h_4 + 3h_1}]{h_2 = h_2 - 2h_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

III. Hạng của ma trận

III.2 Phương pháp tìm hạng của ma trận

VD3: Biện luận theo m hạng của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$m = 0 \Rightarrow \ \mathrm{r(A)} = 2$$

$$m \neq 0 \Rightarrow \ \mathrm{r(A)} = 3$$

IV. Ma trận nghịch đảo
IV.1. Định nghĩa ma trận nghịch đảo

- Cho A là ma trận vuông cấp n trên R. A là ma trận khả nghịch nếu tồn tại một ma trận B vuông cấp n trên R sao cho

$$AB = BA = I_n$$

B: **ma trận nghịch đảo** của A, kí hiệu A^{-1}

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

*Tập hợp các ma trận vuông cấp n trên R khả nghịch kí hiệu là $GL_n(\mathbb{R})$

Nhận xét:

+ Ma trận đơn vị I_n khả nghịch

+ Ma trận 0_n không khả nghịch

IV. Ma trận nghịch đảo
IV.2. Tính chất của ma trận nghịch đảo

1.Tích của các ma trận khả nghịch là ma trận khả nghịch. Nghĩa là:

$$A, B \in GL_n(\mathbb{R}) \ thì \ AB \in GL_n(\mathbb{R})$$

và $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}.$

2. $$(A^{-1})^{-1} = A$$

3. $$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

IV.3. Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo
IV.3.1 Phương pháp định thức
1. Ma trận phụ hợp

$A = (a_{ij})_n$ Ma trận vuông cấp n trên R

P_A : Ma trận phụ hợp của A

$$P_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

trong đó A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij}, $(i, j = \overline{1, n})$ của ma trận A.

IV.3. Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo
IV.3.1 Phương pháp định thức

- **Ví dụ:** Tìm ma trận phụ hợp của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$A_{11} = 28 \quad A_{21} = -29 \quad A_{31} = -12$

$A_{12} = 14 \quad A_{22} = -5 \quad A_{32} = -6$

$A_{13} = -6 \quad A_{23} = 13 \quad A_{33} = 8$

$$P_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

IV.3. Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo
IV.3.1 Phương pháp định thức

2. Định lý: Một ma trận vuông trên R là khả nghịch khi và chỉ khi định thức của nó khác không. Khi đó

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} P_A.}$$

⇒ với phương pháp này để tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A , ta phải đi tìm định thức của A:

- Nếu detA ≠0, $A^{-1} = \frac{1}{detA} P_A$
- Nếu det A=0, A không khả nghịch

IV.3. Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo
IV.3.1 Phương pháp định thức

- **Ví dụ:** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \det(A) = 2 \quad P_A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

IV.3. Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo
IV.3.1 Phương pháp định thức

- **Bài tập:** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 & 15 & -2 \\ -4 & -12 & 3 \\ 5 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \det(A) &= ? \\ P_A &= ? \end{aligned}\right\} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} P_A$$

IV.3. Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo
IV.3.1 Phương pháp định thức

- **Bài tập:** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{Đáp số: } A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Chú ý: Đối với ma trận vuông cấp 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow P_A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

IV.3. Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo
IV.3.2 Phương pháp Gauss - Jordan

$$(A|I) \xrightarrow{\text{bđsc}} (I|A^{-1})$$

Ví dụ: Tìm ma trận nghịch đảo của

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

IV.3. Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo
IV.3.2 Phương pháp Gauss - Jordan

Ví dụ:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{h_2 = h_2 - h_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{h_3 = h_3 - h_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{h_3 = -h_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$$

IV.3. Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo
IV.3.2 Phương pháp Gauss - Jordan

Ví dụ:

$$\xrightarrow{h_3=-h_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&1&-1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[h_2=h_2-2h_3]{h_1=h_1-h_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&2&-1&1\\0&1&0&1&-1&2\\0&0&1&-1&1&-1\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{h_1=h_1-h_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&-1\\0&1&0&1&-1&2\\0&0&1&-1&1&-1\end{array}\right). \quad \text{Vậy} \quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}.$$

IV.3. Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

✍ Lưu ý

- ☞ Tìm $\boxed{A^{-1}}$ (bằng pp GAUSS-JORDAN)

  : dùng cho các ma trận <u>không có tham số</u>

- ☞ Tìm $\boxed{A^{-1}}$ (bằng pp định thức)

  : dùng cho các ma trận <u>có tham số</u> hay có cấp n nhỏ

IV. Ma trận nghịch đảo
IV.4. Ứng dụng

Ma trận nghịch đảo được ứng dụng trong việc giải phương trình ma trận

1. Giải phương trình AX=B

Ta có $A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B$

$$\Rightarrow \boxed{X = A^{-1}B}$$ (nghiệm duy nhất)

Tương tự nếu pt có dạng XA=B ta giải như sau:

$$XA = B \Leftrightarrow XAA^{-1} = BA^{-1}$$

$$\Leftrightarrow XI = BA^{-1}$$

$$\Leftrightarrow X = BA^{-1}$$

IV. Ma trận nghịch đảo
IV.4. Ứng dụng

Ví dụ 1

giải pt $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Ta có $A^{-1} = \dfrac{1}{44}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B = \frac{1}{44}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{44}\begin{pmatrix} -24 & -27 & -30 \\ -4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

IV. Ma trận nghịch đảo
IV.4. Ứng dụng

Ví dụ 2 giải pt $X\begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 22 & -75 & -12 \\ -9 & 31 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Ta có $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 15 & 36 \end{pmatrix}$$

IV. Ma trận nghịch đảo
IV.4. Ứng dụng
2.Giải phương trình AXC=B

Ta có $$A^{-1}(AXC)C^{-1} = A^{-1}BC^{-1}$$
$$\Rightarrow (A^{-1}A)X(CC^{-1}) = A^{-1}BC^{-1}$$
$$\Rightarrow \boxed{X = A^{-1}BC^{-1}}$$ (nghiệm duy nhất)

** Nếu pt có dạng AX+kB=C ta giải như sau:*

$$AX + kB = C \Leftrightarrow AX = (C - kB)$$
$$\Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(C - kB)$$
$$\Leftrightarrow X = A^{-1}(C - kB)$$

2.Giải phương trình AXC=B

Ví dụ giải pt $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

Ta có

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 22 & -75 & -12 \\ -9 & 31 & 5 \end{pmatrix} \qquad \& C = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}BC^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 22 & -75 & -12 \\ -9 & 31 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 22 & -75 & -12 \\ -9 & 31 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -14 & -15 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} = \cdots$$

IV. Ma trận nghịch đảo
IV.4. Ứng dụng

2.Giải phương trình AXC=B

- **Ví dụ:** Tìm ma trận X thỏa mãn:

$$X\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Phương trình có dạng

$$XA + 2B = C$$

$$\Leftrightarrow X = (C - 2B)A^{-1}$$

IV. Ma trận nghịch đảo
IV.4. Ứng dụng

2.Giải phương trình AXC=B

- Ta có $$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}; C - 2B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Với $X = (C - 2B)A^{-1}$ nên

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}(-\frac{1}{2})\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -26 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 13 & -\frac{17}{2} \end{bmatrix}$$

IV. Ma trận nghịch đảo
IV.4. Ứng dụng

3.Giải phương trình tổng quát $\boxed{\varphi(X) = O}$

- Xác định kích thước (pxq) của X để biết số ẩn cần tìm là (p.q)
- Viết hệ $\boxed{\varphi(X) = O}$ thành 1 hệ pt theo (p.q) ẩn rồi giải để tìm <u>tất cả các ẩn</u> và chỉ ra X
- Ví dụ 1 giải

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

2 dòng | 2 cột

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix}$$

☞ Thế X vào pt (*) rồi giải tiếp ...

IV. Ma trận nghịch đảo
IV.4. Ứng dụng

3.Giải phương trình tổng quát $\boxed{\varphi(X) = O}$

✍ Ví dụ 2 giải $X^2 = I_2$ (*)

☞ Đặt $X = \begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix}$, lúc này

$$(*) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \cdots$$