Chương 1. HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

Bài 1. Khái niệm cơ bản

Bài 2. Đạo hàm riêng – Vi phân

Bài 3. Cực trị của hàm hai biến số

Chương 1. HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

Bài 2. Đạo hàm – Vi phân

2.1. Đạo hàm riêng

2.2. Vi phân

2.3. Đạo hàm của hàm số hợp

2.4. Đạo hàm của hàm số ẩn

2.5. Đạo hàm theo hướng

2.1. Đạo hàm riêng

2.1.1. Đạo hàm riêng cấp 1

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trên miền mở $D \subset \mathbb{R}^2$ chứa điểm $M_0(x_0, y_0)$.

Cố định y_0, nếu hàm số $f(x, y_0)$ có đạo hàm tại x_0 thì ta gọi đạo hàm đó là ***đạo hàm riêng theo biến*** x của hàm số $f(x, y)$ tại (x_0, y_0), ký hiệu là:

$$f'_x(x_0, y_0) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ hay } f_x(x_0, y_0).$$

Vậy

$$\boxed{f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}}$$

Tương tự, ***đạo hàm riêng theo biến*** y tại (x_0, y_0) là

$$\boxed{f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}}$$

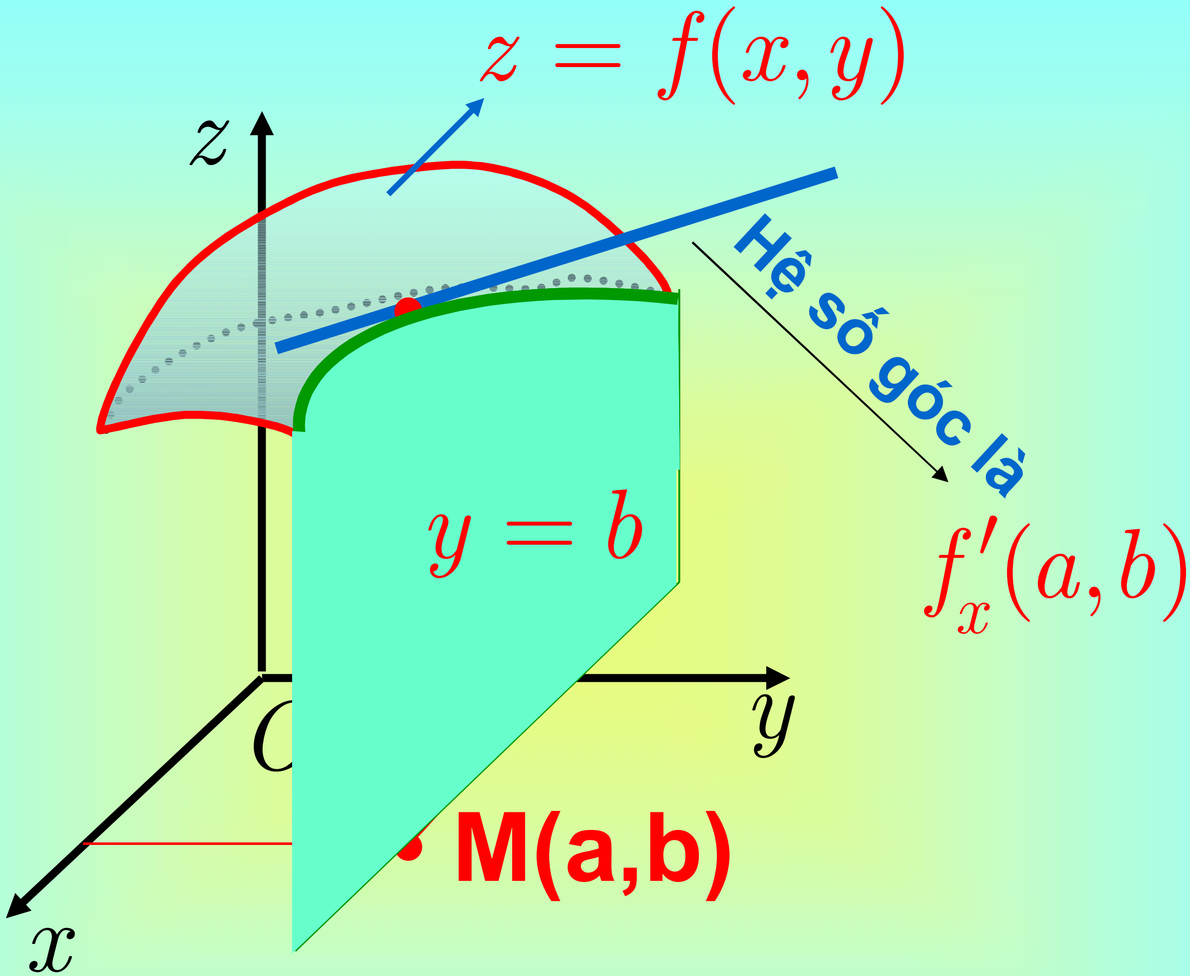
Chú ý

- Nếu $f(x)$ là hàm số một biến x thì

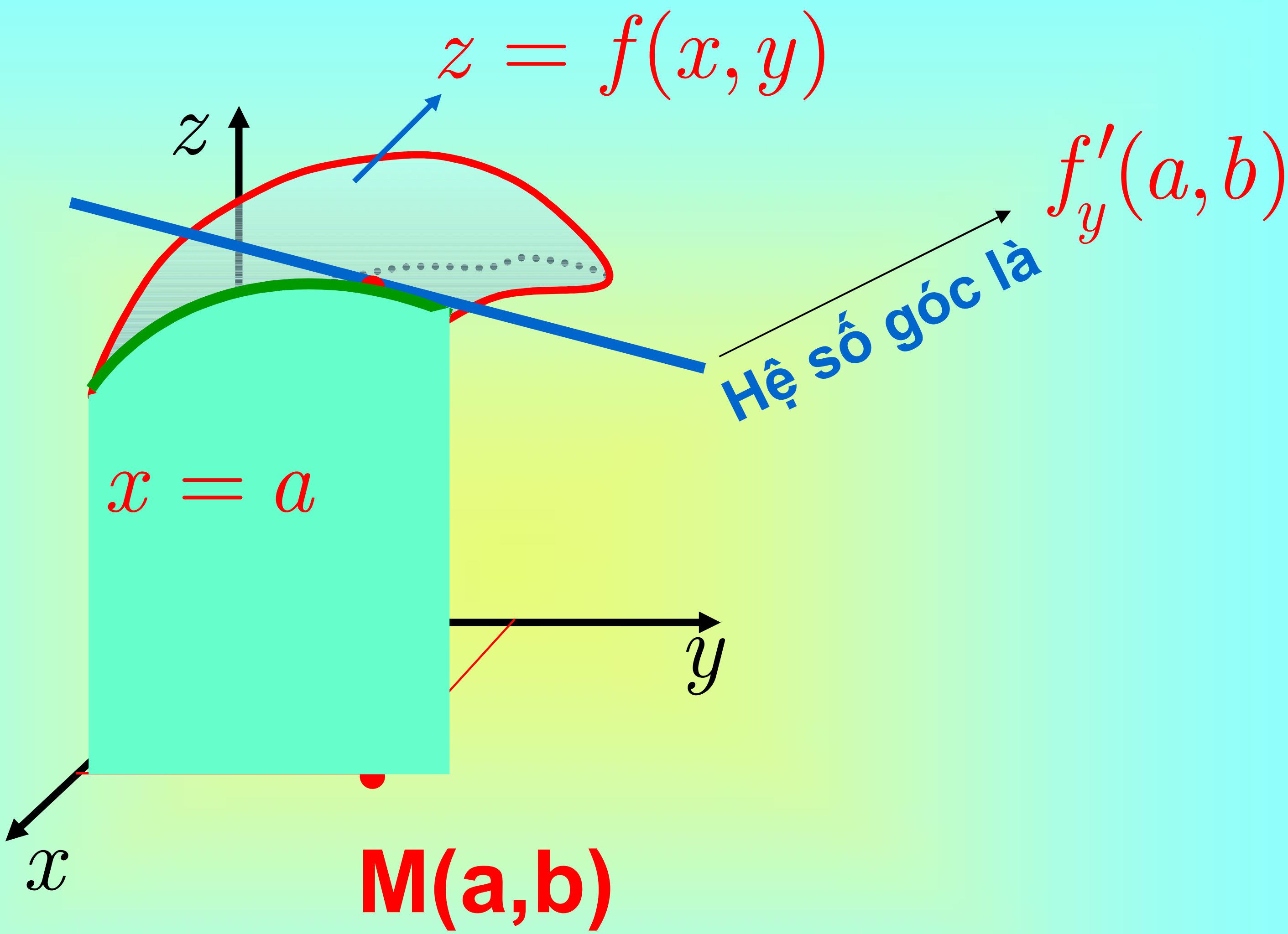
$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x).$$

- Hàm số nhiều hơn hai biến có định nghĩa tương tự.

Ý nghĩa



Ý nghĩa



VD 1. Tính các đạo hàm riêng của hàm số

$$f(x,y) = x^4 - 3x^3y^2 + 2y^3 - 3xy \text{ tại } (-1;\, 2).$$

Giải

$$f'_x(x,y) = 4x^3 - 9x^2y^2 - 3y$$

$$\Rightarrow f'_x(-1,\, 2) = -46.$$

$$f'_y(x,y) = -6x^3y + 6y^2 - 3x \Rightarrow f'_y(-1,\, 2) = 39.$$

VD 2. Tính các đạo hàm riêng của hàm số

$$z = \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Giải. Ta có $z'_x = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1} \right)'_x . \dfrac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + 1}$

$$= \frac{2xy^2}{(x^2 + 1)(x^2 + y^2 + 1)},$$

$$z'_y = -\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Cách khác

Ta có $z = \ln(x^2+1) - \ln(x^2+y^2+1)$.

Suy ra
$$z'_x = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+y^2+1}$$
$$= \frac{2xy^2}{(x^2+1)(x^2+y^2+1)}.$$
$$z'_y = -\frac{2y}{x^2+y^2+1}.$$

VD 3. Tính các đạo hàm riêng của hàm số

$$f(x,y) = \ln\frac{x-y}{x+y} \text{ tại } (2;-1).$$

Giải

$$f'_x(x,y) = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)'_x . \frac{x+y}{x-y} = \frac{2y}{x^2-y^2}$$

$$\Rightarrow f'_x(2,-1) = -\frac{2}{3}.$$

$$f'_y(2,-1) = -\frac{1}{2-(-1)} - \frac{1}{2-1} = -\frac{4}{3}.$$

VD 4. Cho hàm số $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Tính $(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + (f'_z)^2$.

Giải. Ta có

$$f'_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Rightarrow (f'_x)^2 = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Tương tự

$$(f'_y)^2 = \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2}, (f'_z)^2 = \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Vậy $(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + (f'_z)^2 = 1$.

2.1.2. Đạo hàm riêng cấp cao

- Các đạo hàm riêng (nếu có) của các hàm số $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ được gọi là các ***đạo hàm riêng cấp hai*** của hàm số $f(x,y)$.

Ký hiệu:

$$f''_{x^2} = \left(f'_x\right)'_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f''_{y^2} = \left(f'_y\right)'_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f''_{xy} = \left(f'_x\right)'_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f''_{yx} = \left(f'_y\right)'_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

- Hàm số nhiều hơn 2 biến và đạo hàm riêng cấp cao hơn 2 có định nghĩa tương tự.

VD. $f^{(5)}_{x^2y^3}(x,y) = ((((f'_x(x,y))'_x)'_y)'_y)'_y = (f''_{x^2}(x,y))'''_{y^3}$;

$$f^{(6)}_{x^2yxz^2}(x,y,z) = (((f''_{x^2}(x,y,z))'_y)'_x)''_{z^2}.$$

Sơ đồ

$$
\begin{tikzcd}
 & & f''_{x^2} \\
 & f'_x \arrow[ur] \arrow[r] & f''_{xy} \\
f(x,y) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & f'_y \arrow[r] \arrow[dr] & f''_{y^2} \\
 & & f''_{yx}
\end{tikzcd}
$$

VD 5. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số

$$f(x,y) = x^3e^y + x^2y^3 - y^4 \text{ tại } (-1;\ 1).$$

Giải. Ta có $\begin{cases} f'_x = 3x^2e^y + 2xy^3 \\ f'_y = x^3e^y + 3x^2y^2 - 4y^3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''_{x^2} = 6xe^y + 2y^3 \\ f''_{xy} = 3x^2e^y + 6xy^2 \\ f''_{yx} = 3x^2e^y + 6xy^2 \\ f''_{y^2} = x^3e^y + 6x^2y - 12y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{x^2}(-1, 1) = -6e + 2 \\ f''_{xy}(-1, 1) = f''_{yx}(-1, 1) = 3e - 6 \\ f''_{y^2}(-1, 1) = -e - 6. \end{cases}$$

VD 6. Cho hàm số $f(x,y) = x^5 + y^4 - x^4y^5$.

Giá trị của đạo hàm riêng cấp năm $f^{(5)}_{x^3y^2}(1,-1)$ là:

A. $f^{(5)}_{x^3y^2}(1,-1) = 480$;

B. $f^{(5)}_{x^3y^2}(1,-1) = -480$;

C. $f^{(5)}_{x^3y^2}(1,-1) = 120$;

D. $f^{(5)}_{x^3y^2}(1,-1) = -120$.

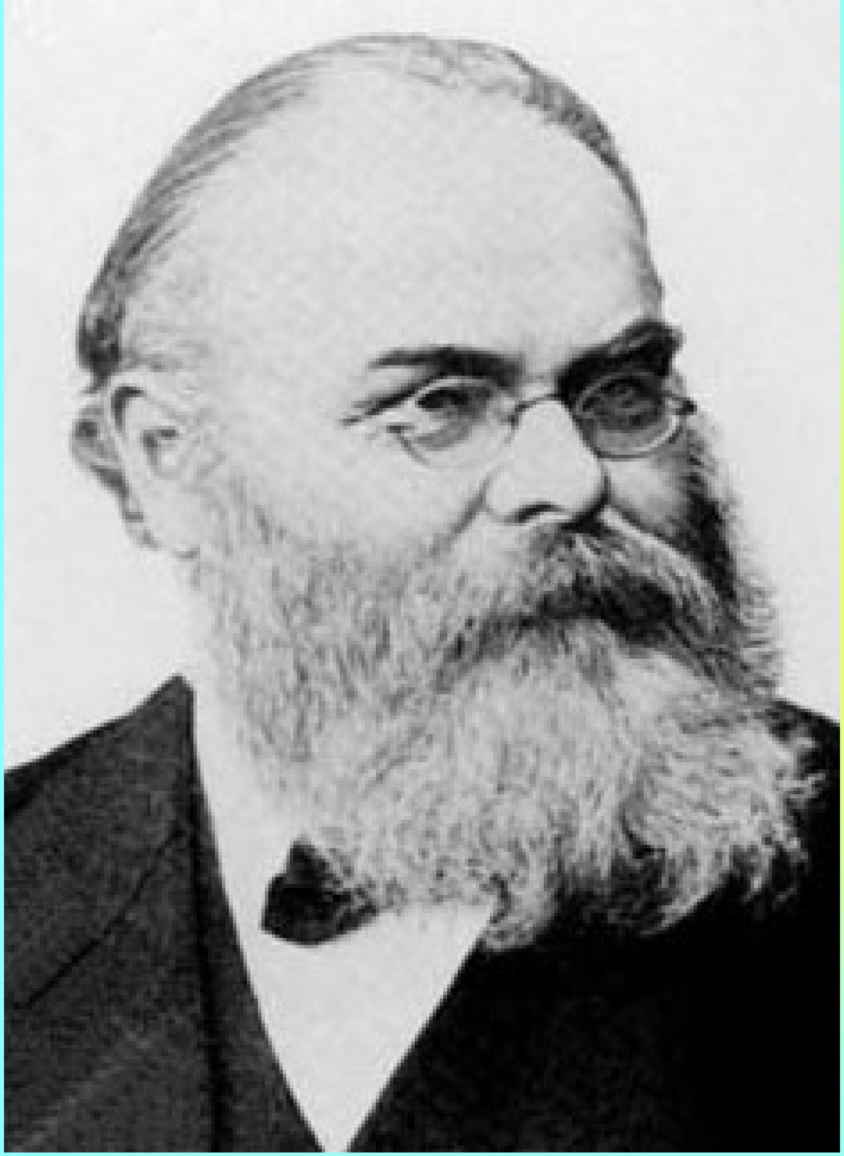
Giải. $f'_x = 5x^4 - 4x^3y^5 \Rightarrow f''_{x^2} = 20x^3 - 12x^2y^5$

$\Rightarrow f'''_{x^3} = 60x^2 - 24xy^5 \quad \Rightarrow f^{(4)}_{x^3y} = -120xy^4$

$\Rightarrow f^{(5)}_{x^3y^2} = -480xy^3 \quad \Rightarrow f^{(5)}_{x^3y^2}(1,-1) = 480 \Rightarrow A.$

- **Định lý Schwarz**

Nếu hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng f''_{xy} và f''_{yx} liên tục trong miền mở $D \subset \mathbb{R}^2$ thì $f''_{xy} = f''_{yx}$.



Hermann Amandus Schwarz
(1843 – 1921)

VD 7. Đạo hàm riêng $z^{(m+n)}_{x^{m-2}y^n x^2}$ $(m \geq 2)$ của hàm số

$$z = e^{2x-y} \text{ là:}$$

A. $(-1)^n 2^{m+n} e^{2x-y}$; B. $(-1)^m 2^{m+n} e^{2x-y}$;

C. $(-1)^m 2^m e^{2x-y}$; D. $(-1)^n 2^m e^{2x-y}$.

Giải. Ta có $z^{(m+n)}_{x^{m-2}y^n x^2} = z^{(m+n)}_{x^m y^n}$.

$$z'_x = 2e^{2x-y} \Rightarrow z''_{x^2} = 2^2 e^{2x-y}$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow z^{(m)}_{x^m} = 2^m e^{2x-y}$$

$$\Rightarrow z^{(m+1)}_{x^m y} = -2^m e^{2x-y} \Rightarrow z^{(m+2)}_{x^m y^2} = 2^m e^{2x-y}$$

$$\Rightarrow z^{(m+n)}_{x^m y^n} = (-1)^n 2^m e^{2x-y} \Rightarrow D.$$

Bài tập. Cho $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ thỏa

$$\begin{cases} y = u^2 + xv \\ x = v^2 + yu. \end{cases}$$

Tính $u'_x(1;\,1)$ và $v'_y(1;\,1)$ biết $u(1;\,1) = 0$, $v(1;\,1) = 1$.

Hướng dẫn. Đạo hàm từng phương trình theo x:

$$\begin{cases} 0 = 2u.u'_x + v + xv'_x \\ 1 = 2v.v'_x + yu'_x. \end{cases}$$

Thay $x = 1$, $y = 1$, $u = 0$, $v = 1$ vào hệ $\Rightarrow u'_x(1;\,1)$.

2.2. VI PHÂN

2.2.1. Vi phân cấp 1

a) Số gia của hàm số

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trong một lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0)$.

Cho x một số gia Δx và y một số gia Δy, khi đó hàm $f(x,y)$ có tương ứng số gia

$$\boxed{\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}$$

b) Định nghĩa

Giả sử hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng $f'_x(x_0,y_0)$ và $f'_y(x_0,y_0)$ liên tục, khi đó ta có:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y)-f(x_0,\, y_0+\Delta y)}{\Delta x}=f'_x(x_0,y_0).$$

Nghĩa là, khi $\Delta x\to 0$ thì tồn tại VCB ε_1 sao cho

$$f(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y)-f(x_0,\, y_0+\Delta y)=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+\varepsilon_1\Delta x.$$

Tương tự, khi $\Delta y\to 0$ thì tồn tại VCB ε_2 sao cho

$$f(x_0,\, y_0+\Delta y)-f(x_0,\, y_0)=f'_y(x_0,y_0)\Delta y+\varepsilon_2\Delta y.$$

Suy ra, khi $\Delta x \to 0$ và $\Delta y \to 0$ thì tồn tại hai VCB ε_1, ε_2 sao cho

$$\Delta f(x_0, y_0) = [f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0 + \Delta y)]$$

$$+[f(x_0,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]$$

$$= f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y\ (*).$$

Bài 2. Đạo hàm – Vi phân

Nếu khi $\Delta x \to 0$ và $\Delta y \to 0$ mà $\Delta f(x_0, y_0)$ có thể viết được dưới dạng $(*)$ thì ta nói hàm số $f(x, y)$ ***khả vi*** tại điểm $M_0(x_0, y_0)$.

Đại lượng $f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$, *ký hiệu* $df(x_0, y_0)$, *được gọi là* ***vi phân*** *của hàm số* $f(x, y)$ *tại điểm* $M_0(x_0, y_0)$.

Nhận xét

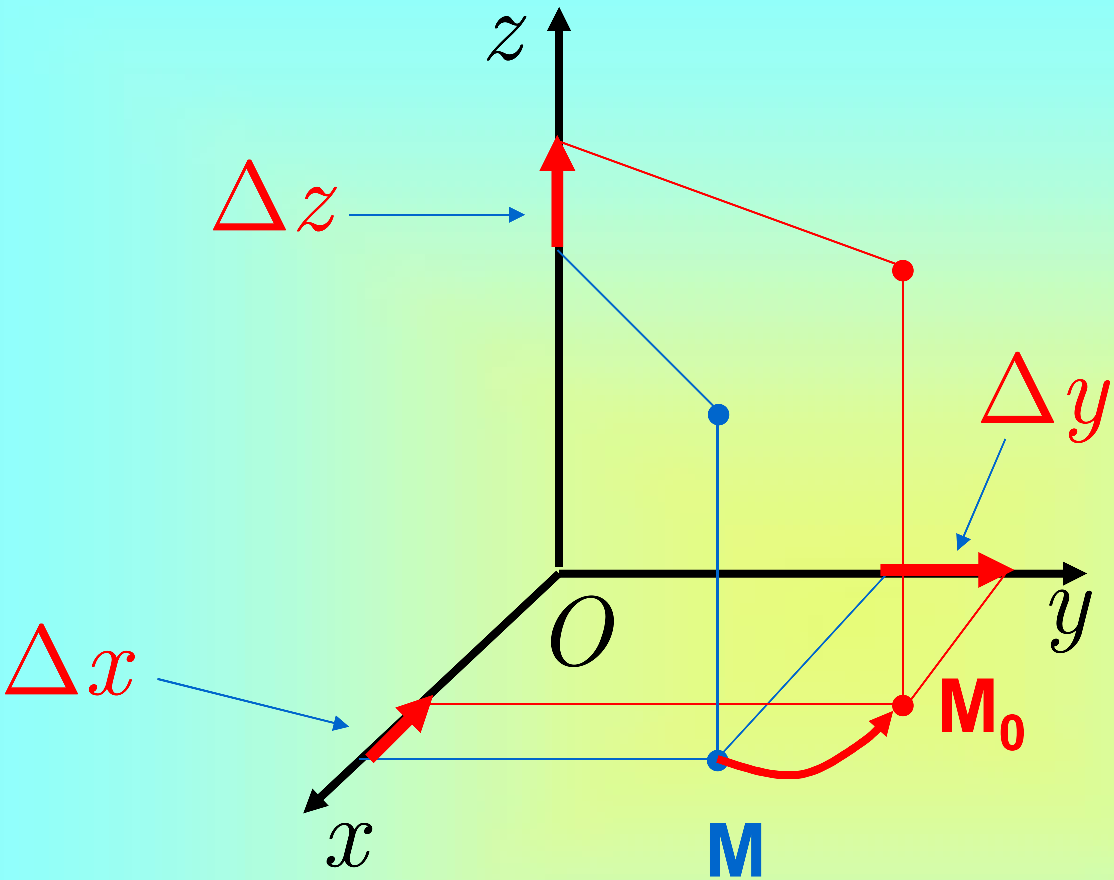
Xét hàm $f(x,y) = x$, ta có:

$$df(x,y) = (x)'_x.\Delta x + (x)'_y.\Delta y \Rightarrow dx = \Delta x.$$

Tương tự, $dy = \Delta y$.

Vậy, tổng quát ta có

$$\boxed{df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy}$$



z
Δz
Δy
y
O
Δx
M0
x
M

- Vi phân của hàm nhiều hơn hai biến số có định nghĩa tương tự, chẳng hạn

$$\boxed{df(x,y,z) = f'_x(x,y,z)dx + f'_y(x,y,z)dy + f'_z(x,y,z)dz}$$

VD 8. Tính $dz(1,\pi)$ của hàm số $z = e^{y-x^2}\cos(x^2y)$.

Giải. $z'_x(x,y) = -2xe^{y-x^2}[\cos(x^2y) + y\sin(x^2y)]$

$$\Rightarrow z'_x(1,\pi) = 2e^{\pi-1},$$

$$z'_y(x,y) = e^{y-x^2}[\cos(x^2y) - x^2\sin(x^2y)]$$

$$\Rightarrow z'_y(1,\pi) = -e^{\pi-1}.$$

Vậy $dz = e^{\pi-1}(2dx - dy)$.

VD 9. Cho hàm số $f(x,y,z) = x^2y^5z^3 - e^{x-3y}$.

Tính $df(2,-1,-1)$.

Giải. $\begin{cases} f'_x(x,y,z) = 2xy^5z^3 - e^{x-3y} \\ f'_y(x,y,z) = 5x^2y^4z^3 + 3e^{x-3y} \\ f'_z(x,y,z) = 3x^2y^5z^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x(2,-1,-1) = 4 - e^5 \\ f'_y(2,-1,-1) = -20 + 3e^5 \\ f'_z(2,-1,-1) = -12 \end{cases}.$$

Vậy

$$df(2,-1,-1) = (4 - e^5)dx + (3e^5 - 20)dy - 12dz.$$

2.2.2. VI PHÂN CẤP CAO

a) Vi phân cấp 2

Vi phân của hàm $df(x,y)$ được gọi là ***vi phân cấp 2*** *của hàm số $f(x,y)$.*

Ký hiệu và công thức:

$$\boxed{d^2f = d(df) = f''_{x^2}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{y^2}dy^2}$$

Chú ý

Nếu x, y là các biến không độc lập (biến trung gian) $x = x(\varphi, \psi),\ y = y(\varphi, \psi)$ thì công thức trên không còn đúng nữa. Sau đây ta chỉ xét trường hợp x, y độc lập.

VD 10. Cho hàm số $f(x,y) = x^2y^3 + xy^2 - 3x^3y^5$.

Tính vi phân cấp hai $d^2f(2,-1)$.

Giải. Ta có

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2xy^3 + y^2 - 9x^2y^5 \\ f'_y(x,y) = 3x^2y^2 + 2xy - 15x^3y^4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''_{x^2}(x,y) = 2y^3 - 18xy^5 \\ f''_{xy}(x,y) = 6xy^2 + 2y - 45x^2y^4 \\ f''_{y^2}(x,y) = 6x^2y + 2x - 60x^3y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{x^2}(2,-1) = 34 \\ f''_{xy}(2,-1) = -170 \\ f''_{y^2}(2,-1) = 460. \end{cases}$$

Vậy $d^2f(2,-1) = 34dx^2 - 340dxdy + 460dy^2$.

VD 11. Tính vi phân cấp 2 của hàm $z = \sin(xy^2)$.

Giải. Ta có $\begin{cases} z'_x(x,y) = y^2\cos(xy^2) \\ z'_y(x,y) = 2xy\cos(xy^2) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} z''_{x^2}(x,y) = -y^4\sin(xy^2) \\ z''_{xy}(x,y) = 2y\cos(xy^2) - 2xy^3\sin(xy^2) \\ z''_{y^2}(x,y) = 2x\cos(xy^2) - 4x^2y^2\sin(xy^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow d^2z(x,y) = \ldots$$

b) Vi phân cấp *n*

$$\boxed{\begin{aligned} d^n f &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n)}_{x^k y^{n-k}} dx^k dy^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n)}_{x^{n-k} y^k} dx^{n-k} dy^k \end{aligned}}$$

trong đó:

$$f^{(n)}_{x^n y^0} = f^{(n)}_{x^n}, \qquad f^{(n)}_{x^0 y^n} = f^{(n)}_{y^n},$$

$$dx^n dy^0 = dx^n, \quad dx^0 dy^n = dy^n.$$

Đặc biệt

$$\boxed{d^3f = f'''_{x^3}dx^3 + 3f'''_{x^2y}dx^2dy + 3f'''_{xy^2}dxdy^2 + f'''_{y^3}dy^3}$$

VD 12. Tính vi phân cấp 3 của hàm $f(x,y) = x^3y^2$.

Giải. Ta có:

$$f'_x = 3x^2y^2 \Rightarrow f''_{x^2} = 6xy^2 \Rightarrow f'''_{x^3} = 6y^2,$$

$$f'_x = 3x^2y^2 \Rightarrow f''_{x^2} = 6xy^2 \Rightarrow f'''_{x^2y} = 12xy,$$

$$f'_x = 3x^2y^2 \Rightarrow f''_{xy} = 6x^2y \Rightarrow f'''_{xy^2} = 6x^2,$$

$$f'''_{y^3} = 0.$$

Vậy $d^3f = 6y^2dx^3 + 36xydx^2dy + 18x^2dxdy^2$.

VD 13. Tính vi phân d^3z của hàm $z = e^{2x}\cos 3y$.

Giải. Ta có:

$$d^3z = z'''_{x^3}dx^3 + 3z'''_{x^2y}dx^2dy + 3z'''_{xy^2}dxdy^2 + z'''_{y^3}dy^3$$

$$= 8e^{2x}\cos 3y dx^3 - 36e^{2x}\sin 3y dx^2dy$$

$$-54e^{2x}\cos 3y dxdy^2 + 27e^{2x}\sin 3y dy^3.$$

VD 14. Tính vi phân $d^{10}f$ của hàm $f(x,y) = x^3e^{2y}$.

Đáp số.

$$d^{10}f = 2^{10}x^3e^{2y}dy^{10} + 3.10.2^9x^2e^{2y}dxdy^9$$
$$+6.45.2^8xe^{2y}dx^2dy^8 + 6.240.2^7e^{2y}dx^3dy^7.$$

2.3. Đạo hàm của hàm số hợp

2.3.1. Hàm hợp với một biến độc lập

Cho $f(x,y)$ là hàm khả vi đối với x,y và x,y là những hàm khả vi đối với biến độc lập t.

Khi đó, hàm hợp của biến t là $\omega(t) = f(x(t), y(t))$ khả vi và

$$\boxed{\omega'(t) = \frac{d}{dt}\omega(t) = f'_x(x,y).x'(t) + f'_y(x,y).y'(t)}$$

Đặc biệt, nếu $\omega(x) = f(x, y(x))$ thì

$$\boxed{\omega'(x) = \frac{d}{dx}\omega(x) = f'_x(x,y) + f'_y(x,y).y'(x)}$$

VD 15. Tính $\omega'(t)$, biết $\omega(t) = f(x(t), y(t))$ trong đó

$$f(x, y) = x^2 y \text{ và } x = 3t^2 - t,\ y = \sin t.$$

Giải. $\omega'(t) = (x^2 y)'_x.(3t^2 - t)' + (x^2 y)'_y.(\sin t)'$

$$= 2xy(6t - 1) + x^2 \cos t$$

$$= 2(3t^2 - t)\sin t.(6t - 1) + (3t^2 - t)^2 \cos t.$$

Ta có thể tính trực tiếp như sau:

$$\omega(t) = (3t^2 - t)^2 \sin t$$

$$\Rightarrow \omega'(t) = 2(3t^2 - t)(6t - 1)\sin t + (3t^2 - t)^2 \cos t.$$

VD 16. Tính $\omega'(x)$, biết $\omega(x) = f(x, y(x))$ trong đó

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2) \text{ và } y = \sin^2 x.$$

Giải

$$\omega'(x) = [\ln(x^2 + y^2)]'_x + [\ln(x^2 + y^2)]'_y.(\sin^2 x)'$$

$$= \frac{2x}{x^2 + y^2} + \frac{2y\sin 2x}{x^2 + y^2} = \frac{2x + 4\cos x \sin^3 x}{x^2 + \sin^4 x}.$$

Ta có thể tính trực tiếp như sau:

$$\omega'(x) = [\ln(x^2 + \sin^4 x)]' = \frac{2x + 4\cos x \sin^3 x}{x^2 + \sin^4 x}.$$

2.3.2. Đạo hàm riêng của hàm hợp với hai biến độc lập

Cho $f(x, y)$ là hàm khả vi đối với x, y và x, y là những hàm khả vi đối với hai biến độc lập φ, ψ.

Khi đó, hàm $\omega(\varphi, \psi) = f(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))$ khả vi và

$$\boxed{\begin{aligned} \omega'_{\varphi}(\varphi, \psi) &= f'_x(x, y).x'_{\varphi}(\varphi, \psi) + f'_y(x, y).y'_{\varphi}(\varphi, \psi) \\ \omega'_{\psi}(\varphi, \psi) &= f'_x(x, y).x'_{\psi}(\varphi, \psi) + f'_y(x, y).y'_{\psi}(\varphi, \psi) \end{aligned}}$$

Tương tự, $U(r,s) = f(x(r,s), y(r,s), z(r,s))$ thì

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial r}\\ \frac{\partial U}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial s}\end{aligned}}$$

VD 17. Cho $\omega(\varphi, \psi) = f(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))$ trong đó $f(x, y) = x^2 y$, $x = \varphi^2 e^{\psi}$, $y = \varphi\psi^3$. Tính $\omega'_{\varphi}(\varphi, \psi)$.

Giải. $\omega'_{\varphi}(\varphi, \psi) = (x^2 y)'_x.(\varphi^2 e^{\psi})'_{\varphi} + (x^2 y)'_y.(\varphi\psi^3)'_{\varphi}$

$$= 2xy.2\varphi e^{\psi} + x^2.\psi^3 = 5\varphi^4\psi^3 e^{2\psi}.$$

Cách khác. $\omega(\varphi, \psi) = (\varphi^2 e^{\psi})^2 \varphi\psi^3 = \varphi^5\psi^3 e^{2\psi}$

$$\Rightarrow \omega'_{\varphi}(\varphi, \psi) = 5\varphi^4\psi^3 e^{2\psi}.$$

Bài tập. Tính $\dfrac{\partial U}{\partial r}, \dfrac{\partial U}{\partial s}$ với $U = z\sin\dfrac{y}{x}$ trong đó

$$x = 3r^2 + 2s,\ y = 4 - 2s^3,\ z = 2r^2 - 3s^2.$$

2.4. Đạo hàm của hàm số ẩn

2.4.1. Đạo hàm của hàm số ẩn một biến

Hàm $y(x)$ xác định trên $D_y \subset \mathbb{R}$ thỏa phương trình $F(x, y(x)) = 0, \forall x \in D \subset D_y$ $(*)$ được gọi là ***hàm số ẩn*** một biến xác định bởi $(*)$.

Giả sử các hàm số ở trên đều khả vi, đạo hàm 2 vế của $(*)$ theo biến x ta được $F'_x + F'_y . y'(x) = 0$.

Giả sử $F'_y \neq 0$, vậy ta có:

$$\boxed{y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}}$$

VD 18. Tính hệ số góc tiếp tuyến tại điểm $M(a;\,3)$ $(a > 5)$ nằm trên đường conic có phương trình

$$(C): 8x^2 + 15y^2 - 24xy - 16x + 30y - 1 = 0.$$

Giải. $M \in (C) \Rightarrow a = 7 \Rightarrow M(7;\,3).$

$$F = 8x^2 + 15y^2 - 24xy - 16x + 30y - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F'_x = 16x - 24y - 16 \\ F'_y = 30y - 24x + 30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y'(x) = -\frac{16x - 24y - 16}{30y - 24x + 30} \Rightarrow y'(7) = \frac{1}{2}.$$

Cách khác

Đạo hàm theo biến x, ta được:

$$16x + 30yy' - 24(y + xy') - 16 + 30y' = 0.$$

Thay $x = 7$ và $y = 3$ ta có kết quả.

2.4.2. Đạo hàm của hàm số ẩn hai biến

Hàm $z(x,y)$ xác định trên $D_z \subset \mathbb{R}^2$ thỏa phg trình $F(x,y,z(x,y)) = 0,\ \forall (x,y) \in D \subset D_z\ (*)$ được gọi là ***hàm số ẩn*** hai biến xác định bởi $(*)$.

Giả sử các hàm số ở trên đều khả vi, đạo hàm riêng 2 vế của $(*)$ lần lượt theo x và y ta được:

$$F'_x + F'_z.z'_x = 0,\ F'_y + F'_z.z'_y = 0.$$

Giả sử $F'_z \neq 0$, vậy ta có:

$$\boxed{z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z},\ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}}$$

VD 19. Cho hàm ẩn $z(x, y)$ thỏa phương trình

$xyz = \cos(x + y + z)$. Tính z'_x, z'_y.

Giải. Ta có $F(x, y, z) = xyz - \cos(x + y + z)$

$$\Rightarrow \begin{cases} F'_x = yz + \sin(x + y + z) \\ F'_y = xz + \sin(x + y + z) \\ F'_z = xy + \sin(x + y + z). \end{cases}$$

Vậy $z'_x = -\dfrac{yz + \sin(x + y + z)}{xy + \sin(x + y + z)}$,

$$z'_y = -\frac{xz + \sin(x + y + z)}{xy + \sin(x + y + z)}.$$

VD 20. Cho hàm ẩn $z(x, y)$ thỏa phg trình mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0.$$ Tính z'_y.

Giải. Ta có $F = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} F'_y = 2y + 4 \\ F'_z = 2z - 6 \end{cases} \Rightarrow z'_y = -\frac{y+2}{z-3}.$$

VD 21. Tìm hệ số góc tiếp tuyến tại điểm $M(3;4;5)$ nằm trên mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$, biết tiếp tuyến nằm trong mặt phẳng $y=4$.

Giải. Ta có $z'_x(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Vậy hệ số góc là $z'_x(3,\ 4)=\dfrac{3}{5}$.

2.5. Đạo hàm theo hướng – Vector gradient

2.5.1. Hàm vector

- Ánh xạ

$$\vec{r} : T \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto \vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

được gọi là một ***hàm vector***.

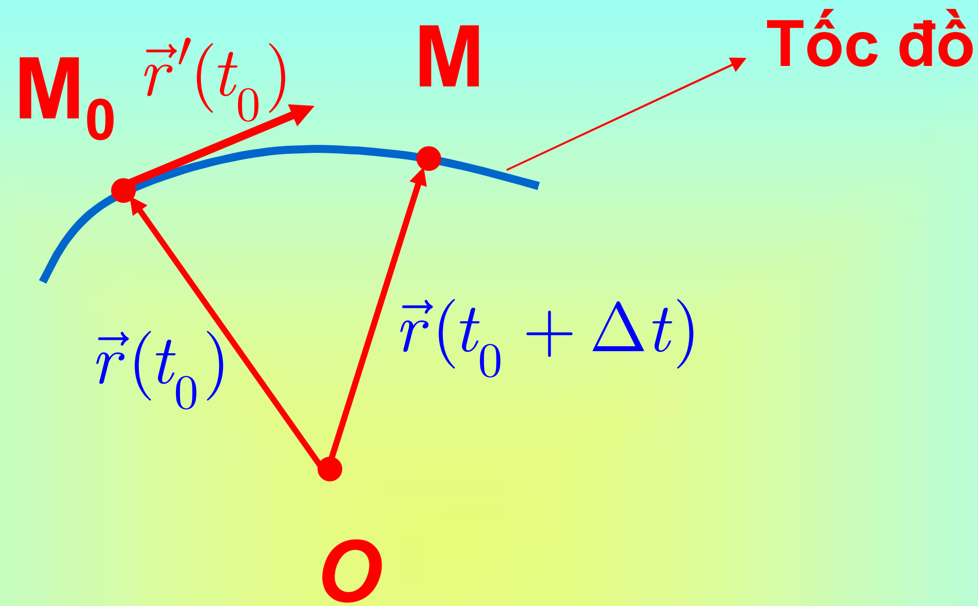
- Giới hạn

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{v} \Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} \left| \vec{r}(t) - \vec{v} \right| = 0$$

- **Đạo hàm**

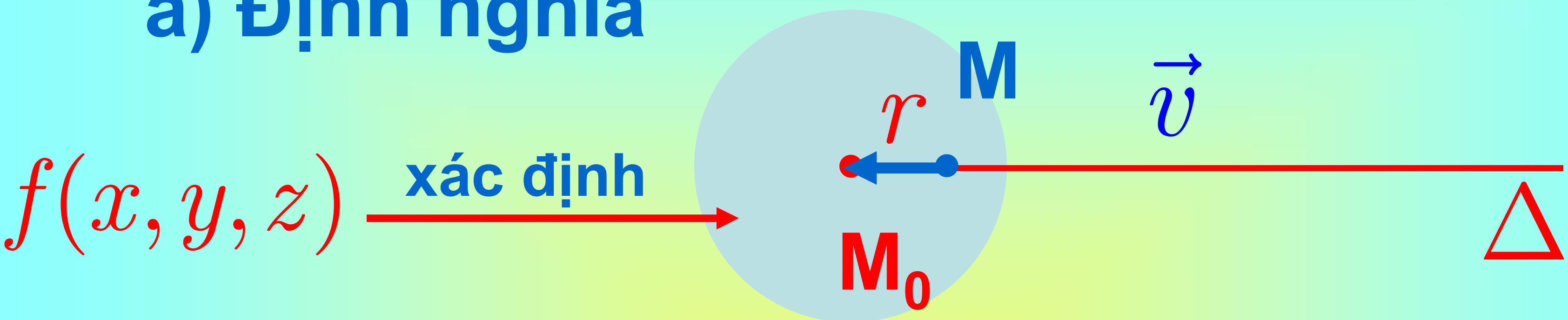
$$\boxed{\vec{r}'(t) = (x_1'(t),\, x_2'(t), \ldots,\, x_n'(t))}$$

Bài 2. Đạo hàm – Vi phân



2.5.2. Đạo hàm theo hướng

a) Định nghĩa



$$\boxed{f'_{\vec{v}}(M_0) = \lim_{r\to 0^+} \frac{f(M) - f(M_0)}{r}}$$

b) Cosin chỉ phương

Gọi α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ khác $\vec{0}$ với $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Khi đó $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ được gọi là các cosin chỉ phương của $\vec{v}$ và:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|},\ \cos\beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|},\ \cos\gamma = \frac{v_z}{|\vec{v}|}}$$

Vậy ta có:

$$f'_{\vec{v}}(M_0) = (f'_x(M_0),\, f'_y(M_0),\, f'_z(M_0))\left(\frac{v_x}{|\,\vec{v}\,|},\, \frac{v_y}{|\,\vec{v}\,|},\, \frac{v_z}{|\,\vec{v}\,|}\right)$$

$$= f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta + f'_z(M_0)\cos\gamma$$

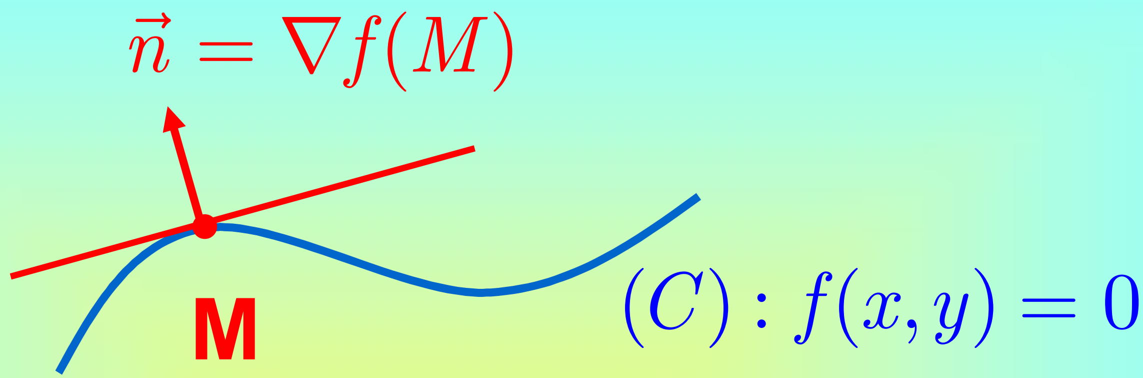
2.5.3. Vector gradient

$$\boxed{\nabla f(M_0) = \left(f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0)\right)}$$

Vậy ta có:

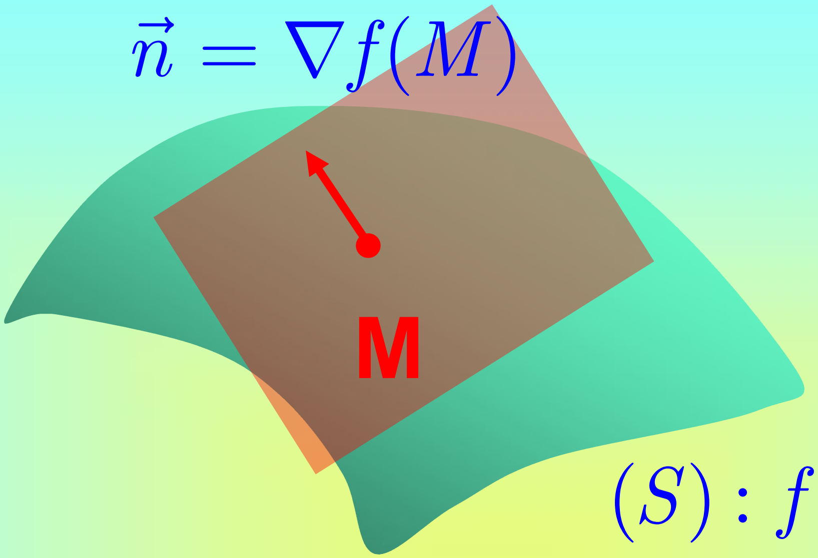
$$\boxed{f'_{\vec{v}}(M_0) = \nabla f(M_0).\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}$$

Ý nghĩa



Bài 2. Đạo hàm – Vi phân

$$\vec{n} = \nabla f(M)$$



$$(S) : f(x, y, z) = 0$$

VD 22. Cho hàm $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ và vector $\vec{v}=(1;-2;-2)$.

Tính $\nabla f(M)$, $f'_{\vec{v}}(M)$ tại $M(0;\,4;-3)$.

Giải. Ta có:

$$f'_x(M)=0,\ f'_y(M)=\frac{4}{5},\ f'_z(M)=-\frac{3}{5}.$$

Mặt khác

$$\vec{v} = (1;-2;-2) \Rightarrow \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{1}{5};-\frac{2}{5};-\frac{2}{5}\right).$$

Vậy $\nabla f(M) = \left(0;\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)$ và

$$f'_{\vec{v}}(M) = \nabla f(M).\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -\frac{2}{15}.$$

VD 23. Trong mặt phẳng, cho đường cong

$$(C): x^2 - y^2 - 3xy + 2y - 1 = 0.$$

Viết pttt Δ với (C) tại $M(1;-1)$.

Giải. Ta có $f(x,y) = x^2 - y^2 - 3xy + 2y - 1$

$$\Rightarrow f'_x(M) = 5,\ f'_y(M) = 1 \Rightarrow \vec{n}_\Delta = (5;\ 1).$$

Vậy $\Delta : 5x + y - 4 = 0.$

VD 24. Trong không gian, cho mặt parabolic eliptic

$$(S): z = \frac{x^2}{4} + y^2 - 2.$$

Viết pt tiếp diện (P) với (S) tại $M(2; -3;\ 8)$.

Giải. Ta có $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - 4z - 8$

$$\Rightarrow f'_x(M) = 4,\ f'_y(M) = -24,\ f'_z(M) = -4$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{(P)} = (1; -6; -1).$$

Vậy $(P): x - 6y - z - 12 = 0.$

………………………………………………………