

PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

1. Tìm miền xác định D của các hàm số cho dưới đây. Vẽ D từ đó xét tính chất của D (tập mở, tập đóng, tập không mở không đóng).

a) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$

b) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$

c) $f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$

d) $f(x, y) = \ln(-x - y)$

e) $f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x}$

2. Tính giới hạn (nếu có) hoặc chứng tỏ không tồn tại giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y} + 6}$

h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2(1 - \cos xy)}{y^2}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{1 - \sqrt[3]{1 + xy}}$

i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

k) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$

e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x + y}$

l) $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}$

f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2}$

m) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,a)} \frac{\sin xy}{x}$

g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$

n) $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}$

3. Tìm $\lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x, y))$ và $\lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x, y))$ nếu

a) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}, a = \infty, b = \infty$

c) $f(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy}, a = 0, b = \infty$

b) $f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x + y}, a = \infty, b = \infty$

d) $f(x, y) = \frac{x^y}{1 + x^y}, a = +\infty, b = 0^+$

e) $f(x, y) = \log_x(x + y)$, $a = 1, b = 0$

4. Chứng minh rằng đối với hàm số $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$

$\lim_{x \rightarrow 0}(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = 1$ và $\lim_{y \rightarrow 0}(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = -1$, trong khi đó $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ không tồn tại.

5. Khảo sát tính liên tục của các hàm sau:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^3 + y^3} & \text{khi } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{khi } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{khi } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{khi } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

6. Tìm tất cả các giá trị của a để hàm số liên tục trên \mathbb{R}^2

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{khi } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & \text{khi } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \cos \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{khi } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & \text{khi } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

7. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{khi } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{khi } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

liên tục theo từng biến x và y nhưng không liên tục đồng thời theo cả 2 biến đó.