6.4.1. Chuỗi hàm

1. Định nghĩa

Chuỗi hàm là chuỗi $\sum u_n(x)$, trong đó các $u_n(x)$ là các hàm của x.

Khi x = x_o thì chuỗi hàm trở thành chuỗi số $\sum u_n(x_0)$. Nếu chuỗi số hội tụ thì điểm x_o gọi là điểm hội tụ, nếu nó phân kỳ thì x_o gọi là điểm phân kỳ.

- Tập hợp tất cả các điểm x mà chuỗi hàm hội tụ được gọi là miền hội tụ của chuỗi hàm.

- $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$: gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi hàm.

- Nếu $\lim s_n(x) = s(x)$ thì S(x) gọi là tổng của chuỗi hàm. Trong trường hợp này, $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$: gọi là phần dư thứ n của chuỗi hàm. Do đó ta có $r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2} + ...$

2. Ví dụ

1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Chuỗi này hội tụ với mọi x thoả |x| < 1 và có tổng $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi trên là X = (-1; 1)

2) $\sum \frac{1}{n^x}$ có miền hội tụ là $X = (1;+\infty)$ (theo kết quả của chuỗi Riemann đã biết)

3) $\sum \dfrac{\cos nx}{n^3 + x^2}$

Ta có $\left|\dfrac{\sin nx}{n^3 + x^2}\right| \le \dfrac{1}{n^3 + x^2} \le \dfrac{1}{n^3}, \forall x$. Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ hội tụ nên $\sum \dfrac{\cos nx}{n^3 + x^2}$ hội tụ, $\forall x$

Vậy miền hội tụ là $X = \mathrm{R}$.

6.4.2. Chuỗi hàm hội tụ đều

1. Định nghĩa

Chuỗi hàm $\sum u_n(x)$ được goi là hội tụ đều tới hàm S(x) trên X, nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0 : n > n_0 \Rightarrow |S(x) - S_n(x)| = |r_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in X$$

2. Ví dụ

Chuỗi $\sum \dfrac{(-1)^n}{x^2 + n}$ hội tụ với mọi x (theo đlý Leibnitz)

Ta có $|r_n(x)| \le |u_{n+1}(x)| = \dfrac{1}{x^2 + n + 1} < \dfrac{1}{n+1}, \ \forall x \in \mathrm{R}$

Ta có $\left|r_n(x)\right| \le \left|u_{n+1}(x)\right| = \dfrac{1}{x^2+n+1} < \dfrac{1}{n+1}, \ \forall x \in R$

Như vậy $\left|r_n(x)\right| < \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon, \forall \ n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$

Do đó $\forall \varepsilon > 0$, lấy $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Khi đó $\forall n \ge n_0, \left|r_n(x)\right| < \varepsilon, \forall x \in R$

Vậy chuỗi $\sum \dfrac{(-1)^n}{x^2+n}$ hội tụ đều trên R.

3. Tiêu chuẩn về sự hội tụ đều

a. Định lý (tiêu chuẩn Cauchy)

Chuỗi hàm $\sum u_n(x)$ *hội tụ đều trên X khi và chỉ khi* $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n, p \in N^*, \ n \ge n_0$

$\Rightarrow \left|u_{n+1}(x) + ... + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon, \forall x \in X$

b. Định lý (tiêu chuẩn Weierstrass)

Cho chuỗi hàm $\sum u_n(x)$. *Nếu có một chuỗi số dương* $\sum a_n$ *hội tụ sao cho* $\left|u_n(x)\right| \le a_n, \ \forall n \ge 1, \forall x \in X$ *thì chuỗi hàm trên hội tụ tuyệt đối và đều trên X.*

Chứng minh.

Rõ ràng chuỗi $\sum \left|u_n(x)\right|, \ \forall x \in X$ hội tụ (theo tiêu chuẩn so sánh)

Do đó chuỗi $\sum u_n(x)$ hội tụ tuyệt đối.

Vì chuỗi số $\sum a_n$ hội tụ nên ta có

$\left|u_{n+1}(x) + ... + u_{n+p}(x)\right| < \left| u_{n+1}(x) \right| + ... + \left| u_{n+p}(x) \right| <$

$< a_{n+1} + ... + a_{n+p} < \varepsilon, \forall x \in X$

Theo định lý Cauchy trên, suy ra chuỗi hàm hội tụ đều trên X

Ví dụ

Xét tính hội tụ đều của chuỗi hàm

$\sum \dfrac{\cos nx}{n^2+x^2}$

Ta có $\left|\dfrac{\cos nx}{n^2+x^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2+x^2} \le \dfrac{1}{n^2}, \ \forall n \in N^*, \forall x \in R$

Ta đã biết chuỗi số dương $\sum \dfrac{1}{n^2}$ hội tụ nên chuỗi hàm $\sum \dfrac{\cos nx}{n^2+x^2}$ hội tụ tuyệt đối và đều trên R.

4. Tính chất cơ bản của chuỗi hàm hội tụ đều

a. Tính chất 1

Cho chuỗi hàm $\sum_n u_n(x)$ *hội tụ đều về hàm S(x) trên X. Nếu các số hạng* $u_n(x)$ *đều liên tục* $x_0 \in X$ *thì S(x) cũng liên tục tại* $x_0 \in X$.

Ta có $\lim_{x \to x} S(x) = S(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \sum_n u_n(x) = \sum_n u_n(x_0) = \sum_n \lim_{x \to x_0} u_n(x).$

Ví dụ

Tính $\lim_{x \to \pi} \sum_n \frac{\sin nx}{n^2 + x^2}$

Ta thấy chuỗi trên hội tụ đều, có các số hạng liên tục tại $x = \pi$

Do đó $\lim_{x \to \pi} \sum_n \frac{\sin nx}{n^2 + x^2} = \sum_n \lim_{x \to \pi} \frac{\sin nx}{n^2 + x^2} = 0$

b. Tính chất 2

Cho chuỗi hàm $\sum_n u_n(x)$ *hội tụ đều về hàm S(x) trên [a, b]. Nếu các số hạng* $u_n(x)$ *đều liên tục trên [a, b],* $\forall n \geq 1$ *thì* $\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left[\sum u_n(x) \right] dx = \sum_n \int_a^b u_n(x)dx \cdot$

c. Tính chất 3

Cho chuỗi hàm $\sum_n u_n(x)$ *hội tụ trên (a, b) tới S(x), các số hạng* $u_n(x)$, $u'_n(x)$ *liên tục trên (a, b). Khi đó nếu chuỗi* $\sum_n u'_n(x)$ *hội tụ đều trên (a, b) thì S(x) khả vi và S'(x) =* $\sum_n u'_n(x)$.