BÀI TẬP

1. Cho X, Y có hàm mật độ đồng thời là

$$f(x, y) = \begin{cases} cx & \text{nếu } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

a) Tìm c.

b) Tìm các hàm mật độ của X và của Y.

c) X và Y có độc lập hay không ?

2. Cặp (X, Y) có hàm mật độ là

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{6\pi} & \text{nếu } \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} < 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ của X và Y.

3. Cho ĐLNN hai chiều (X, Y) có hàm mật độ

$$f(x, y) = \frac{c}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

a) Tìm hằng số c.

b) Tìm hàm phân bố của (X, Y).

c) X và Y có độc lập không ?

d) Tìm xác suất để điểm (X, Y) rơi vào hình chữ nhật với các đỉnh là $A(1,1)$, $B(\sqrt{3}, 1)$, $C(1, 0)$ và $D(\sqrt{3}, 0)$.

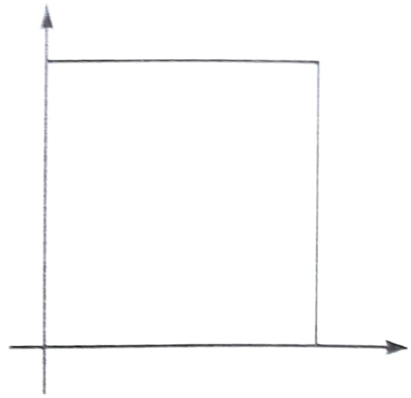
4. Giả sử X và Y là hai ĐLNN độc lập có phân bố đều trên $[0, 2]$. Tính $P\{XY \leqslant 1, Y \leqslant 2X, X \leqslant 2Y\}$.

5. Hai người bạn hẹn gặp nhau tại một vườn hoa trong khoảng từ 5 đến 6 giờ để cùng đi thăm thầy giáo cũ. Họ quy ước rằng sẽ đợi nhau không quá 5 phút. Tính xác suất để họ cùng đi tới nhà thầy giáo.

6. Một điểm A rơi ngẫu nhiên vào một hình vuông D có cạnh bằng 1. Giả sử (X, Y) là tọa độ của A. Biết rằng hàm mật độ $f(x, y)$ của (X, Y) là

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } (x, y) \in D \\ 0 \text{ nếu } (x, y) \notin D \end{cases}$$

Tính xác suất để khoảng cách từ A đến cạnh gần nhất nó bé hơn hay bằng 0,3.



Hình 14

7. Giả sử X và Y là hai ĐLNN độc lập, X có phân bố đều trên $[0, 2]$, Y có phân bố đều trên $[0, 10]$.

a) Với mỗi $t \in \mathbf{R}$ tìm $P\{X + Y < t\}$.

b) Từ đó suy ra hàm mật độ của $X + Y$.

8. Giả sử X và Y là hai ĐLNN độc lập có phân bố đều trên $[0, 1]$.

a) Với mỗi $t \in \mathbf{R}$ hãy tìm $P\{XY < t\}$.

b) Suy ra hàm mật độ của XY.

9. Giả sử X và Y là hai ĐLNN độc lập, X có phân bố đều trên $\left[0, \frac{1}{5}\right]$, Y có phân bố mũ với tham số $\lambda = 5$.

Tính $P\{Y \leqslant X\}$.

10. Cho X và Y là hai ĐLNN độc lập có phân bố đều trên $[0, 1]$. Tìm hàm mật độ của các ĐLNN sau đây

i) $X + Y$; ii) $X - Y$; iii) $\dfrac{X}{Y}$.

11. Cho X và Y là hai ĐLNN độc lập đều có phân bố mũ với tham số $\lambda = 1$. Tìm hàm mật độ của các ĐLNN sau đây

i) $X + Y$; ii) $X - Y$; iii) $|X - Y|$; iv) $\dfrac{X}{Y}$.

12. Cho X và Y độc lập có phân bố đều trên $[0, 1]$. Tìm hàm mật độ đồng thời của cặp (U, V) ở đó

$$U = X + Y \; ; \; V = \frac{X}{X+Y}.$$

Từ đó suy ra hàm mật độ của $\frac{X}{X+Y}$.

13. Cho X, Y, Z là các ĐLNN độc lập có phân bố đều trên $[0, 1]$.

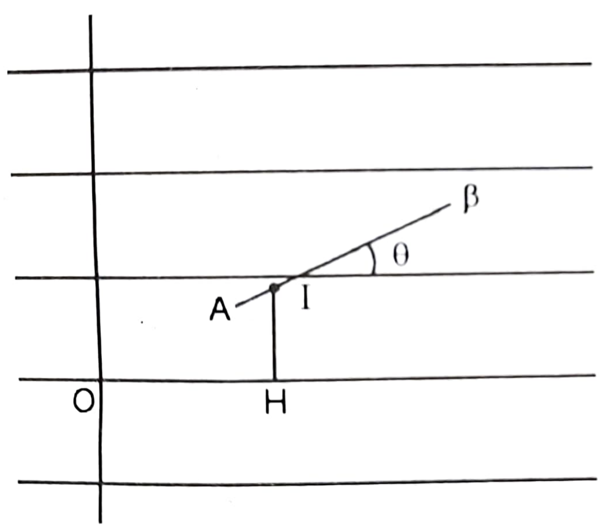
a) Tìm hàm mật độ của $X + Y + Z$.

b) Tìm $P\{0,5 \leqslant X + Y + Z \leqslant 2,5\}$.

14. Mặt phẳng tọa độ được kẻ bởi các đường thẳng song song

$$y = n \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Một chiếc kim AB có độ dài bằng 1 được ném ngẫu nhiên lên mặt phẳng. Gọi $\theta \in [0, \pi]$ là góc tạo bởi kim với trục Ox, Z là khoảng cách từ điểm giữa I của kim tới đường thẳng gần I nhất và nằm dưới I. (Xem hình 15 ta có $IH = Z$).



Hình 15

Giả thiết rằng θ và Z là hai ĐLNN độc lập, θ có phân bố đều trên $[0, \pi]$ và Z có phân bố đều trên đoạn $[0, 1]$.

Tính xác suất để kim AB cắt một đường thẳng nào đó.

15. Cho X, Y, Z là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập có phân bố đều trên $[0, 1]$. Tìm hàm mật độ đồng thời của XY và Z^2. Từ đó hãy tính $P\{XY < Z^2\}$.

16. Cho X và Y là hai ĐLNN độc lập có phân bố mũ với tham số λ. Giả sử $Z = X + Y$.

Tìm hàm mật độ có điều kiện $f(Z/X = x)$ và hàm mật độ có điều kiện $f(X/Z = z)$.

17. Cho X và Y có hàm mật độ đồng thời

$$f(x\,,\,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ nếu } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \text{ nếu trái lại} \end{cases}$$

a) Tìm $f(y/x)$.

b) Tìm P $\{X^2 + Y^2 \leqslant 1\}$.

18. Cho X và Y là hai ĐLNN có phân bố chuẩn đồng thời với EX = 35, EY = 20, DX = 36, DY = 16 và $\rho(X,\ Y) = 0{,}8$.

Tìm kì vọng và phương sai của $2X - 3Y$.

19. Một em học sinh thấy rằng thời gian tự học ở nhà của em trong một ngày là một ĐLNN có phân bố chuẩn với trung bình 2,2 giờ và độ lệch tiêu chuẩn là 0,4 giờ. Thời gian giải trí (xem tivi, chơi điện tử) là một ĐLNN có phân bố chuẩn với trung bình 2,5 giờ và độ lệch tiêu chuẩn là 0,6 giờ. Hệ số tương quan giữa thời gian học với thời gian chơi là −0,5. Phân bố đồng thời của chúng là phân bố chuẩn hai chiều. Hãy tìm xác suất để trong một ngày cụ thể nào đó :

a) Thời gian chơi và thời gian học lớn hơn 5 giờ ;

b) Thời gian học lớn hơn thời gian chơi.

20. Giả sử rằng khối lượng của hành khách đi máy bay có phân bố chuẩn với kì vọng 74*kg* và khối lượng hành lí mang theo có phân bố chuẩn với kì vọng 20*kg*. Phân bố đồng thời của hai khối lượng này là phân bố chuẩn hai chiều.

a) Biết rằng 10% hành khách nặng hơn 85*kg* và 20% hành lí nặng hơn 24*kg*. Tìm độ lệch tiêu chuẩn của khối lượng hành khách và khối lượng hành lí.

b) Biết rằng có 10% số hành khách mà tổng khối lượng của họ và hành lí mang theo lớn hơn 108*kg*. Tìm hệ số tương quan giữa khối lượng hành khách và trọng lượng hành lí đem theo.

21. Cho X và Y là hai ĐLNN có hàm mật độ đồng thời $f(x,\ y) = c(1 - xy^3)$ nếu $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$ và $f(x,\ y) = 0$ nếu trái lại. Tìm c và $\rho(X\,,\ Y)$.

ĐÁP SỐ VÀ CHỈ DẪN

1. a) $c = 3$

b)
$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}(1 - y^2) & \text{nếu } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

c) Không độc lập.

2.
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{9\pi}\sqrt{9 - x^2} & \text{nếu } |x| < 3 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4 - y^2} & \text{nếu } |y| < 2 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

3. a) $c = \dfrac{1}{\pi^2}$.

b) $$F(x, y) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y}\frac{dv}{1+v^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{du}{1+u^2}$$
$$= \left(\frac{\text{artg}x}{\pi} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\text{artg}y}{\pi} + \frac{1}{2}\right).$$

c) X và Y độc lập.

d) $\dfrac{1}{\pi^2}\left[\dfrac{\pi}{12}\cdot\dfrac{\pi}{4}\right] = \dfrac{1}{48}$.

4. Xác suất cần tìm là diện tích tam giác cong OMN giới hạn bởi các đường $y = 2x$, $y = \dfrac{x}{2}$ và $y = \dfrac{1}{x}$.

Kết quả là $P = \dfrac{\ln 2}{4}$.

5. $P = \dfrac{23}{144} \approx 0{,}1597$.

6. Tính xác suất của biến cố đối : "Khoảng cách từ A đến các cạnh của hình vuông $\geqslant 0{,}3$".

Đáp số : 0,84.

7. a) $F(t) = P\{X + Y < t\} = \dfrac{1}{20}\displaystyle\iint_A dxdy$, ở đó A là giao của miền $\{x + y < t\}$ với hình vuông $[0, 2] \times [0, 10]$.

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ \dfrac{t^2}{40} & \text{nếu } 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ \dfrac{t-1}{10} & \text{nếu } 2 \leqslant t \leqslant 10 \\ \dfrac{24t - t^2 - 104}{40} & \text{nếu } 10 \leqslant t \leqslant 12 \\ 1 & \text{nếu } t > 12 \end{cases}$$

Từ đó hàm mật độ

$$f(t) = F'(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{20} & 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ \dfrac{1}{10} & 2 \leqslant t \leqslant 10 \\ \dfrac{12-t}{20} & 10 \leqslant t \leqslant 12 \\ 0 & \text{với } t \text{ còn lại} \end{cases}$$

8. a)

$$P\{XY < t\} = F(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ t(1 - \ln t) & \text{nếu } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{nếu } t > 1 \end{cases}$$

b)

$$f(t) = F'(t)\begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\ln t & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

9. $$P\{Y \leqslant X\} = \iint\limits_{y \leqslant x \,\cap B} 25e^{-5y}dxdy$$

ở đó $$B = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{5}, y \geqslant 0\}.$$

Do đó

$$P\{Y \leqslant X\} = \int_0^{1/5} dx \int_0^x 25e^{-5y}dy = e^{-1}.$$

10.

i) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 0 \\ x & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{nếu } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{nếu } x \geqslant 2 \end{cases}$$

ii) $$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{nếu } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{nếu } |x| > 1 \end{cases}$$

iii) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{nếu } x \geqslant 1 \end{cases}$$

11.

i) $$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

ii) $f(x) = \dfrac{e^{-|x|}}{2}$

iii) $$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

iv)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

12.

$$f(u\,,\ \mathrm{v}) = \begin{cases} u \ \text{ nếu } \begin{cases} 0 < uv < 1 \\ 0 < u(1-v) < 1 \end{cases} \\ 0 \ \text{ nếu trái lại} \end{cases}$$

ở đó $U = X + Y$, $V = \dfrac{X}{X+Y}$

hay

$$f(u\,,\ v) = \begin{cases} u \ \text{ nếu } \begin{cases} 0 < u < \dfrac{1}{v} \\ 0 < u < \dfrac{1}{1-v} \\ 0 < v < 1 \end{cases} \\ 0 \ \text{ nếu trái lại} \end{cases}$$

Từ đó hàm mật độ của $V = \dfrac{X}{X+Y}$ là

$$f(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-v^2)} & \text{nếu } 0 \leqslant v \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2v^2} & \text{nếu } \dfrac{1}{2} \leqslant v \leqslant 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

13. a) Trước hết tìm hàm mật độ của $U = X + Y$ (đã giải quyết ở bài tập 10).

Sau đó tìm hàm mật độ của $T = Z + U$

$$f_{X+Y+Z}(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} & \text{nếu } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \dfrac{3}{4} - \left(t - \dfrac{3}{2}\right)^2 & \text{nếu } 1 \leqslant t \leqslant 2 \\ \dfrac{(3-t)^2}{2} & \text{nếu } 2 \leqslant t \leqslant 3 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

b) $\frac{23}{24} = 0{,}96033.$

14. Xác suất để kim không cắt đường thẳng là

$$P\left\{\frac{\sin\theta}{2} < Z < 1 - \frac{\sin\theta}{2}\right\} = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

Từ đó xác suất phải tìm là $\frac{2}{\pi}$.

15. Đặt $T = XY$, $U = Z^2$ hàm mật độ đồng thời của T và U là :

$$f(t, u) = -\begin{cases} \dfrac{\ln t}{2\sqrt{u}} & \text{nếu } \begin{array}{l} 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 \leqslant u \leqslant 1 \end{array} \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

Từ đó

$$P\{XY < Z^2\} = P\{T < v\} = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x}\,(1 - \ln x)dx = \frac{5}{9}.$$

16.

$$f(z/x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(z-x)} & \text{nếu } z \geqslant x \\ 0 & \text{nếu } z < x \end{cases}$$

$$f(x/z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z} & \text{nếu } 0 < x < z \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

Do đó phân bố của X với điều kiện $Z = z$ là phân bố đều trên $[0, z]$.

17. a) Phân bố của Y với điều kiện $X = x$ là phân bố đều trên $[0, x]$.

b) $\log(1 + \sqrt{2})$. Chỉ dẫn :

$$P\{X^2 + Y^2 \leqslant 1\} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 \frac{1}{r\cos\varphi}\, r d\varphi dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

18. $E(2X - 3Y) = 2EX - 3EY = 10$

$D(2X - 3Y) = 4DX + 9DY - 12\ \mathrm{cov}\,(X, Y) = 57{,}6.$

19. a) Gọi X là thời gian học, Y là thời gian chơi

$$E(X + Y) = 4{,}7,\ D(X + Y) = 0{,}28$$

$$\sigma_{X+Y} = 0{,}5292.$$

Từ đó

$$P\{X + Y > 5\} = 1 - \Phi(0{,}567) = 0{,}2853$$

b) $$E(X - Y) = -0{,}3,\ D(X - Y) = 0{,}76$$

$$\sigma_{X-Y} = 0{,}8718$$

$$P\{X > Y\} = P\{X - Y > 0\} = 1 - \Phi(0{,}344) = 0{,}3654.$$

20. Gọi X là khối lượng hành khách và Y là khối lượng hành lí mang theo của anh (chị) ta có :

a) $\dfrac{85 - 74}{\sigma_X} = 1{,}282$ $\qquad \dfrac{24 - 20}{\sigma_Y} = 0{,}8416$

suy ra $\sigma_X = 8{,}58\ kg$, $\sigma_Y = 4{,}753\ kg$

b) $E(X + Y) = 94\ kg$. Nếu $\sigma = \sigma_{X+Y}$ thì

$$\frac{108 - 94}{\sigma} = 1{,}282 \Rightarrow \sigma = 10{,}920.$$

Từ phương trình

$$D(X + Y) = DX + DY + 2\sigma_X\sigma_Y\rho(X, Y)$$

ta tìm được $\rho(X, Y) = 0{,}283$.

21. $c = \dfrac{1}{4}$, $\operatorname{cov}(X, Y) = -\dfrac{1}{15}$ và $\rho(X, Y) = -\dfrac{1}{5}$.