ÔN TẬP CUỐI KỲ ĐSTT

I. Không gian vector

I.1 Kiểm tra không gian vector con

Ta thấy muốn chứng minh W là *không gian vector con* của V ta cần CM $W \neq \emptyset$ và

$$\begin{cases} \forall \alpha, \beta \in W : (\alpha + \beta) \in W \\ \forall c \in K, \forall \alpha \in W : (c\alpha) \in W \end{cases} \quad (*)$$

Hoặc $$\boxed{\forall c \in K, \forall \alpha, \beta \in W : (c\alpha + \beta) \in W} \quad (**)$$

✍ Ký hiệu $\boxed{W \leq V}$

I.1 Kiểm tra không gian vector con

Ví dụ 1: Cho $W \subset R^3$ sao cho $W = \{X = (x, y, z) \in R^3 / 2x - |y| + 3z = 0\}$. W có phải là không gian con của R^3 hay không?

Giải: Xét $\alpha = (1, 2, 0), c = -1$. Ta có $\alpha \in W$.

$c\alpha = -1.(1, 2, 0) = (-1, -2, 0) \Rightarrow c\alpha \notin W$.

Vậy $\exists \alpha \in W, \exists c \in R : c\alpha \notin W \Rightarrow W$ không phải là không gian con của R^3.

I.1 Kiểm tra không gian vector con

Ví dụ: Cho $W \subset R^4$ sao cho $W = \{X = (x, y, z, t) \in R^4 / x - y + 9z = 3t - x - z\}$. W có phải là không gian con của R^3 hay không?

Giải: $x - y + 9z = 3t - x - z \Leftrightarrow 2x - y + 10z - 3t = 0$

Xét $\alpha = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in W, \beta = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in W, c \in R$

$\Rightarrow c\alpha + \beta = (cx_1 + x_2, cy_1 + y_2, cz_1 + z_2, ct_1 + t_2)$

$\alpha, \beta \in W \Rightarrow 2x_1 - y_1 + 10z_1 - 3t_1 = 0$ và $2x_2 - y_2 + 10z_2 - 3t_2 = 0$

$\Rightarrow 2cx_1 - cy_1 + 10cz_1 - 3ct_1 = 0$ và $2x_2 - y_2 + 10z_2 - 3t_2 = 0$

$\Rightarrow 2(cx_1 + x_2) - (cy_1 + y_2) + 10(cz_1 + z_2) - 3(ct_1 + t_2) = 0$

$\Rightarrow (c\alpha + \beta) \in W$

Vậy: $\forall \alpha, \beta \in W, \forall c \in R : (c\alpha + \beta) \in W \Rightarrow W \le R^4$

2. Hệ sinh của một không gian vector

Cho $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$, V: KGVT trên trường K

Nếu $\forall\, u \in V$: $\boxed{u = c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n}$

☞ Hệ S sinh ra V hay S là hệ sinh hữu hạn của V

Kí hiệu V= span(S)

Ví dụ: Trong không gian vector $\mathbb{R}^2$, cho hệ vector

$$E = \{e_1 = (1,0);\ e_2 = (0,1)\}$$

Khi đó hệ vector E là hệ sinh của không gian vector $\mathbb{R}^2$

Thật vậy, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, khi đó,

$$x = (a, b) = a(1,0) + b(0,1) = ae_1 + be_2$$

2. Hệ sinh của một không gian vector

Ví dụ: Cho $S=\{X=(3,1,-1),Y=(-1,-5,7),Z=(1,-2,3)\}\subset R^3$ và $\alpha=(u,v,w)$. Tìm u,v,w để $\alpha\in<S>$.

Giải:

$<S>=\{aX+bY+cZ\,/\,a,b,c\in R\}=\{(3a-b+c,a-5b-2c,-a+7b+3c)\,/\,a,b,c\in R\}$

$\alpha\in<S>\Leftrightarrow u=3a-b+c,v=a-5b-2c,w=-a+7b+3c$ (1)

Giải hệ (1) (ẩn a,b,c) bằng Gauss (hoặc Gauss-Jordan), hệ có nghiệm khi và chỉ khi $u-10v-7w=0$.

Vậy $\alpha\in<S>\Leftrightarrow u-10v-7w=0$.

3.Sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính

Trong R^n cho hệ vectơ $S=\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ Ta có :

- Nếu m > n : hệ S phụ thuộc tuyến tính
- Nếu m<= n:
  - Nếu r(S) =m : hệ S độc lập tuyến tính
  - Nếu r(S) <m : hệ S phụ thuộc tuyến tính

3.Sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính

Ví dụ: Xét tính độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của các tập hợp:

a. $S=\{X=(1,2,3),Y=(-12,8,5),Z=(11,-5,1),T=(14,5,-14)\}\subset R^3$

b. $S=\{X=(1,-2,3,-4),Y=(-3,6,-9,12),Z=(2,0,-5,8)\}\subset R^3$

Giải:

a. Ta có $|S|=4>3\Rightarrow S$ phụ thuộc tuyến tính.

b. Ta có $Y=-3X=-3X+0Z\Rightarrow S$ phụ thuộc tuyến tính *(theo định nghĩa)*.

3.Sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính

Bài tập Tìm hạng của các hệ véctơ sau, từ đó suy ra tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của hệ:

a) $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (2, 3, -3)$ trong $\mathbb{R}^3$.

b) $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (1, 1, -2)$, $u_3 = (1, 1, 2)$ trong $\mathbb{R}^3$.

c) $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (1, 1, -2)$, $u_3 = (0, 3, 3)$,

$u_4 = (2, 3, -3)$ trong $\mathbb{R}^3$.

d) $u_1 = (1, -1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, -1, 0)$, $u_3 = (0, 0, 1, -1)$,

$u_4 = (-1, 0, 0, 1)$ trong $\mathbb{R}^4$.

4. Cơ sở và số chiều của một không gian vector

Nhận diện cơ sở khi đã biết số chiều của không gian

- Xét KGVT V có dim V= n , và tập hợp

$$a = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset V$$

(a có đúng n vector)

- Khi đó

a là 1 cơ sở của V $\Leftrightarrow$ span(a)=V

a là 1 cơ sở của V $\Leftrightarrow$ a độc lập tuyến tính

4. Cơ sở và số chiều của một không gian vector

Cách tìm cơ sở của KG con sinh bởi một hệ vector:

- Trong không gian vector V, cho hệ $S = \{u_1, \ldots, u_p\} \subset V$
- W= span(S): không gian con của V

☞ r(S)= dim W

☞ Mọi hệ gồm r vector độc lập tuyến tính rút từ S là một cơ sở của W

4. Cơ sở và số chiều của một không gian vector

Cách tìm cơ sở của KG con sinh bởi một hệ vector:

Ví dụ 1: Cho $B=\{X=(1,2,-1),Y=(2,-1,2),Z=(-1,-3,2)\}$. Chứng minh B là một cơ sở của R^3.

Giải: Chứng minh được B độc lập tuyến tính *(làm như ở dạng 3)* (1)

Ta có $B\subset R^3$ và $|B|=3=dim(R^3)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow B$ là một cơ sở của R^3

4. Cơ sở và số chiều của một không gian vector

Cách tìm cơ sở của KG con sinh bởi một hệ vector:

Ví dụ 2: Cho $S = \{X = (1,2,-3), Y = (-2,-1,4), Z = (-3,0,5), T = (2,7,-8)\} \subset R^3$. Tìm một cơ sở B cho không gian $W = < S >$ và tính số chiều của W. *(cơ sở không gian sinh)*

Giải: Lập ma trận $A_{4x3} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{Gauss} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ một cơ sở của W là $B = \{(1,2,-3),(0,3,-2)\}$ và $dimW = 2$.

4. Cơ sở và số chiều của một không gian vector

Cách tìm cơ sở của KG con sinh bởi một hệ vector:

Ví dụ 3: Cho $A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & -7 & 3 \\ -2 & 10 & 3 & 18 & -7 \\ 3 & -15 & -5 & -29 & 11 \\ -4 & 20 & 7 & 40 & -15 \end{pmatrix} \in M_{4x5}(R)$. Tìm một cơ sở B cho

$W=\{X \in R^5 / AX=O\}$. *(cơ sở không gian nghiệm)*

Giải: Giải hệ $AX=O$, hệ có vô số nghiệm $x_2=a, x_4=b, x_5=c \quad (a,b,c \in R)$,

$x_1=5a+3b-2c, x_3=c-4b$

$$\Rightarrow W=\{X=(5a+3b-2c, a, c-4b, b, c) / a,b,c \in R\}$$

$$=\{X=(5a,a,0,0,0)+(3b,0,-4b,b,0)+(-2c,0,c,0,c) / a,b,c \in R\}$$

$$=\{X=a(5,1,0,0,0)+b(3,0,-4,1,0)+c(-2,0,1,0,1) / a,b,c \in R\}$$

Đặt $S=\{\alpha_1=(5,1,0,0,0), \alpha_2=(3,0,-4,1,0), \alpha_3=(-2,0,1,0,1)\}$

$\Rightarrow W=<S>$, S độc lập tuyến tính

$\Rightarrow W$ có một cơ sở là S, $dimW=|S|=3$.

5. Tọa độ vector theo cơ sở; Ma trận chuyển cơ sở.

- Giả sử KGVT n chiều V có cơ sở là $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$
- Với mỗi x ∈ V, ta đã biết <u>tồn tại duy nhất</u> các số $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thỏa

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

- Ký hiệu $(x)_{/E} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hay

$$[x]_{/E} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

& gọi là tọa độ của x theo cơ sở E

5. Tọa độ vector theo cơ sở; Ma trận chuyển cơ sở.

Giả sử trong KGVT n chiều V cho hai cơ sở

$$A=\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\},\ B=\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\}$$

và $x \in V$ có các tọa độ $[x]_{/A}, [x]_{/B}$

Định nghĩa: Ma trận P thỏa mãn hệ thức:

$$\boxed{[x]_{/A} = P[x]_{/B}, \forall x \in V \quad (*)}$$

gọi là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở A sang cơ sở B.

Khi đó công thức (*) được gọi là công thức biến đổi tọa độ của vector x giữa 2 cơ sở A và B.

5. Tọa độ vector theo cơ sở; Ma trận chuyển cơ sở.

Tìm ma trận P chuyển cơ sở từ A sang B:

Biểu diễn tuyến tính mỗi vector của B đối với A

$$\beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n$$
$$\beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n$$
$$\ldots\ldots$$
$$\beta_n = a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n$$

$$\Rightarrow \quad P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

5. Tọa độ vector theo cơ sở; Ma trận chuyển cơ sở.

Ví dụ: Cho các cơ sở $S = \{\alpha_1 = (-1,1,2), \alpha_2 = (2,-1,2), \alpha_3 = (1,0,3)\}$,

$T = \{\beta_1 = (2,5,-2), \beta_2 = (2,1,-3), \beta_3 = (1,-2,-2)\}$ của R^3, $[X]_S = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Y = (4,1,-2)$.

Viết $P(S \to T)$. Tìm X, $[Y]_S$.

5. Tọa độ vector theo cơ sở; Ma trận chuyển cơ sở.

Giải: Tìm X : $X = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = (-1,3,11)$

Lập các hệ phương trình tuyến tính *(vế trái giống nhau nên ghép chung vào 1 ma trận để giải song song)*:

$$\left(\alpha_1^t \quad \alpha_2^t \quad \alpha_3^t \quad | \beta_1^t \quad | \beta_2^t \quad | \beta_3^t \quad | Y^t\right).$$

Biến đổi hệ bằng Gauss-Jordan, đưa về dạng

$\left(E_1 \quad E_2 \quad E_3 \quad | X_1 \quad | X_2 \quad | X_3 \quad | X_4\right)$ trong đó E_1, E_2, E_3 là các cột đã chuẩn hóa.

Khi đó, $[\beta_1]_S = X_1 = \begin{pmatrix} -28 \\ -33 \\ 40 \end{pmatrix}$, $[\beta_2]_S = X_2 = \begin{pmatrix} -13 \\ -14 \\ 17 \end{pmatrix}$, $[\beta_3]_S = X_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$P(S \to T) = \left([\beta_1]_S \quad [\beta_2]_S \quad [\beta_3]_S\right) = \begin{pmatrix} -28 & -13 & 3 \\ -33 & -14 & 5 \\ 40 & 17 & -6 \end{pmatrix}$$

$$[Y]_S = X_4 = \begin{pmatrix} -18 \\ -19 \\ 24 \end{pmatrix}$$

6. Hệ trực giao – trực chuẩn

Trực giao & trực chuẩn hóa bằng pp Gram-Schmidt

- Cho KG Euclide $\boxed{Eu = (V_n, < \;|\; >)}$ và một cơ sở $a = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$
- Đặt

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{<\alpha_2 | \beta_1>}{\|\beta_1\|^2}\beta_1 \\ \beta_3 = \alpha_3 - \dfrac{<\alpha_3 | \beta_2>}{\|\beta_2\|^2}\beta_2 - \dfrac{<\alpha_3 | \beta_1>}{\|\beta_1\|^2}\beta_1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \beta_n = \alpha_n - \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \dfrac{<\alpha_n | \beta_j>}{\|\beta_j\|^2}\beta_j \end{cases}$$

6. Hệ trực giao – trực chuẩn

Trực giao & trực chuẩn hóa bằng pp Gram-Schmidt

- Đặt $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$

  thì β là một cơ sở trực giao của $Eu = (V_n, <\ \ |\ \ >)$

- Đặt tiếp $\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|} \\ \gamma_2 = \dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \gamma_n = \dfrac{\beta_n}{\|\beta_n\|} \end{cases}$

  thì $\zeta = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$

  là cơ sở trực chuẩn của

  $Eu = (V_n, <\ \ |\ \ >)$

6. Hệ trực giao – trực chuẩn

Trực giao & trực chuẩn hóa bằng pp Gram-Schmidt

Ví dụ Trong $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở gồm các véctơ

$$u_1 = (0,1,-1),\ u_2 = (-1,2,0),\ u_3 = (2,1,1)$$

Hãy trực chuẩn hoá cơ sở đó.

6. Hệ trực giao – trực chuẩn

Trực giao & trực chuẩn hóa bằng pp Gram-Schmidt

Trực giao hoá theo phương pháp Gram-Schmidt, lấy

$$v_1 = u_1 = (0,1,-1);$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = (-1,2,0) - \frac{2}{2}(0,1,-1) = (-1,1,1)$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 = (2,1,1)$$

Ta có hệ cơ sở trực giao

v_1=(0,1,-1); v_2=(-1,1,1); v_3=(2,1,1)

6. Hệ trực giao – trực chuẩn

Trực giao & trực chuẩn hóa bằng pp Gram-Schmidt

Trực chuẩn hoá: ta có

$$\|v_1\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}; \|v_2\| = \sqrt{3}; \|v_3\| = \sqrt{6}$$

Hệ cơ sở trực chuẩn là:

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{(-1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{(2,1,1)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad \square$$

7. Chéo hóa ma trận

1. Giải pt đặc trưng $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ để tìm các trị riêng của A:

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ *với* bội tương ứng $m_1, m_2, \dots, m_p$.

2. Kiểm tra điều kiện chéo hóa:

a. Nếu p=n thì A chéo hóa được.

b. Nếu $\forall k (k = 1,2,\dots,p): r(A - \lambda_k I) = n - m_k$ thì A chéo hóa được.

c. Nếu $\exists k: r(A - \lambda_k I) \neq n - m_k$ thì A không chéo hóa được.

7. Chéo hóa ma trận

3. Ta tìm ma trận T không suy biến $(\det \mathrm{T} \neq 0)$: $B = T^{-1}AT$

a.Ứng với mỗi trị riêng λ_k , giải hệ phương trình $(A - \lambda_k I)x = \theta$, tìm

được m_k VTR đltt $a_1^k, a_2^k, \dots, a_m^k$ *ứng với* λ_k

b. Sau đó ta lập hệ

$$(\mathrm{a}) = \{a_1^1, a_2^1, \dots, a_{m_1}^1, \dots, a_1^p, a_2^p, \dots, a_{m_p}^p\}$$

là cơ sở của không gian K^n, bao gồm các VTR

c. Lập ma trận T là ma trận mà có cột thứ j là vectơ thứ j trong cơ sở (a)

$$T = \begin{pmatrix} | & & | & & | & & | \\ a_1^1 & \cdots & a_{m_1}^1 & \cdots & a_1^p & \cdots & a_{m_p}^p \\ | & & | & & | & & | \end{pmatrix}$$

7. Chéo hóa ma trận

***Chú ý:** Nếu A là ma trận chéo hóa được thì ta luôn tìm được ma trận T và ma trận chéo B như trong phương pháp trên: $A = TBT^{-1}$.Khi đó

$$A^2 = A.A = (TBT^{-1}).(TBT^{-1}) = TB(T^{-1}T)BT^{-1} = TB^2T^{-1}$$

$$A^3 = A^2.A = (TB^2T^{-1}).(TBT^{-1}) = TB^3T^{-1}$$

….

$$A^n = A^{n-1}.A = TB^{n-1}T^{-1}.TBT^{-1} = TB^nT^{-1}$$

7. Chéo hóa ma trận

Ví dụ : Chéo hóa ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm A^n.

Giải: Trong ví dụ trước đã chỉ ra rằng ma trận A chéo hóa được. A có 1 cơ sở mới bao gồm các VTR

$$a_1 = (-1,0,1), \quad a_2 = (1,0,1), \quad a_3 = (0,1,0),$$

Lập ma trận T

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B = T^{-1}AT = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Chéo hóa ma trận

$$A^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ (-1)^n & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^n + 1 & 2 & (-1)^{n+1} + 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ (-1)^{n+1} + 1 & 0 & (-1)^n + 1 \end{pmatrix}.$$

7. Chéo hóa ma trận

Bài tập: Chéo hóa các ma trận sau (nếu được)

a) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

8. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange

Giả sử V_n là một không gian n chiều, α là một cơ sở của V.
Xét trong cơ sở α dạng toàn phương:

$$f(X) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \, , \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

Hay

$$f(X) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i<j}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Xét 2 trường hợp:

8. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange

☞ TH1: nếu $\boxed{\exists j \in \{1,2,\ldots,n\} : a_{jj} \neq 0}$ ->Chẳng hạn như giả sử $a_{11} \neq 0$

➢ Ta viết lại

$$f(X) = \underbrace{\left(a_{11}x_1^2 + \sum_{t=2}^{n} a_{1t}x_1x_t\right)}_{\text{có } x_1} + \underbrace{g(x_2,\ldots,x_n)}_{\text{không có } x_1}$$

$$= a_{11}\left(x_1^2 + \frac{1}{a_{11}}\sum_{t=2}^{n} a_{1t}x_1x_t\right) + g(x_2,\ldots,x_n)$$

$$= a_{11}\left[\left(x_1 + \frac{1}{2a_{11}}\sum_{t=2}^{n} a_{1t}x_t\right)^2\right] - a_{11}\left(\frac{1}{2a_{11}}\sum_{t=2}^{n} a_{1t}x_t\right)^2 + g(x_2,\ldots,x_n)$$

8. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange

$$\Rightarrow f(X) = a_{11}y_1^2 + \underbrace{h(x_2,\ldots,x_n)}$$

dạng toàn phương theo (n-1) biến là $x_2,\ldots,x_n$

☞ Tiếp tục làm (theo tinh thần quy nạp)

$$\Rightarrow \boxed{f(X) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2}$$

$P = P(\beta \to \alpha)$

$\Rightarrow Q = P(\alpha \to \beta) = P^{-1}$

☞ cơ sở β (theo định nghĩa)

✍ Đặt

$$[x]_\beta \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad [x]_\alpha$$

đang tìm

đã cho

8. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange

Tìm dạng chính tắc của dạng toàn phương sau:

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Ta sắp xếp lại các số hạng của Q:

$$Q = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3$$

Do đó $Q = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$

$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 + 2x_3^2 + \frac{1}{3}x_3^2$$

$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 + \frac{7}{3}x_3^2$$

Đặt $t_1 = (x_1 + 2x_2 + x_3)$, $t_2 = \left(x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)$, $t_3 = x_3$

Ta thấy Q có dạng chính tắc $t_1^2 - 3t_2^2 + \frac{7}{3}t_3^2$ với biến mới t_1, t_2, t_3.