# CHƯƠNG 2
# HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

# I. Các khái niệm về hệ phương trình tuyến tính

## I.1 Hệ phương trình tuyến tính

Hệ phương trình tuyến tính: là hệ m phương trình của n ẩn số dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

$a_{ij}, b_i$ : các số cho trước thuộc $R$ $(1 \le i \le n, 1 \le j \le n)$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ là n ẩn số cần tìm

# I. Các khái niệm về hệ phương trình tuyến tính

## I.1 Hệ phương trình tuyến tính

✍ Đặt

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ma trận hệ số

Ma trận hệ số tự do

Ma trận ẩn số

☞ thì hệ pt (*) được viết gọn thành dạng

$$AX = B$$

# I. Các khái niệm về hệ phương trình tuyến tính

## I.1 Hệ phương trình tuyến tính

- **Ví dụ:** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ \quad - 4x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 9 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & -7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

# I. Các khái niệm về hệ phương trình tuyến tính

## I.1 Hệ phương trình tuyến tính

**Ma trận bổ sung của hệ :** $A^{bs} = [A|B]$

$$A^{bs} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

- **Ví dụ:** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ \quad - 4x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 9 \end{cases} \leftrightarrow A^{bs} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 8 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & -7 & 9 \end{bmatrix}$$

# I. Các khái niệm về hệ phương trình tuyến tính

## I.2 Nghiệm của 1 hệ phương trình tuyến tính

Xét hệ pttt

$$AX = B$$

Bộ số $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ là 1 nghiệm ( 1 lời giải ) của hệ

nếu tất cả các pt của hệ đều được thỏa khi ta thay thế

$$x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$$

Lưu ý chỉ có đúng 1 trong 3 trường hợp sau xảy ra cho 1 hệ pttt

- TH1: hệ vô nghiệm
- TH2: hệ có nghiệm duy nhất
- TH3: hệ có vô số nghiệm

# I. Các khái niệm về hệ phương trình tuyến tính

## I.3 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Dạng ma trận của phương trình tuyến tính thuần nhất là

$$AX=0$$

# I. Các khái niệm về hệ phương trình tuyến tính

## I.3 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$\boxed{AX=0.}$

- Hệ có nghiệm duy nhất: hệ chỉ có 1 nghiệm *(0,0,…,0):* nghiệm tầm thường.

Hạng ma trận hệ số bằng số ẩn của hệ phương trình

- Hệ có vô số nghiệm: ngoài nghiệm (0,0,..,0) (nghiệm tầm thường) hệ còn có các nghiệm khác (c1,c2,..cn): (nghiệm không tầm thường.

Hạng ma trận hệ số nhỏ hơn số ẩn của hệ phương trình

# I. Các khái niệm về hệ phương trình tuyến tính

## I.3 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

**Nhận xét:** Trong hệ thuần nhất hạng của ma trận hệ số luôn bằng hạng của ma trận bổ sung

$$A^{bs} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} & 0 \end{array}\right]$$

Khi biện luận cho hệ thuần nhất ta chỉ quan tâm hạng của ma trận hệ số

# I. Các khái niệm về hệ phương trình tuyến tính

## I.3 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

**Ví dụ:** Tìm $m$ để hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường.

$$\begin{cases} x - 2y + z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 0 \\ -x - y + mz &= 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & m \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & m+2 \end{bmatrix}$$

Hệ có nghiệm không tầm thường $\Leftrightarrow r(A) < 3$

$\Leftrightarrow m + 2 = 0$

$\Leftrightarrow m = -2$

# I. Các khái niệm về hệ phương trình tuyến tính

## I.3 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

**Lưu ý:**

Nếu hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có số phương trình bằng số ẩn với ma trận hệ số A

+ Hệ chỉ có nghiệm tầm thường $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

+ Hệ có nghiệm không tầm thường $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$

# I. Các khái niệm về hệ phương trình tuyến tính

## I.3 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Ví dụ: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường:

$$\begin{cases} x - 2y + z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 0 \\ -x - y + mz &= 0 \end{cases}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & m \end{vmatrix} = 3m + 6$$

hệ có nghiệm không tầm thường: $\Leftrightarrow \det(A) = 0$

$$\Leftrightarrow 3m + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -2$$

# II. Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

## II.1 Phương pháp Cramer

1. Hệ Cramer: hệ phương trình tuyến tính n phương trình n ẩn số mà ma trận của nó không suy biến

2. Định lý: Mọi hệ Cramer n phương trình n ẩn số đều có duy nhất 1 nghiệm được cho bởi công thức:

$$\boxed{x_j = \frac{D_j}{D};\ j = \overline{1,n}}$$

D: định thức của ma trận hệ số

$D_j$: định thức nhận được từ D bằng cách thay cột thứ j bởi cột tự do, $j = \overline{1,n}$

# II. Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

## II.1 Phương pháp Cramer

- **Ví dụ:** Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 & = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 & = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 & = 16 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \det A = 2 \neq 0.$$

Do đó hệ trên là một hệ Cramer.

# II. Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

## II.1 Phương pháp Cramer

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 &= 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 &= 16 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 16 & 3 & -7 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 16 & -7 \\ 5 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 16 \\ 5 & 2 & 16 \end{vmatrix} = -2.$$

# II. Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

## II.1 Phương pháp Cramer

$$x_j = \frac{D_j}{D};\ j = \overline{1, n} \qquad (2.4)$$

hệ PT có nghiệm duy nhất

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 3$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = 1$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = -1$$

## II. Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

## II.1 Phương pháp Cramer

- **Bài tập:** Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$x_1 = D_1/D = -19/-8$$

$$x_2 = D_2/D = -29/-8$$

$$x_3 = D_3/D = -9/-8$$

# II. Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

## II.2 Phương pháp Gauss

1.Các phép biến đổi tương đương hệ phương trình:

- Nhân một số ($\lambda \neq 0$ ) vào 2 vế của 1 PT của hệ.
- Đổi chỗ hai PT của hệ.
- Nhân một số (($\lambda \neq 0$) vào một PT rồi cộng vào PT khác của hệ.

## II. Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

## II.2 Phương pháp Gauss

### 2. Định lý Cronecker-Capelli

Điều kiện cần và đủ để một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm là hạng ma trận hệ số của hệ bằng hạng ma trận hệ số bổ sung của hệ:

$$\mathrm{r}(\mathrm{A}) = \mathrm{r}(A^{bs})$$

**Hệ quả:** Cho hệ phương trình tuyến tính: AX=B . Ta có kết luận sau:

- $\mathrm{r}(\mathrm{A}) < \mathrm{r}(A^{bs})$ : hệ vô nghiệm
- $\mathrm{r}(\mathrm{A}) = \mathrm{r}\left(A^{bs}\right) = n$ : hệ có duy nhất 1 nghiệm
- $\mathrm{r}(\mathrm{A}) = \mathrm{r}\left(A^{bs}\right) = r < n$ : hệ có vô số nghiệm (phụ thuộc n-r tham số)

# II. Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

## II.2 Phương pháp Gauss

### 3. Phương pháp Gauss

- Ý tưởng của phương pháp Gauss là dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng của ma trận đưa ma trận hệ số bổ sung về dạng bậc thang. Khi đó, hệ phương trình đã cho tương đương với hệ bậc thang. Hệ bậc thang này giải dễ dàng từ dưới lên.

Sơ đồ giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss

$$[A|\mathbf{B}] \xrightarrow[\text{theo hàng của ma trận}]{\text{Các phép biến đổi sơ cấp}} [A'|\mathbf{B}']$$ : dạng bậc thang

Khi đó: **Ax=B ⇔ A′x = B′**

## 3. Phương pháp Gauss - Jordan

Cụ thể: Xét phương trình tuyến tính: AX=B .

Bằng các phép BĐSC chuyển ma trận bổ sung về dạng:

$$A'=\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & k \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 3. Phương pháp Gauss - Jordan

Ma trận A′ tương ứng cho ta hệ PTTT

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1r}x_r + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2r}x_r + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad a'_{rr}x_r + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r \\ 0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_r + \ldots + 0x_n = k \end{cases}$$

$k \neq 0$ : PT thứ *(r +1)* vô nghiệm => hệ PT *vô nghiệm*.

$k = 0$ : hệ *có nghiệm:*

- Nếu $r = n$ (số ẩn): hệ PT có *nghiệm duy nhất.*
- Nếu $r < n$ (số ẩn):hệ PT có *vô số nghiệm*, phụ thuộc vào $(n - r)$ tham số.

## 3. Phương pháp Gauss

Khi $r = n$ (số ẩn) thì hệ PT (II) viết dưới dạng:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1r}x_r + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2r}x_r + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a'_{rr}x_r + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \qquad \ldots \qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

## 3. Phương pháp Gauss

Khi $r < n$ ta chuyển $(n - r)$ ẩn sang vế phải của hệ PT ta được hệ PT sau:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1r}x_r = -a'_{1(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a'_{1n}x_n + b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2r}x_r = -a'_{2(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a'_{2n}x_n + b'_2 \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad a'_{rr}x_r = -a'_{r(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a'_{rn}x_n + b'_r \end{cases}$$

Ta xem các ẩn ở vế phải là các tham số, sau đó giải các ẩn còn lại theo các tham số đó.

# II. Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

## II.2 Phương pháp Gauss

*Ví dụ 1. Giải hệ phương trình:*
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ -4x_1 + 2x_3 + x_4 &= -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \end{cases} \qquad (2.10)$$

$$A^{bs} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_5 = h_5 - h_1]{\substack{h_2 = h_2 - 2h_1 \\ h_4 = h_4 + 4h_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \ldots . \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Hệ } (2.10) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

# II. Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

## II.2 Phương pháp Gauss

*Ví dụ 2.* Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 & = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 & = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 & = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 & = 3 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$A^{bs} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \ldots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2.11) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 & = 0 \\ \quad 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 5x_5 & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\gamma \\ x_2 = \frac{1}{3}(1 + 3\alpha + 3\beta - 5\gamma) \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \gamma \end{cases}$$

## II. Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

- **Bài tập:** Giải hệ phương trình:

$$1)\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 7x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 8x_4 = 2 \end{cases}$$

## II. Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

**Bài tập:** Biện luận theo *m* số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+2y-z+t = 1 \\ y+3z+2t = 2 \\ -z-2t = 3 \\ (m^2-1)t = m-1 \end{cases} \qquad A^{bs} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & m^2-1 & m-1 \end{bmatrix}$$

$+m=-1 \Rightarrow r(A)=3 \neq r(A^{bs})=4 \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm

$+\ m=1 \Rightarrow r(A)=r(A^{bs})=3<n \Rightarrow$ Hệ có VSN

$+m \neq \pm 1 \Rightarrow r(A)=r(A^{bs})=n \Rightarrow$ Hệ có Ng duy nhất

# II. Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

**Bài tập:**

Biện luận theo *m* số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+2y-z+2t=1 \\ 2x+5y+3z+t=0 \\ y-2z-3t=3 \\ x-y+z+mt=1 \end{cases}$$

$$A^{bs} \to \dots \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7m-77 & 43 \end{bmatrix}$$

$\triangleright m=11 \Rightarrow r(A)=3<r(A^{bs})=4 \Rightarrow$ hệ vô nghiệm

$\triangleright m\neq 11 \Rightarrow r(A)=r(A^{bs})=4 \Rightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất

# II. Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

**Bài tập:**

Biện luận theo *m* số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+3y+2z=1 \\ -2x+3y+mz=2 \\ 3x-4y+2z=1 \end{cases}$$