CHƯƠNG 3
KHÔNG GIAN VECTOR

I. Không gian vector

I.1 Định nghĩa không gian vector

Xét tập hợp

$$R^n = \underbrace{R \times R \times \cdots \times R}_{\text{n lần}}$$

$$= \{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in R\}$$

vector

Cụ thể,

$$R^1 = R$$

$$R^2 = R \times R = \{X = (a, b) \mid a, b \in R\}$$

$$R^3 = R \times R \times R = \{X = (a, b, c) \mid a, b, c \in R\}$$

I. Không gian vector

I.1 Định nghĩa không gian vector

Xét :

- ✓ Tập hợp $\boldsymbol{V} \neq \emptyset$;

  $u, v \in \boldsymbol{V}$: các vector

- ✓ Trường số $\boldsymbol{K}$, $\lambda \in \boldsymbol{K}$

Phép cộng hai vector: " + " :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} &\longrightarrow \boldsymbol{V} \\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &\longmapsto \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}. \end{aligned}$$

Phép nhân một số với vector: " . " :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times \boldsymbol{V} &\longrightarrow \boldsymbol{V} \\ (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{u}) &\longmapsto \boldsymbol{\lambda u}. \end{aligned}$$

I. Không gian vector

I.1 Định nghĩa không gian vector

- Cấu trúc đại số $(V,+,\bullet)$

  gọi là không gian vector (KGVT) trên trường **K** nếu thỏa mãn 8 tiên đề sau:

$$(1)\ u+v=v+u,\ \forall u,v\in V.$$

$$(2)\ (u+v)+w=u+(v+w),\ \forall u,v,w\in V.$$

$$(3)\ \exists\theta\in V:\ u+\theta=u,\ \forall u\in V.$$

$$(4)\ \forall u\in V,\exists -u\in V:\ u+(-u)=\theta.$$

I. Không gian vector

I.1 Định nghĩa không gian vector

$$(5)\ \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v,\ \forall u, v \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

$$(6)\ (\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u,\ \forall u \in V,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

$$(7)\ (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u),\ \forall u \in V,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

$$(8)\ 1u = u,\ \forall u \in V.$$

I. Không gian vector

I.1 Định nghĩa không gian vector

3.1.3 Ví dụ

- Tập các số thực $\mathbb{R}$ với 2 phép toán cộng và nhân là không gian vector.

  i. Vector không θ là số không 0.

  ii. Vector đối của u là số $-u$. v.v...

I. Không gian vector

I.1 Định nghĩa không gian vector

- Tập $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$ với 2 phép toán cộng và nhân vô hướng
  $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
  $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$
  là không gian vector.

  i. Vector không θ là cặp 2 số không $(0, 0)$.

  ii. Vector đối của $u = (x, y)$ là căp số
  $-u = (-x, -y)$. v.v...

I. Không gian vector

I.1 Định nghĩa không gian vector

- Tập $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$ với 2 phép toán cộng và nhân vô hướng $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$; $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ là không gian vector.

   i. Vector không θ là bộ 3 số không $(0, 0, 0)$.

   ii. Vector đối của $u = (x, y, z)$ là bộ 3 số $-u = (-x, -y, -z)$. v.v...

I. Không gian vector

I.1 Định nghĩa không gian vector

- Tập hợp các ma trận cấp mxn: M_{mxn} với 2 phép toán cộng 2 ma trận và nhân một số với một ma trận là không gian vector.

  i. Vector không θ là ma trận không O.

  ii. Vector đối của $u = A$. $-A$. v.v...

I. Không gian vector

I.1 Định nghĩa không gian vector

- Tập hợp các đa thức bậc nhỏ hơn $n+1$: $P_n[t]$ với 2 phép toán cộng 2 đa thức và nhân một số với một đa thức là không gian vector.

i. Vector không θ là đa thức đồng nhất không

ii. Vector đối của $u = x(t)$

I. Không gian vector

I.2 Một số tính chất của không gian vector

$$\forall u, v, w \in (V, +, \bullet), \alpha \in K$$

1. Chỉ có duy nhất một vector $\theta \in \boldsymbol{V}$ sao cho: $u + \theta = \theta + u = u$

2. Tồn tại duy nhất vector đối của u là –u sao cho: $u + (-u) = \theta$

3. $u + v = u + \mathrm{w} \Rightarrow v = \mathrm{w}$

4. $0.u = \theta, \ (-1).u = -u$

5. $\alpha.\theta = \theta$

6. $\alpha u = \theta \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ u = \theta \end{array}\right.$

I. Không gian vector

I.3 Không gian vector con

- Cho KGVT $(V,+,\bullet)$ trên *K* & xét $\phi \neq W \subset V$
- W thừa hưởng phép + và nhân từ *K* có sẵn trên V
- $(W,+,\bullet)$ là 1 KGVT con của $(V,+,\bullet)$ nếu nó thỏa 2 điều kiện

$$\begin{cases} \forall \alpha, \beta \in W : (\alpha + \beta) \in W \\ \forall c \in K, \forall \alpha \in W : (c\alpha) \in W \end{cases} \quad (*)$$

Hoặc $\forall c \in K, \forall \alpha, \beta \in W : (c\alpha + \beta) \in W$ (**)

- Ký hiệu $(W,+,\bullet) \leq (V,+,\bullet)$ hay $W \leq V$

I. Không gian vector

I.3 Không gian vector con

✍ Ta thấy muốn chứng minh W là *không gian vector con* của V ta cần CM $W \neq \emptyset$ và (*) hoặc $W \neq \emptyset$ và (**)

Ví dụ 1: CM tập $W = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^2$ là không gian vector con của $\mathbb{R}^2$

Thậy vậy, với mọi $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}$ thì $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{a}, 0), \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{b}, 0)$ ta có:

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{a}, 0)+(\boldsymbol{b}, 0) = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, 0) = (\boldsymbol{x}, 0) \in \boldsymbol{W}$$

$$\boldsymbol{\lambda u} = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{a}, 0) = (\boldsymbol{\lambda a}, 0) = (\boldsymbol{x}, 0) \in \boldsymbol{W}, \forall \boldsymbol{\lambda}.$$

I. Không gian vector

I.3 Không gian vector con

Ví dụ 2 $V = \{ f : R \to R \mid f$ khả vi mọi cấp$\}$

$$W = \{ f \in V \mid 2f'' - 3f' + 5f = O \}$$

kiểm chứng $\boxed{W \leq V}$

Trước hết, ta có $\phi \neq W \subset V$ (do có hàm $O \in W$)

Tiếp theo, xét $g, h \in W$, và $c \in R$. Ta CM $\boxed{(cg + h) \in W}$

Thật vậy, do $g, h \in W$

, nên $\begin{cases} 2g'' - 3g' + 5g = O \\ 2h'' - 3h' + 5h = O \end{cases}$

$$\Rightarrow c(2g'' - 3g' + 5g) = O$$

$$\Rightarrow c(2g'' - 3g' + 5g) + (2h'' - 3h' + 5h) = O$$

$$\Rightarrow 2(cg'' + h'') - 3(cg' + h') + 5(cg + h) = O$$

$$\Rightarrow 2(cg + h)'' - 3(cg + h)' + 5(cg + h) = O$$

$$\Rightarrow 2k'' - 3k' + 5k = O \quad \Rightarrow k = (cg + h) \in W$$

KL: $\boxed{W \leq V}$

I. Không gian vector

I.3 Không gian vector con

- **Bài Tập:** Kiểm tra các tập sau đây có là không gian vector con của các không gian vector tương ứng không?

$$U = \{(x, y, z) \in R^3 / 2x - y + 3z = 0\}$$

$$W = \{(x, y) \in R^2 / x - 2y = 1\}$$

$$M = \{x(t) = at^2 + bt + c \in P_2[t] / a - b + c = 0\}$$

$$N = \left\{ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} / a_{11} + a_{12} - a_{21} + 2a_{22} = 0 \right\}$$

II. Sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính

II.1 Tổ hợp tuyến tính

Cho các vector $x_1, x_2, \ldots, x_m \in V$, với V là KGVT trên trường *K*

Các hệ số $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in K$

Vector $\boxed{x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m}$

là tổ hợp tuyến tính của hệ vector $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$

=> Vector x biểu thị tuyến tính được qua hệ vector $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$

Lưu ý:

Ta có thể thành lập vô số tổ hợp tuyến tính từ hệ vector $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$

II. Sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính

II.1 Tổ hợp tuyến tính

Ví dụ: Cho $x_1 = (1,-2), x_2 = (3,1), x_3 = (5,-3)$

Ta có: 2 (1,-2) + (3,1) = (5,-3)

hay $$2x_1 + x_2 = x_3$$

Vậy x_3 là tổ hợp tuyến tính của hệ (x_1, x_2)

hay x_3 biểu thị tuyến tính được qua hệ (x_1, x_2)

II. Sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính

II.1 Tổ hợp tuyến tính

Ví dụ. Trong không gian vector $\mathbb{R}^2$,

xét 3 vector $x_1 = (-1, 0)$, $x_2 = (0, -1)$, $x_3 = (1, 1)$. Khi đó:

$$2(-1,0)+2(0,-1)+2(1,1) = (0,0)$$
$$3(-1,0)+3(0,-1)+3(1,1) = (0,0)$$

Vậy vector không θ biểu thị tuyến tính được qua hệ $\{x_1, x_2, x_3\}$ bằng hai cách

$$\theta = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3;$$
$$\theta = 3x_1 + 3x_2 + 3x_3.$$

II. Sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính

II.1 Tổ hợp tuyến tính

Nhận xét:

(1) Cách biểu diễn $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ nói chung không duy nhất.

(2) Vector không θ thì biểu thị tuyến tính được qua mọi hệ vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Ví dụ. $\theta = (0,0,0) = 0(1,2,4) + 0(2,0,1) + 0(-1,4,8)$

suy ra $\theta = 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n$, $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n$.

II. Sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính

II.2 Hệ độc lập và phụ thuộc tuyến tính

Nếu: $\theta = 0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n$

=> Vector không (θ) biểu thị tuyến tính tầm thường qua hệ vector $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Nếu: $\theta = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ $\quad (\lambda_i \neq 0)$

=> Vector không (θ) biểu thị tuyến tính không tầm thường qua hệ vector $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

II. Sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính

II.2 Hệ độc lập và phụ thuộc tuyến tính

Cho hệ n vector $X = \{x_1, x_2, \dots x_n\} \subset V$

X: là hệ độc lập tuyến tính nếu vector không *chỉ biểu thị tuyến tính tầm thường* qua hệ vector X

X: là hệ phụ thuộc tuyến tính nếu vector không *có thể biểu thị tuyến tính không tầm thường* qua hệ vector X

Ví dụ: Cho $x_1 = (1, 2); x_2 = (3, 7); \quad x_3 = (2, 4)$ Ta có

$$4(1, 2) + 0(3, 7) - 2(2, 4) = (0, 0)$$

Suy ra, hệ vector $\{x_1, x_2, x_3\}$ là phụ thuộc tuyến tính.

II. Sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính

II.2 Hệ độc lập và phụ thuộc tuyến tính

Phương pháp xét sự độc lập của hệ vector X=$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

- Xét đẳng thức:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = \theta$$

- Đưa đẳng thức trên về hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.
- Tìm hạng của ma trận hệ số của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:
  - Nếu r(A) =n: hệ chỉ có nghiệm tầm thường => hệ vector X độc lập tuyến tính
  - Nếu r(A) <n: hệ có nghiệm không tầm thường => hệ vector X phụ thuộc tuyến tính

II. Sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính

II.2 Hệ độc lập và phụ thuộc tuyến tính

Ví dụ. Cho không gian vector $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^3$ và hệ

$$\{\boldsymbol{x}_1 = (1,1,1), \boldsymbol{x}_2 = (1,1,0), \boldsymbol{x}_3 = (1,0,0)\}.$$

Xét sự độc lập của hệ vector trên.

Xét đẳng thức: $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \theta$

$$\Leftrightarrow \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(1,0,0) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, \lambda_1+\lambda_2, \lambda_1) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ vector trên độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$.

II.2 Hệ độc lập và phụ thuộc tuyến tính

Ví dụ:

Cho không gian vector $V = \mathbb{R}^2$ và hệ 3 vector

$$\{x_1 = (1, -2), x_2 = (1, 4), x_3 = (3, 5)\}.$$

Xét sự độc lập tuyến tính của hệ vector trên.

Xét đẳng thức: $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \theta$

$$\lambda_1(1, -2) + \lambda_2(1, 4) + \lambda_3(3, 5) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3, -2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 5\lambda_3) = (0, 0)$$

II. Sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính

II.2 Hệ độc lập và phụ thuộc tuyến tính

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -3\lambda_3 \\ -2\lambda_1 + 4\lambda_2 = -5\lambda_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{7}{6}\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\frac{11}{6}\lambda_3 \end{cases}$$

➡ Từ đây ta có thể chọn ra rất nhiều bộ $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ không đồng thời bằng 0 thỏa mãn điều kiện này

➡ Hệ vector trên là phụ thuộc tuyến tính

II. Sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính

II.2 Hệ độc lập và phụ thuộc tuyến tính

Ví dụ.

Cho không gian vector $V = P_2[t]$ và hệ vector

$$x_1(t) = t^2 - 2t - 1$$

$$x_2(t) = 2t^2 - t$$

$$x_3(t) = 3t - 5.$$

Xét sự độc lập của hệ vector trên.

Xét đẳng thức: $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \theta$

$$\Leftrightarrow \lambda_1(t^2 - 2t - 1) + \lambda_2(2t^2 - t) + \lambda_3(3t - 5) \equiv 0t^2 + 0t + 0$$

II. Sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính

II.2 Hệ độc lập và phụ thuộc tuyến tính

$$\lambda_1(t^2-2t-1)+\lambda_2(2t^2-t)+\lambda_3(3t-5)\equiv 0t^2+0t+0$$

$$(\lambda_1+2\lambda_2)t^2+(-2\lambda_1-\lambda_2+3\lambda_3)t+(-\lambda_1-5\lambda_3)\equiv 0t^2+0t+0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+2\lambda_2=0 \\ -2\lambda_1-\lambda_2+3\lambda_3=0 \\ -\lambda_1-5\lambda_3=0 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

II. Sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính

II.2 Hệ độc lập và phụ thuộc tuyến tính

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow r(A) = 3$$

Hệ chỉ có nghiệm tầm thường: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Vậy hệ vector trên độc lập tuyến tính trong $\boldsymbol{P_2[t]}$.

II. Sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính

II.2 Hệ độc lập và phụ thuộc tuyến tính

- **Ví dụ:** Xét sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính của hệ vector sau

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}; X_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Xét đẳng thức: $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 = \theta$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

II. Sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính

II.2 Hệ độc lập và phụ thuộc tuyến tính

$$\lambda_1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}+\lambda_4\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0\\ 2\lambda_2+2\lambda_3+2\lambda_4=0\\ 3\lambda_3+3\lambda_4=0\\ 4\lambda_4=0\end{cases}\qquad A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

Hệ chỉ có nghiệm tầm thường. Vậy hệ vectơ đã cho độc lập tuyến tính.

II. Sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính

II.2 Hệ độc lập và phụ thuộc tuyến tính

Nhận xét: Hệ chứa véc tơ θ là hệ phụ thuộc tuyến tính.

Tính chất

1) Hệ véc tơ chứa *hệ con phụ thuộc tuyến tính là hệ phụ thuộc tuyến tính.* Vì vậy, mọi hệ con của hệ độc lập tuyến tính là hệ độc lập tuyến tính.

2) Một hệ véc tơ là *phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có một véc tơ là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại*.

3) Giả sử hệ $\{v_1, ..., v_n\}$ độc lập tuyến tính. Khi đó hệ $\{v_1, v_2, ..v_n, u\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi *u là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ* $\{v_1, ..., v_n\}$, *khi đó ta có thể biểu diễn duy nhất* $u = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$.

II. Sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính

II.3 Hạng của một hệ vector

1. Định nghĩa : Cho $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$, với V là KGVT trên trường K

Số tối đa các vector độc lập tuyến tính có thể rút ra từ S gọi là hạng của hệ S, kí hiệu r(S) hay rank(S)

2. Tính chất :

+) Nếu r(S) = r thì mọi vectơ của S đều biểu thị tuyến tính qua hệ con bất kì (của S) có r vectơ đltt.

+) Nếu $u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$ thì r(S) = r(S'), trong đó $S' = S \cup \{u\}$.

+) Nếu mọi vectơ của hệ S đều biểu thị tuyến tính qua các vectơ của hệ $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \subset V$ thì r(S) ≤ r(W)

II. Sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính

II.3 Hạng của một hệ vector

3. Phương pháp tìm hạng của một hệ vector

- **Tính hạng của một hệ vectơ theo hạng của ma trận**

Trong R^n cho hệ vectơ : $S=\{v_1, v_2, ..., v_m\}$

$$v_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$$
$$v_2 = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n})$$
$$\dots$$
$$v_m = (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn})$$

=> ta lập ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Định lý: Hạng của hệ vector S bằng hạng của ma trận A thành lập từ tọa độ của các vector của hệ S xem là các hàng của A hoặc xem là các cột của A

II. Sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính

II.3 Hạng của một hệ vector

Hệ quả: Trong R^n cho hệ vectơ $S=\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ Ta có :

- Nếu m > n : hệ S pttt
- Nếu m<= n:
  - Nếu r(S) =m : hệ S đltt
  - Nếu r(S) <m : hệ S pttt

II. Sự độc lập và phụ thuộc tuyến tính

II.3 Hạng của một hệ vector

Ví dụ:

a) $R^3 : \alpha_1 = (1,0,-2),\ \alpha_2 = (-4,-1,5),\ \alpha_3 = (1,3,4)$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$$\Rightarrow r(A) = 3 = r(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\})$$

Vậy hệ $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ đltt.

II.3 Hạng của một hệ vector

Ví dụ:

b) $$R^4 : \beta_1 = (1,3,0,3),\ \beta_2 = (3,2,-1,2),\ \beta_3 = (4,5,-1,5)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow r(A) = 2 = r(\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}) < 3.$$

Vậy hệ $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ pttt.

III. Cơ sở và số chiều

III.1 Hệ sinh của một không gian vector

Cho $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$, V: KGVT trên trường K

1. Không gian con sinh bởi một họ vector

W= tập hợp <u>tất cả</u> các THTT của các vector của S gọi là bao tuyến tính của S

Kí hiệu: W= span(S), S: hệ sinh của W

$$\boxed{W = span(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \mid k \in N, v_i \in S, \lambda_i \in K \right\}}$$

☞ W=span(S) là một không gian vector con của V: W≤S

III. Cơ sở và số chiều

III.1 Hệ sinh của một không gian vector

2. Hệ sinh của một không gian vector

Nếu $\forall\, u \in V$: $\boxed{u = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n}$

☞ Hệ S sinh ra V hay S là hệ sinh hữu hạn của V

Kí hiệu V= span(S)

Ví dụ: Trong không gian vector $\mathbb{R}^2$, cho hệ vector

$$E = \{e_1 = (1,0);\ e_2 = (0,1)\}$$

Khi đó hệ vector E là hệ sinh của không gian vector $\mathbb{R}^2$

III. Cơ sở và số chiều

III.1 Hệ sinh của một không gian vector

2. Hệ sinh của một không gian vector

Ví dụ: Trong không gian vector $\mathbb{R}^2$, cho hệ vector

$$E = \{e_1 = (1,0);\ e_2 = (0,1)\}$$

Khi đó hệ vector E là hệ sinh của không gian vector $\mathbb{R}^2$

Thật vậy, $\forall x \epsilon \mathbb{R}^2$, khi đó,

$$x = (a, b) = a(1,0) + b(0,1) = ae_1 + be_2$$

III. Cơ sở và số chiều

III.2 Cơ sở và số chiều của một không gian vector

III.2.1 Khái niệm

- Cơ sở của không gian vector: Hệ vector $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ trong không gian vector V được gọi là một cơ sở của V nếu E là hệ sinh và độc lập tuyến tính.
  - V có ít nhất 1 cơ sở
  - tất cả các cơ sở khác của V đều có đúng n vector

Số chiều của không gian vector : số lượng vector n trong mỗi cơ sở của V gọi là số chiều của V

Kí hiệu: $n = \dim V$

☞ V: không gian n chiều

n>0: V: không gian hữu hạn chiều

Quy ước: $\dim\{\theta\} = 0$

III. Cơ sở và số chiều

III.2 Cơ sở và số chiều của một không gian vector

- Ví dụ 1 R^n có 1 cơ sở thông dụng là

$$E_0 = \{\varepsilon_1 = (1,0,0,\ldots,0), \varepsilon_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ldots,\varepsilon_n = (0,\ldots,0,1)\}$$

Vì E_0 đltt và

$$R^n = span(E_0) = \{\alpha = c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + \cdots + c_n\varepsilon_n \mid c_1, c_2, \ldots, c_n \in R\}$$

- Ta nói E_0 là cơ sở chính tắc của R^n

- Vậy dim R^n = n

- Ví dụ 2 tương tự $\boxed{R_n[x]}$ có cơ sở chính tắc là

$$\beta_0 = \{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\} \quad \text{và} \quad \dim R_n[x] = n+1$$

III.2 Cơ sở và số chiều của một không gian vector

III.2.2 Cách tìm cơ sở của không gian vector

1. Nhận diện nhanh 1 cơ sở trong R^n

a/ nếu $\boxed{n=1}$, nghĩa là $R^1 = R$ thì

$\forall \alpha \in R \setminus \{0\}$, ta có $\boxed{a=\{\alpha\}}$ là 1 cơ sở cho R^1

b/ nếu $\boxed{n=2}$, ứng với $R^2 = \{(a,b) \mid a,b \in R\}$

và $\alpha_1, \alpha_2 \in R^2$ sao cho α_1 và α_2 có tọa độ không tỷ lệ

thì $\boxed{a=\{\alpha_1, \alpha_2\}}$ là 1 cơ sở của R^2

III.2 Cơ sở và số chiều của một không gian vector

III.2.2 Cách tìm cơ sở của không gian vector

1. Nhận diện nhanh 1 cơ sở trong R^n

c/ nếu $\boxed{n \geq 2}$, và ta xét $a = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ (có n vector) trong R^n

- Lập ma trận $\boxed{A_a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}$

- Nếu $\boxed{\det(A_a) \neq 0}$ thì α là 1 cơ sở của R^n

- Nếu $\boxed{\det(A_a) = 0}$ thì α không là 1 cơ sở của R^n

III.2 Cơ sở và số chiều của một không gian vector

III.2.2 Cách tìm cơ sở của không gian vector

1. Nhận diện nhanh 1 cơ sở trong R^n

✍ Ví dụ trong R^3 cho

$$a = \{\alpha_1 = (-3,1,0), \alpha_2 = (5,4,3), \alpha_3 = (9,1,5)\}$$

$$\beta = \{\alpha_1 = (-3,1,0), \alpha_2 = (5,4,3), \alpha_4 = (7,9,6)\}$$

☞ Lập

$$A_a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 9 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_\beta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

III.2 Cơ sở và số chiều của một không gian vector

III.2.2 Cách tìm cơ sở của không gian vector

1. Nhận diện nhanh 1 cơ sở trong R^n

✍ Ví dụ (tt)

$$\Rightarrow |A_a| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 9 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 17 & 4 & 3 \\ 12 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 17 & 3 \\ 12 & 5 \end{vmatrix} = -49 \neq 0$$

$$\& \, |A_\beta| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

☞ KL: $\boxed{a}$ là 1 cơ sở của R^3

$\boxed{\beta}$ không là cơ sở của R^3

III.2 Cơ sở và số chiều của một không gian vector

III.2.2 Cách tìm cơ sở của không gian vector

2.Nhận diện cơ sở khi đã biết số chiều của không gian

- Xét KGVT V có dim V= n , và tập hợp

$$a = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset V$$

(a có đúng n vector)

- Khi đó

a là 1 cơ sở của V $\Leftrightarrow$ span(a)=V

a là 1 cơ sở của V $\Leftrightarrow$ a độc lập tuyến tính (thường dùng)

III.2 Cơ sở và số chiều của một không gian vector

III.2.2 Cách tìm cơ sở của không gian vector

3. Cách tìm cơ sở của KG con sinh bởi một hệ vector:

- Trong không gian vector V, cho hệ $S = \{u_1, \dots, u_p\} \subset V$
- W= span(S): không gian con của V

☞ r(S)= dim W

☞ Mọi hệ gồm r vector độc lập tuyến tính rút từ S là một cơ sở của W

III.2 Cơ sở và số chiều của một không gian vector

III.2.2 Cách tìm cơ sở của không gian vector

3. Cách tìm cơ sở của KG con sinh bởi một hệ vector:

Ví dụ: Trong R^4 cho

$$\beta_1 = (1,3,0,3),\ \beta_2 = (3,2,-1,2),\ \beta_3 = (4,5,-1,5).$$

Tìm cơ sở của $W = \text{span}\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}.$

Giải:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & -1 & -7 \\ 0 & -7 & -1 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow r(A) = 2,$$

Vậy 1 cơ sở của W là (1,3,0,3), (0,-7,-1,-7). (or (1,3,0,3), (3,2,-1,2))

III.2 Cơ sở và số chiều của một không gian vector

III.2.2 Cách tìm cơ sở của không gian vector

3. Cách tìm cơ sở của KG con sinh bởi một hệ vector:

Ví dụ: Trong R^3 cho $\alpha_1 = (1,0,-2),\ \alpha_2 = (-4,-1,5),\ \alpha_3 = (1,3,4)$

Tìm cơ sở của $W = \operatorname{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}.$

Giải:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$$\Rightarrow r(A) = 3$$

Vậy 1 cơ sở của W là $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3.$

III.2 Cơ sở và số chiều của một không gian vector

III.2.2 Cách tìm cơ sở của không gian vector

3. Cách tìm cơ sở của KG con sinh bởi một hệ vector:

✍ Ví dụ Cho

$$W=\{X=(a+2b+c+2d,a-b-c+d,2a-5b-4c+d,$$
$$4a+2b+6d)\in R^4 \mid a,b,c,d\in R\}$$

☞ CM $W\le R^4$ và chỉ ra 1 tập sinh (hệ sinh) S cho W

✍ Ta có

$$W=\{X=(a,a,2a,4a)+(2b,-b,-5b,2b)+(c,-c,-4c,0)$$
$$+(2d,d,d,6d)\mid a,b,c,d\in R\}$$

$$=\{X=a(1,1,2,4)+b(2,-1,-5,2)+c(1,-1,-4,0)$$
$$+d(2,1,1,6)\mid a,b,c,d\in R\}$$

III.2 Cơ sở và số chiều của một không gian vector

III.2.2 Cách tìm cơ sở của không gian vector

3. Cách tìm cơ sở của KG con sinh bởi một hệ vector:

$$\Rightarrow W = \{X = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_2 \mid a, b, c, d \in R\}$$

, với $\begin{cases} \alpha_1 = (1,1,2,4) \\ \alpha_2 = (2,-1,-5,2) \\ \alpha_3 = (1,-1,-4,0) \\ \alpha_4 = (2,1,1,6) \end{cases}$

$\Rightarrow W = < S >$, trong đó $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$

$$\Rightarrow W \leq R^4$$

IV. Tọa độ trong không gian vector

IV.1 Tọa độ vector theo cơ sở

- Giả sử KGVT n chiều V có cơ sở là $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$
- Với mỗi $E \in V$, ta đã biết tồn tại duy nhất các số $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

- Ký hiệu $(x)_{/E} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ hay

$$[x]_{/E} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

& gọi là tọa độ của x theo cơ sở E

IV. Tọa độ trong không gian vector

IV.1 Tọa độ vector theo cơ sở

Ví dụ: Cho $F = \{f_1 = (1,1); f_2 = (1,0)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^2$ và $x = (5,3)$. Tìm tọa độ của x đối với cơ sở chính tắc E và cơ sở F.

Ta có: $x = (5,3) = 5(1,0) + 3(0,1) = 5e_1 + 3e_2$

Vậy: $(x)_{/E} = (5,3)$

IV. Tọa độ trong không gian vector

IV.1 Tọa độ vector theo cơ sở

Ví dụ: Cho $F = \{f_1 = (1,1); f_2 = (1,0)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^2$ và $x = (5,3)$. Tìm tọa độ của x đối với cơ sở chính tắc E và cơ sở F.

Ta có: $x = (5,3) = 3(1,1) + 2(1,0) = 3f_1 + 2f_2$

Vậy: $(x)_{/F} = (3,2)$

IV. Tọa độ trong không gian vector

IV.1 Tọa độ vector theo cơ sở

- Ví dụ $V = R^3$ có cơ sở

$$a = \{\alpha_1 = (-3,2,1), \alpha_2 = (1,5,0), \alpha_3 = (-2,-4,1)\}$$

- Cho $\boxed{\alpha = (1,4,-2) \in R^3}$ hỏi $[\alpha]_a = ???$

- Đặt $[\alpha]_a = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$

$$\Rightarrow (1,4,-2) = c_1(-3,2,1) + c_2(1,5,0) + c_3(-2,-4,1)$$

IV. Tọa độ trong không gian vector

IV.1 Tọa độ vector theo cơ sở

$$\Rightarrow \begin{cases} -3c_1 + c_2 - 4c_3 = 1 \\ 2c_1 + 5c_2 - 4c_3 = 4 \\ c_1 + c_3 = -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{giải}} \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -2 \\ c_3 = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [\alpha]_a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

IV. Tọa độ trong không gian vector

IV.1 Tọa độ vector theo cơ sở

Ví dụ: Cho $F = \{f_1(t) = t^2 + 2t; f_2(t) = 3t - 1; f_3(t) = t^2 + 5\}$ là cơ sở của $\mathbf{P}_2[t]$ và $x(t) = 7t^2 + 3t + 21$. Tìm tọa độ của x đối với cơ sở F.

Ta có: $$x(t) = x_1 f_1(t) + x_2 f_2(t) + x_3 f_3(t)$$

IV. Tọa độ trong không gian vector

IV.1 Tọa độ vector theo cơ sở

$$x(t) = x_1 f_1(t) + x_2 f_2(t) + x_3 f_3(t)$$

$$7t^2 + 3t + 21 = x_1(t^2 + 2t) + x_2(3t - 1) + x_3(t^2 + 5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \qquad\qquad + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad = 3 \\ \qquad - x_2 + 5x_3 = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

Vậy: $(x)_{/F} = (3, -1, 4)$

IV. Tọa độ trong không gian vector

IV.2 Ma trận chuyển cơ sở

Giả sử trong KGVT n chiều V cho hai cơ sở

$$A=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\},\ B=\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\}$$

và $x \in V$ có các tọa độ $[x]_{/A}, [x]_{/B}$

Định nghĩa: Ma trận P thỏa mãn hệ thức:

$$\boxed{[x]_{/A} = P[x]_{/B}, \forall x \in V \quad (*)}$$

gọi là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở A sang cơ sở B.

Khi đó công thức (*) được gọi là công thức biến đổi tọa độ của vector x giữa 2 cơ sở A và B.

IV. Tọa độ trong không gian vector

IV.2 Ma trận chuyển cơ sở

Tìm ma trận P chuyển cơ sở từ A sang B:

Biểu diễn tuyến tính mỗi vector của B đối với A

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n \\
\beta_2 &= a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n \\
&\ldots\ldots \\
\beta_n &= a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n
\end{aligned}
\Longrightarrow
P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

IV. Tọa độ trong không gian vector

IV.2 Ma trận chuyển cơ sở

Tính chất của ma trận chuyển cơ sở

TC1: Giả sử P là ma trận chuyển từ cơ sở A sang cơ sở B. Khi đó

1) P khả nghịch

2) P^{-1} là ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở A

IV. Tọa độ trong không gian vector

IV.2 Ma trận chuyển cơ sở

Ví dụ

Trong R^3 cho 2 cở sở: E cơ sở chính tắc và

$$B=\{\beta_1 = (1,-1,1), \beta_2 = (2,3,1), \beta_3=(1,2,1)\}$$

a) Tìm ma trận chuyển từ E sang B

b) Tìm ma trận chuyển từ B sang E

c) Cho $\alpha = (1,2,3)$. Tìm $(\alpha)_{/B}$.

IV. Tọa độ trong không gian vector

IV.2 Ma trận chuyển cơ sở

Ví dụ. a) Ta có $E=\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$

$$\begin{aligned}\beta_1 &= e_1 - e_2 + e_3\\ \beta_2 &= 2e_1 + 3e_2 + e_3\\ \beta_n &= e_1 + 2e_2 + e_3\end{aligned} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

b) Do đó ma trận chuyển từ B sang E :

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1\\ 3 & 0 & -3\\ -4 & 1 & 5\end{bmatrix} \ldots$$

Bài tập 1:

Trong KGVT R^3 cho các vector

$$f_1 = (1,2,3),\ f_2 = (-1,1,0),\ f_3 = (2,1,1),\ x = (4,6,-3)$$

CMR: hệ vector $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ là cơ sở của R^3, tìm tọa độ của vector x đối với cơ sở F.

Bài tập 2:

Trong KGVT R^3 cho các vector

$$f_1 = (1,2,3),\ f_2 = (-1,1,0),\ f_3 = (2,1,m)$$

Tìm m để hệ vector $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ là cơ sở của R^3