Chương 1. HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

Bài 1. Khái niệm cơ bản

Bài 2. Đạo hàm riêng – Vi phân

Bài 3. Cực trị của hàm hai biến số

Chương 1. HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

Bài 1. Khái niệm cơ bản

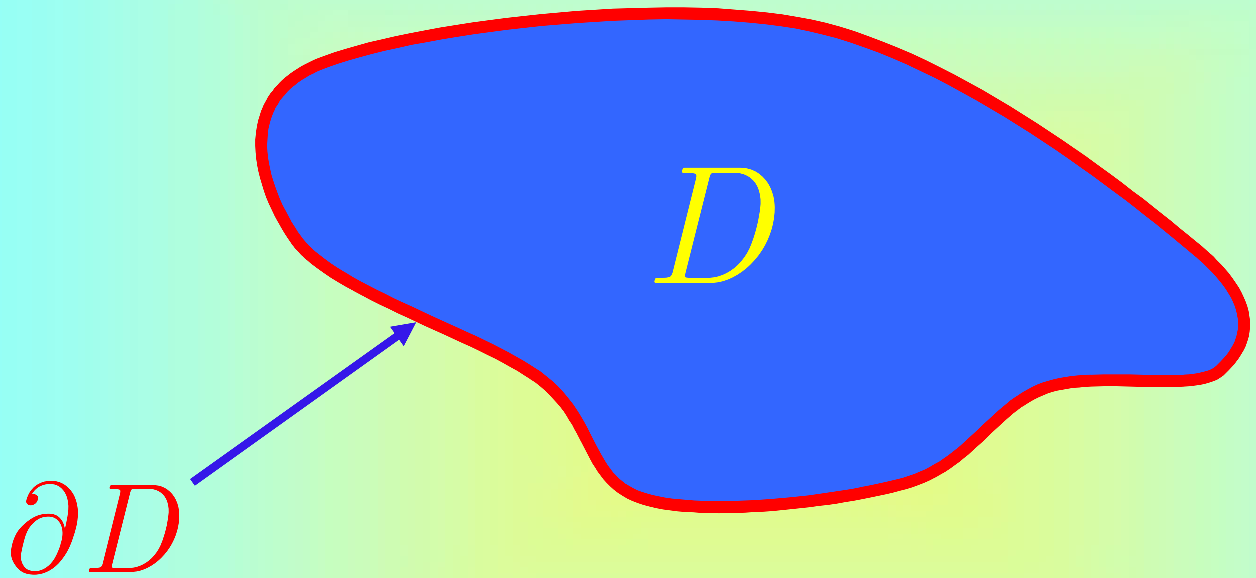
1.1. Các định nghĩa

1.2. Giới hạn của hàm hai biến số

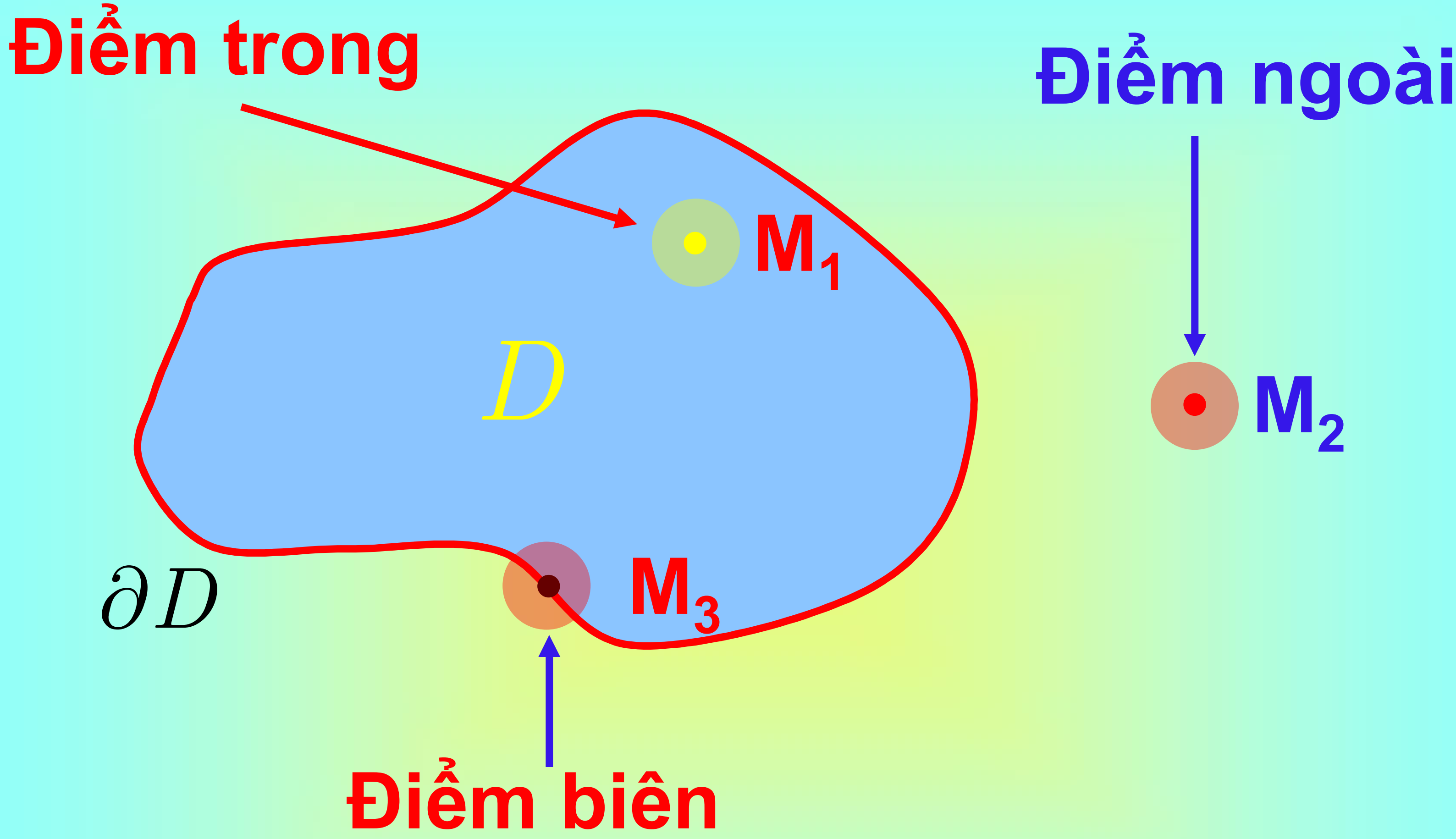
1.3. Hàm số liên tục

1.1. Các định nghĩa

a) Miền phẳng

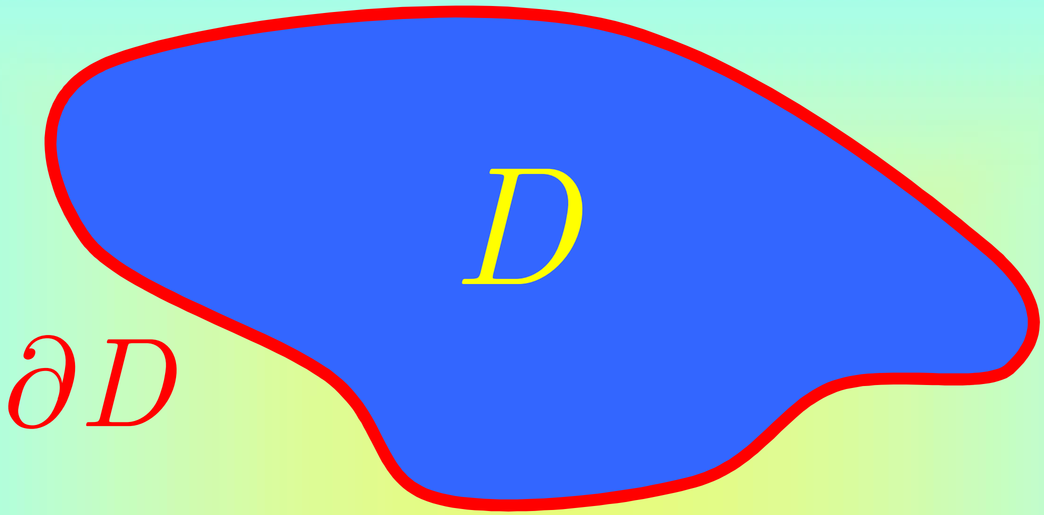


Bài 1. Khái niệm cơ bản



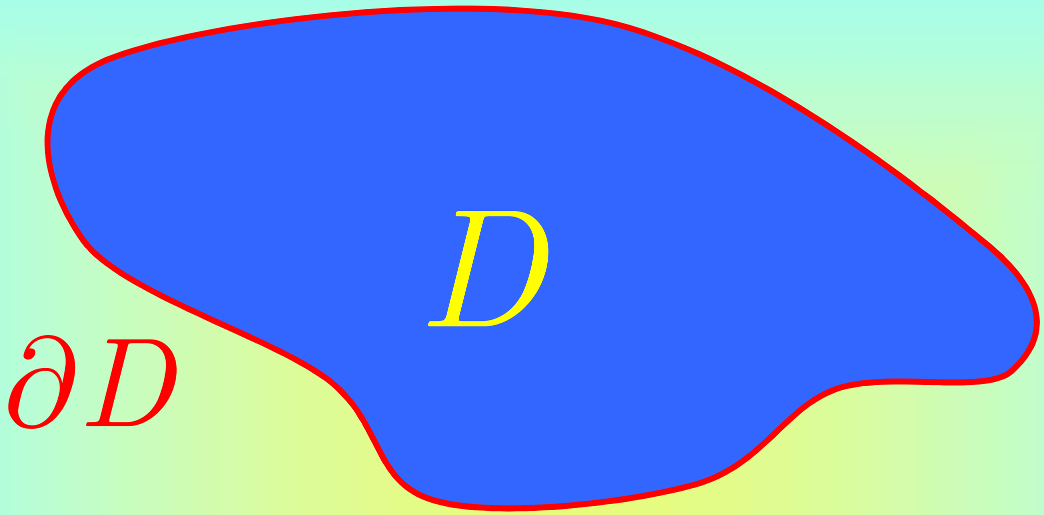
Bài 1. Khái niệm cơ bản

Miền đóng



$$\boxed{\bar{D} = D \cup \partial D}$$

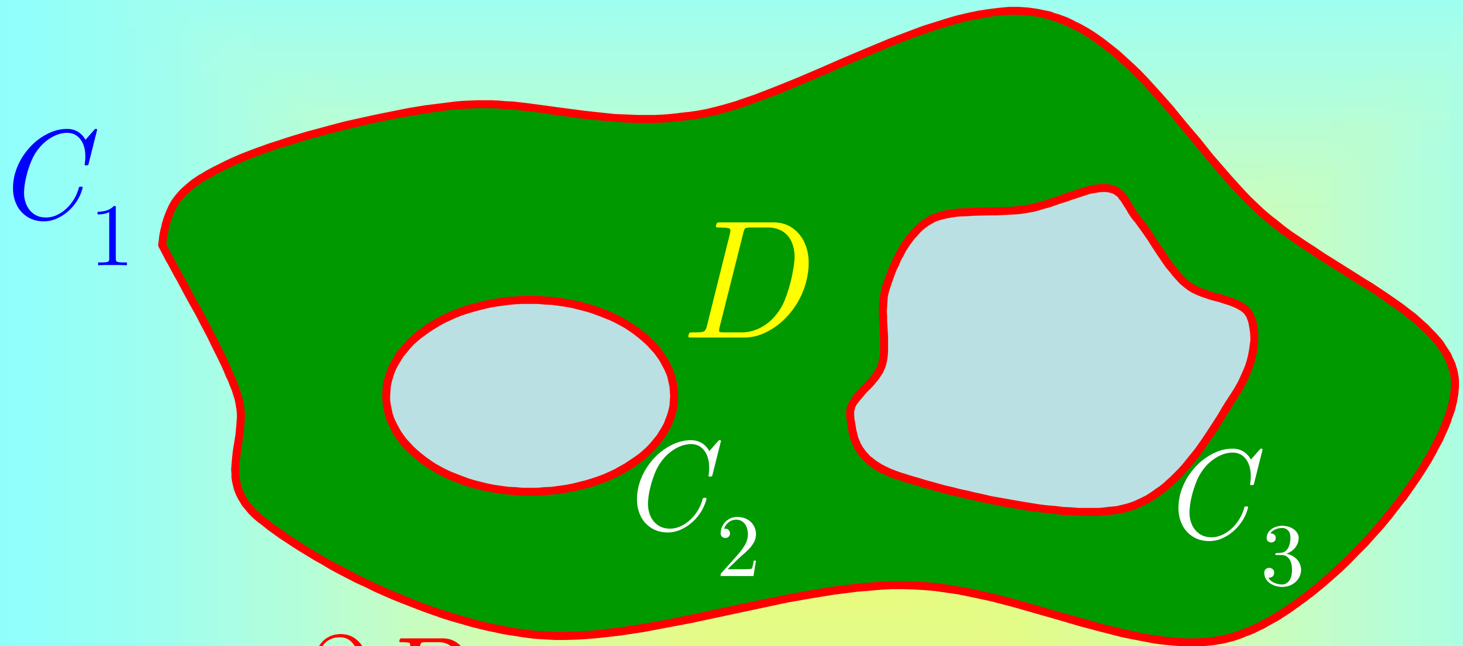
Miền mở



$$\boxed{D = \bar{D} \setminus \partial D}$$

Miền đơn liên

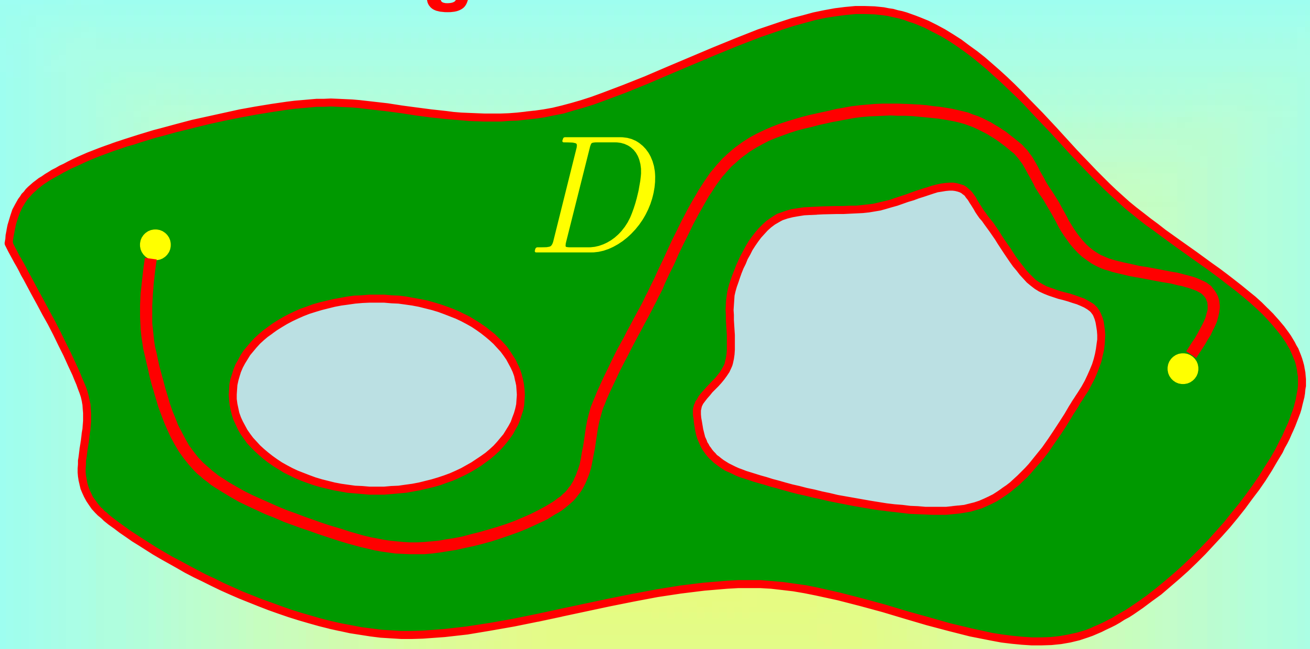
Miền đa liên



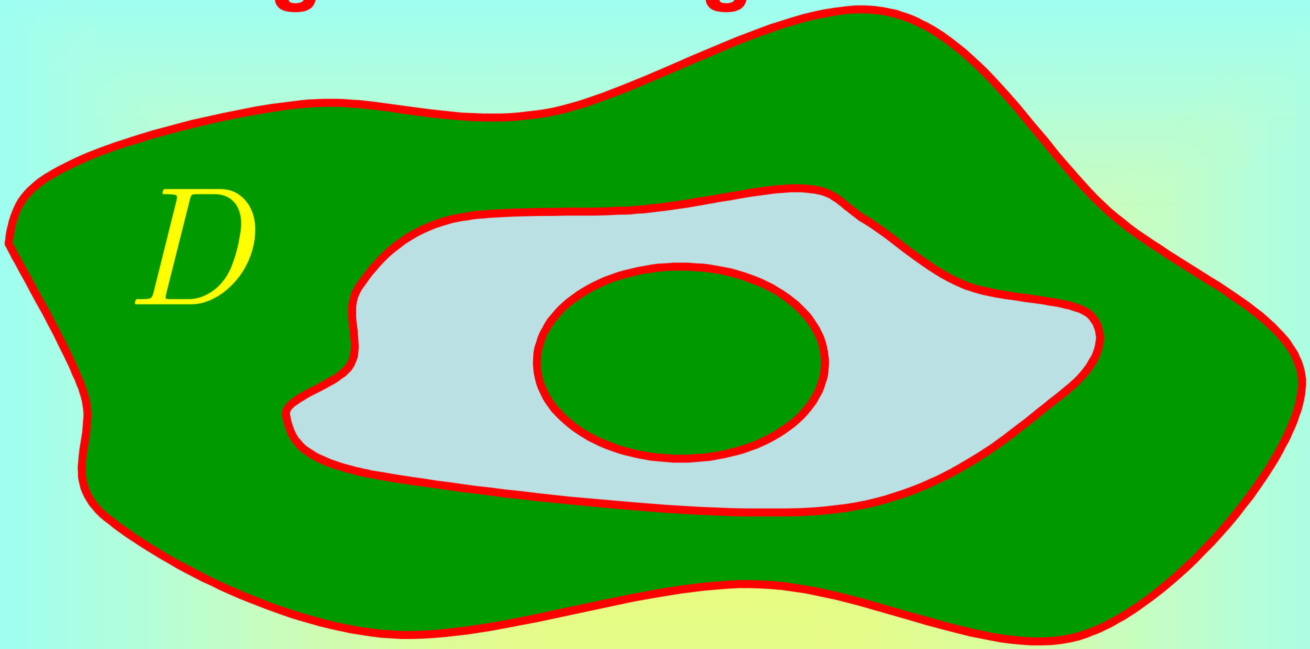
$$\partial D = C_1 \cup C_2 \cup C_3$$

Bài 1. Khái niệm cơ bản

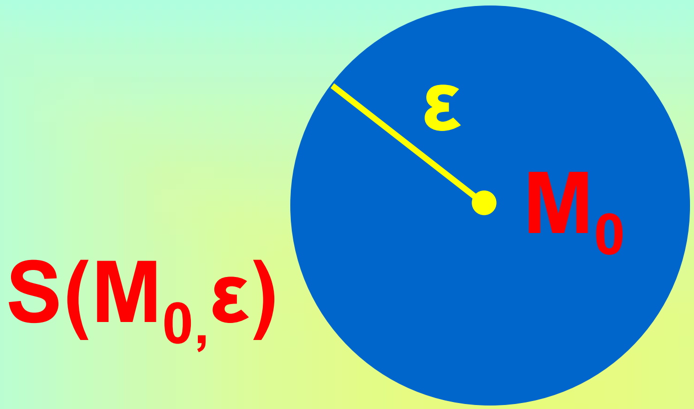
Miền liên thông



Miền không liên thông

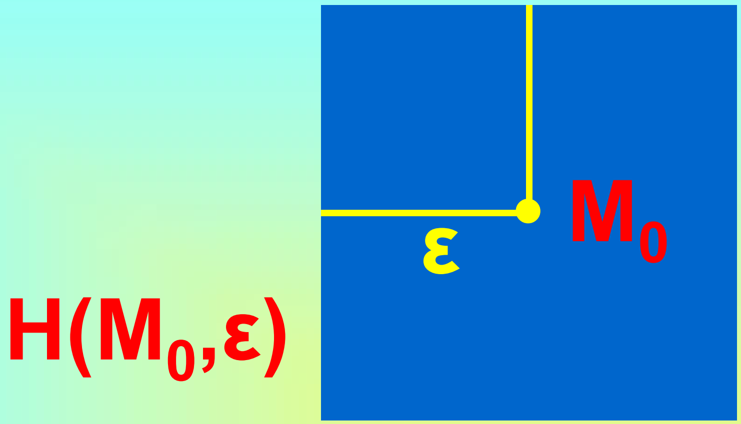


b) Lân cận của một điểm trong mặt phẳng



$$\boxed{M \in S(M_0, \varepsilon) \Leftrightarrow d(M, M_0) < \varepsilon}$$

Bài 1. Khái niệm cơ bản



$$M(x,y) \in H(M_0,\varepsilon) \Leftrightarrow \begin{cases} |\, x - x_0 \,| < \varepsilon \\ |\, y - y_0 \,| < \varepsilon \end{cases}$$

d) Hàm số hai biến số

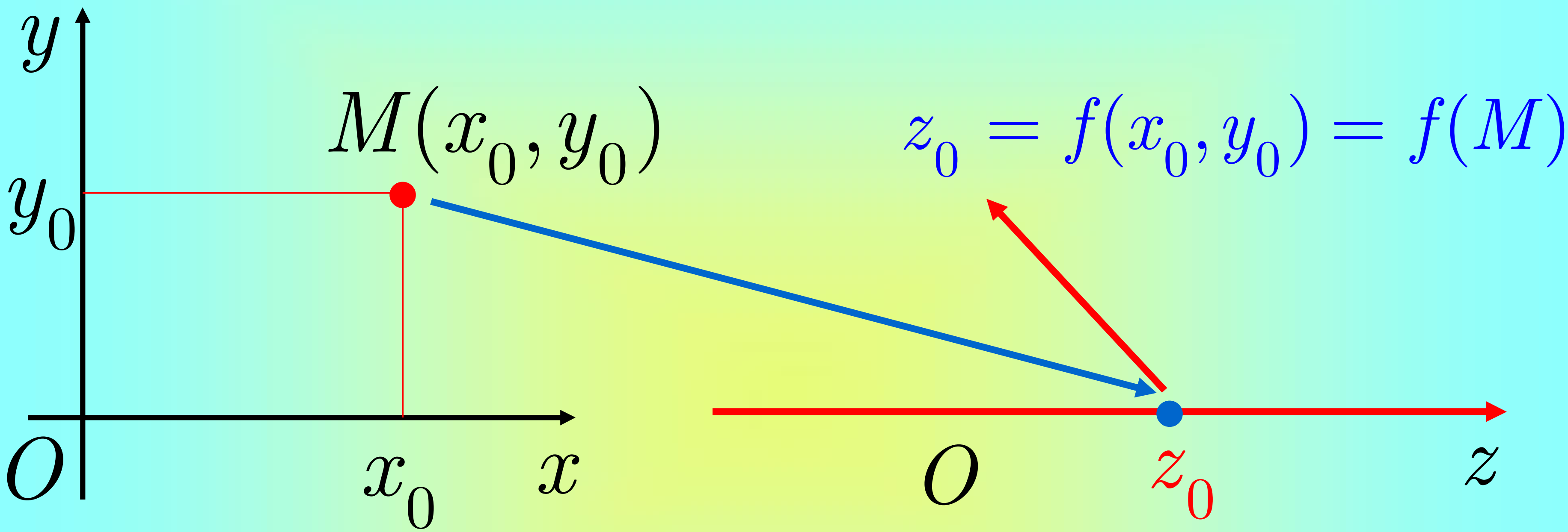
$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \in D \mapsto z = f(x, y) \in \mathbb{R}.$$

- Tập $D \subset \mathbb{R}^2$ được gọi là miền xác định (MXĐ) của hàm số $f(x, y)$, ký hiệu là D_f.

$$\boxed{D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \in \mathbb{R}\}}$$

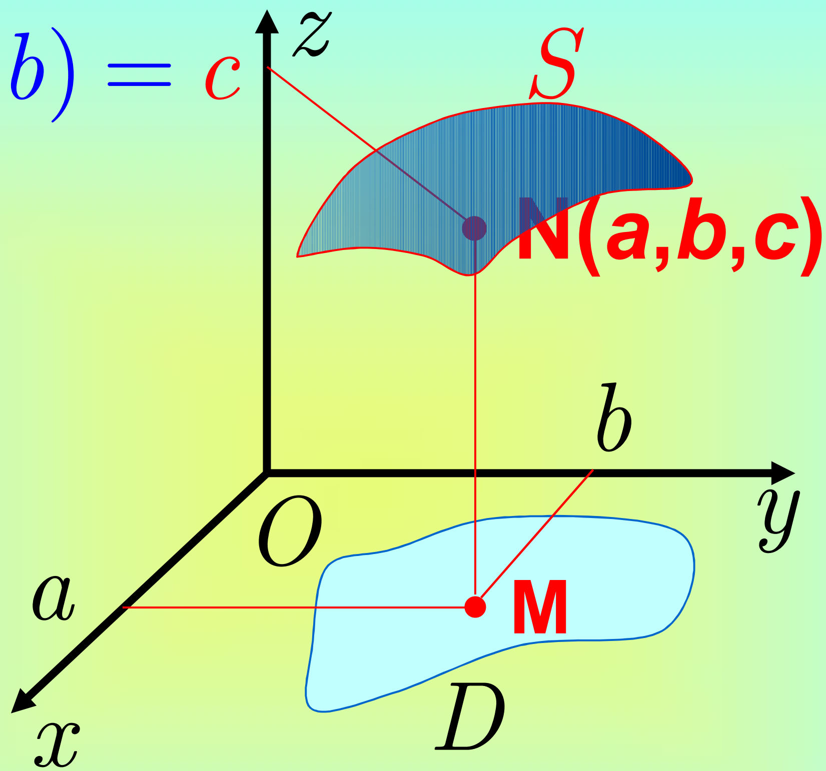
Bài 1. Khái niệm cơ bản

- $z = f(x,y)$ được gọi là giá trị của hàm số tại (x,y).



Đồ thị của hàm số *z* = *f*(*x*,*y*)

$$f(M) = f(a,b) = c$$



$$\boxed{S = \{(x, y, f(M)) \mid M(x,y) \in D\}}$$

Bài 1. Khái niệm cơ bản

VD 1

- Hàm số $f(x,\, y) = 3x^2y - \cos xy$ có $D_f = \mathbb{R}^2$.
- Hàm số $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ có MXĐ là hình tròn đóng tâm $O(0;\, 0)$, bán kính $R = 2$.

Vì $M(x, y) \in D_z \Leftrightarrow 4 - x^2 - y^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4.$$

Bài 1. Khái niệm cơ bản

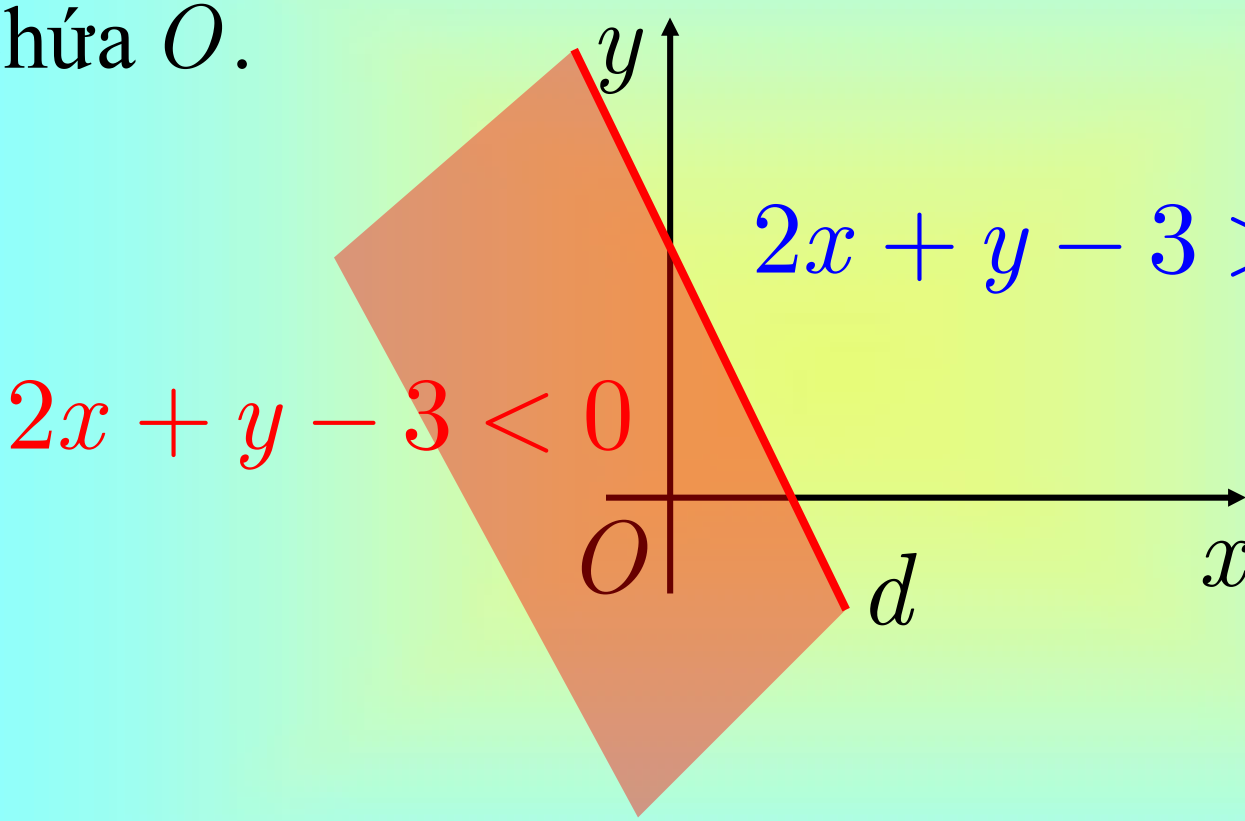
- Hàm số $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$ có MXĐ là hình tròn mở tâm $O(0;\, 0)$, bán kính $R = 2$.

Vì $M(x, y) \in D_z \Leftrightarrow 4 - x^2 - y^2 > 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 < 4.$$

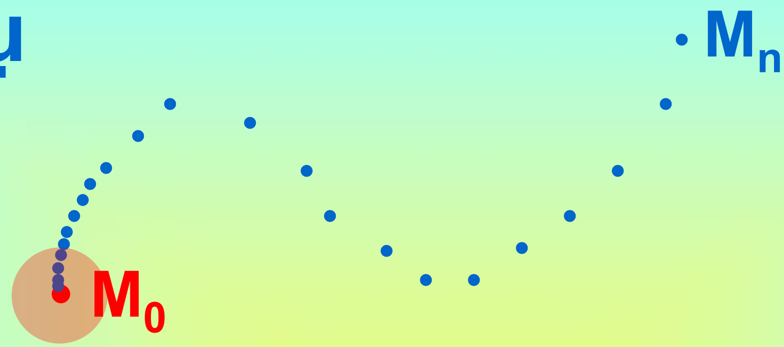
Bài 1. Khái niệm cơ bản

- Hàm số $z = f(x,y) = \ln(2x + y - 3)$ có MXĐ là nửa mp mở có biên $d: 2x + y - 3 = 0$, không chứa O.



1.2. Giới hạn của hàm số hai biến số

a) Điểm tụ



VD. $O(0,\ 0)$ là điểm tụ của dãy điểm $M_n\left(\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n^2}\right)$.

b) Định nghĩa giới hạn kép (giới hạn bội)

- Điểm $M_0(x_0, y_0)$ được gọi là giới hạn của dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ nếu $M_0(x_0, y_0)$ là điểm tụ ***duy nhất*** của dãy.

Ký hiệu là:

$$\lim_{n\to\infty} M_n = M_0 \text{ hay } M_n \xrightarrow{n\to\infty} M_0.$$

Bài 1. Khái niệm cơ bản

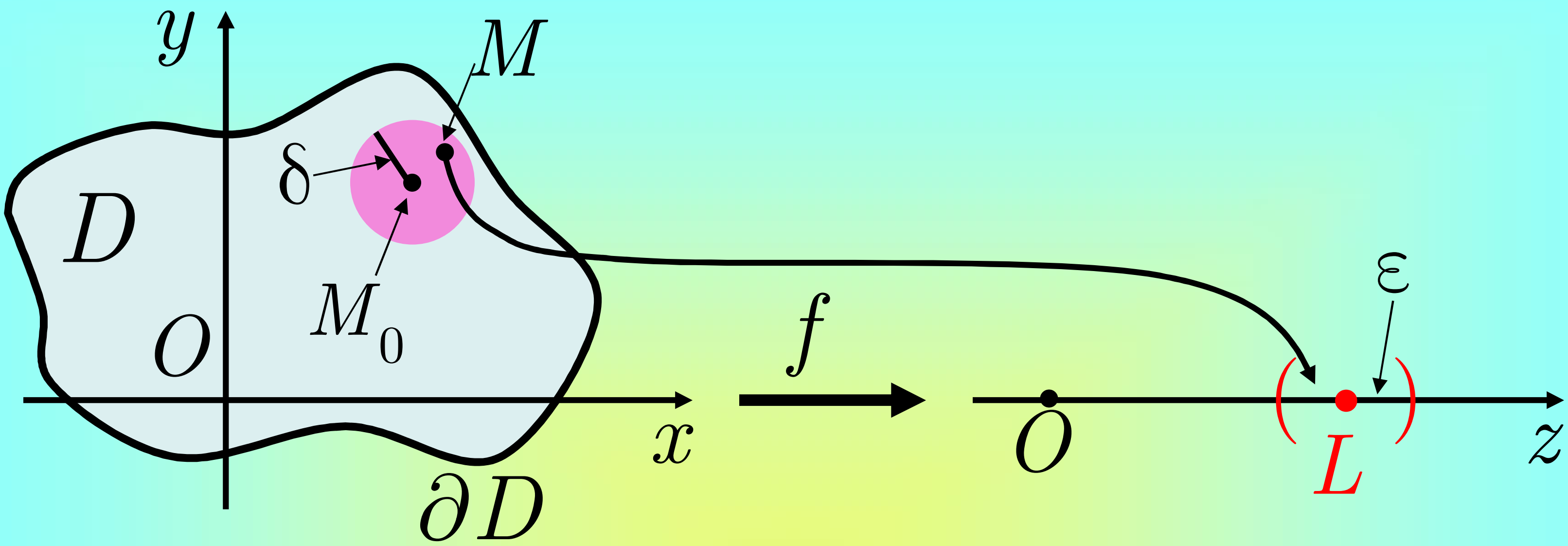
- Hàm số $f(x,\, y)$ có giới hạn là $L \in \mathbb{R} \bigcup \{\pm\infty\}$ khi

$M_n \xrightarrow{n\to\infty} M_0$ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,\, y_n) = L$.

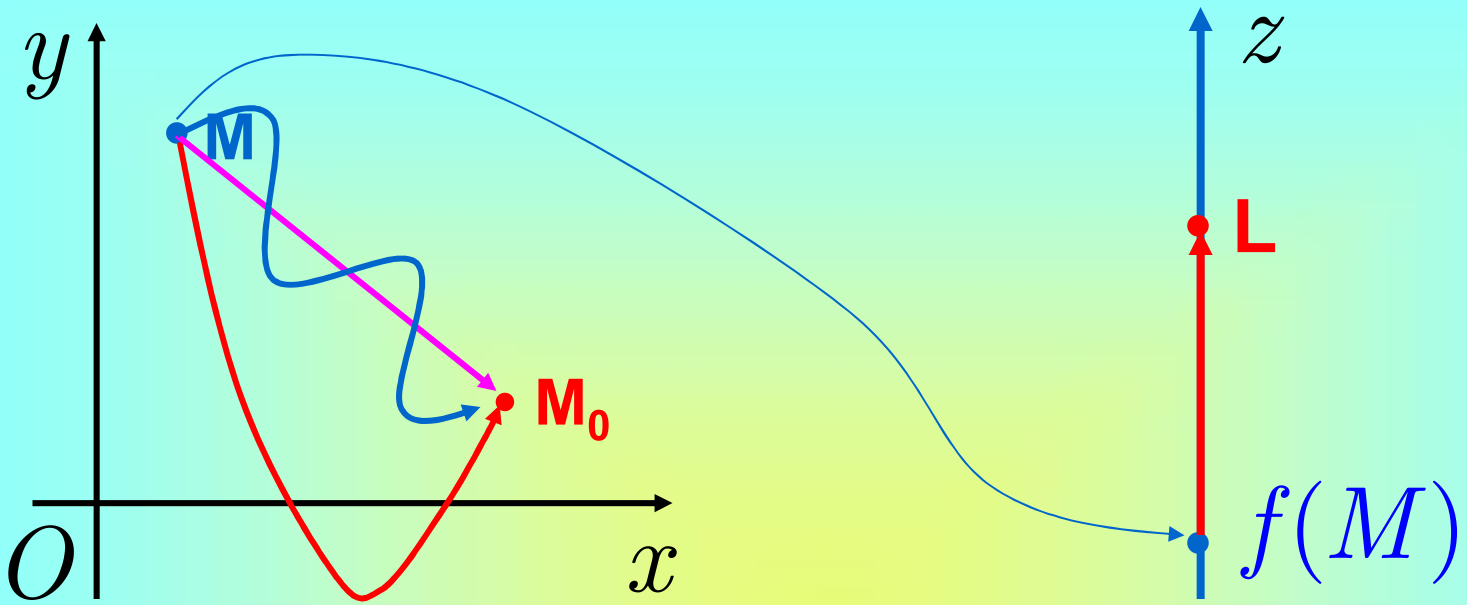
Ký hiệu là $L = \lim\limits_{M\to M_0} f(M)$

$$= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\, y) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,\, y).$$

Bài 1. Khái niệm cơ bản



Bài 1. Khái niệm cơ bản



VD 2. $$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{2x^2y - 3x - 1}{xy^2 + 3} = -\frac{3}{2}.$$

2.3 Một số phương pháp tìm giới hạn hàm hai biến

Phương pháp 1: Đặt ẩn phụ, đưa về tính giới hạn hàm một biến

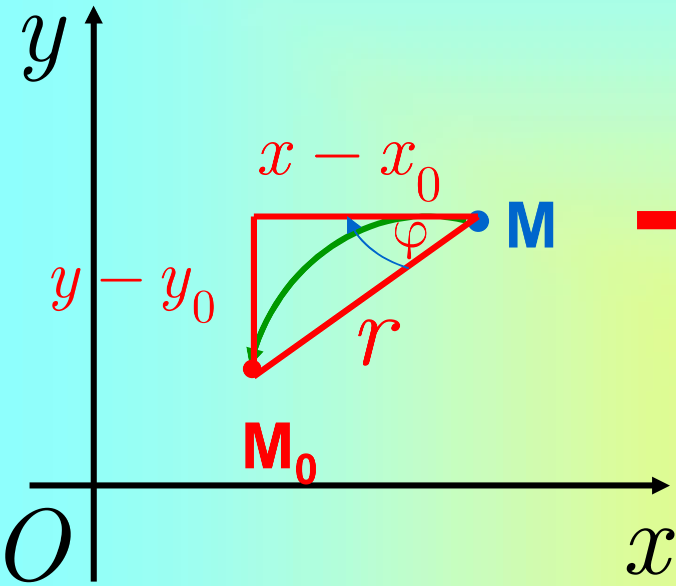
Ví dụ 2.3.1. Tính giới hạn $l = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{4-\sqrt{xy+16}}$.

Đặt $t = xy$. Khi $(x,y)\to(0,0)$ thì $t\to 0$. Do đó

$$l = \lim_{t\to 0}\frac{t}{4-\sqrt{t+16}} = \lim_{t\to 0}\frac{t(4+\sqrt{t+16})}{(4-\sqrt{t+16})(4+\sqrt{t+16})} = \lim_{t\to 0}\frac{t(4+\sqrt{t+16})}{-t} = -8.$$

Bài 1. Khái niệm cơ bản

Nhận xét



$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\varphi \\ y = y_0 + r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\boxed{M \to M_0 \Leftrightarrow r \to 0}$$

VD 4. Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

Giải. Đặt $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, ta có:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0}\frac{\sin r^2}{r^2} = 1.$$

2.3 Một số phương pháp tìm giới hạn hàm hai biến

Phương pháp 2: Sử dụng giới hạn kẹp bằng cách đánh giá bất đẳng thức

Định lí 2.3.1 (Giới hạn kẹp). *Giả sử $f(x,y), g(x,y)$ và $h(x,y)$ xác định trong lân cận V của điểm (x_0, y_0) thỏa mãn hai điều kiện*

1. $h(x,y) \leq f(x,y) \leq g(x,y)$ *với mọi (x,y) thuộc lân cận V.*
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = l.$

Khi đó

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l.$$

VD 3. Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Giải.

$$0 \le \left|f(x,y)\right| = \frac{\left|xy\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\left|xy\right|}{\sqrt{y^2}} = \left|x\right| \xrightarrow[y\to 0]{x\to 0} 0.$$

Vậy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,\, y) = 0.$

Ví dụ 2.3.2. Tính giới hạn $l = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.

Với $(x, y) \neq (0, 0)$, ta có

$$0 \leq \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{xy^2}{y^2}\right| = |x|.$$

Mặt khác $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$, do đó $l = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$.

2.3 Một số phương pháp tìm giới hạn hàm hai biến

Phương pháp 3: Chứng minh hàm không tồn tại giới hạn

Ví dụ 2.3.3. Xét hàm hai biến xác định bởi

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}; \quad (x,y) \neq (0,0)$$

Hai dãy $u_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \to (0,0)$ và $v_k = (\frac{2}{k}, \frac{1}{k}) \to (0,0)$ khi $k \to \infty$, nhưng ta có

$$f(u_k) = f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2}$$

$$f(v_k) = f(\frac{2}{k}, \frac{1}{k}) = \frac{\frac{2}{k^2}}{\frac{4}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{2}{5} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{2}{5}$$

Vậy hàm f không tồn tại giới hạn khi $(x,y) \to (0,0)$.

VD 5. Cho hàm số $f(x,\ y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$.

Chứng tỏ rằng $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ không tồn tại.

Giải. Đặt $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$, ta có:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,\ y) = \lim_{r\to 0}\frac{r^2\sin 2\varphi}{r^2} = \sin 2\varphi.$$

Do giới hạn phụ thuộc vào φ nên không duy nhất.

Vậy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ không tồn tại.

c) Giới hạn lặp

Giới hạn theo từng biến khi dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ dần đến M_0 của $f(x, y)$ được gọi là ***giới hạn lặp***.

- Khi $x \to x_0$ trước, $y \to y_0$ sau thì ta viết

$$\boxed{\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)}$$

- Khi $y \to y_0$ trước, $x \to x_0$ sau thì ta viết

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y)}$$

Giới hạn lặp

Ví dụ: Xét hàm số $z=f(x,y)=\dfrac{\sin x(\cos y+1)}{1+x^2+y^2}$.

Tìm $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ và $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$.

$\forall y\neq 0$ ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$, suy ra $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$.

Mặt khác $\forall x\neq 0$, $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin x(\cos y+1)}{1+x^2+y^2}=\dfrac{2\sin x}{1+x^2}$ suy ra:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{1+x^2}=0.$$

Ta thấy trong trường hợp này hai giới hạn lặp tồn tại và bằng nhau.

VD 6. Xét hàm số $f(x,\, y) = \dfrac{\sin x^2 - \sin y^2}{x^2 + y^2}$.

Ta có:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,\, y) = \lim_{y\to 0} \frac{-\sin y^2}{y^2} = -1,$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,\, y) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1.$$

Vậy $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,\, y) \neq \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,\, y)$.

Quan hệ giữa giới hạn theo tập hợp các biến và các giới hạn lặp

Định lý 2.5.1. Cho hàm $z = f(x,y)$ xác định trên tập hợp D và (x_0, y_0) là điểm tụ của D. Giả sử tồn tại giới hạn $l = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$. Khi đó nếu tồn tại giới hạn lặp nào của hàm số tại (x_0, y_0) thì giới hạn đó cũng bằng l.

Chú ý

- Nếu $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) \neq \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ thì không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

- Sự tồn tại giới hạn lặp ***không kéo theo*** sự tồn tại của giới hạn bội.

Quan hệ giữa giới hạn theo tập hợp các biến và các giới hạn lặp

Ví dụ Xét hàm số $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$.

Ta thấy $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=-1 \Rightarrow \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=-1$ và $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1$.

Bây giờ ta xét giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Trước hết ta thấy $(x_n,y_n)=(\frac{1}{n},0)\to(0,0)$ khi $n\to+\infty$ thì $f(\frac{1}{n},0)\to 1$ khi $n\to+\infty$.

Mặt khác dãy $(x'_n,y'_n)=(0,\frac{1}{n})\to(0,0)$ khi $n\to+\infty$, nhưng $f(0,\frac{1}{n})\to -1$. Vậy giới hạn theo tập hợp các biến $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ không tồn tại.

Quan hệ giữa giới hạn theo tập hợp các biến và các giới hạn lặp

Ví dụ. Cho hàm $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{xy}$.

Do $\forall x,y\neq 0,\ 0\leq\left|(x+y)\sin\dfrac{1}{xy}\right|\leq|x+y|\leq|x|+|y|\to 0$ khi $(x,y)\to(0,0)$.

Suy ra $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$. Tuy nhiên dễ dàng thấy rằng cả hai giới hạn lặp đều không tồn tại.

1.3. Hàm số liên tục

- Hàm số $f(x,y)$ liên tục tại $M_0(x_0,y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ nếu

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)}$$

- Hàm số $f(x,\ y)$ liên tục trên tập $D \subset \mathbb{R}^2$ nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D.

Bài 1. Khái niệm cơ bản

Chú ý

Hàm số $f(x,y)$ liên tục trên miền đóng ***giới nội*** D thì nó đạt giá trị lớn nhất (*max*) và nhỏ nhất (*min*) trên D.

VD 7. Xét sự liên tục của $f(x,\ y) = \dfrac{\sin x^2 - \sin y^2}{x^2 + y^2}$.

Giải

- Với $(x,\ y) \neq (0,\ 0)$ thì hàm số $f(x,\ y)$ xác định nên liên tục.
- Tại $(0,\ 0)$ thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ không tồn tại.

Vậy hàm số $f(x, y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\ 0)\}$.

Ví dụ 3.1.1. Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Hàm số $f(x,y)$ liên tục tại mọi $(x,y) \neq (0,0)$ vì hàm số này là thương của hai hàm số liên tục và mẫu số khác 0. Do đó ta chỉ cần xét tính liên tục tại điểm $(0,0)$. Theo Ví dụ 2.3.2, ta có

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0).$$

Vậy hàm số $f(x,y)$ liên tục tại $(0,0)$, do đó hàm số đã cho liên tục.

Ví dụ 3.1.2: Trong $\mathbb{R}^2$ xét hàm số $f(x,y)$ được xác định bởi:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Ta thấy dãy $(x_n,y_n)=(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\to(0,0)$ khi $n\to+\infty$ nhưng $f(x_n,y_n)=\frac{n}{2}\to+\infty$ khi $n\to+\infty$. Vậy hàm số không liên tục tại điểm $(0,0)$.

....