

Bài tập chương I: Cơ Sở logic

I. MỆNH ĐỀ, BIỂU THỨC LOGIC

Câu 1:

Cho p , q và r là các mệnh đề:

p : Bạn nhận được điểm giỏi trong kỳ thi cuối khoá.

q : Bạn làm hết các bài tập trong giáo trình.

r : Bạn đạt giỏi ở lớp.

Hãy dùng các kí hiệu p , q , r và các ký hiệu phép toán logic để viết các mệnh đề sau:

- Bạn đạt giỏi ở lớp nhưng không làm hết các bài tập trong giáo trình.
- Bạn nhận được điểm giỏi trong kỳ thi cuối khoá, bạn làm hết các bài tập trong giáo trình và bạn đạt loại giỏi ở lớp.
- Để được công nhận loại giỏi ở lớp bạn cần phải được điểm giỏi ở kỳ thi cuối khoá.
- Bạn đạt loại giỏi ở lớp nếu và chỉ nếu bạn làm hết các bài tập trong giáo trình hoặc nhận được điểm giỏi trong kỳ thi cuối khoá.

Câu 2:

Gọi P, Q, R là các mệnh đề sau:

P : ABC là tam giác cân

Q : ABC là tam giác đều

R : Tam giác ABC có ba góc bằng nhau

Hãy viết các mệnh đề sau:

- Nếu ABC là tam giác đều thì ABC là tam giác cân
- ABC không phải là tam giác cân thì ABC là tam giác đều.
- ABC là tam giác cân và ABC không phải tam giác đều
- Tam giác ABC có ba góc bằng nhau thì ABC là tam giác cân.

Câu 3:

P := “Mai đang học Lí”

Q := “Mai đang học Hoá”

R := “Mai đang học Anh văn”

Hãy viết các mệnh đề sau:

- Không đúng là Mai đang học Anh văn hay Hoá mà không học Lí
- Mai không học Hoá lẫn Anh văn nhưng đang học Lí

Câu 4: Cho p , q , r là các biến mệnh đề. Không lập bảng chân trị, chứng minh:

- a) $(p \wedge \overline{q \wedge r}) \Leftrightarrow (\overline{p \rightarrow q} \vee (p \wedge \overline{r}))$
- b) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg q) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg q \wedge \neg p)$
- c) $(p \wedge \neg (q \wedge r)) \Leftrightarrow \neg (p \rightarrow q) \vee (p \wedge \neg r)$
- d) $(\neg p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow (q \wedge r)$
- e) $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow \neg q \wedge \neg p$
- f) $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \rightarrow \neg q) \wedge \neg r$
- g) $\{[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow q)\} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q \vee \overline{r})$
- h) $\{[(\overline{p} \wedge q \wedge \overline{r})] \rightarrow \overline{q}\} \rightarrow (p \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q \vee r)$
- i) $[p \rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [\overline{r} \rightarrow (\overline{q} \rightarrow \overline{p})]$
- j) $\overline{(p \rightarrow q)} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}$

II. QUI TẮC SUY DIỄN

Câu 1: Cho p,q,r,s,t,u là các biến mệnh đề. Kiểm tra sự đúng đắn của các suy luận sau:

- a) $p \rightarrow r$
 $\neg p \rightarrow q$
 $q \rightarrow s$

 $\therefore \neg r \rightarrow s$
- b) p
 $p \rightarrow q$
 $\neg s \rightarrow r$
 $r \rightarrow \neg q$

 $\therefore s \vee t$

$$\begin{array}{l}
 \text{c)} \quad p \\
 \quad q \rightarrow r \\
 \quad p \rightarrow \neg r \\
 \quad \text{-----} \\
 \quad \therefore \neg q
 \end{array}$$

$$\text{d)} \quad \{ \neg s \wedge [(\neg p \vee q) \rightarrow r] \wedge \neg u \wedge [r \rightarrow (s \vee t)] \wedge (u \vee \neg t) \} \Rightarrow p$$

$$\begin{array}{l}
 \text{e)} \quad [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \\
 \quad (t \rightarrow q) \\
 \quad \neg s \\
 \quad p \vee s \\
 \quad \text{-----} \\
 \quad \therefore \neg r \rightarrow \neg t
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{f)} \quad p \rightarrow q \\
 \quad r \rightarrow s \\
 \quad (s \wedge q) \rightarrow (p \wedge t) \\
 \quad t \rightarrow \neg p \\
 \quad \text{-----} \\
 \quad \therefore \neg(p \vee r)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{g)} \quad t \rightarrow u \\
 \quad r \rightarrow (s \vee t) \\
 \quad (\neg p \vee q) \rightarrow r \\
 \quad \neg(s \vee u) \\
 \quad \text{-----} \\
 \quad \therefore p
 \end{array}$$

III. VỊ TỪ, LƯỢNG TỪ

Câu 1:

Cho $Q(x, y)$ là ký hiệu của câu “ $x = y + 3$ ”. Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề $Q(1, 2)$ và $Q(3, 0)$.

Câu 2:

Xác định giá trị chân lý của $\forall P(x)$, trong đó $P(x)$ là diễn đạt “ $x^2 < 10$ ” và không gian khảo sát gồm các số nguyên dương không lớn hơn 4.

Câu 3:

Cho các vị từ trên không gian là tập số thực như sau:

$$P(x) = \{x \geq 0\}$$

$$Q(x) = \{x^2 \geq 0\}$$

$$R(x) = \{x^2 - 3x - 4 = 0\}$$

$$S(x) = \{x^2 - 3 > 0\}$$

Xác định giá trị đúng, sai của những mệnh đề sau:

a) $\forall x [Q(x) \rightarrow S(x)]$

b) $\forall x [R(x) \vee S(x)]$

c) $\forall x [R(x) \rightarrow P(x)]$

Câu 4:

Cho $P(x, y)$ là câu “ $x + y = y + x$ ”. Xác định giá trị đúng, sai của $\forall x \forall y P(x, y)$ với không gian được khảo sát đối với từng biến đều là các số thực.

Câu 5:

Cho $Q(x, y)$ là câu “ $x + y = 0$ ”. Xác định giá trị đúng, sai của $\exists y \forall x Q(x, y)$ và $\forall x \exists y Q(x, y)$ với không gian được khảo sát đối với từng biến đều là các số thực.

Câu 6:

Cho $Q(x, y, z)$ là diễn đạt “ $x + y = z$ ”. Xác định giá trị đúng, sai của $\forall x \forall y \exists z Q(x, y, z)$ và $\exists z \forall x \forall y Q(x, y, z)$ với không gian được khảo sát đối với từng biến đều là các số thực.

Câu 7: Xét các câu sau, trong đó ba câu đầu là tiền đề và câu thứ tư là một kết luận đúng.

“tất cả các chim ruồi đều có màu sặc sỡ”

“không có con chim ruồi lớn nào sống bằng mật ong”

“những chim ruồi không sống bằng mật ong đều có màu xám”

“chim ruồi là nhỏ”

Gọi $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ và $S(x)$ lần lượt là các câu “ x là chim ruồi”, “ x là lớn”, “ x sống bằng mật ong”, và “ x có màu sắc sỡ”. Giả sử không gian được khảo sát là tất cả các loài chim, hãy diễn đạt các câu trong suy lý bằng $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ và các lượng từ.

Câu 8: Viết dạng phủ định của A và xét chân trị

a) $A = "\forall x \in R, |x| = -x^3"$

b) $A = "\forall x \in R, \exists n \in N, 2^n \leq x < 2^{n+1}"$

c) $A = "\forall x \in R, \exists y \in R, (x^2 = y^2) \rightarrow (x = y)"$

d) $A = "\forall x \in Q, \exists y \in R, (x^2 + 2x - 15)y = 0"$

e) $A = "\forall x \in R, \exists y \in Q, x^2 + 4x \geq y^2 + 7"$

f) $A = "\exists x \in R, \forall y \in R, x \leq 2^y - 3"$

g) $A = "\forall x \in R, \exists y \in R, (x^2 > y^2) \rightarrow (x > y)"$

IV. NGUYÊN LÝ QUY nạp

Câu 1: CM: $2^n < n! \forall n \geq 4$

Câu 2: Cho $n \in N$, $n \geq 2$. Chứng minh rằng $P_n = n$ bằng tích của các số nguyên tố.

Câu 3: Chứng minh $1+3+\dots+(2n-1) = n^2$ với mọi số nguyên dương n .

Câu 4: Chứng minh rằng $(1 + \frac{1}{n})^n < n$, $\forall n \in N, n > 2$.

Câu 5: Chứng minh rằng $\forall n \geq 2$, ta có : $a_n = (n+1)(n+2) \dots (n+n) : 2^n$