2-7
F检验与t检验

主讲人：范国斌

回归方程的显著性检验（F检验）

基本思想：

在多元回归中包含多个解释变量，它们与被解释变量是否有显著关系呢？

当然可以分别检验各个解释变量对被解释变量影响的显著性。

但为了说明所有解释变量联合起来对被解释变量影响的显著性,或整个方程总的联合显著性，需要对方程的总显著性在方差分析的基础上进行F检验。

方差分析表

总变差 TSS= $\sum(Y_i-\bar{Y})^2$ 自由度 n - 1

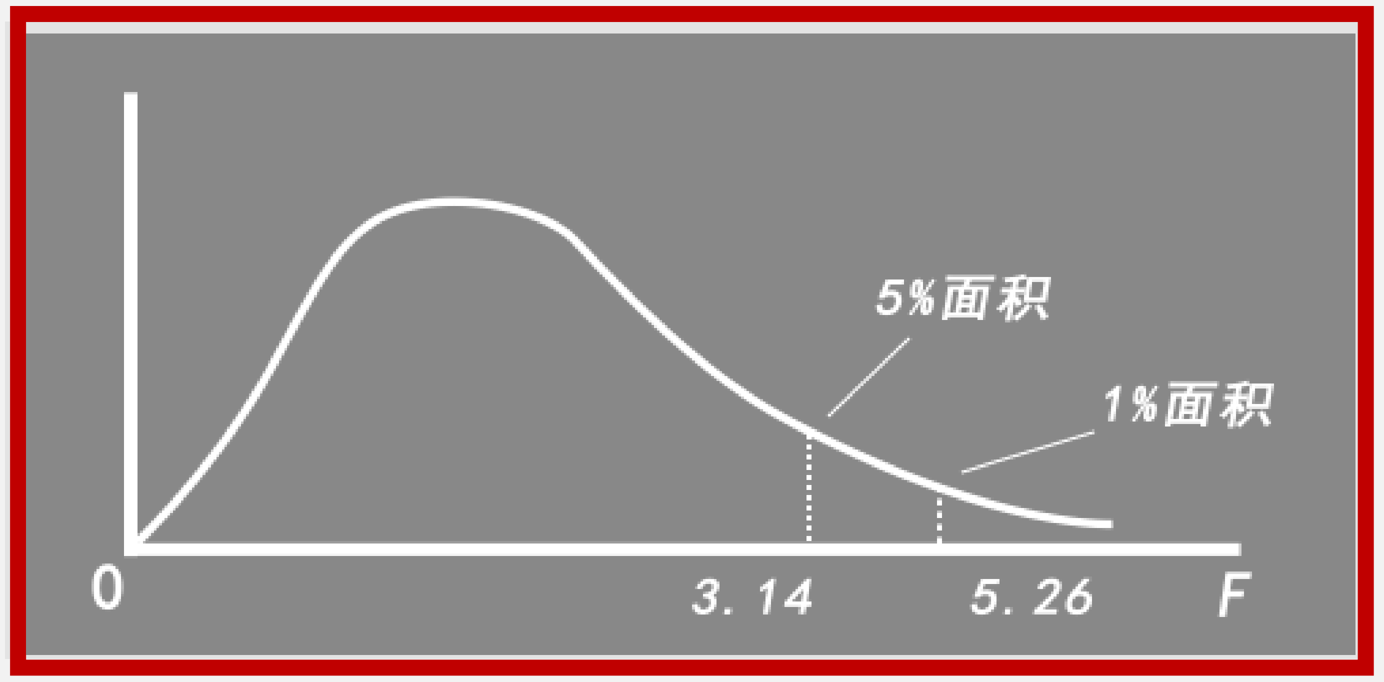
模型解释了的变差 ESS= $\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2$ 自由度 k - 1

剩余变差 RSS= $\sum(Y_i-\hat{Y}_i)^2$ 自由度 n - k

变差来源	平 方 和	自由度	方 差
归于回归模型	ESS= $\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2$	k-1	$\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2/(k-1)$
归于剩余	RSS= $\sum(Y_i-\hat{Y}_i)^2$	n-k	$\sum(Y_i-\hat{Y}_i)^2/(n-k)$
总变差	TSS= $\sum(Y_i-\bar{Y})^2$	n-1	$\sum(Y_i-\bar{Y})^2/(n-1)$

基本思想: 如果多个解释变量联合起来对被解释变量的影响不显著，“归于回归的方差”应该比“归于剩余的方差”显著地小（即这应是大概率事件）。

F检验



原假设: $H_0: \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_k = 0$

（所有解释变量联合起来对被解释变量的影响不显著）

备择假设: $H_1: \beta_j\ (j = 2, \cdots k)$ 不全为0

建立统计量：$$F = \frac{ESS/(k-1)}{RSS/(n-k)} = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2/(k-1)}{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2/(n-k)} \sim F(k-1, n-k)$$

给定显著性水平 α ，查F分布表中自由度为 **k-1**和 **n-k** 的临界值 $F_\alpha(k-1, n-k)$，并通过样本观测值计算F值

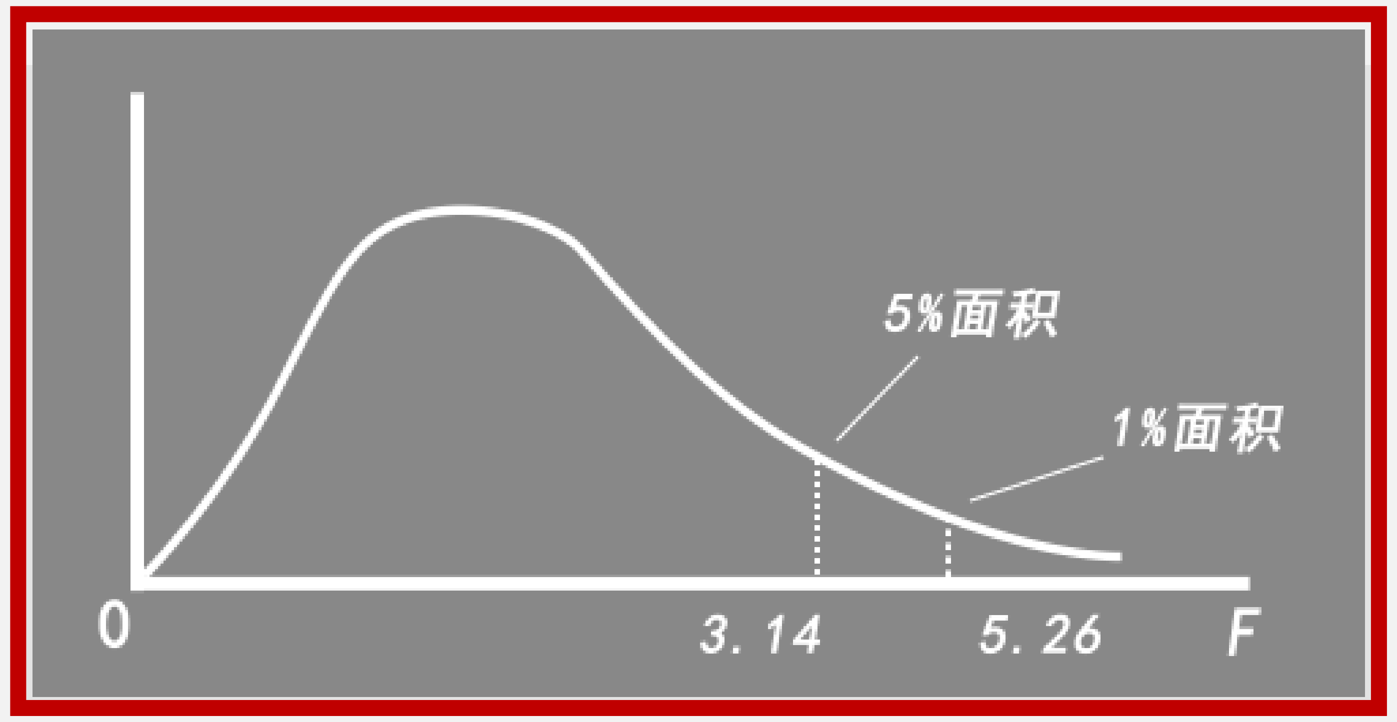
F检验方式

▼ 如果计算的F值大于临界值 $F_{\alpha}(k-1, n-k)$ (小概率事件发生)

则拒绝 $H_0: \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_k = 0$ 说明回归模型有显著意义，即所有解释变量联合起来对Y确有显著影响。

▼如果计算的F值小于临界值 $F_{\alpha}(k-1, n-k)$ (大概率事件发生)

则不拒绝 $H_0: \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_k = 0$ 说明回归模型没有显著意义，即所有解释变量联合起来对Y没有显著影响。



F检验与拟合优度检验

拟合优度检验与对线性回归的总体显著性的 F 检验是从不同原理出发的两类检验，但二者有内在联系:

拟合优度检验——从已估计的模型出发，检验对样本观测值的拟合程度。

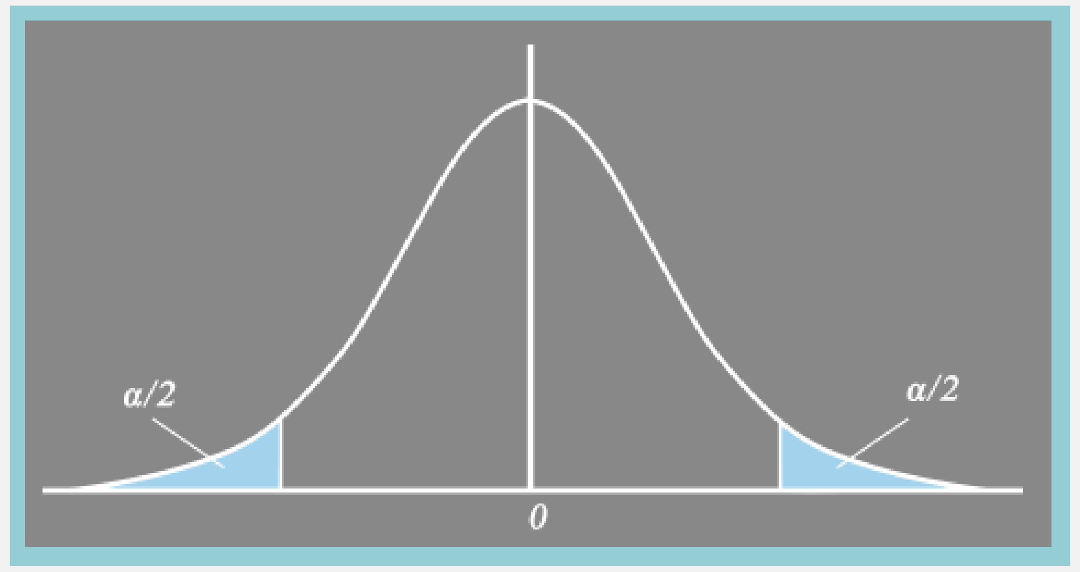
总体显著性的F检验——从样本观测值出发，检验模型总体线性关系的显著性。

F检验与多重可决系数有密切关系：二者都建立在对被解释变量变差分解的基础上，实际上 F 统计量也可通过可决系数去计算：

$$F=\frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)}=\frac{n-k}{k-1}\frac{R^2}{1-R^2}$$

可以看出：当 R^2=0 时，F=0；当 R^2=1时, F→∞; 当 R^2越大时，F值也越大

回归系数的检验方法



确立假设：原假设为 $H_0: \beta_j = 0$

备择假设为 $H_1: \beta_j \neq 0$

(**本质**：检验 β_j 是否为0，即检验 X_j 是否对Y有显著影响)

(1)当已知 σ^2 或样本容量足够大时

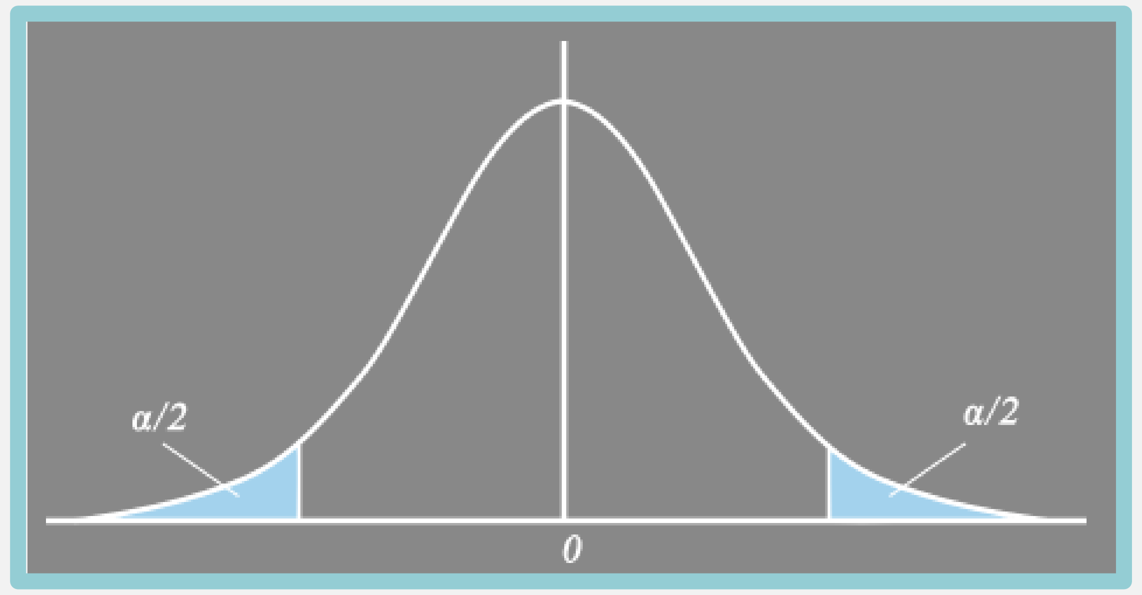
可利用正态分布作Z检验 $Z^* = \dfrac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{SE(\hat{\beta}_j)} = \dfrac{\hat{\beta}_j}{SE(\hat{\beta}_j)} \sim N(0.1)$

给定 α，查正态分布表得临界值 z

▼ 如果 $-z < Z^* < z$（**大概率事件发生**）则不拒绝原假设 H_0

▼如果 $Z^* < -z$ 或 $Z^* > z$（**小概率事件发生**）则拒绝原假设 H_0

当σ²未知，且样本容量较小时



只能用 $\hat{\sigma}^2$ 去代替 σ^2，可利用 t 分布作 t 检验：

$$t^* = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{SE}(\hat{\beta}_j)} = \frac{\hat{\beta}_j}{\hat{SE}(\hat{\beta}_j)} \sim t(n-k)$$

给定 α ，查 t 分布表得 $t_{\alpha/2}(n-k)$

▼如果 $t^* \le -t_{\alpha/2}(n-k)$ 或者 $t^* \ge t_{\alpha/2}(n-k)$（小概率事件发生）

则拒绝原假设 $H_0: \beta_j = 0$ 而不拒绝备择假设 $H_1: \beta_j \ne 0$

▼如果 $-t_{\alpha/2}(n-k) \le t^* \le t_{\alpha/2}(n-k)$（大概率事件发生）

则不拒绝原假设 $H_0: \beta_j = 0$

用 P 值判断参数的显著性

假设检验的 p 值：

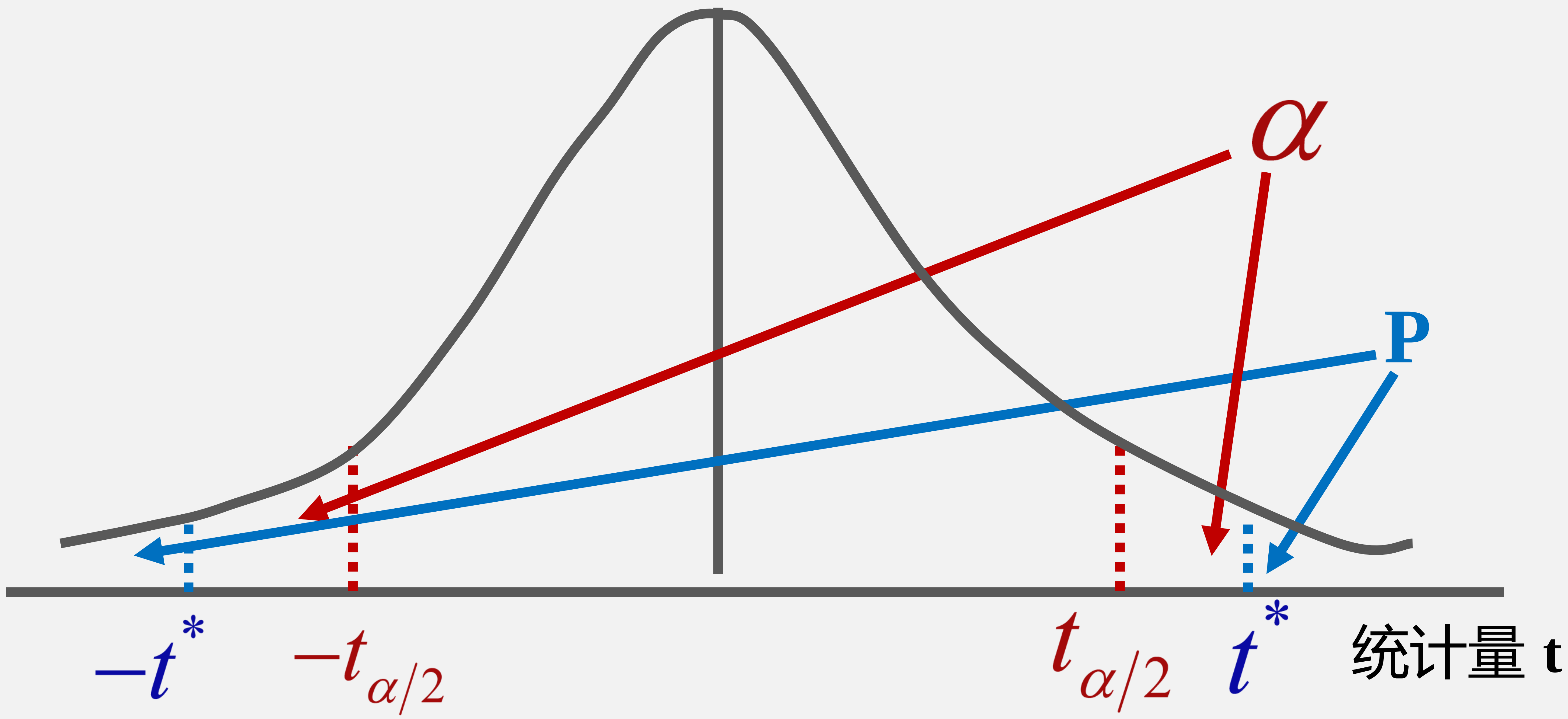
p 值是基于既定的样本数据所计算的统计量，原假设可以被拒绝的最高显著性水平。统计分析软件中通常都给出了检验的 p 值

相对于显著性水平 α 的临界值: t_{α} 或 $t_{\alpha/2}$

$t_{\alpha/2}$ 与 α 相对应

相对于计算的统计量 t^*：

t^* 与 P 相对应



注意：

t检验是比较 t^*和 $t_{\alpha/2}$ 用

P值检验是比较 α 和 p

用 P 值判断参数显著性的方法

方法：将给定的显著性水平 α 与 p 值比较：

- 若 $\boxed{\alpha > p}$ 值，则在显著性水平 α 下拒绝原假设 $H_0:\beta_k=0$ ，即认为 X 对 Y 有显著影响

- 若 $\boxed{\alpha \le p}$ 值，则在显著性水平 α 下不拒绝原假设 $H_0:\beta_k=0$ ，即认为 X 对 Y 没有显著影响

规则：当 $p<\alpha$ 时，P值越小，越能拒绝原假设 H_0

例如，给定 $\hat{\beta}$ 服从 t 分布，$\hat{\beta}-\beta_0$是否显著异于零，关键是看这个差值的绝对值等于估计值 $\hat{\beta}$ 的多少倍标准差。

$$t_{\alpha/2}=\frac{\hat{\beta}-\beta_0}{se(\hat{\beta})}$$

知道了 $t_{\alpha/2}$，查表可得α 的值，即置信水平（EViews输出为p值）。若这个置信水平满足研究要求，则认为这个“差异”显著，否则不显著。

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	24.45455	6.413817	3.812791	0.0051
X	0.509091	0.035743	14.24317	0.0000

F检验与t检验的关系

- 在一元回归中F检验与t检验等价, 且$F=t^2$(证明见本科教材P77)。
- 在多元回归中， F检验与t检验的关系是：
  - **整体的F检验显著并不见得个别系数的t检验显著。**
  - **个别系数的t检验显著则整体F检验通常也显著。**
- 在多元回归中，既要作F检验，又要进一步分别对每个回归系数逐个地进行t检验。