2-4

古典假定与OLS的统计性质

主讲人：范国斌

OLS估计式的统计性质

回顾：参数估计式的优劣需要有评价的标准

- 参数无法通过观测直接确定，只能通过样本估计，但因存在抽样波动，参数估计值不一定等于总体参数的真实值。
- 参数估计方法及所确定的估计式不一定完备，不一定能得到总体参数的真实值，需要对估计方法作评价与选择。

比较不同估计方法的估计结果时，需要有一定的评价标准

基本要求：参数估计值应尽可能地接近总体参数的真实值

估计准则：“尽可能地接近”原则

决定于参数估计式的统计性质：无偏性、有效性、一致性等。

统计性质与古典假定

用样本去估计总体回归函数，总要使用特定的方法，而任何估计参数的方法都需要有一定的前提条件——假定条件

经典线性回归的基本假定

为什么要作基本假定？

- 只有具备一定的假定条件，所作出的估计才具有良好的统计性质。
- 因为模型中有随机扰动项，估计的参数是随机变量，显然参数估计值的分布与扰动项的分布有关，只有对随机扰动的分布作出假定，才能比较方便地确定所估计参数的分布性质，也才可能进行假设检验和区间估计等统计推断。

多元线性回归中的基本假定

假定1：零均值假定

$$E(u_i)=0 \quad (i=1,2,\text{---}n) \quad 或 \quad E(u)=0$$

假定2和假定3：同方差和无自相关假定：

同方差： $Var(u_i|X_i)=E[u_i-E(u_i|X_i)]^2=E(u_i^2)=\sigma^2$

无自相关： $Cov(u_i,u_j)=E[u_i-E(u_i)][u_j-E(u_j)]=E(u_iu_j)=0$

假定4：随机扰动项与解释变量不相关（外生性）

$$Cov(X_{ji},u_i)=0 \qquad (j=2,3,\cdots k)$$

$$Var(\mathbf{U}) = E\left[(\mathbf{U} - E\mathbf{U})(\mathbf{U} - E\mathbf{U})'\right] = E(\mathbf{U}\mathbf{U}')$$

$$= \begin{bmatrix} E(u_1u_1) & E(u_1u_2) & \cdots & E(u_1u_n) \\ E(u_2u_1) & E(u_2u_2) & \cdots & E(u_2u_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(u_nu_1) & E(u_nu_2) & \cdots & E(u_nu_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

也即 $Var(\mathbf{U}) = \sigma^2 \mathbf{I}_n$

假定5：无多重共线性假定

假定各解释变量之间不存在线性关系，或各个解释变量观测值之间线性无关，或解释变量观测值矩阵X的秩为K（注意X为n行K列）。

$$\text{Rank}(X) = k \longrightarrow \text{Rank}(X'X) = k$$

即 $(X'X)$ 可逆

等价说法：X 满秩、$X'X$ 满秩、$|X'X| \neq 0$

错误说法： X 可逆

假定6：正态性假定

即假定 u_i 服从均值为零、方差为 σ^2 的正态分布

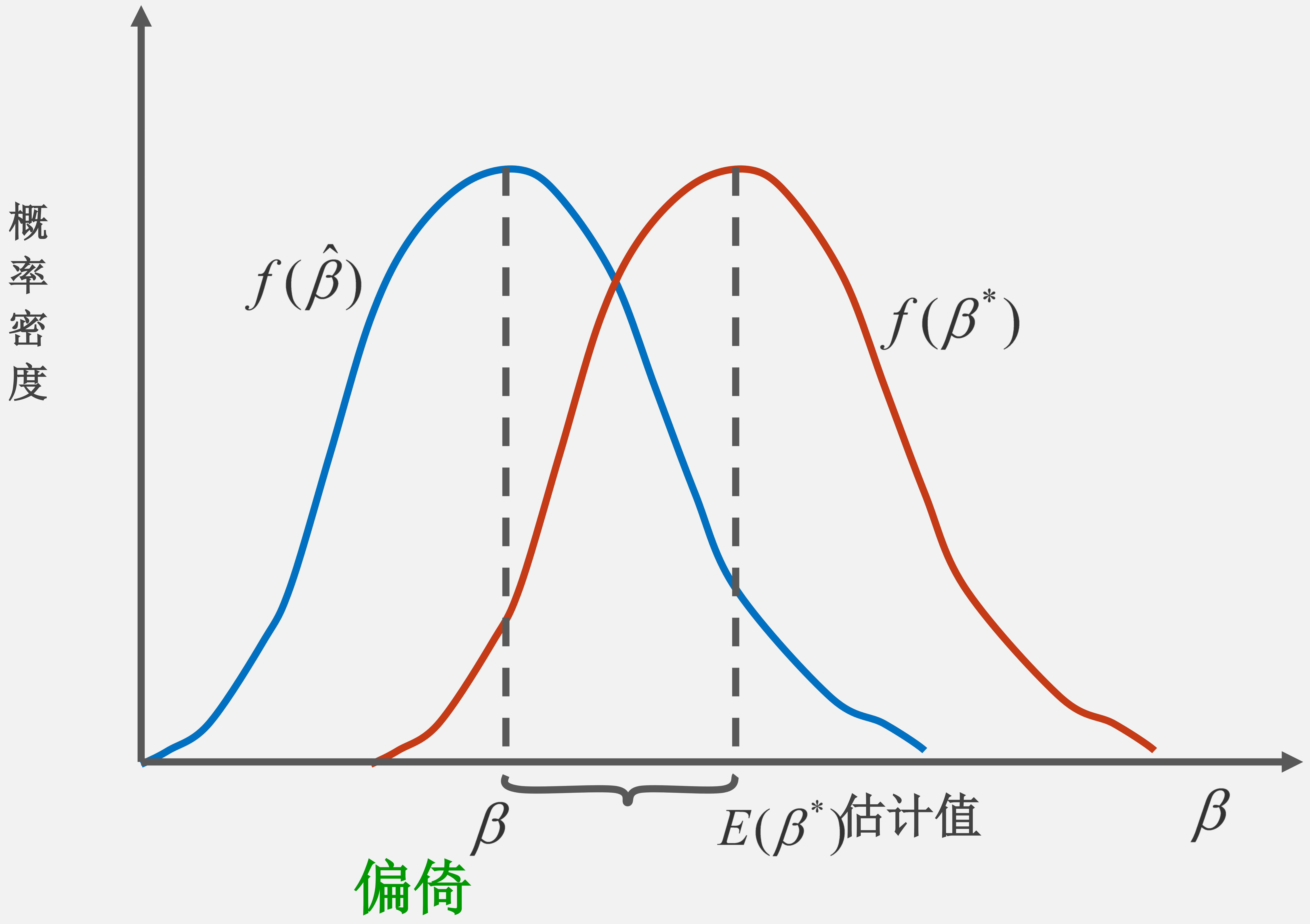
$$u_i \sim N(o, \sigma^2) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$$

(**说明**：正态性假定不影响对参数的点估计，所以有时不列入基本假定，但这对确定所估计参数的分布性质是需要的。且根据中心极限定理，当样本容量趋于无穷大时，u_i 的分布会趋近于正态分布。所以正态性假定有合理性）

注意:

并不是参数估计的每一具体步骤都要用到所有的假定,但对全部假定有完整的认识,对学习计量经济学的原理是有益的。

(1) 无偏性



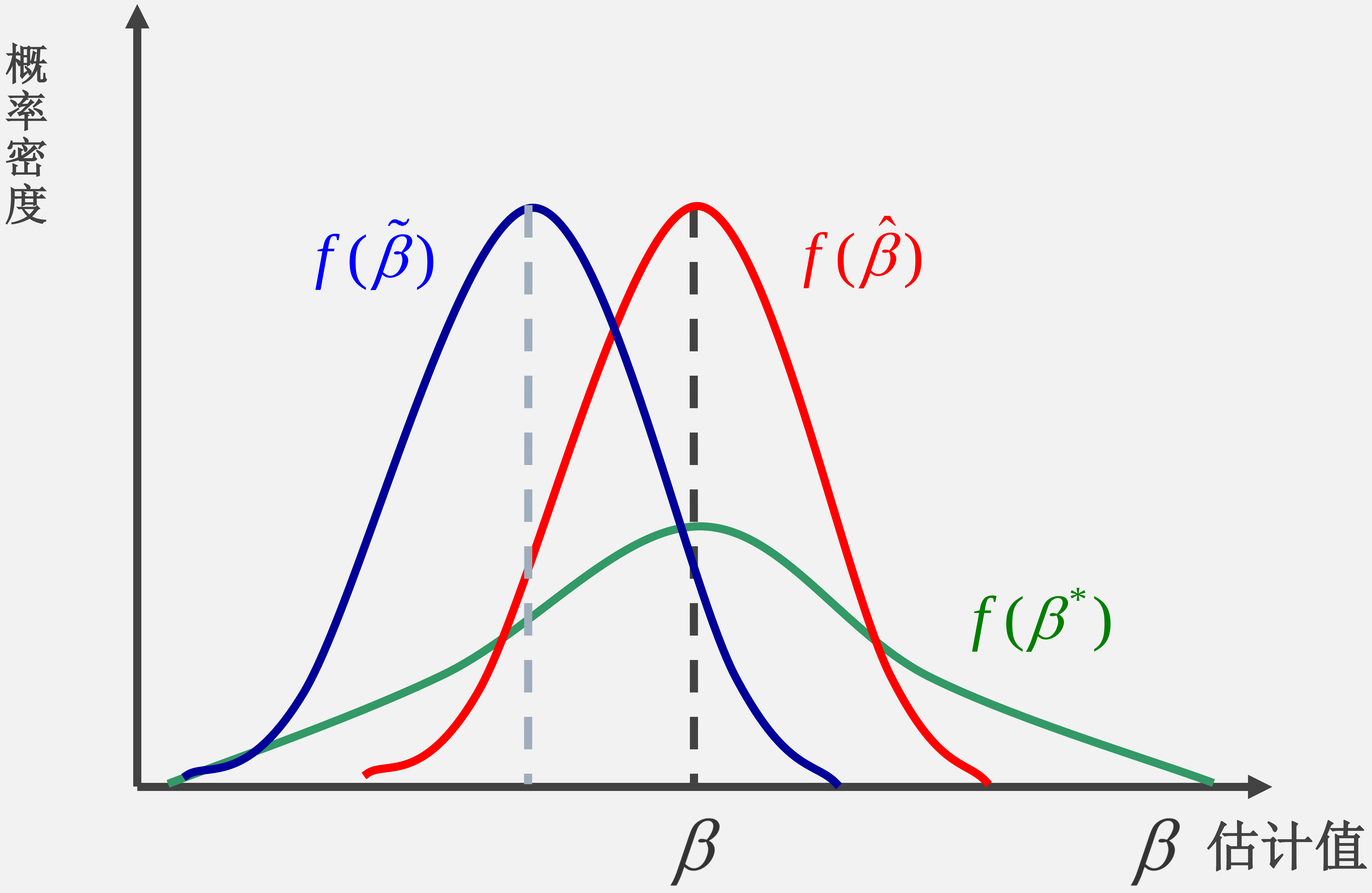
(1) 无偏性

前提：重复抽样中估计方法固定、样本数不变、经重复抽样的观测值,可得一系列参数估计值 $\hat{\beta}$，$\hat{\beta}$ 的分布称为 $\hat{\beta}$ 的抽样分布，其密度函数记为 $f(\hat{\beta})$

如果 $E(\hat{\beta})=\beta$

称 $\hat{\beta}$ 是参数 β 的无偏估计式，否则 $E(\hat{\beta})\neq\beta$ 则称 $\hat{\beta}$ 是有偏的估计，其偏倚为 $E(\hat{\beta})-\beta$

(2)有效性



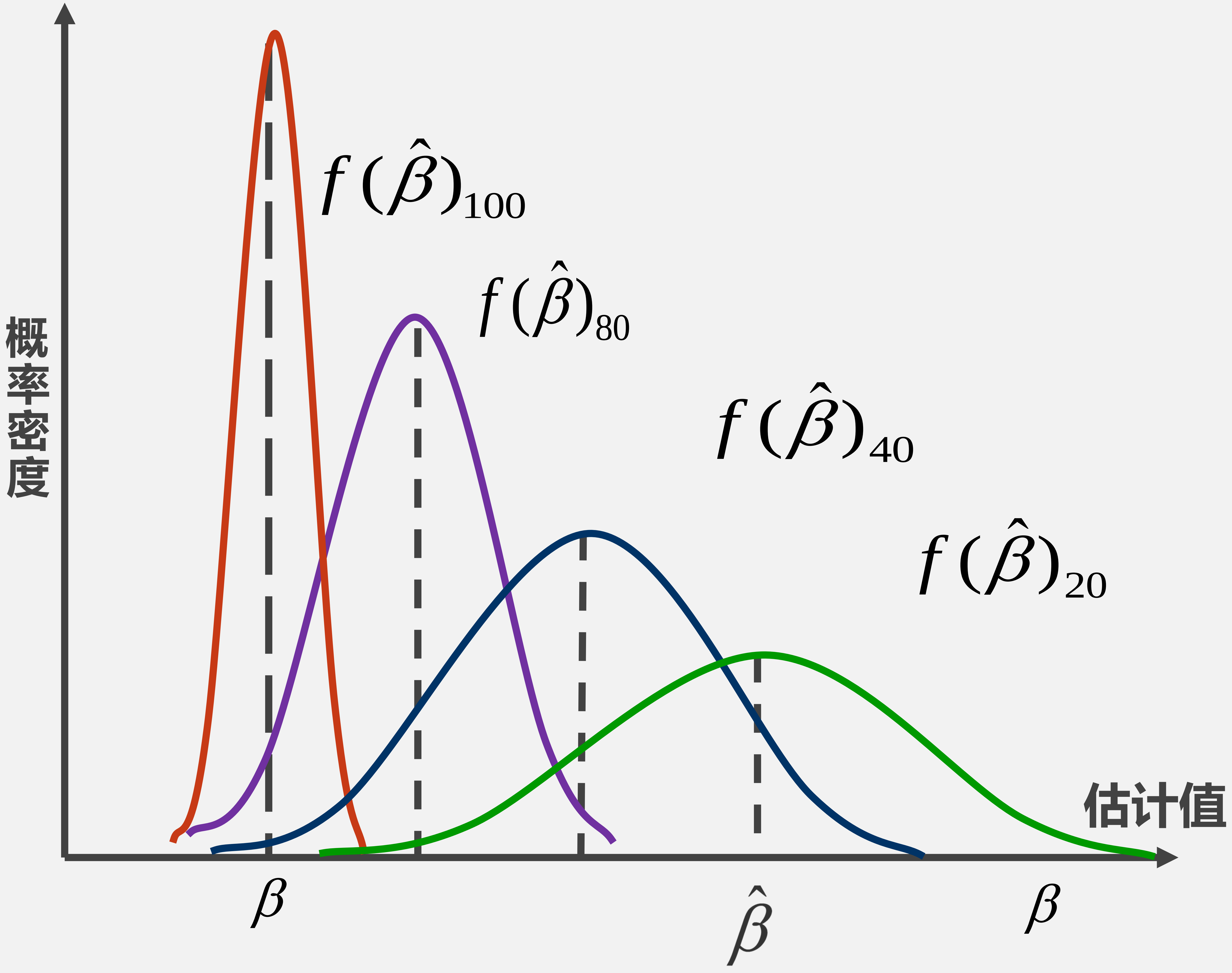
(2)有效性

前提：**样本相同、用不同的方法估计参数，可以找到若干个不同的无偏估计式**

目标: 努力寻求其抽样分布具有最小方差的估计式

既是无偏的同时又具有最小方差特性的估计式，称为**最佳（有效）估计式**。

(3)渐近性质（大样本性质）



$f(\hat{\beta})_{100}$
$f(\hat{\beta})_{80}$
$f(\hat{\beta})_{40}$
$f(\hat{\beta})_{20}$
概率密度
估计值
β
$\hat{\beta}$
β

(3)渐近性质（大样本性质）

思想:当样本容量较小时，有时很难找到方差最小的无偏估计，需要考虑样本扩大后的性质（估计方法不变，样本数逐步增大）

一致性：

当样本容量 n 趋于无穷大时，如果估计式 $\hat{\beta}$ 依概率收敛于总体参数的真实值，就称这个估计式 $\hat{\beta}$ 是 β 的一致估计式。即

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\beta}-\beta| \le \varepsilon) = 1 \text{ 或 } P\lim_{n\to\infty}(\hat{\beta}) = \beta$$

（渐近无偏估计式是当样本容量变得足够大时其偏倚趋于零的估计式）

渐近有效性：当样本容量 n 趋于无穷大时，在所有的一致估计式中，具有最小的渐近方差。

OLS估计式的统计性质

1、 线性特征 $\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y$

$\hat{\beta}$ 是Y的线性函数，因 $(X'X)^{-1}X'$是非随机或取固定值的矩阵

2、无偏特性 $E(\hat{\beta}_K)=\beta_K$ (证明见本科教材P71)

3、 最小方差特性

在 β_K所有的线性无偏估计中，OLS估计 $\hat{\beta}_K$ 具有最小方差
(证明见本科教材P92附录3.1)

结论：在古典假定下，多元线性回归的 OLS 估计式是最佳线性无偏估计式（BLUE）

线性性：

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{Y} \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

可以看出，$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 等于取固定值的解释变量构成的 $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ 与被解释变量观测值列向量Y的乘积，从而$\hat{\beta}_j (j=1,2,\mathrm{L}\ ,k)$ 为 Y_i 的线性函数。

无偏性：

因为 $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{U})$

$$= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{U}$$

$$= \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{U}$$

对两边取期望， $E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'[E(\mathbf{U})]$

由假定1： $E(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$ 则 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的无偏估计。

$\hat{\beta}$ 的方差—协方差矩阵

$$
\begin{aligned}
COV(\hat{\beta}) &= E\{[\hat{\beta}-E(\hat{\beta})][\hat{\beta}-E(\hat{\beta})]'\} \\
&= E[(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'] && \text{(由无偏性)} \\
&= E[(X'X)^{-1}X'uu'X(X'X)^{-1}] && \text{(由OLS估计式)} \\
&= (X'X)^{-1}X'E(uu')X(X'X)^{-1} \\
&= (X'X)^{-1}X'\sigma^2 IX(X'X)^{-1} && \text{(由同方差性)} \\
&= \sigma^2(X'X)^{-1}
\end{aligned}
$$

其中：$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y=(X'X)^{-1}X'(X\beta+u)=\beta+(X'X)^{-1}X'u$

$$E(uu')=\sigma^2 I$$