第二节 正态总体均值的假设检验

一、单个总体均值 μ 的检验

二、两个总体均值差的检验(t 检验)

三、基于成对数据的检验(t 检验)

四、小结

一、单个总体$N(\mu,\sigma^2)$均值μ的检验

1. σ^2为已知，关于μ的检验(Z检验)

在上节中讨论过正态总　　体 $N(\mu,\sigma^2)$

当σ^2为已知时，关于$\mu=\mu_0$的检验问题：

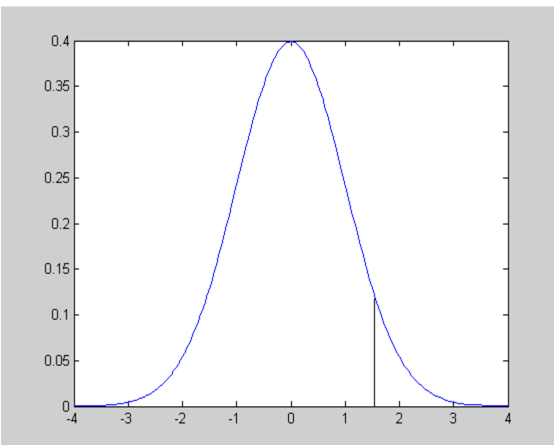
(1) 假设检验 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$;

(2) 假设检验 $H_0:\mu\leq\mu_0, H_1:\mu>\mu_0$;

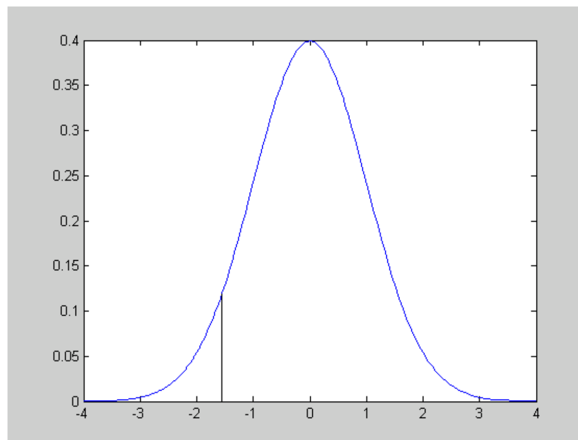
(3) 假设检验 $H_0:\mu\geq\mu_0, H_1:\mu<\mu_0$.

三种假设的拒绝域形式分别见下图：

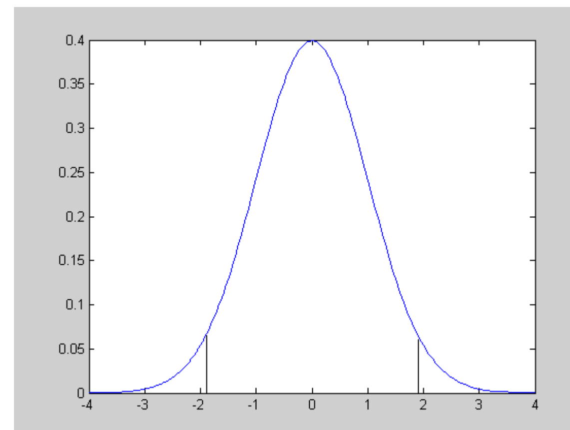
$W = \{u \geq c\}$ $W = \{u \leq c\}$ $W = \{u \leq c_1$ 或 $u \geq c_2\}$



$(a)\ H_1 : \mu > \mu_0$



$(b)\ H_1 : \mu < \mu_0$



$(c)\ H_1 : \mu \neq \mu_0$

讨论中都是利用 H_0 为真时服从 $N(0,1)$ 分布

的统计量 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 来确定拒绝域的，这种

检验法称为 Z 检验法.

一个有用的结论

当显著性水平均为α时，

检验问题　$H_0:\mu\le\mu_0,\quad H_1:\mu>\mu_0$和检验问题

$H_0:\mu=\mu_0,\quad H_1:\mu>\mu_0$ 有相同的拒绝域.

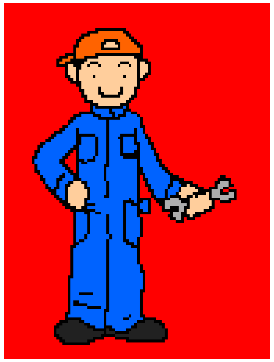
例1 某切割机在正常工作时, 切割每段金属棒的平均长度为10.5cm, 标准差是0.15cm, 今从一批产品中随机的抽取15段进行测量, 其结果如下:

$$10.4 \quad 10.6 \quad 10.1 \quad 10.4 \quad 10.5 \quad 10.3 \quad 10.3 \quad 10.2$$

$$10.9 \quad 10.6 \quad 10.8 \quad 10.5 \quad 10.7 \quad 10.2 \quad 10.7$$

假定切割的长度服从正态分布, 且标准差没有变化, 试问该机工作是否正常? $(\alpha = 0.05)$

解 因为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.15$,



要检验假设

$H_0: \mu = 10.5$, $\quad H_1: \mu \neq 10.5$,

$n = 15$, $\bar{x} = 10.48$, $\alpha = 0.05$,

则 $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \dfrac{10.48 - 10.5}{0.15 / \sqrt{15}} = -0.516$,

查表得 $z_{0.05} = 1.645$,

于是 $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = -0.516 < z_{0.05} = 1.645$,

故接受 H_0, 认为该机工作正常.

2. σ^2为未知, 关于μ的检验(t检验)

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中 μ,σ^2 未知, 显著性水平为 α.

求检验问题 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$ 的拒绝域.

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本,

因为 σ^2 未知, 不能利用 $\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ 来确定拒绝域.

因为 S^2 是 σ^2 的无偏估计, 故用 S 来取代 σ,

即采用 $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$ 来作为检验统计量.

当观察值 $|t| = \left| \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \right|$ 过分大时就拒绝 H_0,

拒绝域的形式为 $|t| = \left| \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \right| \geq k$.

根据第六章§2定理三知,

定理三

当 H_0 为真时，$\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

$$P\{\text{当 } H_0 \text{ 为真，拒绝 } H_0\} = P_{\mu_0}\left\{ \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right| \geq k \right\} = \alpha ,$$

得 $k = t_{\alpha/2}(n-1)$,

拒绝域为 $|t| = \left|\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$.

上述利用 t 统计量得出的检验法称为 t 检验法.

对于正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$, 当 σ^2 未知时, 关于 μ 的单边检验的拒绝域在表 8.1 中给出.

在实际中, 正态总体的方差常为未知, 所以我们常用 t 检验法来检验关于正态总体均值的检验问题.

例2 如果在例1中只假定切割的长度服从正态分布，问该机切割的金属棒的平均长度有无显著变化? $(\alpha = 0.05)$

解 依题意 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2均为未知，

要检验假设 $H_0 : \mu = 10.5$, $H_1 : \mu \neq 10.5$,

$n = 15$, $\bar{x} = 10.48$, $\alpha = 0.05$, $s = 0.237$,

$$|t| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{10.48 - 10.5}{0.237 / \sqrt{15}} \right| = 0.327,$$

t分布表

查表得 $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(14) = 2.1448 > |t| = 0.327$,

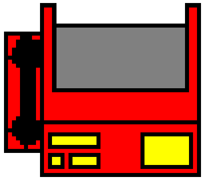
故接受 H_0, 认为金属棒的平均长度无显著变化.

例3 某种电子元件的寿命X(以小时计)服从正态分布，μ,σ^2均为未知. 现测得16只元件的寿命如下:

159	280	101	212	224	379	179	264
222	362	168	250	149	260	485	170

问是否有理由认为元件的平均寿命大于225(小时)?

解 依题意需检验假设



$H_0: \mu \le \mu_0 = 225$, $H_1: \mu > 225$,

取 $\alpha = 0.05$, $n = 16$, $\bar{x} = 241.5$, $s = 98.7259$, t分布表

查表得

$$t_{0.05}(15) = 1.7531 \quad > \quad |t| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \right| = 0.6685$$

故接受 H_0, 认为元件的平均寿命不大于 225 小时.

二、两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2),N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的情况

利用t检验法检验具有相同方差的两正态总体均值差的假设.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 的样本 ,$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_2,\sigma^2)$的样本 ,且设两样本独立 . 注意两总体的方差相等 .

又设 $\overline{X},\overline{Y}$ 分别是总体的样本均值 , S_1^2,S_2^2是样本方差 , μ_1,μ_2,σ^2均为未知 ,

求检验问题 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta$, $H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta$

(δ 为已知常数)的拒绝域.

取显著性水平为 α.

引入 t 统计量作为检验统计量:

$$t = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - \delta}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \text{其中 } S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

当 H_0 为真时, 根据第六章§2定理四知,

定理四

$$t \sim t(n_1 + n_2 - 2).$$

其拒绝域的形式为 $\left|\dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-\delta}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\right| \geq k,$

$$P\{H_0\text{为真},\text{拒绝}\ H_0\}=P_{\mu_1-\mu_2=\delta}\left\{\left|\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-\delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\right|\geq k\right\}=\alpha$$

得 $k=t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2).$

故拒绝域为 $t=\dfrac{\left|(\bar{x}-\bar{y})-\delta\right|}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2).$

关于均值差的其它两个检验问题的拒绝域见表8.1, 常用 $\delta=0$ 的情况 .

当两个正态总体的方差均为已知(不一定相等)时,我们可用 Z 检验法来检验两正态总体均值差的假设问题, 见表8.1 .

例4 在平炉上进行一项试验以确定改变操作方法的建议是否会增加钢的得率, 试验是在同一只平炉上进行的. 每炼一炉钢时除操作方法外, 其它条件都尽可能做到相同.先采用标准方法炼一炉, 然后用建议的新方法炼一炉, 以后交替进行, 各炼了10炉, 其得率分别为(1)标准方法: 78.1, 72.4, 76.2, 74.3, 77.4, 78.4, 76.0, 75.5, 76.7, 77.3; (2)新方法: 79.1, 81.0, 77.3, 79.1, 80.0, 78.1, 79.1, 77.3, 80.2, 82.1; 设这两个样本相互独立, 且分别来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma^2)$, μ_1,μ_2,σ^2 均为未知, 问建议的新操作方法能否提高得率? (取 $\alpha=0.05$)

解 需要检验假设 $H_0: \mu_1 - \mu_2 > 0$, $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$.

分别求出标准方法和新方法下的样本均值和样本方差:

$$n_1 = 10, \quad \bar{x} = 76.23, \quad s_1^2 = 3.325,$$

$$n_2 = 10, \quad \bar{y} = 79.43, \quad s_2^2 = 2.225,$$

且 $s_w^2 = \dfrac{(10-1)s_1^2 + (10-1)s_2^2}{10+10-2} = 2.775,$

查表可知 $t_{0.05}(18) = 1.7341$,

查表8.1知其拒绝域为 $t \le -t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2).$

因为 $t = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w \sqrt{\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10}}} = -4.295,$

$$\le -t_{0.05}(18) = -1.7341,$$

所以拒绝 H_0,

即认为建议的新操作方法较原来的方法为优.

附表8.1

例5 有甲、乙两台机床加工相同的产品, 从这两台机床加工的产品中随机地抽取若干件, 测得产品直径(单位:mm)为

机床甲: 20.5, 19.8, 19.7, 20.4, 20.1, 20.0, 19.0, 19.9

机床乙: 19.7, 20.8, 20.5, 19.8, 19.4, 20.6, 19.2,

试比较甲、乙两台机床加工的产品直径有无显著差异? 假定两台机床加工的产品直径都服从正态分布, 且总体方差相等. $(\alpha = 0.05)$

解 依题意, 两总体 X 和 Y 分别服从正态分布

$N(\mu_1, \sigma^2)$和$N(\mu_2, \sigma^2)$, μ_1, μ_2, σ^2均为未知,

需要检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.

$$n_1 = 8, \quad \bar{x} = 19.925, \quad s_1^2 = 0.216,$$

$$n_2 = 7, \quad \bar{y} = 20.000, \quad s_2^2 = 0.397,$$

且 $s_w^2 = \dfrac{(8-1)s_1^2 + (7-1)s_2^2}{8+7-2} = 0.547,$

查表可知 $t_{0.05}(13) = 2.160,$

$t = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{7}}} = -0.265 < 2.160$, 所以接受 H_0,

即甲、乙两台机床加工的产品直径无显著差异.

	原假设 H_0	检验统计量	备择假设 H_1	拒绝域
1	$\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$ $\mu = \mu_0$ (σ^2已知)	$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \ne \mu_0$	$z \ge z_\alpha$ $z \le -z_\alpha$ $\lvert z\rvert \ge z_{\alpha/2}$
2	$\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$ $\mu = \mu_0$ (σ^2未知)	$t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \ne \mu_0$	$t \ge t_\alpha(n-1)$ $t \le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)$
3	$\mu_1 - \mu_2 \le \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \ge \delta$ $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ (σ_1^2, σ_2^2已知)	$Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\mu - \mu_0 > \delta$ $\mu - \mu_0 < \delta$ $\mu - \mu_0 \ne \delta$	$z \ge z_\alpha$ $z \le -z_\alpha$ $\lvert z\rvert \ge z_{\alpha/2}$
4	$\mu_1 - \mu_2 \le \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \ge \delta$ $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$未知)	$t = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{S_w \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ $S_w^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-2)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\mu - \mu_0 > \delta$ $\mu - \mu_0 < \delta$ $\mu - \mu_0 \ne \delta$	$t \ge t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$ $t \le -t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$ $\lvert t\rvert \ge t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 1)$

三、基于成对数据的检验（ t 检验 ）

有时为了比较两种产品, 或两种仪器, 两种方法等的差异, 我们常在相同的条件下作对比试验, 得到一批成对的观察值. 然后分析观察数据作出推断. 这种方法常称为**逐对比较法**.

例6 有两台光谱仪I_x , I_y ,用来测量材料中某种金属的含量, 为鉴定它们的测量结果有无显著差异, 制备了9件试块(它们的成分、金属含量、均匀性等各不相同), 现在分别用这两台机器对每一试块测量一次, 得到9对观察值如下:

$x(\%)$	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
$y(\%)$	0.10	0.21	0.52	0.32	0.78	0.59	0.68	0.77	0.89
$d = x - y(\%)$	0.10	0.09	– 0.12	0.18	– 0.18	0.11	0.12	0.13	0.11

问能否认为这两台仪器的测量结果有显著的差异? $(\alpha = 0.01)$

解　本题中的数据是成对的, 即对同一试块测出一对数据, 我们看到一对与另一对之间的差异是由各种因素, 如材料成分、金属含量、均匀性等因素引起的. [这也表明不能将光谱仪I_x对9个试块的测量结果(即表中第一行)看成是一个样本, 同样也不能将表中第二行看成一个样本, 因此不能用两样本的t检验法作检验].

而同一对中两个数据的差异则可看成是仅由这两台仪器性能的差异所引起的. 这样, 局限于各对中两个数据来比较就能排除种种其他因素, 而只考虑单独由仪器的性能所产生的影响.

表中第三行表示各对数据的差 $d_i = x_i - y_i$,

设 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 来自正态总体 $N(\mu_d, \sigma^2)$,

这里 μ_d, σ^2 均为未知. 若两台机器的性能一样,

则各对数据的差异 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 属随机误差,

随机误差可以认为服从正态分布, 其均值为零.

要检验假设 $H_0: \mu_d = 0,\ H_1: \mu_d \neq 0.$

设 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 的样本均值 $\bar{d}$, 样本方差 s^2,

按单个正态分布均值的 t 检验, 知拒绝域为

$$|t| = \left| \frac{\bar{d} - 0}{s / \sqrt{n}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n-1),$$

由 $n = 9,\ t_{\alpha/2}(8) = t_{0.005}(8) = 3.3554,\ \bar{d} = 0.06,$

$s = 0.1227$, 可知 $|t| = 1.467 < 3.3554$, 所以接受 H_0,

认为这两台仪器的测量结果无显著的差异.

四、小结

本节学习的正态总体均值的假设检验有:

1. 单个总体均值 μ 的检验 —— Z 检验;

2. 两个总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的检验 —— t 检验;

3. 基于成对数据的检验 —— t 检验;

正态总体均值、方差的检验法见下表

（显著性水平为 α）

第三节 正态总体方差的假设检验

一、单个总体的情况

二、两个总体的情况

三、小结

一、单个总体$N(\mu,\sigma^2)$的情况

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2均为未知，

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本，

(1) 要求检验假设: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$， $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$，

其中 σ_0 为已知常数． 设显著水平为 α,

由于 S^2 是 σ^2 的无偏估计，当 H_0 为真时，

比值 $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2}$ 在1附近摆动，不应过分大于 1或过分小于 1,

根据第六章§2, 当 H_0 为真时，$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$,

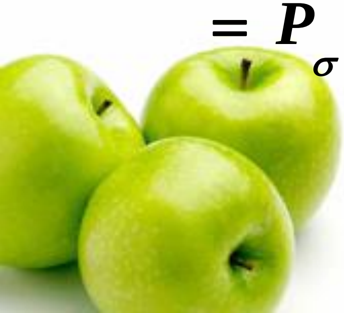
取 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 作为统计量,

拒绝域的形式 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le k_1$ 或 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k_2$,

此处 k_1 和 k_2 的值由下式确定：

$P\{H_0$ 为真，拒绝 $H_0\}$

$$= P_{\sigma_0^2}\left\{\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le k_1\right) \cup \left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k_2\right)\right\} = \alpha .$$



为了计算方便, 习惯上取

$$P_{\sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\le k_1\right\}=\frac{\alpha}{2},\quad P_{\sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\ge k_2\right\}=\frac{\alpha}{2},$$

故得 $k_1=\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$, $k_2=\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$.

拒绝域为:

$$\boxed{\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\le\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\ \text{或}\ \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\ge\chi^2_{\alpha/2}(n-1).}$$

指它们的和集

(2)单边检验问题的拒绝域 (设显著水平为 α)

右边假设检验: $H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$,

因为 H_0 中的全部 σ^2 都比 H_1 中的 σ^2 要小,

当 H_1 为真时, S^2 的观察值 s^2 往往偏大,

拒绝域的形式为: $s^2 \ge k$.

此处 k 的值由下式确定:

$$P\{H_0 \text{为真}, \text{拒绝} H_0\} = P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\{S^2 \ge k\}$$

$$= P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \frac{(n-1)k}{\sigma_0^2}\right\}$$

$$\le P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge \frac{(n-1)k}{\sigma_0^2}\right\}. \quad (因为\ \sigma^2 \le \sigma_0^2)$$

要使 $P\{H_0$ 为真，拒绝 $H_0\} \le \alpha$,

只需令 $P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge \frac{(n-1)k}{\sigma_0^2}\right\} = \alpha.$

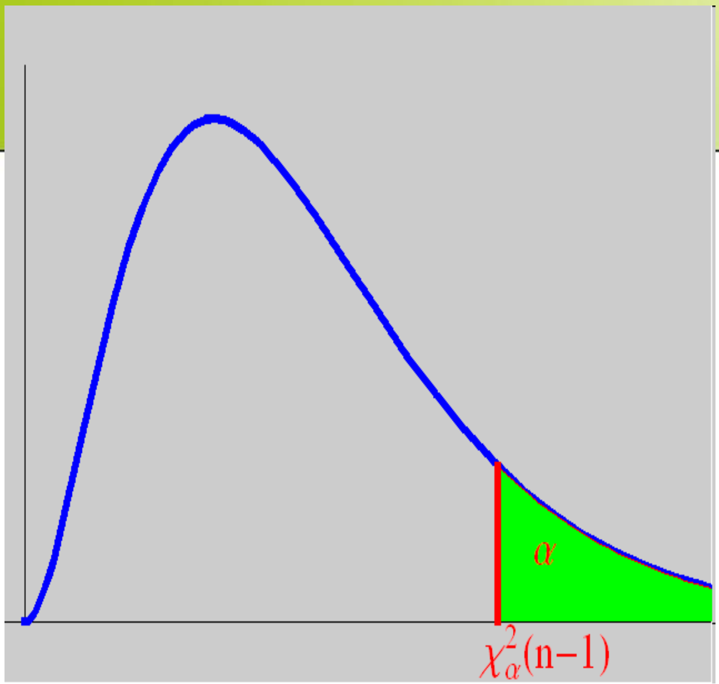
因为 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 所以 $\frac{(n-1)k}{\sigma_0^2} = \chi_\alpha^2(n-1)$,

故 $k=\dfrac{\sigma_0^2}{n-1}\chi_\alpha^2(n-1)$,

右边检验问题的拒绝域为

$$s^2 \ge \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi_\alpha^2(n-1),$$

即 $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\ge \chi_\alpha^2(n-1)$.



同理左边检验问题: $H_0:\sigma^2\ge\sigma_0^2$, $H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$,

拒绝域为 $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\le \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$.

上述检验法称为 χ^2 检验法.

例1 某厂生产的某种型号的电池，其寿命长期以来服从方差$\sigma^2=5000$ (小时^2) 的正态分布，现有一批这种电池，从它生产情况来看，寿命的波动性有所变化. 现随机的取26只电池，测出其寿命的样本方差 $s^2=9200$(小时^2). 问根据这一数据能否推断这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化?

$(\alpha = 0.02)$

解 要检验假设 $H_0: \sigma^2 = 5000,\quad H_1: \sigma^2 \neq 5000,$

$n = 26,\quad \alpha = 0.02,\quad \sigma_0^2 = 5000,$

$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.01}(25) = 44.314,$

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.99}(25) = 11.524,$$

拒绝域为: $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le 11.524$, 或 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge 44.314$.

因为 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{25 \times 9200}{5000} = 46 > 44.314$,

所以拒绝 H_0,

认为这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化.

例2 (续第八章第二节例1)如果只假设切割长度服从正态分布, 问该机切割的金属棒长度的标准差有无显著变化? $(\alpha = 0.05)$

解 因为总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2均为未知,

要检验假设 $H_0: \sigma = 0.15$, $H_1: \sigma \neq 0.15$,

即 $H_0: \sigma^2 = 0.0225$, $H_1: \sigma^2 \neq 0.0225$,

$n = 15$, $\bar{x} = 10.48$, $\alpha = 0.05$, $s^2 = 0.056$,

因为 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{14 \times 0.056}{0.0225} = 34.844$,

查表得 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(14) = 5.629$,

$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(14) = 26.119$,

于是 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{14 \times 0.056}{0.0225} = 34.844 > 26.119$,

所以拒绝 H_0,

认为该机切割的金属棒长度的标准差有显著变化.

例3 某厂生产的铜丝的折断力指标服从正态分布, 现随机抽取9根, 检查其折断力, 测得数据如下(单位:千克): 289, 268, 285, 284, 286, 285, 286, 298, 292. 问是否可相信该厂生产的铜丝的折断力的方差为20? $(\alpha = 0.05)$

解 按题意要检验 $H_0 : \sigma^2 = 20$, $H_1 : \sigma^2 \neq 20$,

$n = 9$, $\bar{x} = 287.89$, $s^2 = 20.36$,

查表得 $\chi^2_{0.975}(8) = 2.18$, $\chi^2_{0.025}(8) = 17.5$,

于是 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{8 \times 20.36}{20} = 8.14$, $2.18 < 8.14 < 17.5$,

故接受 H_0,认为该厂生产铜丝的折断力的方差为20.

例4 某自动车床生产的产品尺寸服从正态分布，按规定产品尺寸的方差 σ^2 不得超过0.1，为检验该自动车床的工作精度，随机的取25件产品，测得样本方差 $s^2=0.1975$，$\bar{x}=3.86$。问该车床生产的产品是否达到所要求的精度？ $(\alpha=0.05)$

解 要检验假设 $H_0:\sigma^2\le 0.1,\quad H_1:\sigma^2>0.1,$

$n=25,\quad \chi^2_{0.05}(24)=36.415,$

因为 $$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{24\times 0.1975}{0.1}=47.4>36.415,$$

所以拒绝 H_0，

认为该车床生产的产品没有达到所要求的精度.

二、两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的情况

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的样本，

$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的样本，

且设两样本独立，其样本方差为 S_1^2, S_2^2.

又设 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ 均为未知，

需要检验假设: $H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2$, $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$,

当 H_0 为真时，$E(S_1^2)=\sigma_1^2 \le \sigma_2^2 = E(S_2^2)$,

当 H_1 为真时，$E(S_1^2)=\sigma_1^2 > \sigma_2^2 = E(S_2^2)$,

当 H_1 为真时，观察值 $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ 有偏大的趋势,

故拒绝域的形式为 $\dfrac{s_1^2}{s_2^2} \ge k$,

此处 k 的值由下式确定：

$$P\{H_0\text{为真，拒绝}H_0\} = P_{\sigma_1^2 \le \sigma_2^2}\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2} \ge k\right\}$$

$$\le P_{\sigma_1^2 \le \sigma_2^2}\left\{\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \ge k\right\}, \quad (\text{因为 } \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \le 1)$$

要使 $P\{H_0 \text{ 为真，拒绝 } H_0\} \le \alpha$,

只需令 $P_{\sigma_1^2 \le \sigma_2^2}\left\{\dfrac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \ge k\right\} = \alpha.$

根据**第六章§2定理四**知

定理四

$$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1,\ n_2 - 1).$$

即 $k = F_{\alpha}(n_1 - 1,\ n_2 - 1)$.

检验问题的拒绝域为 $\boxed{F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} \geq F_{\alpha}(n_1 - 1,\ n_2 - 1).}$

上述检验法称为 F **检验法**.

例5　试对第八章第二节例4中的数据检验假设

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$，　$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$．（取 $\alpha = 0.01$）

解　$n_1 = n_2 = 10$，　拒绝域见表 8.1.　附表8-1

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq F_{0.005}(10-1,\ 10-1) = 6.54$$

或　$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \leq F_{1-0.005}(10-1,\ 10-1)$$

$$= \frac{1}{F_{0.005}(9,\ 9)} = \frac{1}{6.54} = 0.153,$$

因为 $s_1^2 = 3.325,\quad s_2^2 = 2.225,$

所以 $\dfrac{s_1^2}{s_2^2} = 1.49,$

$$0.153 < \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1.49 < 6.54,$$

故接受 H_0, 认为两总体方差相等.

两总体方差相等也称两总体具有方差齐性.

例6　试对第七章第五节例9中的数据检验假设

$H_0:\sigma_1^2 \le \sigma_2^2,\quad H_1:\sigma_1^2 > \sigma_2^2.$ (取 $\alpha = 0.1$)

解　$n_1 = 18,\quad n_2 = 13$，拒绝域见表 8.2.　附表8-2

$F_\alpha(n_1-1,\ n_2-1) = F_{0.1}(18-1,\ 13-1) = 1.96,$

拒绝域为　$\dfrac{s_1^2}{s_2^2} \ge 1.96,$

因为　$s_1^2 = 0.34,\quad s_2^2 = 0.29,\qquad \dfrac{s_1^2}{s_2^2} = 1.17 < 1.96,$

故接受 H_0，认为两总体具有方差齐性.

例7 两台车床加工同一零件, 分别取6件和9件测量直径, 得: $s_x^2 = 0.345$, $s_y^2 = 0.357$. 假定零件直径服从正态分布, 能否据此断定 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$.($\alpha = 0.05$)

解 本题为方差齐性检验:

$$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2, \quad H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2.$$

$$F_{0.025}(5,\ 8) = 4.82, \quad F_{0.975}(5,\ 8) = 0.148,$$

取统计量 $F = \dfrac{s_x^2}{s_y^2} = \dfrac{0.345}{0.357} = 0.9644$,

$0.148 < F < 4.82$, 故接受 H_0, 认为 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$.

例8 分别用两个不同的计算机系统检索10个资料，测得平均检索时间及方差(单位:秒)如下：

$$\bar{x} = 3.097\,,\quad \bar{y} = 3.179\,,\quad s_x^2 = 2.67\,,\quad s_y^2 = 1.21\,,$$

假定检索时间服从正态分布，问这两系统检索资料有无明显差别？ $(\alpha = 0.05)$

解 根据题中条件，首先应检验方差的齐性.

假设 $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$， $H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.

$F_{0.025}(9，9) = 4.03\,,\quad F_{0.975}(9，9) = 0.248\,,$

取统计量 $F = \dfrac{s_x^2}{s_y^2} = \dfrac{2.67}{1.21} = 2.12\,,$

$0.248 < F = 2.12 < 4.03,$

故接受 H_0， 认为 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$.

再验证 $\mu_x = \mu_y$,

假设 $H_0: \mu_x = \mu_y$, $H_1: \mu_x \neq \mu_y$.

取统计量 $t = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_w \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$,

其中 $S_w^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$.

当 H_0 为真时，$t \sim t(n_1 + n_2 - 2)$.

$n_1 = 10$，　$n_2 = 10$，　$t_{0.05}(18) = 2.101$，

因为 $$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{3.097 - 2.179}{\sqrt{\frac{10(2.67 + 1.21)}{18}} \cdot \sqrt{\frac{2}{10}}}$$

$= 1.436 < 2.101$，　故接受 H_0，

认为两系统检索资料时间无明显差别.

三、小结

1. 单个正态总体方差的检验法 —— χ^2 检验法;

2. 两个正态总体方差的检验法 —— F 检验法;

正态总体均值、方差的检验法见下表

(显著性水平为 α)

	原假设 H_0	检验统计量	备择假设 H_1	拒绝域
1	$\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$ $\mu = \mu_0$ (σ^2已知)	$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \ne \mu_0$	$z \ge z_\alpha$ $z \le -z_\alpha$ $\lvert z\rvert \ge z_{\alpha/2}$
2	$\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$ $\mu = \mu_0$ (σ^2未知)	$t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \ne \mu_0$	$t \ge t_\alpha(n-1)$ $t \le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)$
3	$\mu_1 - \mu_2 \le \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \ge \delta$ $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ (σ_1^2, σ_2^2已知)	$Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\mu - \mu_0 > \delta$ $\mu - \mu_0 < \delta$ $\mu - \mu_0 \ne \delta$	$z \ge z_\alpha$ $z \le -z_\alpha$ $\lvert z\rvert \ge z_{\alpha/2}$
4	$\mu_1 - \mu_2 \le \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \ge \delta$ $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$未知)	$t = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{S_w \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ $S_w^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-2)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\mu - \mu_0 > \delta$ $\mu - \mu_0 < \delta$ $\mu - \mu_0 \ne \delta$	$t \ge t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$ $t \le -t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$ $\lvert t\rvert \ge t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 1)$

	原假设 H_0	检验统计量	备择假设 H_1	拒绝域
5	$\sigma^2 \le \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (μ未知)	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ne \sigma_0^2$	$\chi^2 \ge \chi_\alpha^2(n-1)$ $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ $\chi^2 \ge \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$或 $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$
6	$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (μ_1, μ_2未知)	$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$	$F \ge F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$ $F \le F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$ $F \ge F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$或 $F \ge F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$
7	$\mu_D \le 0$ $\mu_D \ge 0$ $\mu_D = 0$ (成对数据)	$t = \dfrac{\overline{D}-0}{S_D/\sqrt{n}}$	$\mu_D > 0$ $\mu_D < 0$ $\mu_D \ne 0$	$t \ge t_\alpha(n-1)$ $t \le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t \rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)$