Домашнее задание № 1
по курсу Функциональное программирование
Группа М23-524   ФИО Леонов В.В.

Задание 1. Дайте определение объекта в λ-исчислении.

Ответ.

Объектами называем термы, которые есть:

1) x, y, z — переменные-термы;

    c — константные термы;

2) если M, N — термы, то ~~соединение~~ MN — терм;

3) если M — терм, то $\lambda x . M$ — терм.

Задание 2. Чему равно f, если а) $f(x) = x^2 + 2$,

                              I, если б) $I(x) = x$.

Ответ

а) $f = \lambda x . x^2 + 2$

б) $I = \lambda x . x$

Задание 3. Восстановите скобки в выражении

а) $z\, x\, y$

б) $x\, x\, (y\, z)\, (x\, z)$

в) $(xy\, (z\, x))\, z\, (x\, x)$

Ответ

а) $(z\, x)\, y$

б) $((x\, x)\, (y\, z))\, (x\, z)$

в) $((x\, y)\, (z\, x)\, z\, (x\, x)$

Задание 4. Опустите лишние скобки.

$$(x\ y\ (y\ z)\ z)\ (y\ ((y\ z)\ x\ x))\ x$$

Ответ

$$x\ y\ (y\ z)\ z\ y\ (y\ z\ x\ x)\ x$$

Задание 5. Постулат β

Ответ

$$(\lambda x.\ s)\ t\ \xrightarrow{\beta}\ [x \to t]s\ -\ \beta\text{-редукция}$$

Задание 6. Постулат α

Ответ

$$\lambda x.\ s\ \xrightarrow{\alpha}\ \lambda y.\ [x \to y]s,\ \text{при условии}\ y \notin FV(s)$$

Задание 7. Редуцируйте выражение

a) $[x \to 2](2 + x)$

в) $(\lambda x.\ x)\ M$

c) $(\lambda x.\ y)\ M$

d) $(\lambda xyz.\ x\ (y\ z))\ (u\ y)(z\ x)$

e) $(\lambda x.\ N)\ M$

f) $(\lambda xy.\ xy x)\ MN$

g) $f(u)$, где $f(x) = x^2 + 2$

h) $g\ 3\ 4$, где $g = \lambda xy.\ x * 3 + ((\lambda x.\ 1 + x^3)\ y$

Ответ

a) $[x \to 2](2 + x) \to 2 + 2 \to 4$

в) $(\lambda x.\ x)\ M \to M$

c) $(\lambda xy)\ M \to y$

d) $(\lambda xyz.\ x\ (y\ z))\ (u\ y)(z\ x) \to (\lambda xwz.\ x\ (w\ z))\ (u\ y)\ (z\ x) \to$
$\to (\lambda wz.\ (u\ y)(w\ z))\ (z\ x) \to (\lambda p.\ (u\ y)(u\ p))\ (z\ x) \to \lambda p.\ (u\ y)\ (z\ x\ p)$

③

e) $(\lambda x. N) M \rightarrow (\lambda y. [x \rightarrow y] N) M$, $y \notin FV(N) \rightarrow$

$\rightarrow [y \rightarrow M] ([x \rightarrow y] N)$

f) $(\lambda xy. xyx) MN \rightarrow (\lambda zy. zyz) MN$, $z \notin FV(M) \rightarrow$

$\rightarrow (\lambda y. MyM) N \rightarrow (\lambda p. MpM) N$, $p \notin FV(N) \rightarrow MNM$

g) $(\lambda x. x^2 + 2) 4 \rightarrow 4^2 + 2 \rightarrow 16 + 2 \rightarrow 18$

h) $(\lambda xy. x*3 + ((\lambda x. 1 + x^3) y)) 3\,4 \rightarrow (\lambda xy. x*3 + 1 + y^3) 3\,4 \rightarrow$

$\rightarrow (\lambda y. 3*3 + 1 + y^3) 4 \rightarrow 3*3 + 1 + 4^3 \rightarrow 3*3 + 1 + 64 \rightarrow$

$\rightarrow 9 + 1 + 64 \rightarrow 10 + 64 \rightarrow 74.$

Задание 8 Ответьте на вопросы:

а) Пусть $K\,xy = x$, чему равно K?

в) Пусть $S\,xyz = xz(yz)$, чему равно S?

с) Пусть $((\circ f) g) x = f(g(x))$, чему равно $\circ$?

Ответ

а) $K = \lambda xy. x$

в) ~~●●●●●●●●●●●●●●●●●●~~ $S = \lambda xyz. xz(yz)$

с) $\circ = \lambda f\,gx. f(g(x))$

Задание 9 Определите множество свободных и связанных переменных:

а) x

в) $\lambda x. x$

с) $\lambda x. y$

d) $\lambda x. x + y$

e) $(\lambda xy. x + y) x$

f) $(\lambda x. x + y) 4) * ((\lambda y. y^x - ((\lambda z. z) z) z)) 2)$

Ответ

а) $FV(M) = \{x\}$, $BV(M) = \varnothing$

④

b) $FV(M) = \emptyset$, $BV(M) = \{x\}$

c) $FV(M) = \{y\}$, $BV(M) = BV(y) \cup \{x\} = \{x\}$.

d) $FV(M) = \{y\}$, $BV(M) = \{x\}$.

e) $FV(M) = FV(x) \cup FV(\lambda xy. x+y) = \{x\}$

$BV(M) = BV(x) \cup BV(\lambda xy. x+y) = \{x, y\}$

f) —

Задание 10 — .

Задание 11. Определите функцию подстановки

$$[x \to N] M$$

Ответ

$$[x \to N] = \lambda M. (\lambda x. M) N$$