# Лабораторная работа **№** 2.

# Спецификация произведений и копроизведений

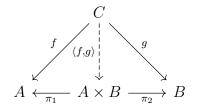
## 1. Цель работы

Изучение свойств категорных произведений, сумм (копроизведений) и двойственности этих понятий. Изучение проявления данных свойств в программировании на примере типов пар и альтернативных значений.

#### 2. Задания

#### 2.1. Произведение

Декартово произведение объектов A и B обозначается как  $A \times B$  и оснащается стрелками-проекциями  $\pi_1\colon A\times B\to A,\, \pi_2\colon A\times B\to B.$  Для каждого объекта X и пары совместимых  $f\colon X\to A$  и  $g\colon X\to B$  определена стрелка спаривания  $\langle f,g\rangle$  таким образом, что следующая диаграмма коммутативна:



что аналогично выполнению спецификаций:

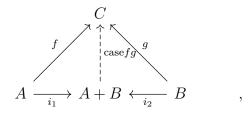
$$\operatorname{pil}(X,A,B \colon \operatorname{Set}) \coloneqq f \colon \operatorname{Hom}(X,A), \ g \colon \operatorname{Hom}(X,B) \vdash \pi_1 \circ \langle f,g \rangle = f,$$
  
 $\operatorname{pil}(X,A,B \colon \operatorname{Set}) \coloneqq f \colon \operatorname{Hom}(X,A), \ g \colon \operatorname{Hom}(X,B) \vdash \pi_2 \circ \langle f,g \rangle = g.$ 

Найти представление декартова произведения в рамках выбранного ЯП. Сформулировать и проверить указанные выше свойства проекций и спаривания.

### 2.2. Копроизведения и двойственность в теории категорий

В теории категорий двойственность подразумевает изменение направления стрелок на противоположное.

Соответственно, понятие, двойственное произведению — категорная сумма или копроизведение — описывается двойственной коммутативной диаграммой:



где A+B обозначает копроизведение объектов A и B, стрелки  $i_1\colon A\to A+B$ , и  $i_2\colon B\to A+B$  называются инъекциями, а case — операция ветвления или разбора случаев.

Приведенную диаграмму можно описать следующими спецификациями:

$$inj1(A, B, X : Set) := f : Hom(A, X), g : Hom(B, X) \vdash (case fg) \circ i_1 = f,$$
  
 $inj2(A, B, X : Set) := f : Hom(A, X), g : Hom(B, X) \vdash (case fg) \circ i_2 = g.$ 

Найти представление копроизведения в рамках выбранного ЯП. Сформулировать и проверить указанные выше свойства проекций и спаривания.

#### 2.3. Дополнительные вопросы

При подготовке к защите лабораторной работы следует продумать ответы на следующие дополнительные контрольные вопросы:

Проверьте справедливость стандартных свойств коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности для произведений и сумм.

Указание: для проверки каждого из законов требуется построить соответствующее двустороннее преобразование и проверить, что оно является изоморфизмом.