

## Лабораторная работа № 3.

# Спецификация функторов и естественных преобразований

## 1. Цель работы

Изучение свойств функторов и естественных преобразований. Изучение проявления данных свойств в программировании на примере типов необязательных значений и списков.

## 2. Задания

**Функтор**  $F$  представляет собой пару функций  $F_o$  и  $F_m$ , преобразующих, соответственно, объекты и стрелки, таких, что справедливы спецификации

$$\text{functorId}\langle F \rangle(A: \text{Set}) := F_m(\text{id}_A) = \text{id}_{F_o(A)},$$

и

$$\begin{aligned} \text{functorComp}\langle F \rangle(A, B, C: \text{Set}) := \\ f: \text{Hom}(B, C), g: \text{Hom}(A, B) \vdash F_m(f \circ g) = F_m(f) \circ F_m(g). \end{aligned}$$

Т. к. функции  $F_o$  и  $F_m$  применимы, соответственно, к объектам и стрелкам, а значит используются в разных местах, то обычно их можно различать, исходя из контекста, и опускать индексы  $o$  и  $m$ .

Идентичным функтором называется функтор  $\text{Id}$ , такой, что функции  $\text{Id}_o$  и  $\text{Id}_m$  являются идентичностями.

**Композиция функторов**  $F$  и  $G$  представляет собой функтор  $F \circ G$  такой, что

$$\begin{aligned} (F \circ G)_o(A: \text{Set}) &:= F_o(G_o(A)), \\ (F \circ G)_m(f: U) &:= F_m(G_m(f)). \end{aligned}$$

Композиция функторов обладает свойством ассоциативности.

Заметим, что точное определение функтора подразумевает, что он отображает одну категорию на другую, а операция композиции функторов является частично определенной. В случае же, если исходная и целевая категории совпадают, функтор называется *эндофунктором*. Т. к. мы проводим работу в единой категории, то все функторы можно считать эндофункторами, а композиция становится полностью определенной.

Для эндофункторов определена операция многократной композиции:

$$F^n = \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_{n \text{ раз}}.$$

**Естественное преобразование** из функтора  $F$  в функтор  $G$  обозначается как  $\eta: F \rightarrow G$  и представляет собой функцию, порождающую для каждого объекта  $A$  стрелку  $\eta_A$  таким образом, что справедливы спецификации

$$\begin{aligned} \text{ntIn}\langle \eta \rangle(A: \text{Set}) &:= \eta_A \in \text{Hom}(F(A), G(A)), \\ \text{ntComp}\langle \eta \rangle(A, B: \text{Set}) &:= f: \text{Hom}(A, B) \vdash \eta_B \circ F(f) = G(f) \circ \eta_A. \end{aligned}$$

**Задание:** Сформулировать и проверить указанные выше свойства функторов на примере типов списков и необязательных значений (`Maybe`, `Option`, `Nullable` и т. п.). Сформулировать естественное преобразование из списков в необязательные значения и проверить его свойства.