

## Лабораторная работа № 2.

### Спецификация произведений и копроизведений

#### 1. Цель работы

Изучение свойств категорных произведений, сумм (копроизведений) и двойственности этих понятий. Изучение проявления данных свойств в программировании на примере типов пар и альтернативных значений.

#### 2. Задания

##### 2.1. Произведение

Декартово произведение объектов  $A$  и  $B$  обозначается как  $A \times B$  и оснащается стрелками-проекциями  $\pi_1: A \times B \rightarrow A$ ,  $\pi_2: A \times B \rightarrow B$ . Для каждого объекта  $X$  и пары совместимых  $f: X \rightarrow A$  и  $g: X \rightarrow B$  определена стрелка *спаривания*  $\langle f, g \rangle$  таким образом, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C & & \\
 & \swarrow f & \downarrow \langle f, g \rangle & \searrow g & \\
 A & \xleftarrow{\pi_1} & A \times B & \xrightarrow{\pi_2} & B
 \end{array} ,$$

что аналогично выполнению спецификаций:

$$\begin{aligned}
 \text{pi1}(X, A, B: \text{Set}) &:= f: \text{Hom}(X, A), g: \text{Hom}(X, B) \vdash \pi_1 \circ \langle f, g \rangle = f, \\
 \text{pi2}(X, A, B: \text{Set}) &:= f: \text{Hom}(X, A), g: \text{Hom}(X, B) \vdash \pi_2 \circ \langle f, g \rangle = g.
 \end{aligned}$$

Найти представление декартова произведения в рамках выбранного ЯП. Сформулировать и проверить указанные выше свойства проекций и спаривания.

##### 2.2. Копроизведения и двойственность в теории категорий

В теории категорий двойственность подразумевает изменение направления стрелок на противоположное.

Соответственно, понятие, двойственное произведению — категорная сумма или копроизведение — описывается двойственной коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C & & \\
 & \nearrow f & \uparrow \text{case } fg & \nwarrow g & \\
 A & \xrightarrow{i_1} & A + B & \xleftarrow{i_2} & B
 \end{array} ,$$

где  $A+B$  обозначает копроизведение объектов  $A$  и  $B$ , стрелки  $i_1: A \rightarrow A+B$ , и  $i_2: B \rightarrow A+B$  называются *инъекциями*, а  $\text{case}$  — операция ветвления или разбора случаев.

Приведенную диаграмму можно описать следующими спецификациями:

$$\begin{aligned}\text{inj1}(A, B, X: \text{Set}) &:= f: \text{Hom}(A, X), g: \text{Hom}(B, X) \vdash (\text{case}fg) \circ i_1 = f, \\ \text{inj2}(A, B, X: \text{Set}) &:= f: \text{Hom}(A, X), g: \text{Hom}(B, X) \vdash (\text{case}fg) \circ i_2 = g.\end{aligned}$$

Найти представление копроизведения в рамках выбранного ЯП. Сформулировать и проверить указанные выше свойства проекций и спаривания.

### 2.3. Дополнительные вопросы

При подготовке к защите лабораторной работы следует продумать ответы на следующие дополнительные контрольные вопросы:

Проверьте справедливость стандартных свойств коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности для произведений и сумм.

Указание: для проверки каждого из законов требуется построить соответствующее двустороннее преобразование и проверить, что оно является изоморфизмом.