



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра вычислительных технологий и моделирования

Роговой Сергей Анатольевич

Метод Каратеодори-Фейера для проектирования рекурсивных цифровых фильтров

КУРСОВАЯ РАБОТА

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор

А. Б. Богатырев

Москва, 2023

Содержание

1	Введение. Теория аппроксимаций	3
1.1	Оптимальные приближения полиномами и рациональными функциями .	3
1.2	Приближения близкие к оптимальным	3
2	Краткое введение в цифровые фильтры	4
3	Метод Каратеодори-Фейера для проектирования фильтров	6
3.1	Мотивация	6
3.2	Постановка задачи	6
3.3	Описание метода	7
3.4	Описание алгоритма	8
4	Примеры	9
4.1	Рекурсивный низкочастотный фильтр минимальной фазы	9
4.2	Рекурсивный низкочастотный фильтр линейной фазы	12
5	Заключение	15
6	Дополнения	16
6.1	Пример 1	16
6.2	Пример 2	17

1 Введение. Теория аппроксимаций

1.1 Оптимальные приближения полиномами и рациональными функциями

Рассмотрим задачу приближения непрерывной вещественной функции $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ с помощью полиномов степени не выше n в норме $\|f(x)\|_\infty \equiv \max\{|f(x)| : x \in [-1, 1]\}$. Пусть \mathbb{P}_n - множество всех полиномов степени не выше n . Назовем аппроксимацию p^* наилучшей, если

$$\|f - p^*\|_\infty \leq \|f - p\|_\infty, \quad \forall p \in \mathbb{P}_n$$

Известна теорема Чебышева об альтернансе:

Теорема 1.1. *У непрерывной вещественной функции $f(x)$ существует единственная наилучшая аппроксимация $p^* \in \mathbb{P}_n$. Полином $p \in \mathbb{P}_n$ является оптимальным, тогда и только тогда, когда существует набор из $n + 2$ точек $x_0 < \dots < x_{n+1}$, такой что $(f - p)(x)$ эквиосциллирует в $\{x_i\}$, то есть принимает равные по модулю значения, чередующиеся по знаку в этих точках.*

Существует также аналогичная теорема для рациональных функций. Рассмотрим множество рациональных функций \mathbb{R}_{mn} вида

$$R_{mn} \equiv \frac{\sum_{k=0}^M b_k x^k}{\sum_{k=0}^N a_k x^k}$$

Назовем точными степенями μ и ν наивысшие степени ненулевых членов в числителе и знаменателе соответственно. Назовем дефектом $d = \min(m - \mu, n - \nu) \geq 0$. d показывает насколько сильно степени числителя и знаменателя отклоняются от максимально допустимых значений. Тогда

Теорема 1.2. *У непрерывной вещественной функции $f(x)$ существует единственная наилучшая аппроксимация $r_{mn}^* \in \mathbb{R}_{mn}$. Рациональная функция $r \in \mathbb{R}_{mn}$ является оптимальной, тогда и только тогда, когда существует набор из $m + n + 2 - d$ точек $x_0 < \dots < x_{m+n+2-d}$, такой что $(f - r)(x)$ эквиосциллирует в $\{x_i\}$, где d - дефект функции r .*

1.2 Приближения близкие к оптимальным

Назовем приближение p близким к оптимальному, если:

$$\|f - p\|_\infty \leq (1 + \rho)\|f - p^*\|_\infty$$

где p^* является оптимальным приближением для функции f .

2 Краткое введение в цифровые фильтры

Пусть последовательность $\{y(n)\}$ вычисляется по формуле

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k x_{n-k} + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k y_{n-k}$$

Эта формула определяет цифровой фильтр. В случае если все коэффициенты $d_k = 0$, фильтр называется нерекурсивным, в противном случае рекурсивным. Назовем фильтр физически реализуемым, если у него нет значений x_k, y_k для $k < 0$. На практике имеет смысл рассматривать только цифровые фильтры ограниченной длины.

Назовем импульсом последовательность со значениями

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0. \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (2.0.1)$$

Пусть $h_k(n)$ - отклик системы на единичный импульс $\delta(n - k)$. Нетрудно убедиться, что для фильтра с конечной импульсной характеристикой $y_n = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k x_{n-k}$ откликами будут просто коэффициенты фильтра $h_k(n) = c_k$. Таким образом фильтр может быть полностью охарактеризован импульсной характеристикой и представлен как

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h_k(n) x_{n-k}$$

Теперь предположим, что входная последовательность $x(n) = e^{iwn}$, тогда получим

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h_k(n) e^{iwn} = e^{iwn} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h_k(n) e^{-iwk} = H(e^{iw}) e^{iwn}$$

где

$$H(e^{iw}) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h_k(n) e^{-iwk}$$

Видно, что $H(e^{iw})$ описывает изменение амплитуды комплексной экспоненты, как функции частоты от w . $H(e^{iw})$ называется частотной характеристикой системы, у которой импульсная характеристика равна $h(n)$. Нерекурсивные фильтры по-другому называются фильтры с конечной импульсной характеристикой (ввиду конечности ненулевой части ряда $\{h(n)\}$ или FIR-фильтры), а рекурсивные - с бесконечной импульсной характеристикой или IIR-фильтры.

Тогда импульсная характеристика может быть получена как обратное преобразование Фурье от частотной характеристики

$$h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{iw}) e^{iwn} dw$$

Z-преобразование импульсной характеристики называется передаточной функцией

$$H(z) = \sum_{k=0}^K h_k z^{-k}$$

Для фильтров с конечной импульсной характеристикой:

$$y_n = \sum_{k=0}^M b_k x_{n-k}$$
$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

Для фильтров с бесконечной импульсной характеристикой:

$$y_n = \sum_{k=0}^M b_k x_{n-k} + \sum_{k=1}^N a_k y_{n-k}$$
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Назовем фильтр устойчивым, если каждый ограниченный входной сигнал создает ограниченный выходной сигнал (не обязательно с таким же ограничением). Эквивалентное определение, что полюса передаточной функции находятся внутри единичного круга.

3 Метод Каратеодори-Фейера для проектирования фильтров

3.1 Мотивация

Не существует быстрого и надежного алгоритма для оптимальной Чебышевской аппроксимации произвольной амплитудной характеристики $|H(e^{iw})|$ или частотной характеристики $H(e^{iw})$ с помощью стабильного фильтра с бесконечной импульсной характеристикой (IIR). Существует много разных алгоритмов: алгоритм Ремеза, методы нелинейного программирования, алгоритм дифференциальной коррекции, алгоритм Лоусона, но ни один из них не является достаточно быстрым, либо они не являются стабильными. В статье [2] представлен новый метод проектирования стабильных, близких к оптимальным цифровых фильтров, основанный на трудах [4], [3], [9]. Заметим, что алгоритм является спектральным и не требует никаких итераций, за исключением поиска собственных векторов и значений Ганкелевой матрицы. Отправной точкой является импульсная характеристика сигнала, которая предполагается конечной и физической. Метод вычисляет оптимальную рациональную Чебышевскую аппроксимацию с заданным наперед числом нулей и полюсов.

3.2 Постановка задачи

Пусть дана физическая импульсная характеристика $h(n)$, $(n = 0, 1, \dots)$ и соответствующая ей передаточная функция:

$$H(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

Если ряд равномерно сходится на единичном круге $\Gamma \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, то можно с достаточной точностью приблизить конечной суммой членов этого ряда или вместо усечения ряда воспользоваться окном с ограниченной полосой пропускания. Так что пусть дан ряд $\{h_k(n)\}_0^K$ и передаточная функция $H_k(z)$:

$$H_k(z) \equiv \sum_{n=0}^K h_k(n)z^{-n}$$

Будем приближать ее на единичном круге с помощью рациональной передаточной функции

$$R_{mn}(z) \equiv \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

все полюса которой находятся внутри единичного круга (стабильный фильтр) и с нормализацией $a_0 = 1$. Обозначим множество функций такого вида как $\mathbb{R}_{mn}(M, N \geq 0)$.

Под оптимальной Чебышевской аппроксимацией будем понимать $R_{mn}^* \in \mathbb{R}_{mn}$, такую что:

$$\|R_{mn}^*(z) - H_k(z)\|_\infty \leq \|R_{mn}(z) - H_k(z)\|_\infty \quad \forall R_{mn} \in \mathbb{R}_{mn}$$

где $\|f\|_\infty \equiv \max\{|f(z)| : z \in \Gamma\}$.

3.3 Описание метода

Можно найти оптимальную Чебышевскую аппроксимацию для более широкого класса функций $\widetilde{\mathbb{R}}_{mn}$:

$$\widetilde{R}_{mn}(z) \equiv \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=-\infty}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

С точки зрения фильтрации этот класс можно рассматривать как включающий нефизические части импульсной характеристики. Метод Каратеодори-Фейера состоит в том, чтобы вычислить расширенную лучшую аппроксимацию \widetilde{R}_{mn}^* и обрезать ее так, чтобы она попадала в изначальный класс \mathbb{R}_{mn} . Это можно сделать приведением к параметрической форме и удаления всех слагаемых b_k с отрицательным k . Более хороший метод, примененный в статье - использовать z -представление передаточной функции через импульсную характеристику и удаление оттуда нефизических слагаемых.

При обрезании данного ряда приближение R_{mn}^* является близким к оптимальному в смысле Чебышева и фактически оптимальным в Ганкелевой норме (Спектральная норма Ганкелевой матрицы составленной из разности импульсных характеристик, идеальной и приближенной).

Составим Ганкелеву матрицу из конечной импульсной характеристики $\{h_k(n)\}_0^K$:

$$H_{v,K} \equiv \begin{bmatrix} h_k(v) & h_k(v+1) & \dots & h_k(K) \\ h_k(v+1) & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_k(K) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

где $h_k(i) = 0, i < 0, v = M - N + 1$

Пусть ее сингулярное разложение записывается как

$$H_{v,K} = U \Sigma V^*$$

тогда

Теорема 3.1. *У H_k существует единственная оптимальная Чебышевская аппроксимация $\widetilde{R}_{mn}^* \in \widetilde{\mathbb{R}}_{mn}$. И ошибка аппроксимации равна N -ому сингулярному числу Ганкелевой матрицы $H_{v,K}$:*

$$\|H_k - \widetilde{R}_{mn}^*\|_\infty = \sigma_N$$

где $\sigma_N = 0, N > K - v$.

\widetilde{R}_{mn}^* может быть найдена как:

$$\widetilde{R}_{mn}^*(z) = H_k(z) - \sigma_N z^{-v} \frac{U_n(z)}{V_N(z^{-1})}$$

где

$$U_n \equiv (u_n(0), \dots, u_n(K-v))$$

$$V_n \equiv (v_n(0), \dots, v_n(K-v))$$

- n-ые столбцы U и V соответственно и

$$U_N(z) \equiv \sum_{n=0}^{K-v} u_N(n) z^{-n}$$

$$V_N(z) \equiv \sum_{n=0}^{K-v} v_N(n) z^{-n}$$

Если импульсная характеристика $\{h_k(n)\}_0^K$ является вещественной, то SVD совпадает со спектральным (собственным) разложением. Для простоты будем считать далее, что она вещественная.

3.4 Описание алгоритма

1. Составить Ганкелеву матрицу $H_{v,K}$ и посчитать ее N-ое по модулю собственное значение и соответствующий ему собственный вектор
2. Составить оптимальную Чебышевскую аппроксимацию и найти ее частотную характеристику для $L \gg M + N + 1$ равномерно распределенных точек на единичном круге

$$\widetilde{R}_{mn}^*(e^{iw_k}) = H_k(e^{iw_k}) - \sigma_N e^{-ivw_k} \frac{V_n(e^{iw_k})}{V_N(e^{-iw_k})}$$

$$w_k = \frac{2\pi k}{L}, k = 0, 1, \dots, L-1$$

3. Найти приближенную импульсную характеристику для расширенного приближения с помощью обратного дискретного преобразования Фурье

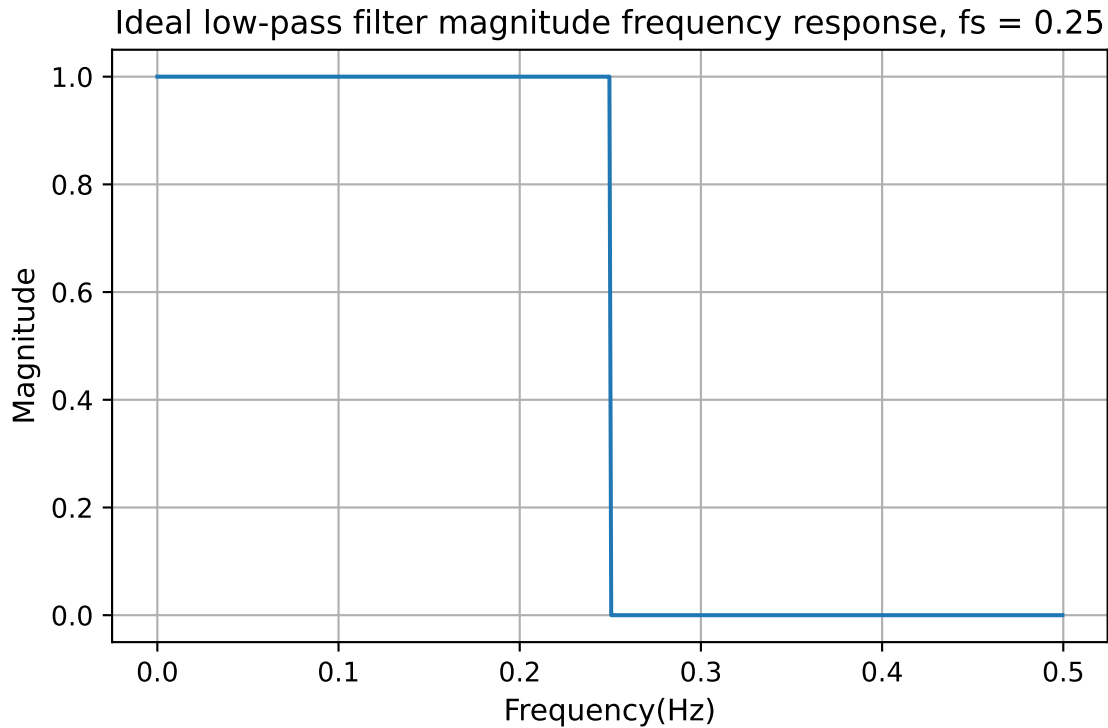
$$\widetilde{h}_{mn}^*(n) = F F^T{}^{-1}(\widetilde{R}_{mn}^*(e^{iw_k}))$$

4. Обрезать нефизическую часть
5. Перевести импульсную характеристику $\{h_{mn}^{CF}(n)\}$ в параметрическую форму

$$H_{approx}(z) = \sum_{n=0}^K h_{mn}^{CF}(n) z^{-n} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

4 Примеры

4.1 Рекурсивный низкочастотный фильтр минимальной фазы

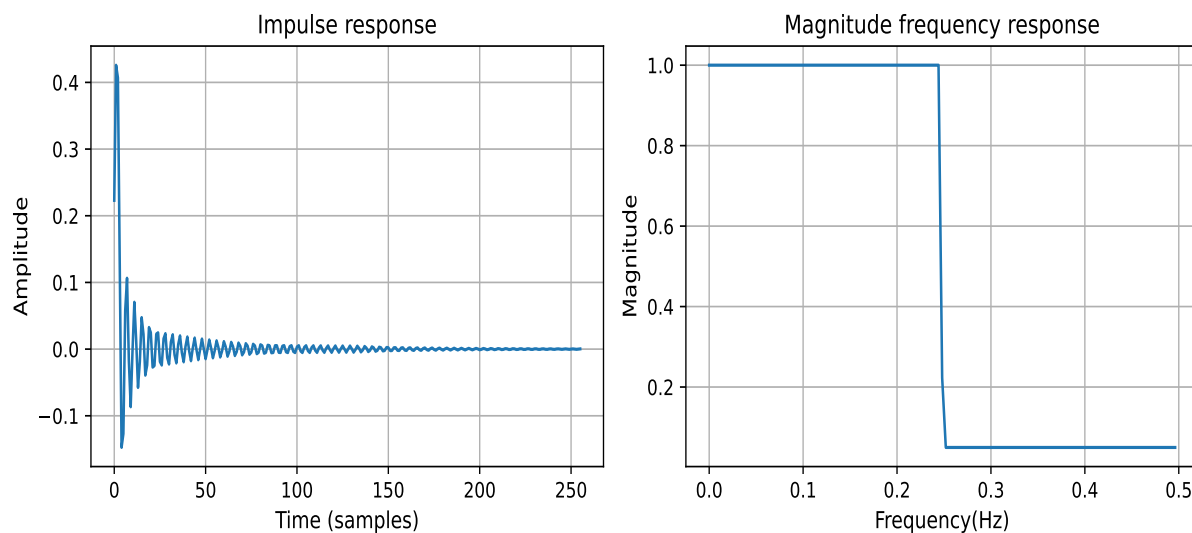


Рассмотрим идеальный низкочастотный фильтр с полосой пропускания до 0.25 Hz. Чтобы практически получить приближение идеальной импульсной характеристики начнем с функции:

$$H(w) = \begin{cases} 0 \text{ dB}, & 0 \leq w < \frac{\pi}{2} \\ -30 \text{ dB}, & w = \frac{\pi}{2} \\ -60 \text{ dB} & \frac{\pi}{2} < w \leq \pi \end{cases} \quad (4.1.1)$$

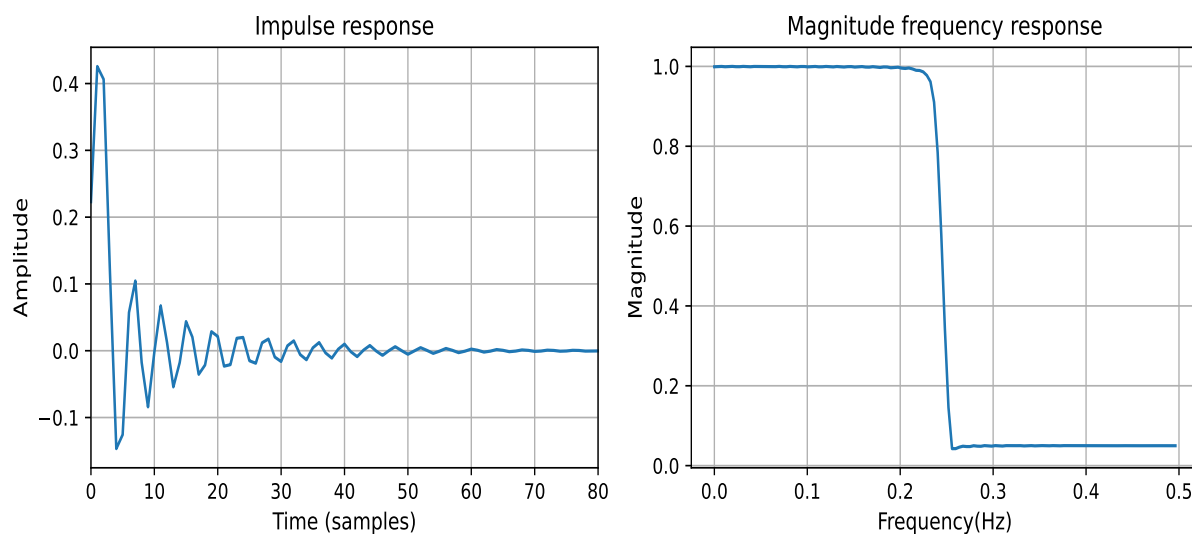
как желаемой амплитуды частотной характеристики. Так как у нас есть только амплитуда и нет фазы, с помощью специальных методов из обработки сигналов сконструируем сигнал с данной амплитудой и минимальной фазой (минимальной групповой задержкой)

Minimum-phase ideal low-pass filter obtained by the windowing the real cepstrum of the impulse response



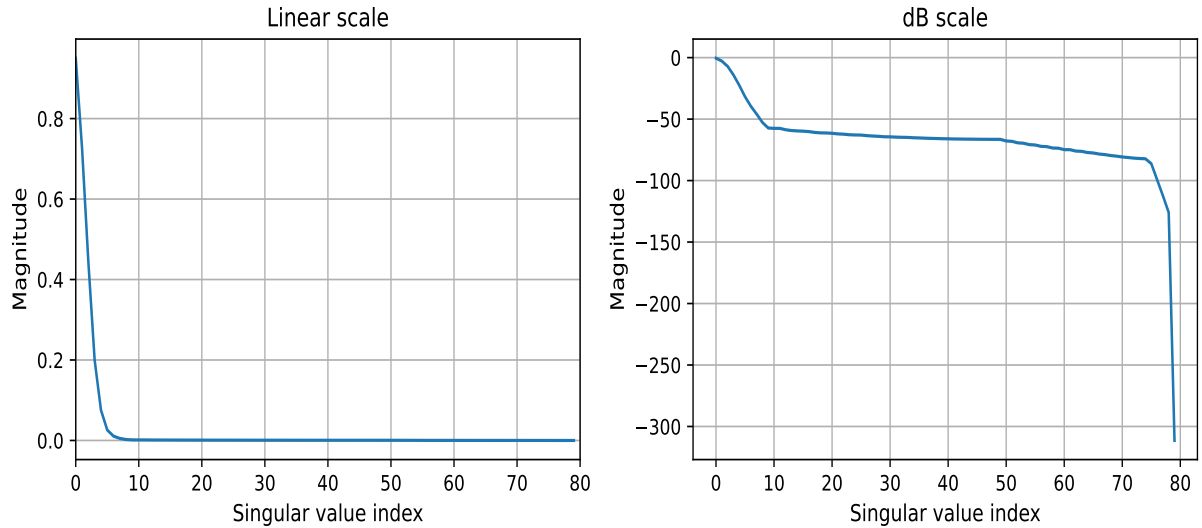
Сгладим и обрежем его окном Хемминга, оставив 80 членов последовательности $h(n)$, что и будет нашей стартовой точкой

Hamming-windowed minimum-phase ideal low-pass filter

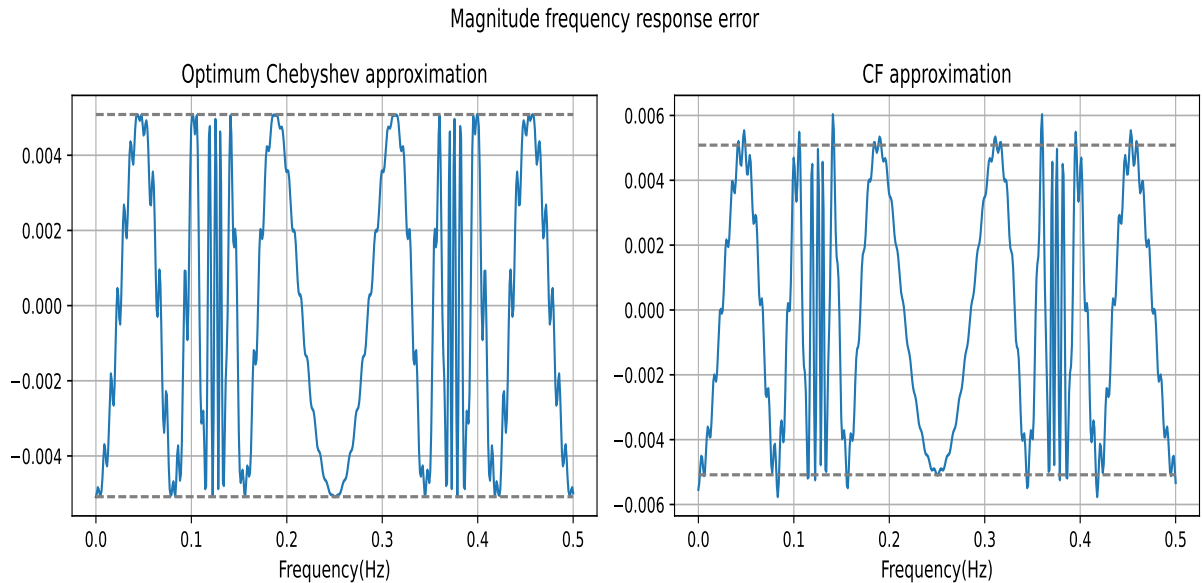


Итак, у нас задано $\{h_K(n)\}_0^{79}$. Рассмотрим приближение с 6 нулями и 7 полюсами ($M = 6, N = 7$). Посмотрим на собственные значения Ганкелевой матрицы:

Singular values of Hankel matrix of windowed minimum-phase filter



Видим, что числа убывают достаточно быстро, $|\lambda_8| = 0.0050862$. Покажем ошибку аппроксимации $|H_k(e^{iw_k})| - |R_{CF}(e^{iw_k})|$, то есть ошибку между амплитудами частотных характеристик:

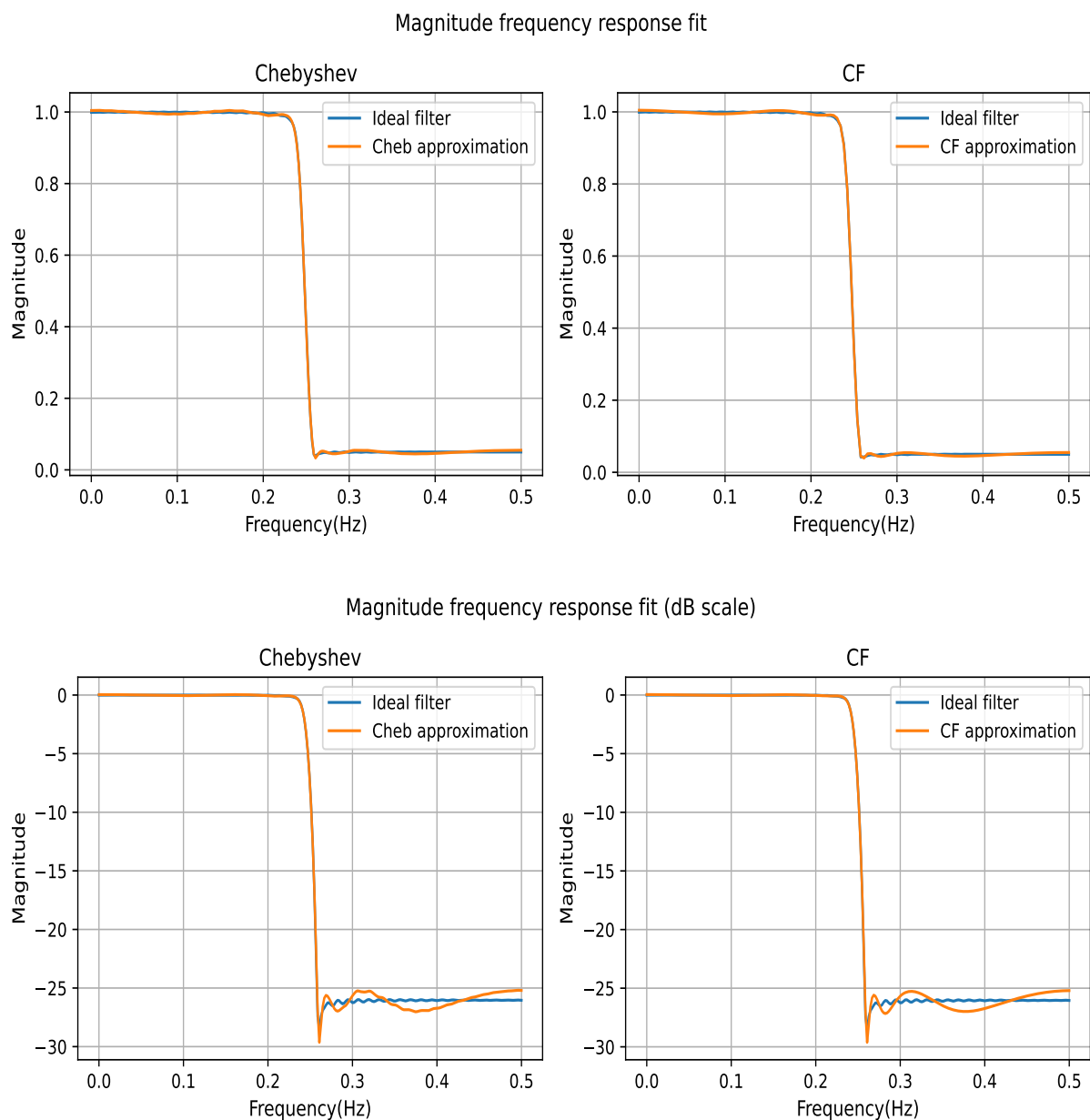


Ошибка аппроксимации Чебышева: 0.0050862320

Ошибка аппроксимации CF: 0.0060291201

Как видим, они не сильно отличаются при обрезке не физических частей фильтра. Интуитивно это можно объяснить, что оптимально приближения физически реализуемый фильтр, отрицательные коэффициенты должны быть около равными нулю, чтобы приближение равномерно хорошо приближало.

Сравним амплитуды частотных характеристик для приближения Чебышева и Каратеодори-Фейера (truncated).



Итоговая ошибка аппроксимации в данном примере: 0.006059869

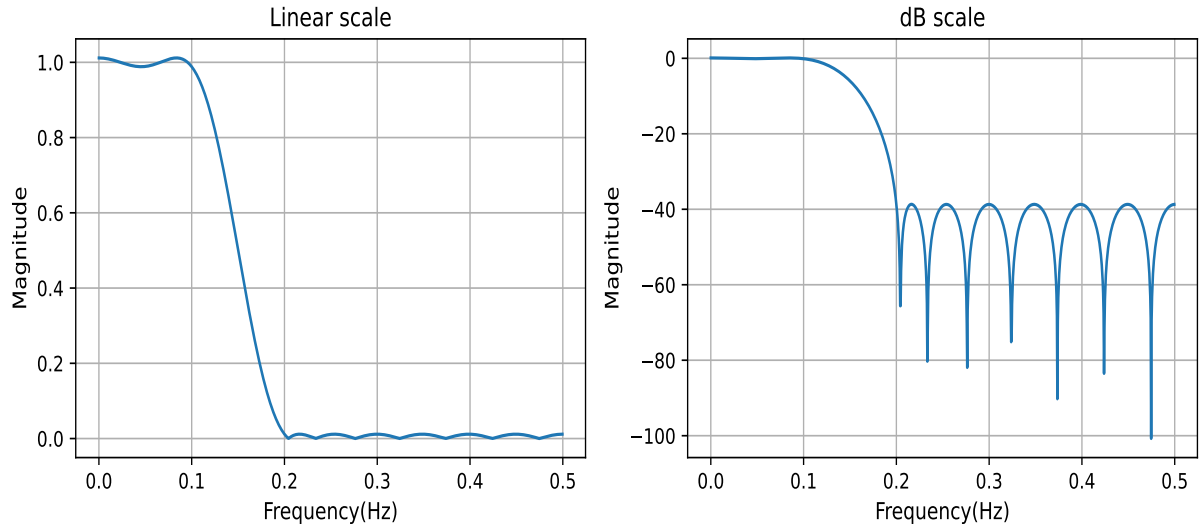
Ошибка при переводе в параметрическую форму при помощи метода Прони:

$1.21879961 \cdot 10^{-6}$

4.2 Рекурсивный низкочастотный фильтр линейной фазы

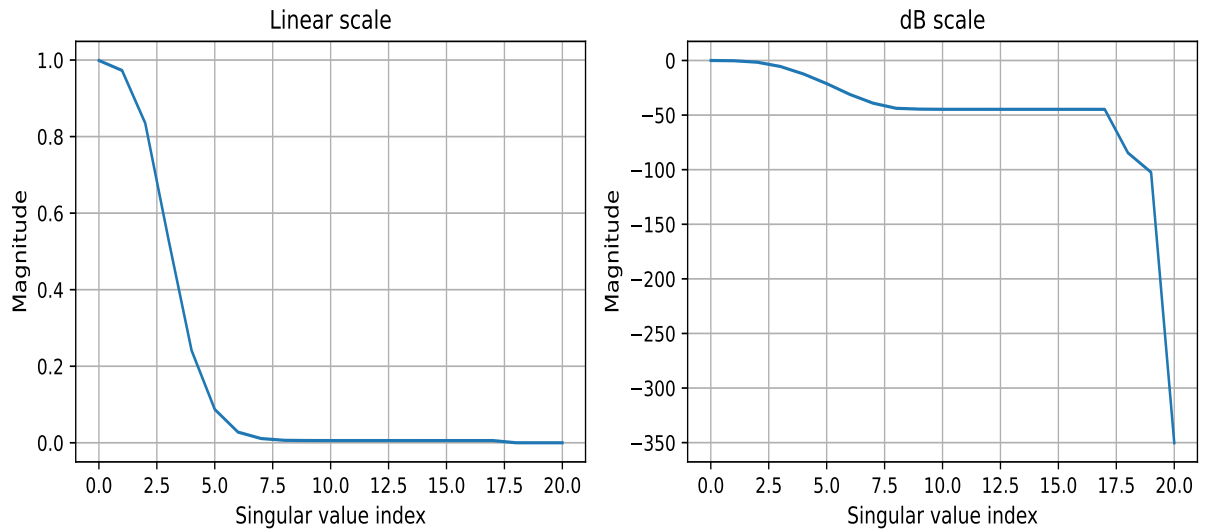
В этом примере попробуем приблизить фильтр с линейной фазой. Создадим с помощью алгоритма ParksMcClellan-Rabiner (PMR) оптимальный FIR-фильтр, как то что можно подать на вход алгоритму Каратеодори-Фейера. Рассмотрим низкочастотный FIR - фильтр длины 21 с полосой пропускания $[0, \frac{1}{10}]$ и полосой задержки $[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}]$:

Low-pass filter magnitude frequency response, $f_{\text{pass}}=[0, 0.1]$, $f_{\text{stop}}=[0.2, 0.5]$



И постараемся приблизить соответствующую импульсную характеристику. Итак, у нас задано $\{h_K(n)\}_0^{20}$. Рассмотрим приближение с 6 нулями и 7 полюсами ($M = 6, N = 7$). Посмотрим на собственные значения Ганкелевой матрицы:

Singular values of Hankel matrix of windowed minimum-phase filter

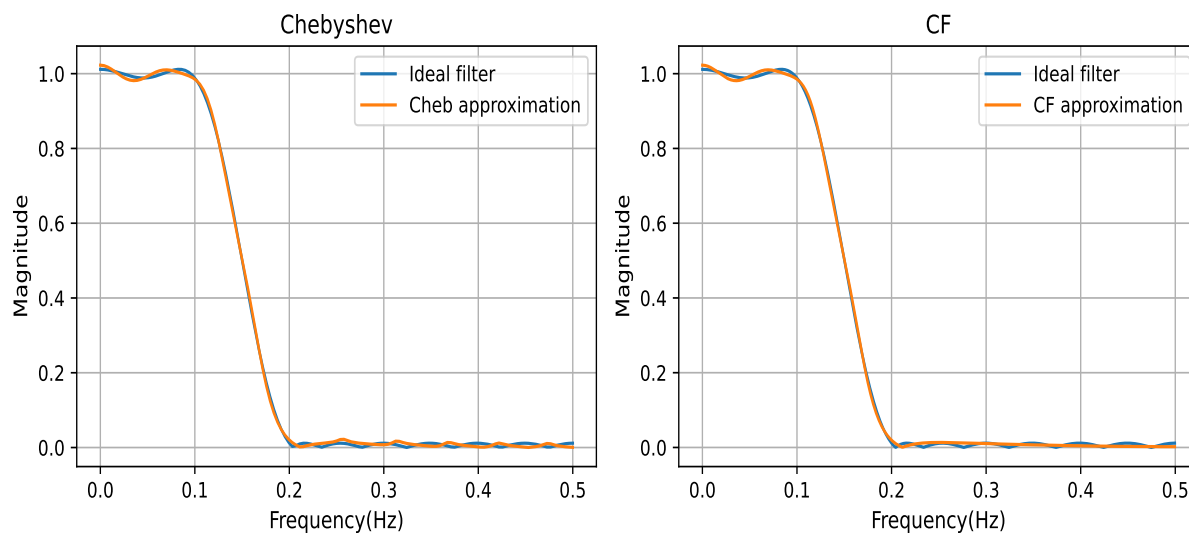


Видим, что числа убывают достаточно быстро, $|\lambda_8| = 0.01110982668$. Сравним сразу амплитуды приближенных частотных характеристик для оптимального приближения Чебышева и близкого к оптимальному Каратеодори-Фейера:

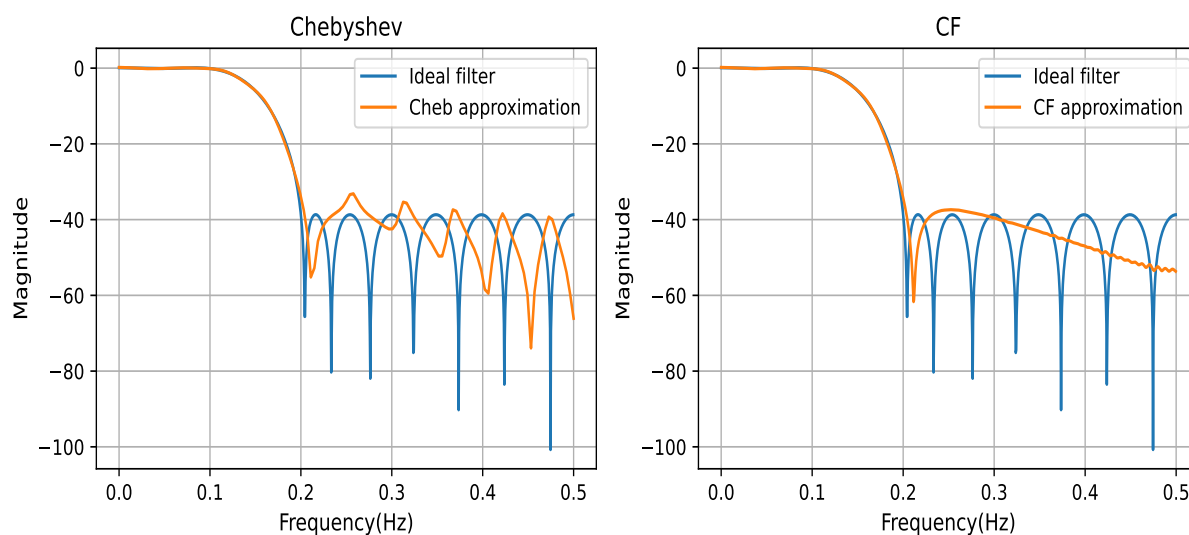
Ошибка аппроксимации Чебышева: 0.01110982

Ошибка аппроксимации CF: 0.01229475

Magnitude frequency response fit



Magnitude frequency response fit (dB scale)



Итоговая ошибка аппроксимации в данном примере: 0.01643010

Ошибка при переводе в параметрическую форму при помощи метода Прони:

0.00221433

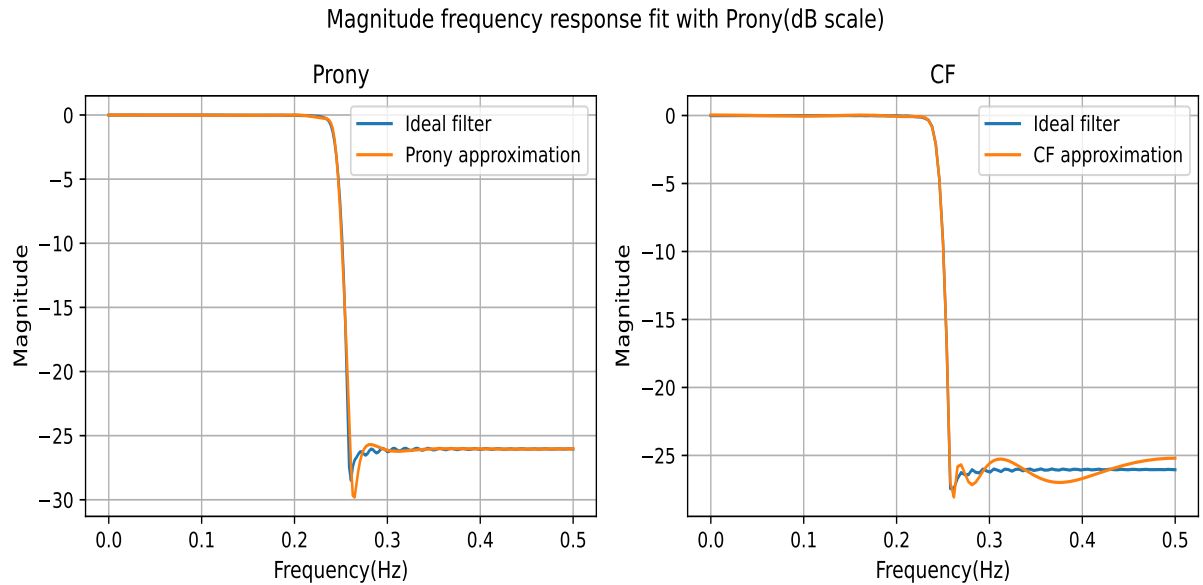
5 Заключение

В итоге данной работы была сделана программная реализация алгоритма аппроксимации, работоспособность проверена на нескольких примерах, все результаты и графики приведены в данной работе. Алгоритм Каратеодори-Фейера - альтернативный итеративным алгоритм спектральной аппроксимации, который особенно хорош при приближении достаточно гладких функций, а также когда сингулярные значения Ганкелевой матрицы убывают достаточно быстро.

6 Дополнения

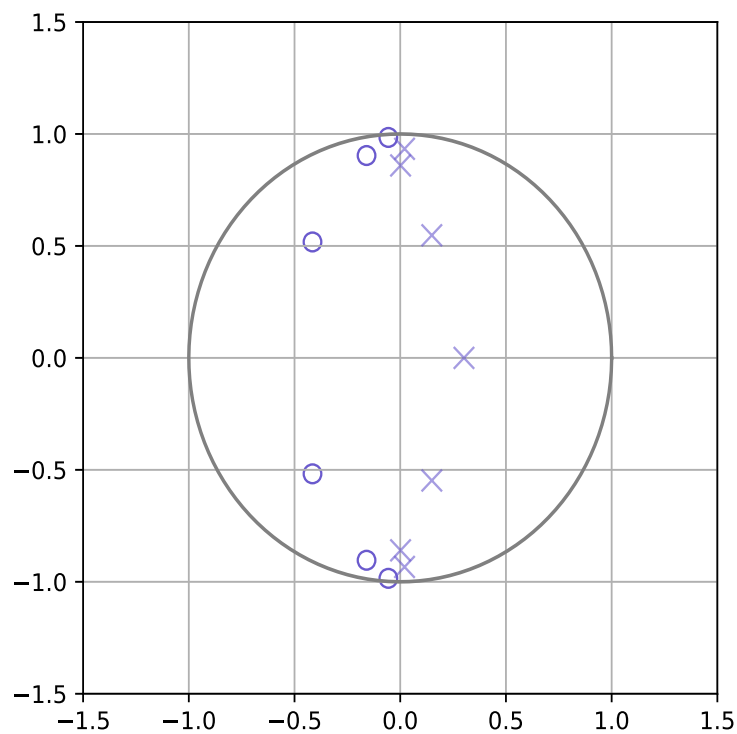
6.1 Пример 1

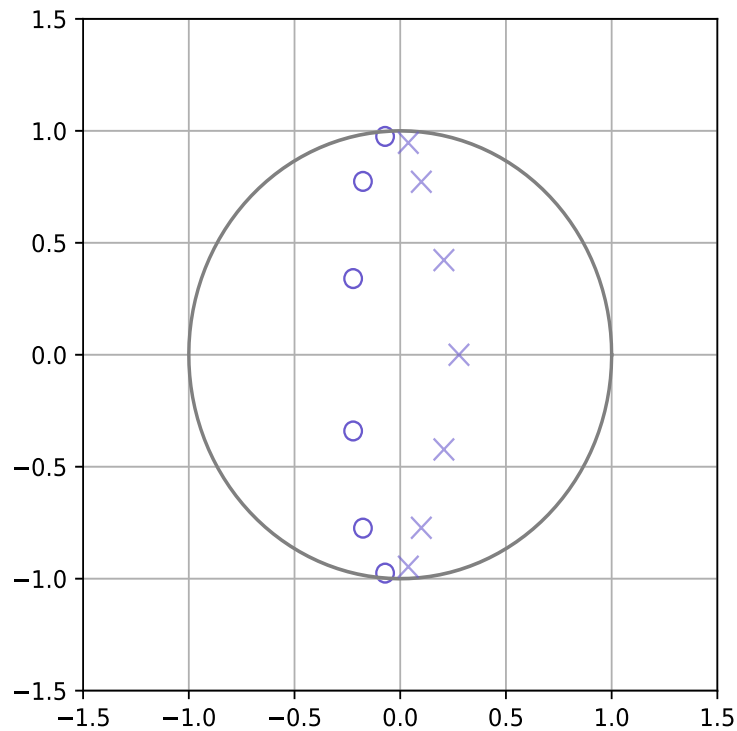
Сравнение с методом Прони, примененном к изначальным данным:



Ошибка метода CF: 0.00605986907

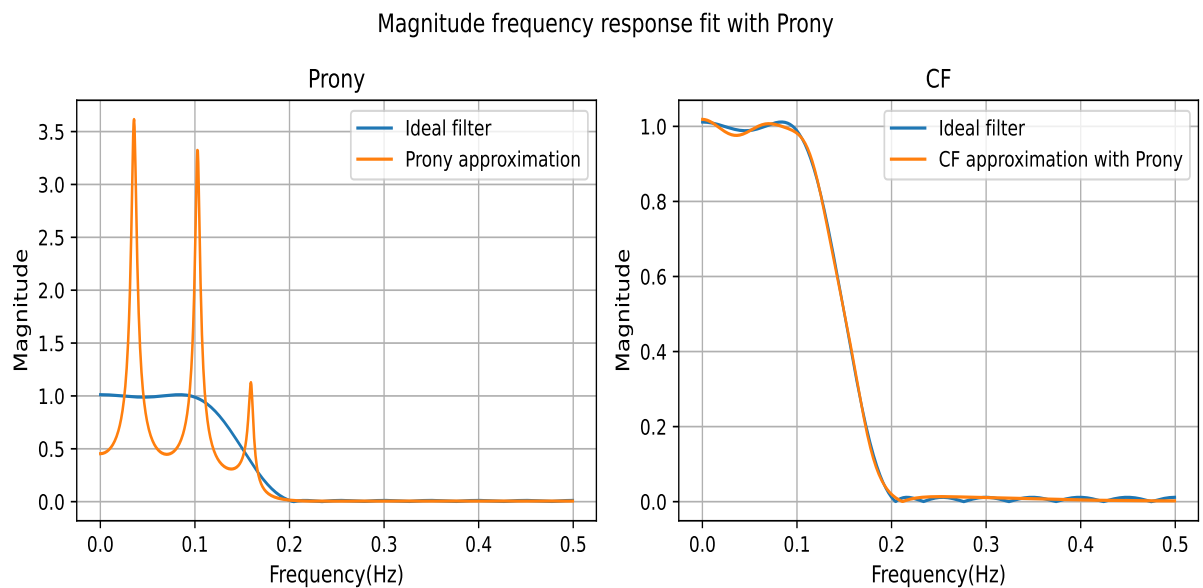
Ошибка метода Прони: 0.0343826095 Сравним расположение нулей и полюсов метода CF и Прони:





6.2 Пример 2

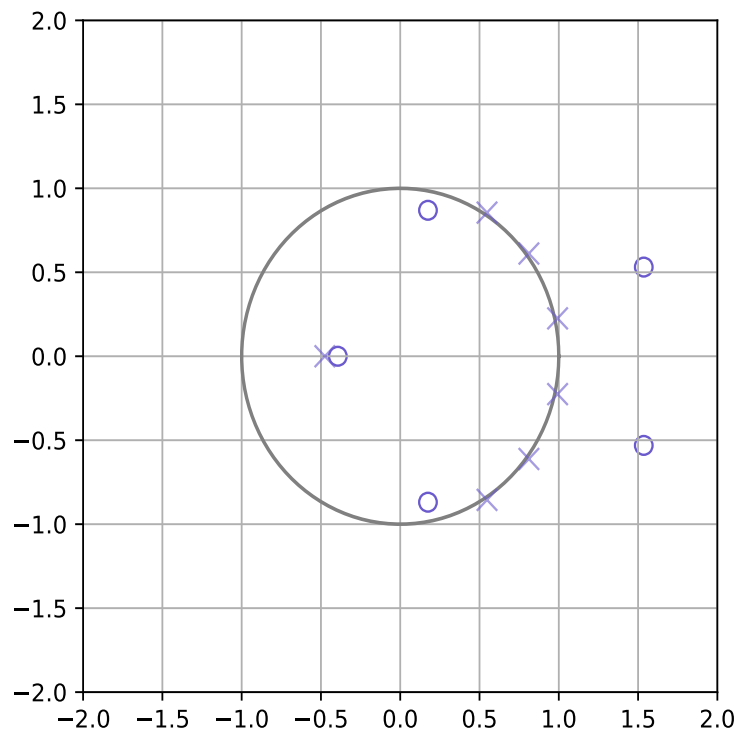
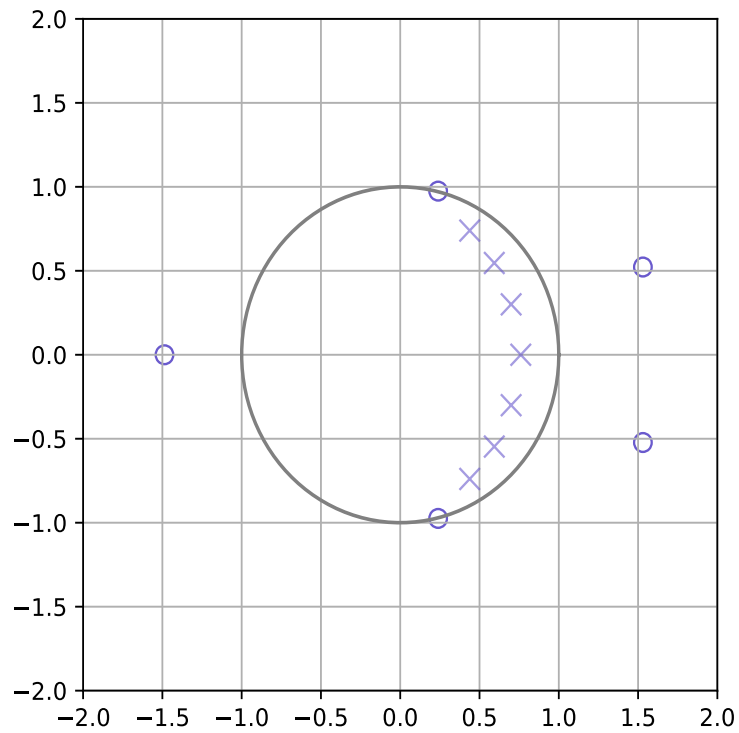
Сравнение с методом Прони, примененном к изначальным данным:



Ошибка метода CF: 0.01643010

Ошибка метода Прони: 2.6242465

Огромная ошибка второго метода видна невооруженным взглядом. Сравним расположение нулей и полюсов метода CF и Прони:



Все полюса метода Прони находятся на единичном круге, что обеспечивает сильную нестабильность метода и показывает, что такой алгоритм минимизации может быть неэффективен.

Список литературы

- [1] *Achieser Naum I.* Theory of approximation. 2013.
- [2] *Gutknecht M, Smith J, Trefethen L.* The Carathéodory-Fejér method for recursive digital filter design // IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing. 1983. 31, 6. 1417–1426.
- [3] *Gutknecht Martin H.* Rational Carathéodory-Fejér approximation on a disk, a circle, and an interval // Journal of approximation theory. 1984. 41, 3. 257–278.
- [4] *Hamming Richard Wesley.* Digital filters. 1998.
- [5] *Oppenheim Alan V, Schafer Ronald W.* Digital signal processing(Book) // Research supported by the Massachusetts Institute of Technology, Bell Telephone Laboratories, and Guggenheim Foundation. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, Inc., 1975. 598 p. 1975.
- [6] *Parks Thomas W, Burrus C Sidney.* Digital filter design. 1987.
- [7] *Roberts Richard A, Mullis Clifford T.* Digital signal processing. 1987.
- [8] *SMITH III JULIUS ORION.* Techniques for Digital Filter Design and System Identification, with Application to the Violin. 1983.
- [9] *Trefethen Lloyd N.* Rational Chebyshev approximation on the unit disk // Numerische Mathematik. 1981. 37. 297–320.
- [10] *Trefethen Lloyd N, Gutknecht Martin H.* The Carathéodory-Fejér method for real rational approximation // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1983. 20, 2. 420–436.