



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра вычислительных технологий и моделирования

Роговой Сергей Анатольевич

Аппроксимация Каратеодори-Фейера в задаче синтеза многополосных фильтров

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор

А. Б. Богатырев

Москва, 2024

Содержание

1	Краткое введение в цифровые фильтры	3
2	Постановка задачи	5
3	Классический метод Каратеодори-Фейера для проектирования фильтров	6
3.1	Общие сведения	6
3.2	Постановка задачи	6
3.3	Описание метода	7
3.4	Описание алгоритма	10
3.5	Метод Прони	10
3.6	Метод Прони для системы интервалов	12
4	Сведение постановки к классической	15
5	Вычисление $G(z)$	17
5.1	Вычисление $G(z)$ для кусочно-постоянных весов	17
5.2	Вычисление $G(z)$ для кусочно-экспоненциальных весов	18
6	Примеры	20
6.1	Рекурсивный трехполосный фильтр с кусочно-экспоненциальными весами	20
6.2	Рекурсивный многополосный фильтр с кусочно-постоянными весами	30
6.3	Пример 3	39
7	Заключение	43

1 Краткое введение в цифровые фильтры

Пусть последовательность $\{y_n\}$ вычисляется по формуле

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k x_{n-k} + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k y_{n-k}$$

Эта формула определяет цифровой фильтр [5], [7]. В случае, если все коэффициенты $d_k = 0$, фильтр называется нерекурсивным, в противном случае - рекурсивным. Назовем фильтр физически реализуемым, если у него нет значений x_k, y_k для $k < 0$. На практике имеет смысл рассматривать только цифровые фильтры ограниченной длины.

Назовем импульсом последовательность со значениями

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0. \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Пусть h_k - отклик системы на единичный импульс $\delta(n-k)$. Нетрудно убедиться, что для фильтра с конечной импульсной характеристикой $y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k x_{n-k}$ откликами будут просто коэффициенты фильтра $h_k = c_k$. Таким образом, фильтр может быть полностью охарактеризован импульсной характеристикой и представлен как

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$$

Теперь предположим, что входная последовательность $x_n = e^{iwn}$, тогда получим

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{iwn-k} = e^{iwn} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{-iwk} = H(e^{iw}) e^{iwn}$$

где

$$H(e^{iw}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{-iwk} \quad (1.0.1)$$

Видно, что $H(e^{iw})$ описывает изменение амплитуды комплексной экспоненты, как функции частоты от w . $H(e^{iw})$ называется частотной характеристикой системы, у которой импульсная характеристика равна $\{h_n\}$. Нерекурсивные фильтры по-другому называются фильтры с конечной импульсной характеристикой (ввиду конечности ненулевой части ряда $\{h_n\}$ или FIR-фильтры), а рекурсивные - с бесконечной импульсной характеристикой или IIR-фильтры.

Тогда импульсная характеристика может быть получена как обратное преобразование Фурье от частотной характеристики

$$h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{iw}) e^{iwn} dw$$

Z-преобразование импульсной характеристики называется передаточной функцией

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k z^{-k}$$

Заметим, что при $|z| = 1$ z-преобразование равно преобразованию Фурье (1.0.1) последовательности.

Для фильтров с конечной импульсной характеристикой:

$$y_n = \sum_{k=0}^M b_k x_{n-k}$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

Для фильтров с бесконечной импульсной характеристикой:

$$y_n = \sum_{k=0}^M b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^N a_k y_{n-k}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Назовем фильтр устойчивым, если каждый ограниченный входной сигнал создает ограниченный выходной сигнал (не обязательно с таким же ограничением). Эквивалентное определение, что полюса передаточной функции находятся внутри единичного круга.

2 Постановка задачи

Пусть на единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ заданы рабочие полосы многополосного фильтра (полосы пропускания и полосы задержки) со значениями $F(z)$. Мы бы хотели приблизить фильтр на рабочих полосах на единичной окружности с помощью рациональной передаточной функции

$$R_{MN}(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

все полюса которой находятся внутри единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ (стабильный фильтр) и с нормализацией $a_0 = 1$. Обозначим множество функций такого вида как $\mathbb{R}_{MN}(M, N \geq 0)$. Тогда мы хотим решить задачу:

$$\|F(z) - R_{MN}(z)\|_{C(B)} \rightarrow \min_{R_{MN}}$$

где $\|f\|_{C(B)} \equiv \max\{|f(z)| : z \in B\}$, где B - множество точек, принадлежащих рабочим полосам фильтра.

Такой модификации метода Каратеодори-Фейера на данный момент не существует, поэтому приближенно заменим аппроксимацию на рабочих полосах фильтра аппроксимацией функции $F(z)$ на всей единичной окружности. Функцию $F(z)$ на переходных полосах доопределим любым удобным способом (кусочно-постоянно, кусочно-линейно, кусочно-экспоненциально). При этом введем кусочно-постоянный положительный вес $\gamma(z) > 0$ так, что переходным полосам фильтра, где поведение функции малоинтересно, будут соответствовать малые положительные значения веса. (Кусочно-постоянность веса не обязательна, ниже будут приведены формулы и для экспоненциальных весов). Таким образом, мы хотим решить задачу минимизации

$$\|\gamma(z)(F(z) - R_{MN}(z))\|_{\infty} \rightarrow \min_{R_{MN}}$$

где $\|f\|_{\infty} \equiv \max\{|f(z)| : z \in \mathbb{T}\}$.

Теперь с помощью решения задачи Дирихле в круге с данными $\ln(\gamma(z))$ на границе мы можем свести наш метод к классическому. Но сначала опишем классический метод.

3 Классический метод Каратеодори-Фейера для проектирования фильтров

3.1 Общие сведения

В статье [3] представлен метод Каратеодори-Фейера для проектирования стабильных, близких к оптимальным цифровых фильтров, основанный на трудах [2], [4], [12], [11]. Заметим, что алгоритм является спектральным и не требует никаких итераций, за исключением поиска собственных векторов и значений Ганкелевой матрицы. Отправной точкой является импульсная характеристика сигнала (коэффициенты обратного преобразования Фурье $H(e^{iw})$), которая предполагается конечной и физически реализуемой. Если задан только $|H(e^{iw})|$, строится функция, совпадающая по модулю с $H(e^{iw})$ на границе единичного круга и голоморфная в его внешности. Метод вычисляет оптимальную квази-рациональную Чебышевскую аппроксимацию с заданным наперед числом нулей и полюсов, а затем обрезает ее для получения аппроксимации из заданного класса.

3.2 Постановка задачи

Пусть дана физически реализуемая импульсная характеристика $h_n, (n = 0, 1..)$ и соответствующая ей передаточная функция:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n}$$

Если ряд равномерно сходится на единичном круге \mathbb{T} , то можно с достаточной точностью приблизить $H(z)$ конечной суммой членов этого ряда. Так что пусть дан ряд $\{h_n\}_0^K$ и передаточная функция $H_K(z)$:

$$H_K(z) = \sum_{n=0}^K h_n z^{-n}$$

Будем приближать ее на единичном круге \mathbb{T} с помощью рациональной функции

$$R_{MN}(z) \equiv \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

все полюса которой находятся внутри единичного круга (в \mathbb{D}) (стабильный фильтр) и с нормализацией $a_0 = 1$. Обозначим множество функций такого вида как $\mathbb{R}_{MN}(M, N \geq 0)$. Под оптимальной рациональной аппроксимацией $H_K(z)$ на \mathbb{T} будем понимать $R_{MN}^* \in \mathbb{R}_{MN}$, такую что:

$$\|R_{MN}^*(z) - H_K(z)\|_{\infty} \leq \|R_{MN}(z) - H_K(z)\|_{\infty} \quad \forall R_{MN} \in \mathbb{R}_{MN}$$

3.3 Описание метода

Можно найти оптимальную Чебышевскую аппроксимацию для более широкого класса квази-рациональных функций $\tilde{\mathbb{R}}_{MN} = z^{M-N}(\mathbb{R}_{NN} + \mathbb{H}^\infty)$, где \mathbb{H}^∞ - пространство Харди - подпространство \mathbb{L}^∞ функций голоморфных в \mathbb{D} :

$$\tilde{R}_{MN}(z) = \frac{\tilde{B}(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=-\infty}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (3.3.1)$$

все нули $z^N A(z)$ находятся внутри единичного круга. С точки зрения фильтров этот класс можно рассматривать как включающий нефизические части импульсной характеристики. Метод Каратеодори-Фейера состоит в том, чтобы вычислить расширенную лучшую аппроксимацию \tilde{R}_{MN}^* и обрезать ее так, чтобы она попадала в изначальный класс \mathbb{R}_{MN} . Это можно сделать приведением к параметрической форме и удаления всех слагаемых b_k с отрицательным k . Более хороший метод, примененный в статье [3] - перейти к ряду Лорана (импульсной характеристике) и удалить оттуда нефизические слагаемые (соответствующие положительным степеням). При обрезании данного ряда приближение R_{MN}^* является близким к оптимальному в смысле Чебышева.

Напомним, что индексом замкнутой кривой η , не проходящей через 0, называется целое число $\text{ind } \eta = (2\pi i)^{-1} \int_{\eta} z^{-1} dz$. Интуитивно это число совпадает с количеством оборотов кривой η вокруг нуля против часовой стрелки. Также для функции $\tilde{R}_{MN}(z)$, определенной по формуле (3.3.1), назовем точными степенями μ и ν наивысшие степени ненулевых членов в числителе и знаменателе соответственно. Дефектом этой функции относительно класса $\tilde{\mathbb{R}}_{MN}$ будем называть число $\delta = \min(M - \mu, N - \nu) \geq 0$. Дефект показывает насколько сильно степени числителя и знаменателя отклоняются от максимально допустимых значений.

Теорема 3.1. Пусть $f(z)$ аналитическая в $\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$ и непрерывна на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, $\tilde{r} \in \tilde{\mathbb{R}}_{MN}$ и пусть $\eta(t) = (f - \tilde{r})(e^{2\pi i t})$, $t \in [0, 1]$ – кривая ошибки. Предположим, что $|\eta(t)| = \text{const}$ и $\text{ind } \eta \geq M + N + 1 - \delta$, где δ – дефект \tilde{r} относительно класса $\tilde{\mathbb{R}}_{MN}$. Тогда \tilde{r} это лучшая аппроксимация $f(z)$ в $\tilde{\mathbb{R}}_{MN}$. Более того, такая аппроксимация единственна.

Доказательство. Доказательство представлено в [6], [12]. □

Составим Ганкелеву матрицу из конечной импульсной характеристики $\{h_n\}_0^K$:

$$H_{v,K} = \begin{bmatrix} h_v & h_{v+1} & \dots & h_K \\ h_{v+1} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_K & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

где $h_i = 0, i < 0, v = M - N + 1$

Пусть ее сингулярное разложение записывается как

$$H_{v,K} = U\Sigma V^*, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{K-v} \end{bmatrix}, \quad |\sigma_0| > |\sigma_1| > \dots > |\sigma_{K-v}|$$

Теорема 3.2. Для $H_k(z)$ существует единственная непрерывная функция $\widetilde{R}_{MN}^* \in \widetilde{\mathbb{R}}_{MN}$, чья кривая ошибки $\eta(t) = (f - \widetilde{r})(e^{2\pi it})$, $t \in [0, 1]$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1. Кроме того, ошибка аппроксимации равна N -ому сингулярному числу Ганкелевой матрицы $H_{v,K}$:

$$\|H_k(z) - \widetilde{R}_{MN}^*(z)\|_\infty = \sigma_N$$

где $\sigma_N = 0$, если $N > K - v$.

\widetilde{R}_{MN}^* имеет вид:

$$\widetilde{R}_{MN}^*(z) = H_k(z) - \sigma_N z^{-v} \frac{U_N(z)}{V_N(z^{-1})}$$

где

$$U_N = (u_0, u_1, \dots, u_{K-v})$$

$$V_N = (v_0, v_1, \dots, v_{K-v})$$

- n -ые столбцы U и V соответственно и

$$U_N(z) = \sum_{n=0}^{K-v} u_n z^{-n}$$

$$V_N(z) = \sum_{n=0}^{K-v} v_n z^{-n}$$

И в силу симметричности матрицы $H_{v,K}$ $\bar{U} = V$.

Доказательство теоремы 3.2. [6] Пусть $d \leq K$ – целое число и рассмотрим конечную Ганкелеву матрицу $H_{d,K}$:

$$H_{d,K} = \begin{bmatrix} h_d & h_{d+1} & \dots & h_K \\ h_{d+1} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_K & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Пусть $\sigma \in [0, +\infty)$ и $U = (u_0, u_1, \dots, u_{K-d}) \in \mathbb{C}^{K-d+1}$ – сингулярное число и соответствующий ему левый сингулярный вектор, так что $H_{d,K} \bar{U} = \sigma U$. Обозначим $u(z)$ и $\overline{u(z)}$ полиномы:

$$u(z) \equiv \sum_{n=0}^{K-d} u_n z^{-n}$$

$$\overline{u(z)} \equiv \sum_{n=0}^{K-d} u_n z^n$$

Тогда:

$$H_k(z)\overline{u(z)} - \sigma z^d u(z) \in \widetilde{\mathbb{R}}_{d-1,0} \quad (3.3.2)$$

И наоборот, коэффициенты полинома $u \in \widetilde{\mathbb{R}}_{K-d,0}$, которые удовлетворяют (3.3.2) для некоторого $\sigma \in [0, +\infty)$ определяют сингулярный вектор $H_{d,K}$. Пусть Q - число нулей $u(z)$ в $1 < |z| < \infty$, η - число нулей $u(z)$ в ∞ и рассмотрим мероморфную функцию $\widetilde{r(z)}, |z| < 1$, тч:

$$H_K(z) - \widetilde{r(z)} = \sigma z^d \frac{u(z)}{\overline{u(z)}} \quad (3.3.3)$$

Согласно (3.3.2) $\widetilde{r(z)}\overline{u(z)} \in \widetilde{\mathbb{R}}_{d-1,0}$. С другой стороны, согласно (3.3.3) \widetilde{r} имеет не больше $Q - \eta$ полюсов в \mathbb{D} (не больше, тк некоторые нули \overline{u} могут сократиться с нулями u). Тогда если $P = Q - 1 + d$, то $\widetilde{r} \in \widetilde{\mathbb{R}}_{P,Q-\eta}$ и тем более $\widetilde{r} \in \widetilde{\mathbb{R}}_{P,Q}$

Из (3.3.3) понятно, что для кривой ошибки $\psi(t) = (H_K - \widetilde{r})(e^{2\pi it}), t \in [0, 1]$ верно $|\psi(t)| = \sigma$ и $\text{ind } \psi = 2Q + d$, если u не имеет нулей на границе круга и $\text{ind } \psi > 2Q + d$ в противном случае. Тогда $\text{ind } \psi \geq P + Q + 1$. Тогда по теореме 3.1 $\widetilde{r} = \widetilde{r}^*$ - единственная лучшая аппроксимация $H_K(z)$ из $\widetilde{\mathbb{R}}_{P,Q}$ и соответствующая ошибка аппроксимации

$\|H_K(z) - \widetilde{r}^*\|_\infty = \sigma$. Рассмотрим все сингулярные числа $H_{d,K}$: $\sigma_0 > \sigma_1 > \dots > \sigma_{K-d}$ и предположим на время, что они различны. Мы показали, что каждое сингулярное число σ_n - ошибка аппроксимации $\|H_K(z) - \widetilde{r}^*\|$ для оптимальной квази-рациональной функции в классе $\widetilde{\mathbb{R}}_{Q-1+d,Q}, 0 \leq Q \leq K - d$. Так как $\|H_K(z) - \widetilde{r}^*\|$ должна уменьшаться или хотя бы оставаться постоянной с ростом Q возможно только что $Q = N$, те

$$\|H_K(z) - \widetilde{r}_{N-1+d,N}^*\| = \sigma_N, 0 \leq N \leq K - d \quad (3.3.4)$$

И $M = N - 1 + d, d = v = M - N + 1$. Теперь вернемся к общему варианту и докажем, что это же верно и для собственных значений с кратностями. Пусть даны $H_K(z)$ и ε , рассмотрим возмущение $H_K^\varepsilon(z), \|H_K(z) - H_K^\varepsilon(z)\| \leq \varepsilon$, Ганкелева матрица которого H_ε имеет простые собственные значения и для N -ого сингулярного числа σ_ε верно $|\sigma - \sigma_\varepsilon| \leq \varepsilon$. Как уже было отмечено $(H_K^\varepsilon(z) - \widetilde{r}_\varepsilon^*)(\mathbb{T})$ - это окружность радиуса σ_ε , тогда $(H_K(z) - \widetilde{r}^*)(\mathbb{T})$ близка к окружности с радиусом, варьирующимся в $[\sigma_\varepsilon - \varepsilon, \sigma_\varepsilon + \varepsilon] \subseteq [\sigma - 2\varepsilon, \sigma + 2\varepsilon]$. Значит, $\|H_K(z) - \widetilde{r}^*\| \in [\sigma - 2\varepsilon, \sigma + 2\varepsilon]$, при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем требуемое (3.3.4) равенство. □

Если импульсная характеристика $\{h_n\}_0^K$ является вещественной, то SVD совпадает со спектральным (собственным) разложением. Для простоты будем считать далее, что она вещественная.

3.4 Описание алгоритма

1. Составить Ганкелеву матрицу $H_{v,K}$ и посчитать ее N -ое по модулю собственное значение и соответствующий ему собственный вектор
2. Составить оптимальную Чебышевскую аппроксимацию и найти ее частотную характеристику для $L \gg M + N + 1$ равномерно распределенных точек на единичном круге

$$\widetilde{R}_{MN}^*(e^{iw_k}) = H_k(e^{iw_k}) - \sigma_N e^{-ivw_k} \frac{V_N(e^{iw_k})}{V_N(e^{-iw_k})}$$

$$w_k = \frac{2\pi k}{L}, k = 0, 1, \dots, L-1$$

3. Найти приближенную импульсную характеристику для расширенного приближения с помощью обратного дискретного преобразования Фурье

$$\widetilde{h}_{MN}^*(n) = FFT^{-1}(\widetilde{R}_{MN}^*(e^{iw_k})) = \frac{1}{L} \sum_{j=0}^L \widetilde{R}_{MN}^*(e^{iw_j}) e^{iw_j n}$$

4. Обрезать нефизическую часть

Для $v \geq 0$ ($M \geq N-1$)

$$h_{MN}^{CF}(n) = \begin{cases} \widetilde{h}_{MN}^*(n), & n = 0, \dots, L/2 - 1. \\ 0, & n = L/2, \dots, L-1. \end{cases}$$

Для $v < 0$ ($M < N-1$)

$$h_{N-1N}^{CF}(n) = \begin{cases} \widetilde{h}_{MN}^*(n+v), & n = 0, \dots, L/2 - 1. \\ 0, & n = L/2, \dots, L-1. \end{cases}$$

5. Перевести импульсную характеристику $\{h_{MN}^{CF}(n)\}$ в параметрическую форму (при помощи метода Прони).

Для $v \geq 0$ $\{h_{MN}^{CF}(n)\} \rightarrow \{a_i, b_j\}, i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, M$

Для $v < 0$ $\{h_{N-1N}^{CF}(n)\} \rightarrow \{a_i, c_j\}, i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$

$b_j = c_{j-v}, j = 0, 1, \dots, M$

$$H_{approx}(z) = \sum_{n=0}^K h_{MN}^{CF}(n) z^{-n} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

3.5 Метод Прони

Передаточная функция IIR фильтра имеет вид:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Импульсная характеристика h_n связана с $H(z)$ через:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n}$$

Тогда верно: $B(z) = H(z)A(z)$. Если предположить конечность $\{h_n\}_0^L$, $H_L(z) = \sum_{n=0}^L h_n z^{-n}$, то верно:

$$\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = \left(\sum_{k=0}^L h_k z^{-k} \right) \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right)$$

Это можно записать в виде матричного произведения с теплицевой матрицей:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_M \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_M & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_L & \dots & \dots & \dots & h_{L-N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \end{bmatrix}$$

В блочном виде это можно записать как:

$$\begin{bmatrix} b^* \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & & \\ - & - & - \\ H_2 & | & H_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ a^* \end{bmatrix}$$

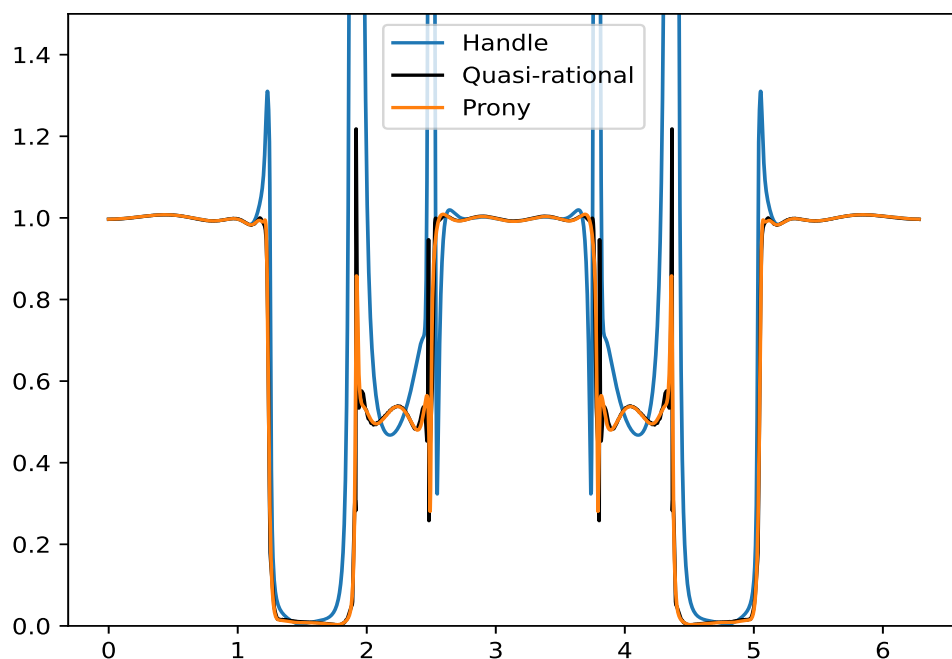
где H_1 имеет размер $(M+1 \times N+1)$, H_2 - $(L-M \times 1)$, H_3 - $(L-M \times N)$ Решим эту систему в два шага:

$$1) \quad 0 = H_2 + H_3 a^* \Rightarrow H_3^T H_2 = -H_3^T H_3 a^* \quad (Least_Squares)$$

$$2) \quad b^* = H_1 a^*$$

Система минимизирует L_2 норму ошибки, при этом заметим, что система сильно переопределенная, и, учитывая размер L в примерах ($L \gg M+N+1$), при переходе к конечным суммам в $H(z)$ отбрасываются члены, которые близки к нулю в компьютере. То есть теплицева матрица хорошо описывает функцию, основную информацию о поведении которой содержат полюса, лежащие внутри круга. Программные эксперименты подтверждают, что ошибка после применения метода Прони возрастает не сильно для достаточно гладких приближаемых функций (конкретные цифры можно найти в разделе примеров). Однако стоит отметить, что так как метод минимизирует L_2 норму ошибки, он не учитывает различные важности регионов, и в результате преобразования ошибка на рабочих полосах может увеличиться, в то время как метод снизит ошибку на переходных полосах. Кроме того, оптимальность в L_2 норме не говорит ничего об

оптимальности в Чебышевской норме, и ошибка аппроксимации в Чебышевской норме на рабочих полосах также может увеличиться в результате конвертации, при том что ошибка "в среднем" на рабочих полосах будет оптимальной. Это также можно увидеть в примерах. Заметим, что если полюса заранее известны и мы подставим в метод $A(z) \equiv 1$, то метод будет просто интерполировать числитель первыми M коэффициентами Фурье. Это можно рассматривать как альтернативный метод преобразования квази-рациональных функций к классу \mathbb{R}_{MN} , так как полюса можно найти из построения алгоритма. Полюса - это корни полинома $V_N(z^{-1})$, причем внутри круга лежат ровно N из них, что полностью определяет знаменатель рациональной функции. И после этого можно интерполировать числитель квази-рациональной функции, например, также первыми M коэффициентами Фурье. Однако, численные эксперименты показывают, что эти два метода либо работали одинаково, либо метод Прони был лучше и отодвигал полюса от границы круга, за счет чего аппроксимация получалась более стабильной. Пример: Handle - второй описанный метод, и как мы видим, он взрывается в некоторых граничных точках.



3.6 Метод Прони для системы интервалов

Стандартный метод Прони минимизирует L_2 норму на всей окружности, однако наша исходная задача - хорошо аппроксимировать фильтр на рабочих полосах. Стандартный метод Прони в результате конвертации ряда в параметрическую форму $\{a, b\}$ может увеличить ошибку на рабочих полосах, уменьшив ее на переходных, что является недостатком этого метода. Это можно увидеть в разделе примеров. Мы можем попробовать избежать этого, заменив L_2 норму на всей окружности на норму только на рабочих полосах фильтра. Для этого надо заменить стандартное скалярное произ-

ведение $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f \bar{g} d\mu$, где μ обозначает угловую меру на окружности, на скалярное произведение на рабочих полосах фильтра $\langle f, g \rangle_B = \int_B f \bar{g} d\mu$. Р-м изначальную систему

$$\begin{bmatrix} b^* \\ \text{---} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & H_1 & \\ - & - & - \\ H_2 & | & H_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \text{---} \\ a^* \end{bmatrix}$$

где H_1 имеет размер $(M + 1 \times N + 1)$, $H_2 - (L - M \times 1)$, $H_3 - (L - M \times N)$

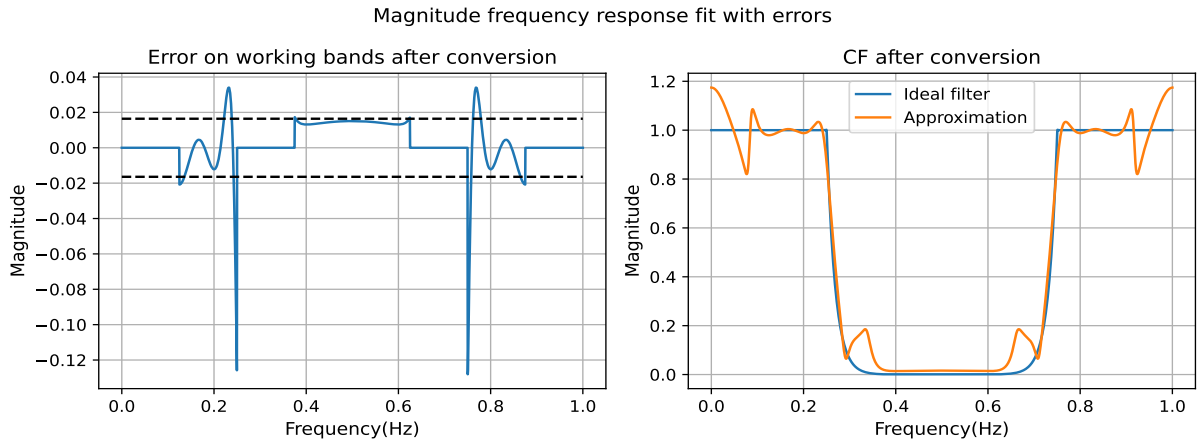
$$1) \quad 0 = H_2 + H_3 a^* \Rightarrow H_3^T H_2 = -H_3^T H_3 a^* \quad (Least_Squares)$$

$$2) \quad b^* = H_1 a^*$$

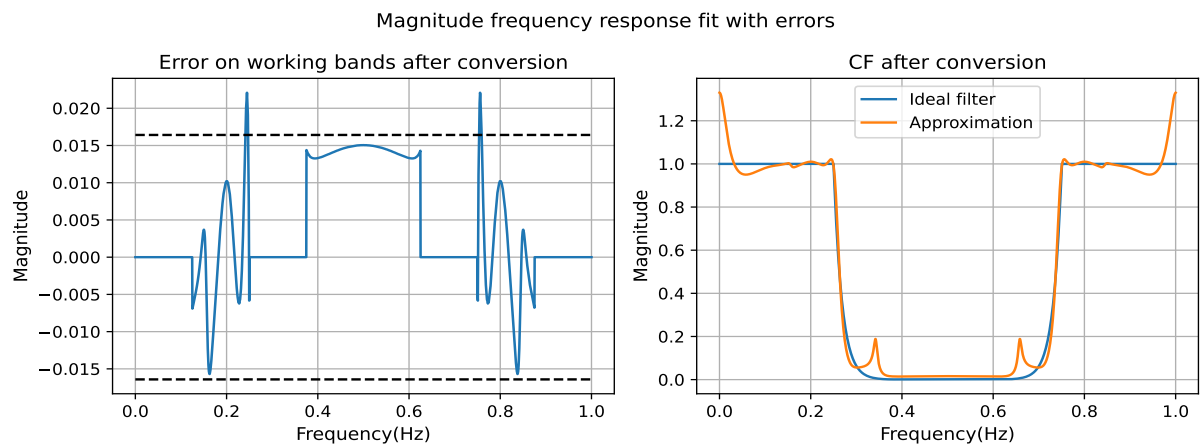
Для нового метода задача наименьших квадратов из первого шага стандартного алгоритма $\|H_3 a^* + H_2\|_2^2 \rightarrow \min$ будет решаться в смысле нового скалярного произведения, те получим задачу $\|H_3 a^* + H_2\|_B^2 \rightarrow \min$. Тогда ответ можно найти как решение задачи $\|\sqrt{G} H_3 a^* + \sqrt{G} H_2\|_2^2 \rightarrow \min$, где G – матрица Грама нового скалярного произведения. Это должно помочь учитывать важности регионов при переводе в параметрическую форму.

Пример: Рассмотрим приведение к параметрической форме одного и того же ряда и сравним стандартный метод Прони и описанный выше метод для системы интервалов. В примере $M = 10, N = 11$.

Стандартный метод Прони:



Прони для системы интервалов:



На левом графике изображена функция ошибки на рабочих полосах между заданным фильтром и полученной рациональной функцией после перевода в параметрическую форму при помощи метода Прони. Рабочие полосы совпадают с примером 1 из раздела примеров. Черным пунктиром показано N -ое сингулярное число. На графиках явно видно, что ошибка после применения метода Прони для системы интервалов практически не вышла за пределы сингулярного числа. В то время как для стандартного метода она сильно возросла в граничных точках. Другие примеры применения можно найти в разделе примеров.

4 Сведение постановки к классической

Мы обсудили классический метод Каратеодори-Фейера для проектирования цифровых фильтров, давайте вернемся к постановке текущей задачи. Мы бы хотели решить задачу минимизации

$$\|\gamma(z)(F(z) - R_{MN}(z))\|_\infty \rightarrow \min_{R_{MN}}$$

где $\|f\|_\infty \equiv \max\{|f(z)| : z \in \mathbb{T}\}$. В таком виде задача не сводится к классической, поэтому давайте сделаем дополнительные преобразования. В целях получения спектральной формулировки задачи, как и в классическом методе, перейдем от \mathbb{R}_{MN} к более широкому классу квази-рациональных функций $\tilde{\mathbb{R}}_{MN}$.

$$\|\gamma(z)(F(z) - R_{MN}(z))\|_\infty \rightarrow \min_{R_{MN}}$$

$$\Downarrow$$

$$\|\gamma(z)(F(z) - \tilde{R}_{MN}^{(1)}(z))\|_\infty \rightarrow \min_{\tilde{R}_{MN}^{(1)}}$$

Заменим $\gamma(z)$ на функцию $G(z)$, такую, что $|G(z)| = \gamma(z)$, то есть она совпадает по модулю с гаммой на круге и голоморфна в его внешности. Известно построение $G(z)$ внутрь круга, которое переносится на внешность стандартным образом. Пусть функция $u(z)$ удовлетворяет решению задачи Дирихле в круге с данными $\ln(\gamma(z))$ на границе:

$$\begin{cases} \Delta u(z) = 0, z \in \mathbb{D} \\ u(z) = \ln(\gamma(z)), z \in \mathbb{T} \end{cases}$$

А $v(z)$ - гармонически сопряженная к $u(z)$, то есть $g(z) = u(z) + iv(z)$ - голоморфна в \mathbb{D} , тогда:

$$G(z) = e^{g(z)} = e^{u(z)+iv(z)}, |G(z)| = e^{u(z)} = e^{\ln(\gamma)} = \gamma$$

$g(z)$ можно найти с помощью формулы Герглотца-Рисса:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \ln(\gamma(e^{i\theta})) d\theta \quad (4.0.1)$$

А $G(z)$ называется внешней функцией и может быть найдена:

Определение 4.1. Если $\gamma(z)$ положительная измеримая функция на \mathbb{T} , такая что $\log(\gamma) \in L_1(\mathbb{T})$, и

$$G(z) = \exp(g(z)) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \ln(\gamma(e^{i\theta})) d\theta\right), \quad z \in \mathbb{D}$$

$G(z)$ называется внешней функцией.

Теорема 4.1. [10] Если $G(z)$ - внешняя функция по отношению к $\gamma(z)$, верно:

1. $\log |G(z)|$ - интеграл Пуассона от $\log(\gamma)$

2. $\lim_{r \rightarrow 1} |G(re^{i\theta})| = \gamma(e^{i\theta})$ почти всюду на \mathbb{T}

3. $G(z) \in \mathbb{H}_p$ тогда и только тогда, когда $\gamma \in \mathbb{L}_p(\mathbb{T})$ и $\|G(z)\|_p = \|\gamma\|_p$

Доказательство. 1) очевидно по построению, и из 1) следует, что пределы по радиусу $\log|G(z)|$ равны $\log(\gamma)$ почти всюду на \mathbb{T} (т.е. пункт 2). Если $G(z) \in \mathbb{H}_p$, по лемме Фату $\|G^*\|_p \leq \|G\|_p$, значит $\|\gamma\|_p \leq \|G\|_p$. В обратную сторону, если $\gamma \in \mathbb{L}_p(\mathbb{T})$, то

$$|G(re^{i\theta})|^p = \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) \log(\gamma^p(e^{it})) dt \right] \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) \log(\gamma^p(e^{it})) dt$$

(нер-во Йенсена). И если проинтегрировать по θ левую и правую часть последнего неравенства, $\|G\|_p \leq \|\gamma\|_p$. До этого мы получили $\|\gamma\|_p \leq \|G\|_p \Rightarrow \|G\|_p = \|\gamma\|_p$ \square

Таким образом, мы перешли к эквивалентной постановке:

$$\begin{aligned} \|\gamma(z)(F(z) - \tilde{R}_{MN}^{(1)}(z))\|_{\infty} &\rightarrow \min_{\tilde{R}_{MN}^{(1)}} \\ \Downarrow \\ \|G(z)F(z) - G(z)\tilde{R}_{MN}^{(1)}(z)\|_{\infty} &\rightarrow \min_{\tilde{R}_{MN}^{(1)}} \end{aligned}$$

Если, как уже отмечено выше, перенести построение $G(z)$ во внешность круга, то $\tilde{F}(z) = G(z)F(z)$ голоморфна во внешности круга (что и нужно для классического метода CF для построения фильтров), а $\tilde{R}_{MN}^{(2)}(z) = G(z)\tilde{R}_{MN}^{(1)}(z)$ - квази-рациональная функция того же типа, что и $\tilde{R}_{MN}^{(1)}(z)$. Т.е.:

$$\begin{aligned} \|G(z)F(z) - G(z)\tilde{R}_{MN}^{(1)}(z)\|_{\infty} &\rightarrow \min_{\tilde{R}_{MN}^{(1)}} \\ \Downarrow \\ \|\tilde{F}(z) - \tilde{R}_{MN}^{(2)}(z)\|_{\infty} &\rightarrow \min_{\tilde{R}_{MN}^{(2)}} \end{aligned}$$

Что и является входом для классического алгоритма CF, по которому строится Ганкелева матрица и находится оптимальное квази-рациональное приближение $\tilde{R}_{MN}^{(2)}(z)$. Изменение, которое надо будет сделать - после нахождения оптимальной $\tilde{R}_{MN}^{(2)}(z)$ необходимо будет ее обратно перевзвесить, чтобы получить приближение к исходному сигналу, то есть:

$$\tilde{R}_{MN}^{(1)}(z) = \frac{\tilde{R}_{MN}^{(2)}(z)}{G(z)} = \frac{\tilde{F}_k(z)}{G(z)} - \sigma_N z^{-v} \frac{U_N(z)}{V_N(z^{-1})} \frac{1}{G(z)}$$

И далее проделать те же шаги описанного алгоритма для $\tilde{R}_{MN}^{(1)}(z)$.

5 Вычисление $G(z)$

Для практических примеров интеграл (4.0.1) можно посчитать явно для кусочно-постоянного веса γ , без использования численных формул, для более хорошей точности алгоритма. Для кусочно-экспоненциальных весов (которые станут линейными после логарифмирования под интегралом) первообразная вычисляется относительно сложно, с использованием полилогарифмов, зато коэффициенты Фурье функции $G(z)$ считаются легко, подход будет описан ниже, и он позволяет избавиться от разрывности функции фильтра после перевзвешивания (как в случае кусочно-постоянных весов) и соответственно сильно ускорить сходимость коэффициентов Фурье. (Однако потенциально возможен и подход с прямым вычислением полилогарифмов).

5.1 Вычисление $G(z)$ для кусочно-постоянных весов

Начнем с кусочно-постоянных весов. Будем сразу считать интеграл для отрезка вида $[a, b]$:

$$g(z)_{[a,b]} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \ln(\gamma(e^{i\theta})) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{1 + e^{-i\theta} z}{1 - e^{-i\theta} z} \ln(\gamma(e^{i\theta})) d\theta =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{d\theta}{1 - e^{-i\theta} z} \ln(\gamma(e^{i\theta})) + \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{e^{-i\theta} z}{1 - e^{-i\theta} z} \ln(\gamma(e^{i\theta})) d\theta$$

1)

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{d\theta}{1 - e^{-i\theta} z} \ln(\gamma(e^{i\theta})) = \frac{1}{2\pi} \ln(\gamma(e^{i\theta})) \left[i \int_a^b \frac{d(e^{-i\theta})}{e^{-i\theta}} \frac{1}{1 - e^{-i\theta} z} \right] =$$

$$\frac{i}{2\pi} \ln(\gamma(e^{i\theta})) \left[\int_a^b \frac{dt}{t(1 - tz)} \right] = \frac{-i}{2\pi} \ln(\gamma(e^{i\theta})) \left[\int_a^b \frac{dt}{t^2(z - \frac{1}{t})} \right] = \{u = z - \frac{1}{t}\} =$$

$$\frac{-i}{2\pi} \ln(\gamma(e^{i\theta})) \left[\int_a^b \frac{t^2 du}{ut^2} \right] = \frac{-i}{2\pi} \ln(\gamma(e^{i\theta})) \ln(u) = \frac{-i}{2\pi} \ln(\gamma(e^{i\theta})) \ln\left(z - \frac{1}{t}\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \ln(\gamma(e^{i\theta})) [-i \ln(e^{i\theta} - z)] \Big|_a^b = \frac{1}{2\pi} \ln(\gamma(e^{i\theta})) [\theta - i \ln(ze^{-i\theta} - 1)] \Big|_a^b$$

2)

$$\frac{1}{2\pi} \ln(\gamma(e^{i\theta})) \int_a^b \frac{e^{-i\theta} z}{1 - e^{-i\theta} z} d\theta = \frac{1}{2\pi} \ln(\gamma(e^{i\theta})) \int_a^b \frac{e^{-i\theta} z}{1 - e^{-i\theta} z} \frac{d(e^{-i\theta} z)}{-ie^{-i\theta} z} =$$

$$\frac{-i}{2\pi} \ln(\gamma(e^{i\theta})) \int_a^b \frac{d(1 - t)}{1 - t} = \frac{-i}{2\pi} \ln(\gamma(e^{i\theta})) \ln(1 - t) = \frac{-i}{2\pi} \ln(\gamma(e^{i\theta})) \ln(ze^{-i\theta} - 1) \Big|_a^b$$

$$g(z)_{[a,b]} = \frac{1}{2\pi} \ln(\gamma_{[a,b]}) [-i \ln(ze^{-i\theta} - 1) + \theta] \Big|_a^b + \frac{-i}{2\pi} \ln(\gamma_{[a,b]}) \ln(ze^{-i\theta} - 1) \Big|_a^b =$$

$$\frac{1}{2\pi} \ln(\gamma_{[a,b]}) [-2i \ln(ze^{-i\theta} - 1) + \theta] \Big|_a^b = \frac{1}{2\pi} \ln(\gamma_{[a,b]}) [-2i \ln(ze^{-ib} - 1) + b + 2i \ln(ze^{-ia} - 1) - a]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \ln(\gamma_{[a,b]}) [(b - a) + 2i(\ln(ze^{-ia} - 1) - \ln(ze^{-ib} - 1))]$$

Итоговая формула для расчета $G(z)$ без интегралов, исключительно по концам отрезков:

$$G(z) = \exp \left(\sum_j \frac{1}{2\pi} \ln(\gamma_{[a_j, b_j]}) [(b_j - a_j) + 2i(\ln(ze^{-ia_j} - 1) - \ln(ze^{-ib_j} - 1))] \right)$$

5.2 Вычисление $G(z)$ для кусочно-экспоненциальных весов

Для экспоненциальных весов найдем коэффициенты Фурье функции $G(z)$:

Пусть $G(z) = e^{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$, и $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$. Тогда:

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} -n c_n z^{-n-1} \right) = G(z) \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} -n a_n z^{-n-1} \right)$$

\Downarrow

$$-n c_n = - \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) c_j a_{n-j}, \quad c_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) c_j a_{n-j} \quad (5.2.1)$$

В нашем случае:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{-i\theta} z^{-1}}{1 - e^{-i\theta} z^{-1}} \psi(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e^{-i\theta} z^{-1}) \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-i\theta} z^{-1})^n \psi(\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2z^{-n} e^{-in\theta} \right) \psi(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) e^{-in\theta} d\theta z^{-n} \end{aligned}$$

Мы видим, что:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) d\theta, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

Получается, нам нужно вычислять лишь коэффициенты Фурье функции $\psi(\theta)$.

В нашем случае $\psi(\theta) = \ln(e^{k\theta+c}) = k\theta + c$. Но делать это на отрезках в силу кусочно-экспоненциальности.

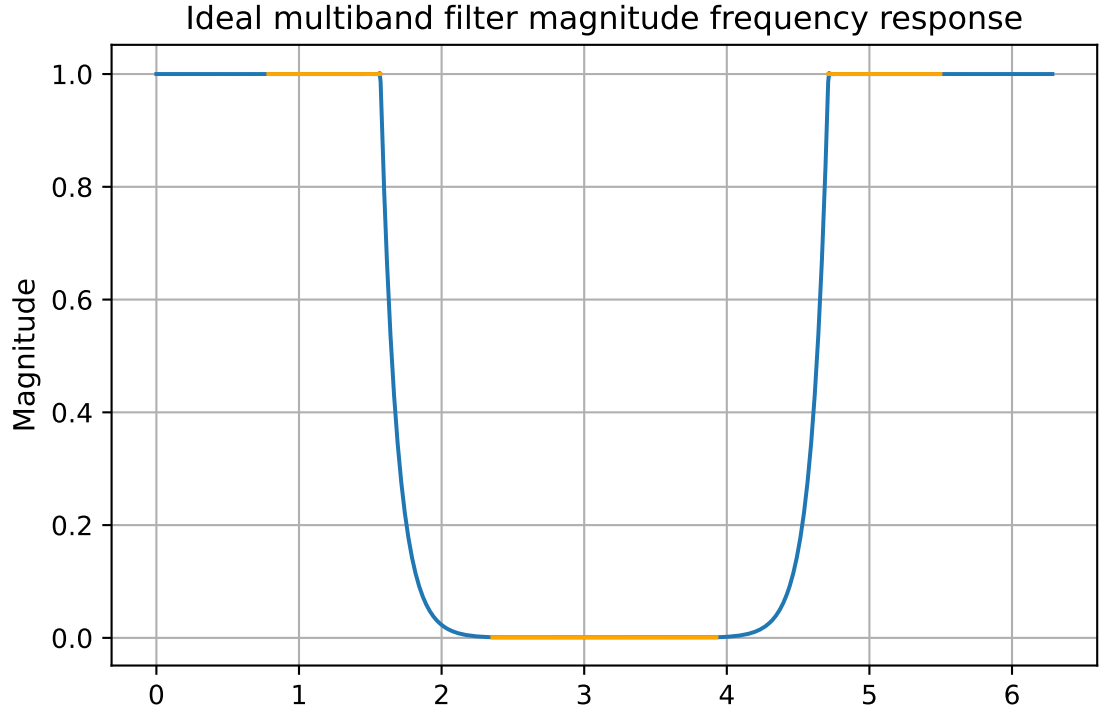
$$\begin{aligned} a_0^j &= \frac{1}{2\pi} \int_{a_j}^{b_j} \psi(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{a_j}^{b_j} (k\theta + c) d\theta = \frac{k}{2\pi} \frac{\theta^2}{2} \Big|_{a_j}^{b_j} + \frac{c}{2\pi} (b_j - a_j) = \\ &= \frac{ki}{2\pi} \frac{b_j^2 - a_j^2}{2} + \frac{c}{2\pi} (b_j - a_j) \\ a_0 &= \sum_j a_0^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n^j &= \frac{1}{\pi} \int_{a_j}^{b_j} (k\theta + c) e^{-in\theta} d\theta = \frac{c}{\pi} \int_{a_j}^{b_j} e^{-in\theta} d\theta + \frac{k}{\pi} \int_{a_j}^{b_j} \theta e^{-in\theta} d\theta = \\
&= \frac{c}{\pi} \frac{i}{n} e^{-in\theta} \Big|_{a_j}^{b_j} + \frac{k}{\pi} \left[\theta \int e^{-in\theta} d\theta \Big|_{a_j}^{b_j} - \frac{i}{n} \int_{a_j}^{b_j} e^{-in\theta} d\theta \right] = \\
&= \frac{ci}{\pi n} [e^{-inb_j} - e^{-ina_j}] + \frac{k}{\pi} \left[\theta \frac{i}{n} e^{-in\theta} \Big|_{a_j}^{b_j} + \frac{1}{n^2} e^{-in\theta} \Big|_{a_j}^{b_j} \right] \\
&= \frac{ci}{\pi n} [e^{-inb_j} - e^{-ina_j}] + \frac{k}{\pi} \left[\frac{i}{n} (be^{-inb} - ae^{-ina}) + \frac{1}{n^2} (e^{-inb} - e^{-ina}) \right] \\
a_n &= \sum_j a_n^j
\end{aligned}$$

После этого применяем (5.2.1) и c_n найдены. Коэффициенты Фурье в этом случае будут убывать существенно быстрее, поэтому понадобится еще меньше членов для аппроксимации конечным рядом.

6 Примеры

6.1 Рекурсивный трехполосный фильтр с кусочно-экспоненциальными весами



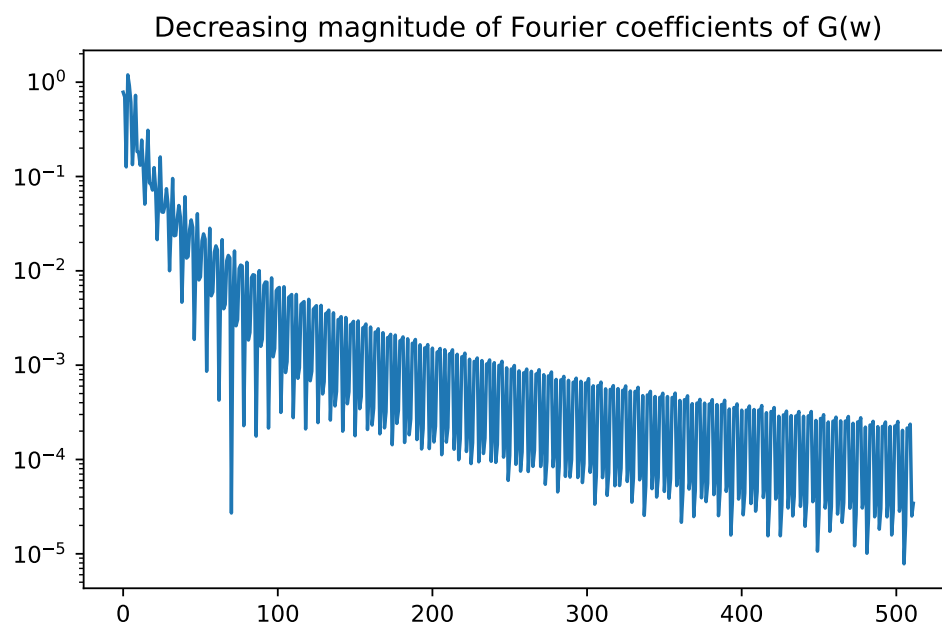
Рассмотрим идеальный фильтр с полосами пропускания: $[0.25\pi, 0.5\pi]$, $[1.5\pi, 1.75\pi]$, полосой задержки: $[0.75\pi, 1.25\pi]$. Это заданные рабочие полосы, они отмечены на графике оранжевым цветом. Зададим амплитуду частотной характеристики на рабочих полосах следующим образом:

$$H(w) = \begin{cases} 0 \text{ dB}, & w \in [0.25\pi, 0.5\pi], [1.5\pi, 1.75\pi] \\ -60 \text{ dB}, & w \in [0.75\pi, 1.25\pi] \end{cases}$$

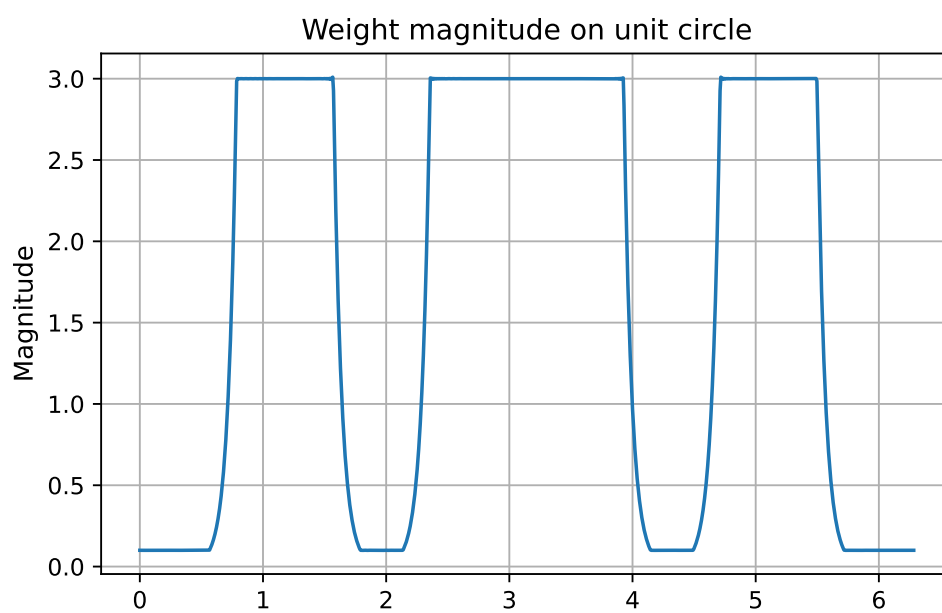
В переходных полосах доопределим функцию кусочно-экспоненциально, итоговый фильтр изображен на графике. Соответственно мы бы хотели приблизить фильтр на полосах пропускания и задержки с произвольным поведением функции в переходных полосах. Веса для алгоритма зададим следующим образом: 3.0 для рабочих полос пропускания и задержки, и 0.1 для переходных полос.

$$\gamma(w) = \begin{cases} 3.0, & w \in [0.25\pi, 0.5\pi], [1.5\pi, 1.75\pi] \\ 0.1, & w \in [0.75\pi, 1.25\pi] \end{cases}$$

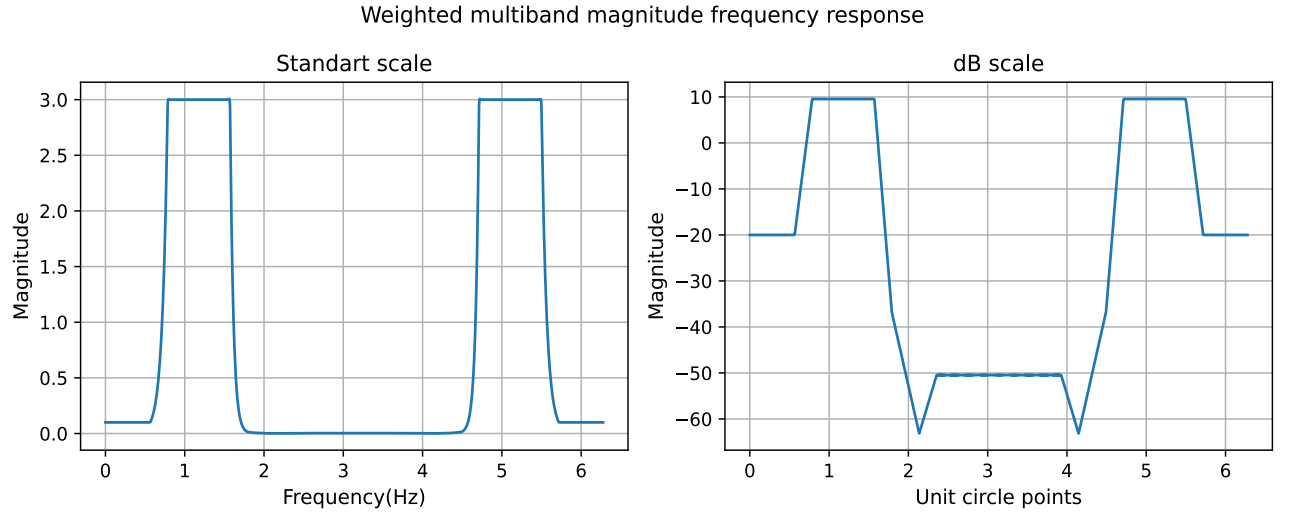
Между заданными отрезками, веса доопределим кусочно-экспоненциально, согласно разделу 5.2, с соединительным промежутком размера 0.2. Построим описанным в 5.2 методом $G(w)$ и посмотрим на убывание коэффициентов Фурье для этой функции.



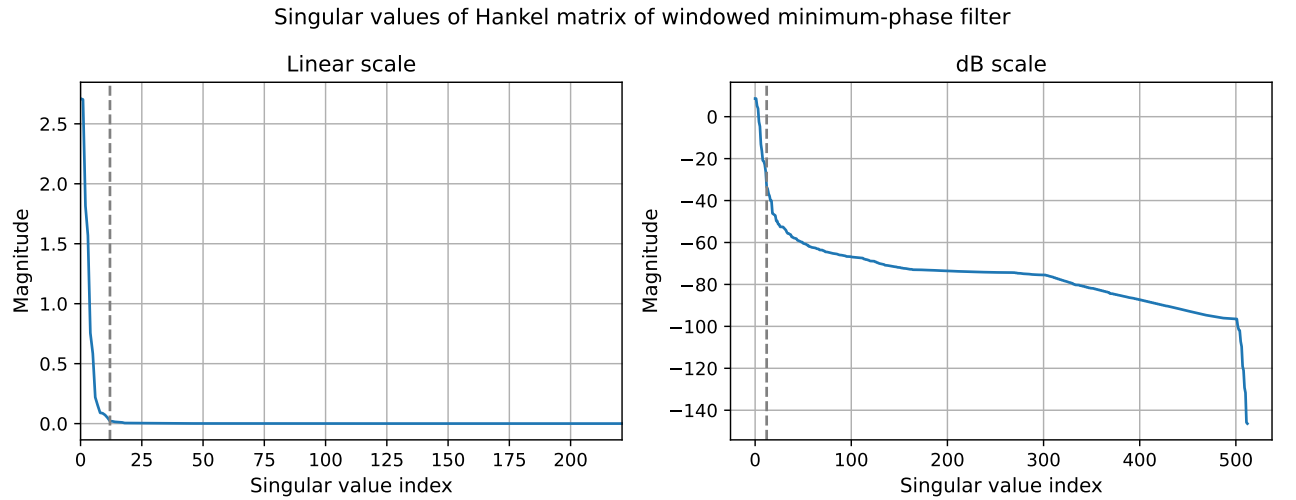
и посмотрим на получившийся вес на окружности \mathbb{T}



Давайте посмотрим, как будет выглядеть перевзвешенный фильтр $G(z)F(z)$ на окружности:

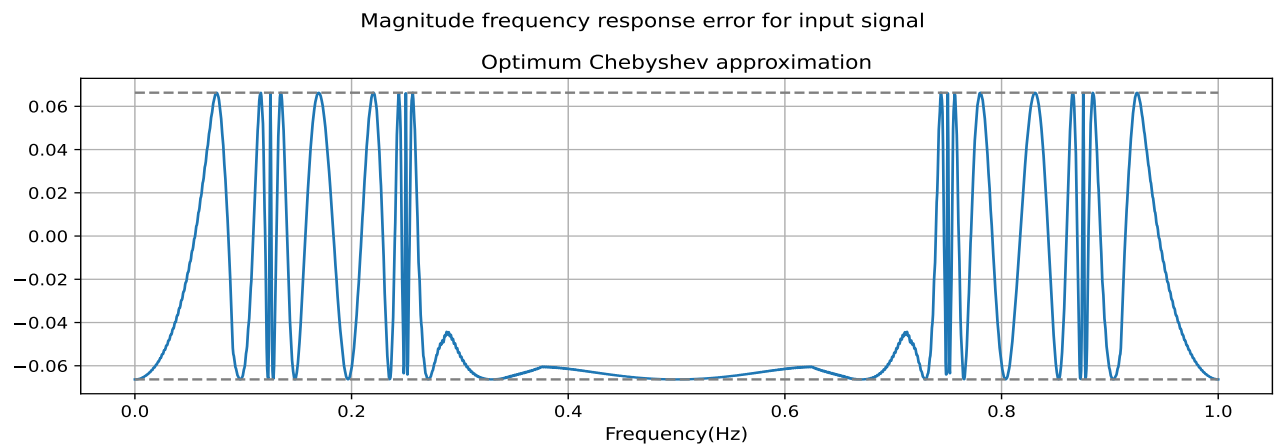


Возьмем $K = 512$ членов последовательности $\{h_n\}_0^K$. Рассмотрим приближение с 10 нулями и 11 полюсами ($M = 10, N = 11$). Посмотрим на собственные значения Ганкелевой матрицы:



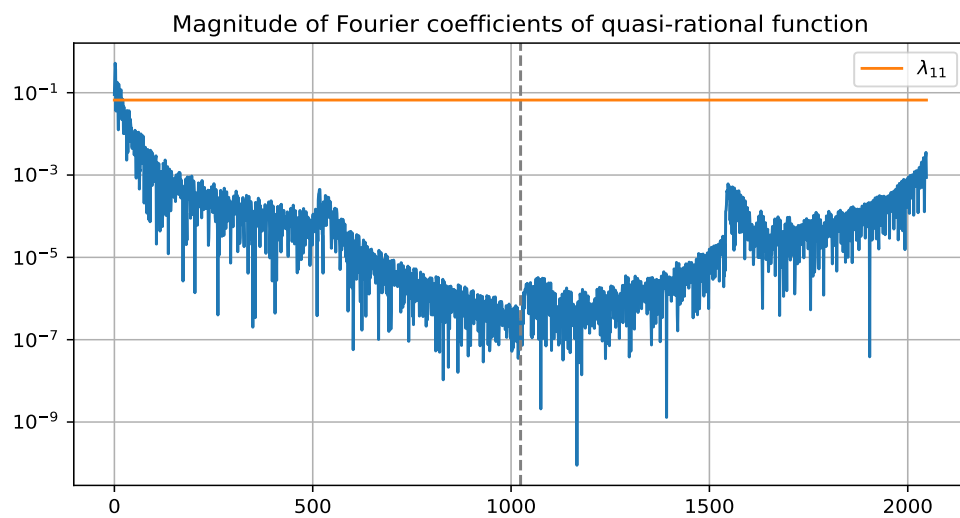
Видим, что числа убывают достаточно быстро, $|\lambda_{11}| = 0.06630739$. (Отмечено на графике серым пунктиром).

Покажем ошибку аппроксимации взвешенного сигнала оптимальным Чебышевским приближением $|G(e^{iw_n})F_k(e^{iw_n})| - |\widetilde{R_{MN}}(e^{iw_n})|$ то есть ошибку между амплитудами частотных характеристик:



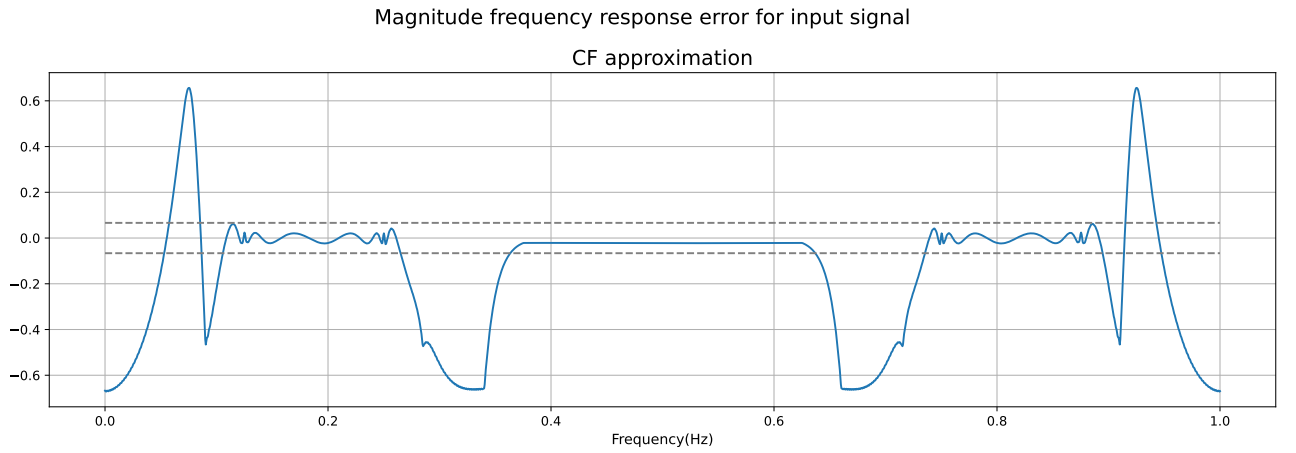
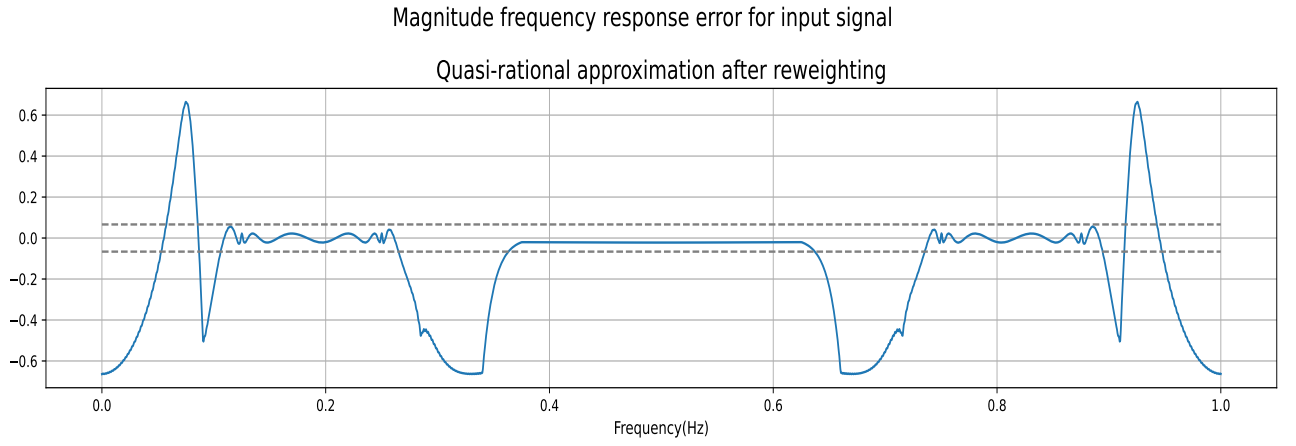
Ошибка аппроксимации Чебышева равна N-ому сингулярному числу: 0.06630739. Серым пунктиром на графике нарисована линия, соответствующая ему.

Посмотрим на то, какие коэффициенты квази-рациональной функции обрезаются, для перевода в рациональную на шаге 4 алгоритма 3.4. Коэффициенты слева от пунктирной линии соответствуют отрицательным степеням в ряде Лорана, справа - положительным. Все коэффициенты справа от серой пунктирной линии обрезаются. Оранжевой линией на графике отмечено сингулярное число λ_{11} для сравнения магнитуд. На графике видно, что основные значимые коэффициенты находятся первыми (в части ряда, соответствующей отрицательным степеням), а обрезаются коэффициенты имеющие достаточно малую амплитуду, и меньшие по модулю N-ого сингулярного числа.



Посмотрим теперь на ошибку для изначального сигнала с перевзвешенной квази-рациональной аппроксимацией:

$$|F_k(e^{iw_n})| - \left| \frac{\widetilde{R_{MN}}(e^{iw_n})}{G(e^{iw_n})} \right|$$



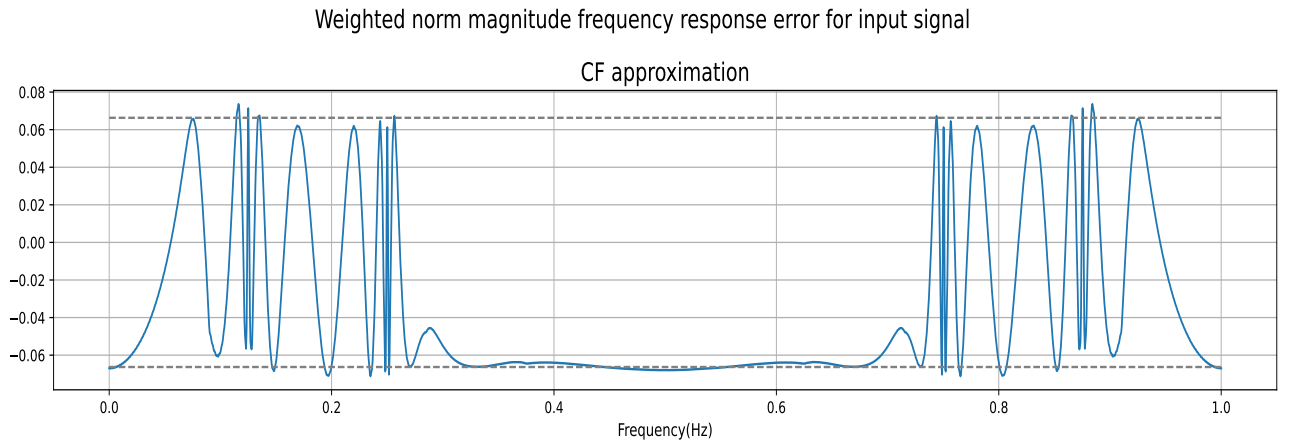
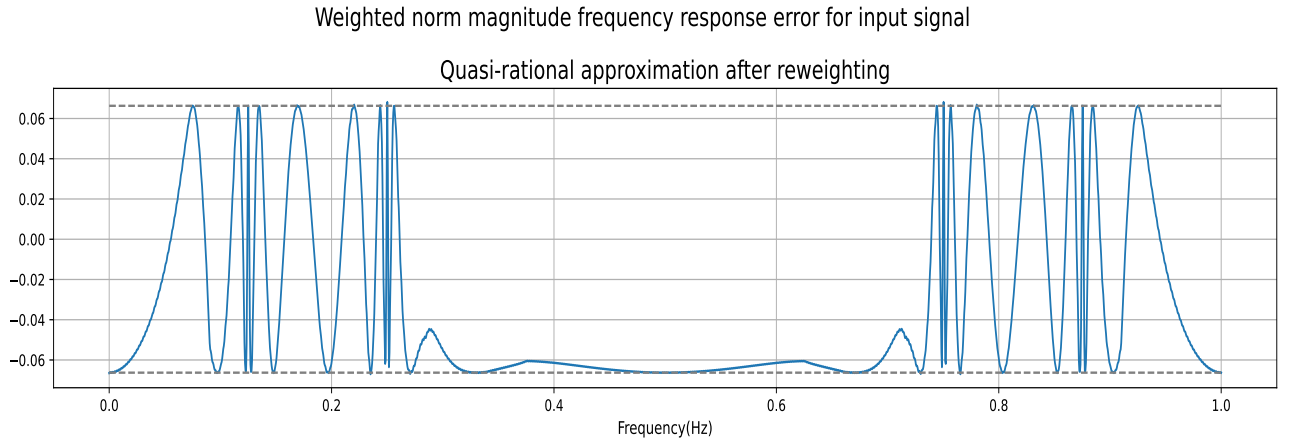
Полная ошибка аппроксимации квази-рациональной функции после перевзвешивания с $G(z)$: 0.664184435

Полная ошибка аппроксимации CF для этой квази-рациональной функции: 0.671588528

Графики легко объяснимы. Мы явно видим рабочие полосы, где после перевзвешивания амплитуда ошибки не превышает $\frac{\lambda_{11}}{3}$ и переходные полосы, где мы наоборот допускаем больше свободы. И в данном случае, согласно выбору весов, амплитуда ошибки на переходных полосах не превышает $10\lambda_{11}$. Для аппроксимации Каратеодори-Фейера все то же самое, и мы видим, что графики и ошибки практически не отличаются (разница ошибок 0.007).

Посмотрим на взвешенную ошибку аппроксимации

$$\gamma(e^{iw_n}) \left(|F_k(e^{iw_n})| - \left| \frac{\widetilde{R_{MN}(e^{iw_n})}}{G(e^{iw_n})} \right| \right)$$



Взвешенная (с γ) ошибка аппроксимации квази-рациональной функции после перевзвешивания с $G(z)$: 0.068200982

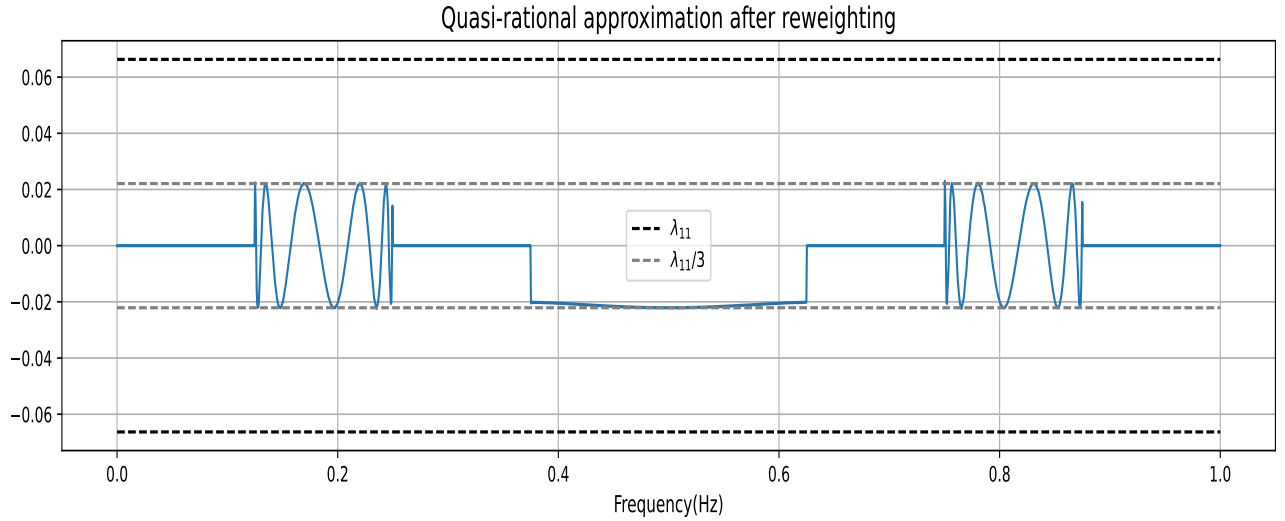
Взвешенная (с γ) ошибка аппроксимации CF для этой квази-рациональной функции: 0.073617027

После перевзвешивания квази-рациональной функции мы снова вернулись к альтернативе, что подтверждает эквивалентность теоретического перехода. Также на графиках видно, что ошибка в CF немного отклоняется за значения λ_{11} и становится близкой к оптимальной. Ошибка квази-рациональной функции и CF отличается на 0.005. Разброс модулей экстремумов функции ошибки для CF (отношение максимального и минимального по модулю значений экстремумов): 1.3029235

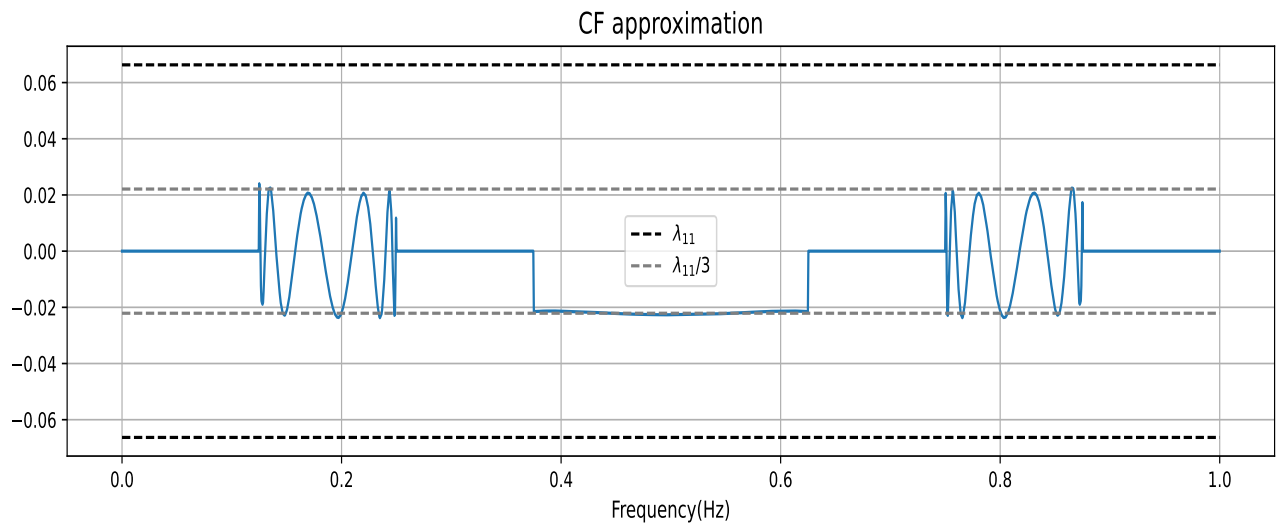
Так как мы хотели приблизить фильтр на рабочих полосах, давайте посмотрим на ошибку аппроксимации исключительно на рабочих полосах фильтра. (Сделаем вес 0 для переходных полос и 1.0 для рабочих и домножим на выражение

$$|F_k(e^{iw_n})| - \left| \frac{\widetilde{R_{MN}(e^{iw_n})}}{G(e^{iw_n})} \right|)$$

Magnitude frequency response error for input signal on working bands



Magnitude frequency response error for input signal on working bands



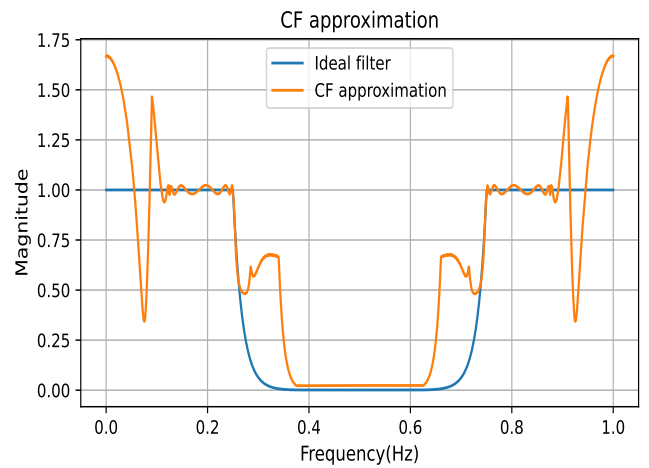
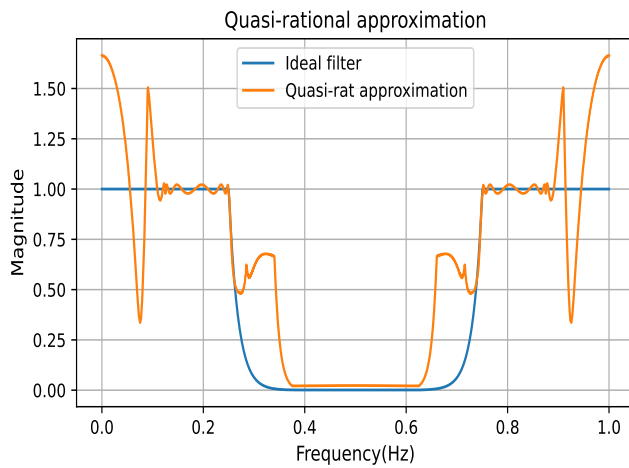
Ошибка аппроксимации квази-рациональной функции после перевзвешивания с $G(z)$ на рабочих полосах фильтра: 0.02296560

Ошибка аппроксимации CF для этой квази-рациональной функции на рабочих полосах фильтра: 0.0240253785.

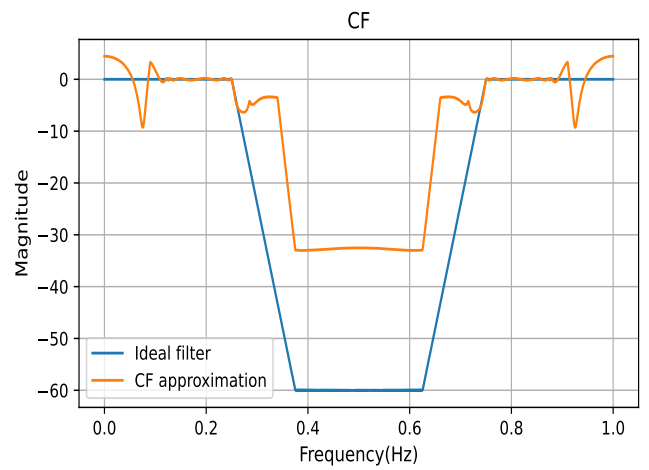
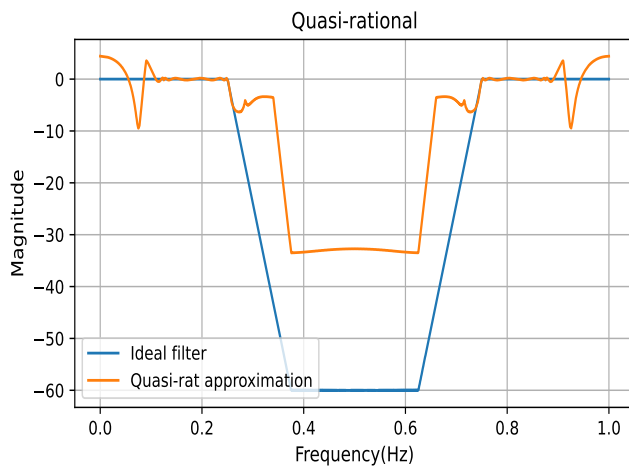
Черным пунктиром на этом графике изображено N-ое сингулярное число $|\lambda_{11}| = 0.06630739$, серым - $\frac{\lambda_{11}}{\gamma(z)}$ - это число, деленное на вес (в данном случае вес равен 3 для рабочих полос). Видно, что квази-рациональная аппроксимация на рабочих полосах полностью лежит в интервале $[-\frac{\lambda_{11}}{3}, \frac{\lambda_{11}}{3}]$, то есть за счет использования веса мы смогли уменьшить ошибку аппроксимации на заданных участках в γ раз. Аппроксимация CF также почти идеально лежит в границах интервала $[-\frac{\lambda_{11}}{3}, \frac{\lambda_{11}}{3}]$. Разница квази-рациональной аппроксимации и CF на рабочих полосах 0.001.

Теперь посмотрим на амплитуды частотных характеристик.

Magnitude frequency response fit

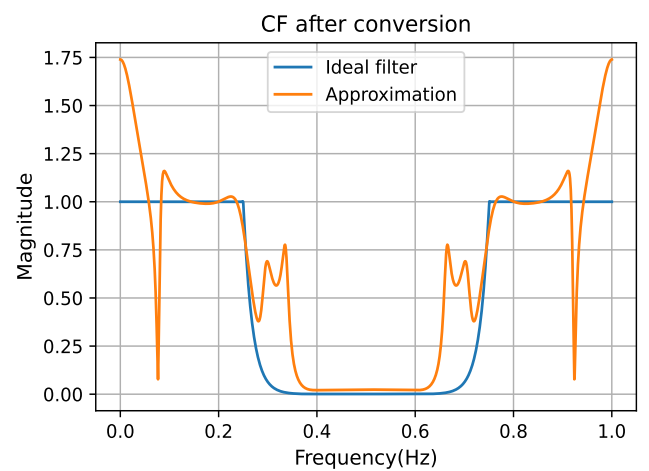
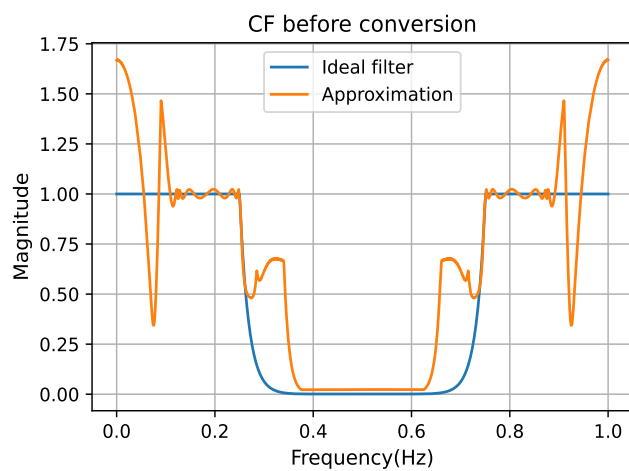


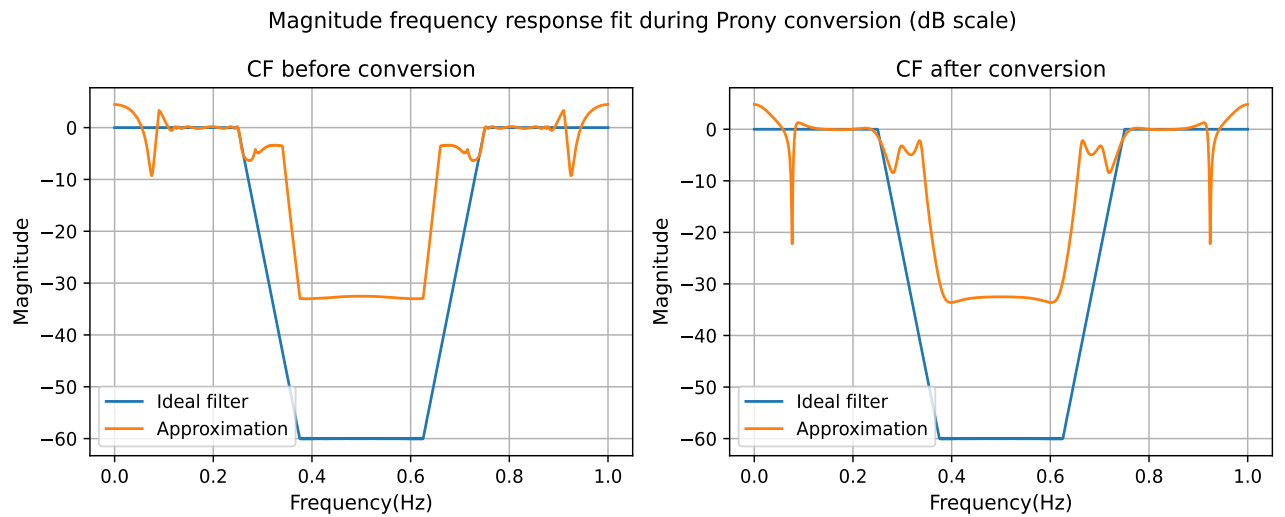
Magnitude frequency response fit (dB scale)



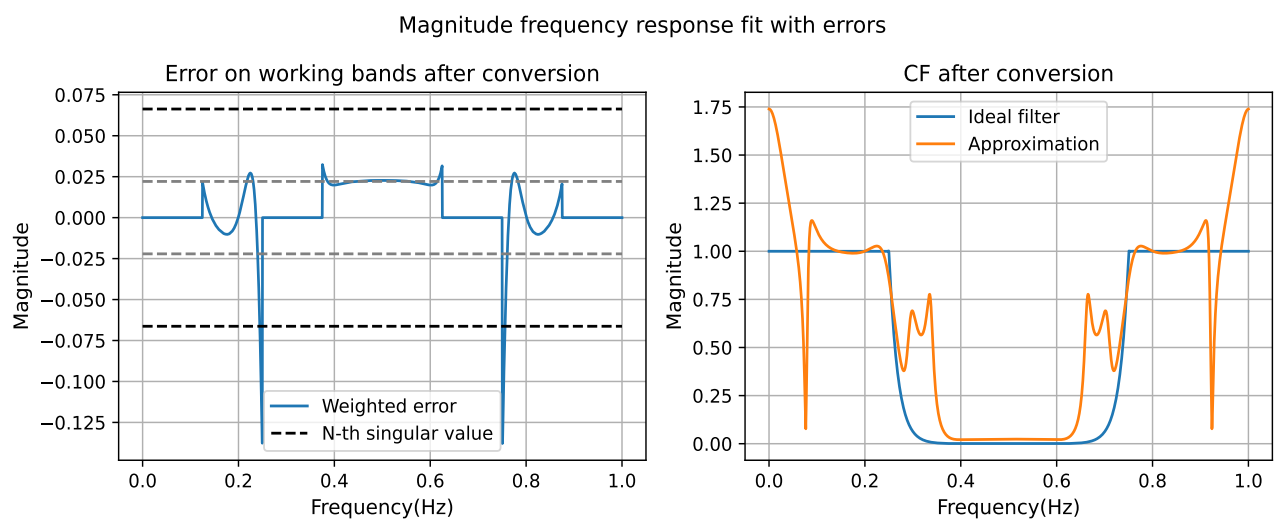
Посмотрим на работу метода Прони:

Magnitude frequency response fit during Prony conversion



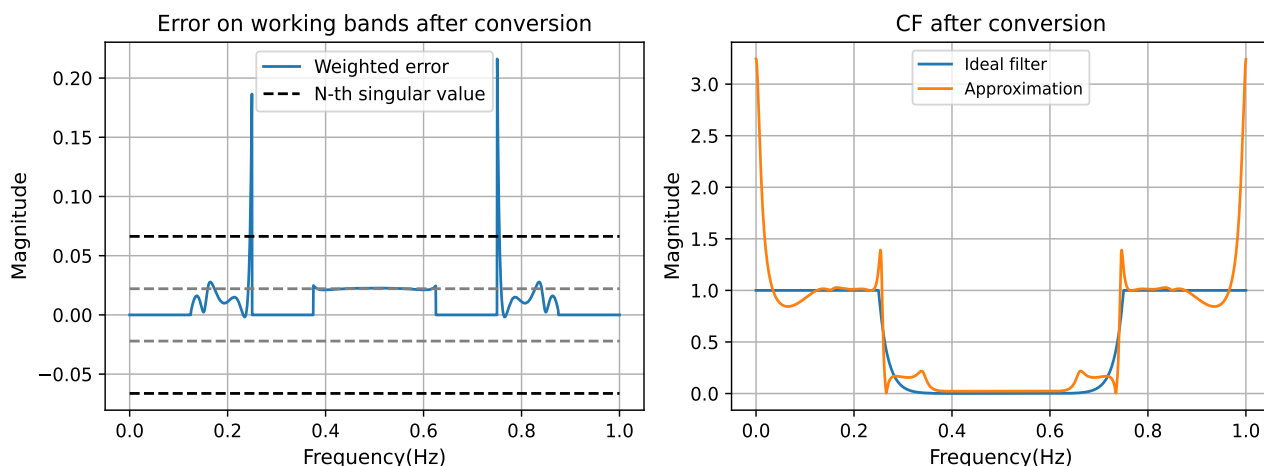


Ошибка на рабочих полосах при переводе ряда в параметрическую форму при помощи метода Прони: 0.14292442



При помощи метода Прони на интервалах: 0.2370639

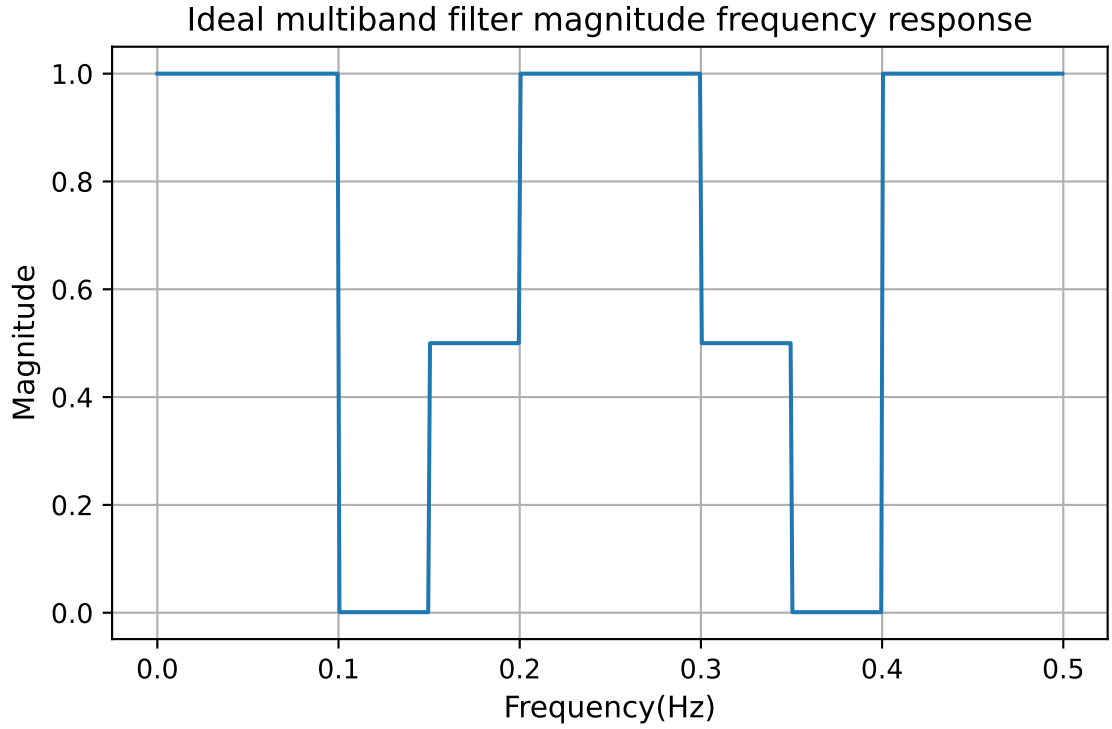
Magnitude frequency response fit with errors



Итоговая ошибка аппроксимации на рабочих полосах в данном примере: 0.137879763

На левом графике изображена функция ошибки на рабочих полосах между заданным фильтром и полученной рациональной функцией после перевода в параметрическую форму при помощи метода Прони. Черным пунктиром показано N-ое сингулярное число λ_{11} , серым - поделенное на вес $\frac{\lambda_{11}}{3}$. Видим, что полученное приближение близко к оптимальному, и содержится внутри интервала $[-\frac{\lambda_{11}}{3}, \frac{\lambda_{11}}{3}]$, за исключением граничных точек 0.25π и 0.75π . Так как метод Прони минимизирует L_2 норму ошибки, он может быть не оптимален в некоторых точках в Чебышевской норме, например ошибка в точках 0.25π и 0.75π сильно возросла. И в целом увеличилась в каждой граничной точке фильтра для стандартного метода. В данном примере метод Прони на интервалах отработал хуже стандартного в Чебышевской норме.

6.2 Рекурсивный многополосный фильтр с кусочно-постоянными весами



Рассмотрим идеальный фильтр с полосами пропускания: $[0, 0.1]$, $[0.2, 0.3]$, $[0.4, 0.5]$ Hz, полосами задержки: $[0.1, 0.15]$, $[0.35, 0.4]$ Hz и переходными полосами: $[0.15, 0.2]$, $[0.3, 0.35]$ Hz. Зададим амплитуду частотной характеристики на окружности следующим образом:

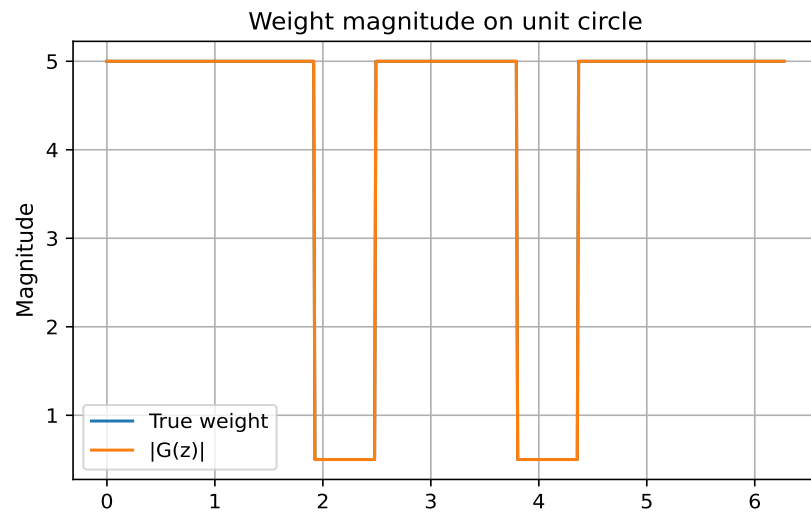
$$H(w) = \begin{cases} 0 \text{ dB}, & w \in [0, 0.2\pi], [0.4\pi, 0.6\pi], [0.8\pi, \pi] \\ -6 \text{ dB}, & w \in [0.3\pi, 0.4\pi], [0.6\pi, 0.7\pi] \\ -60 \text{ dB}, & w \in [0.2\pi, 0.3\pi], [0.7\pi, 0.8\pi] \end{cases}$$

Соответственно мы бы хотели приблизить фильтр на полосах пропускания и задержки с произвольным поведением функции в переходных полосах.

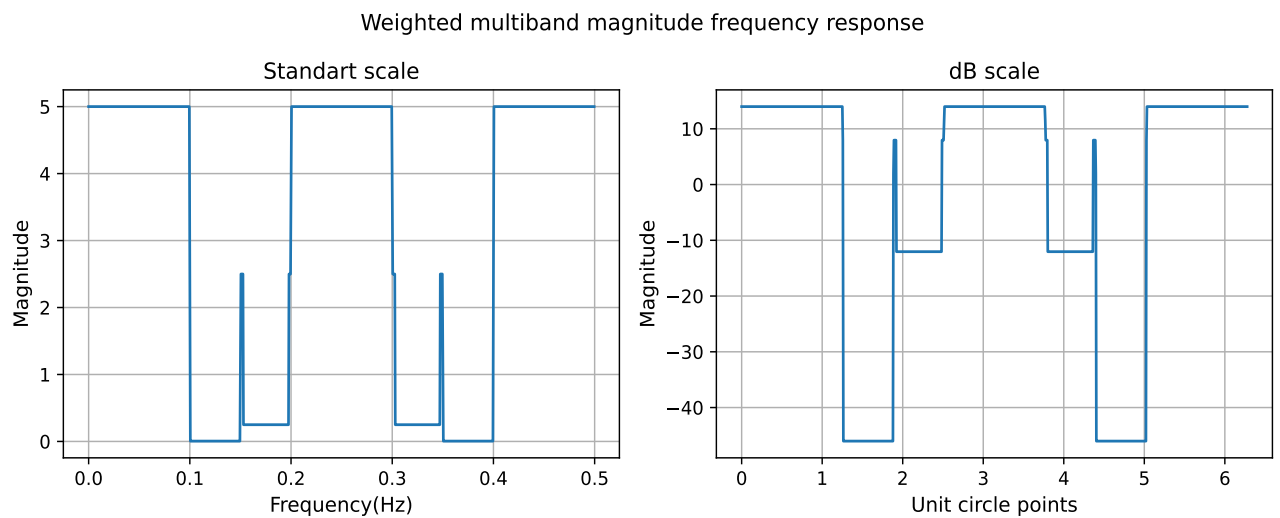
Веса для алгоритма зададим следующим образом: 5.0 для полос пропускания и задержки, и 0.5 для переходных полос.

$$\gamma(w) = \begin{cases} 5.0, & w \in [0, 0.3\pi], [0.4\pi, 0.6\pi], [0.7\pi, \pi] \\ 0.5, & w \in [0.3\pi, 0.4\pi], [0.6\pi, 0.7\pi] \end{cases}$$

Построим описанным выше методом $G(w)$ и проверим, что $|G(w)| = \gamma(w)$ на \mathbb{T}

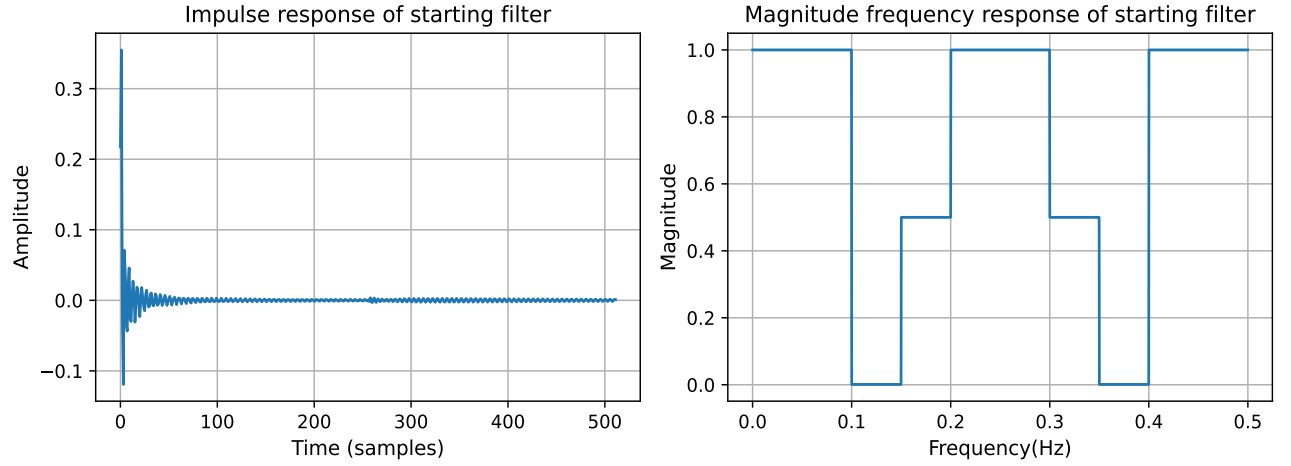


Интервал с малым весом экспериментально был немного сужен для расчетов, чтобы эффекты, возникающие в точках разрыва при использовании кусочно-постоянных весов, имели малый вес в норме ошибки на рабочих полосах фильтра. Давайте посмотрим, как будет выглядеть перевзвешенный фильтр $G(z)F(z)$ на окружности:



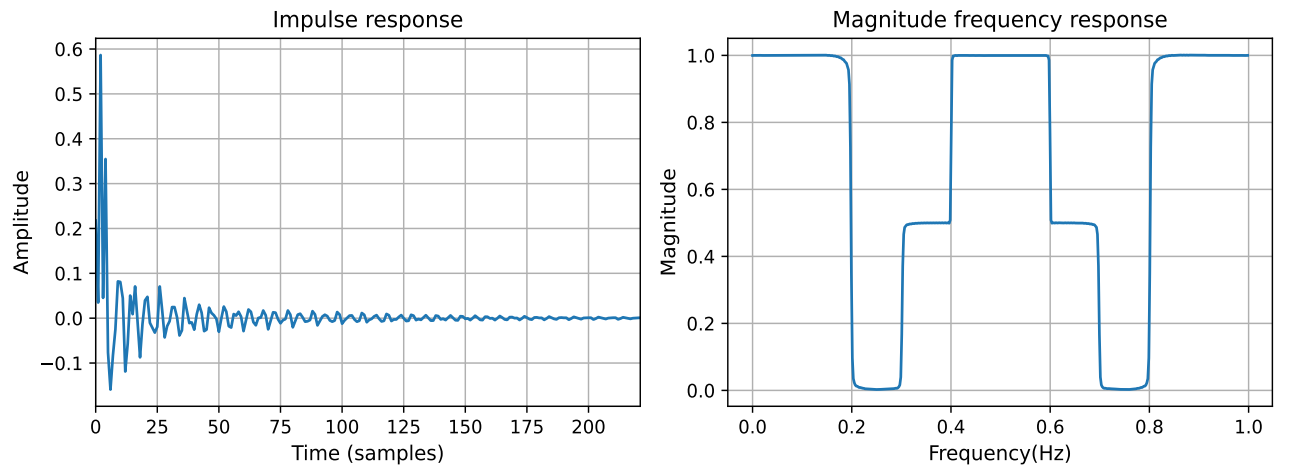
Так как у нас есть только амплитуда, с помощью специальных методов из обработки сигналов (`minimum_phase`) сконструируем сигнал с данной амплитудой, голоморфный во внешности круга с вещественной импульсной характеристикой.

Minimum-phase ideal multiband filter



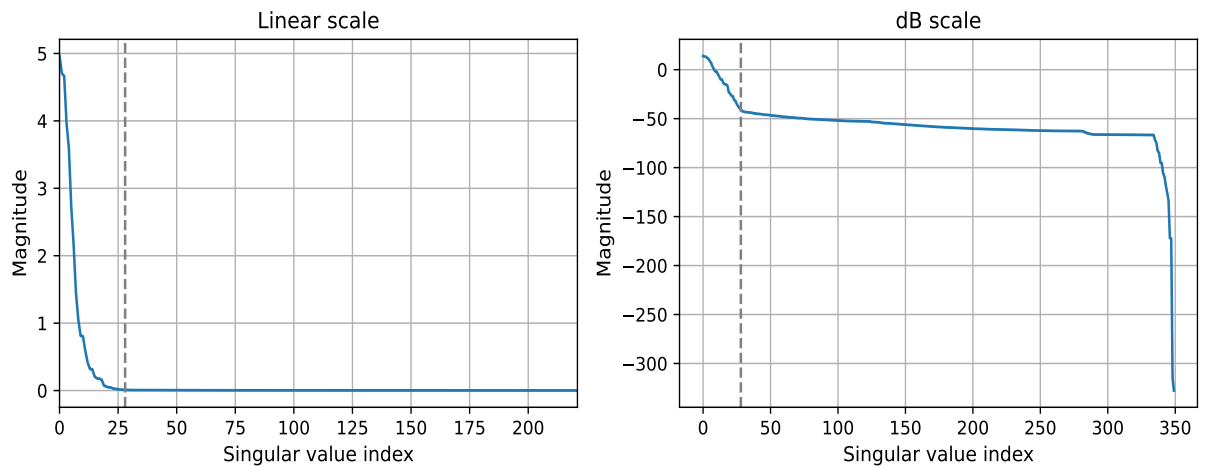
Сгладим и обрежем его окном Хемминга, оставив $K = 350$ членов последовательности $\{h_n\}_0^K$, что и будет нашей стартовой точкой

Hamming-windowed minimum-phase ideal multiband filter



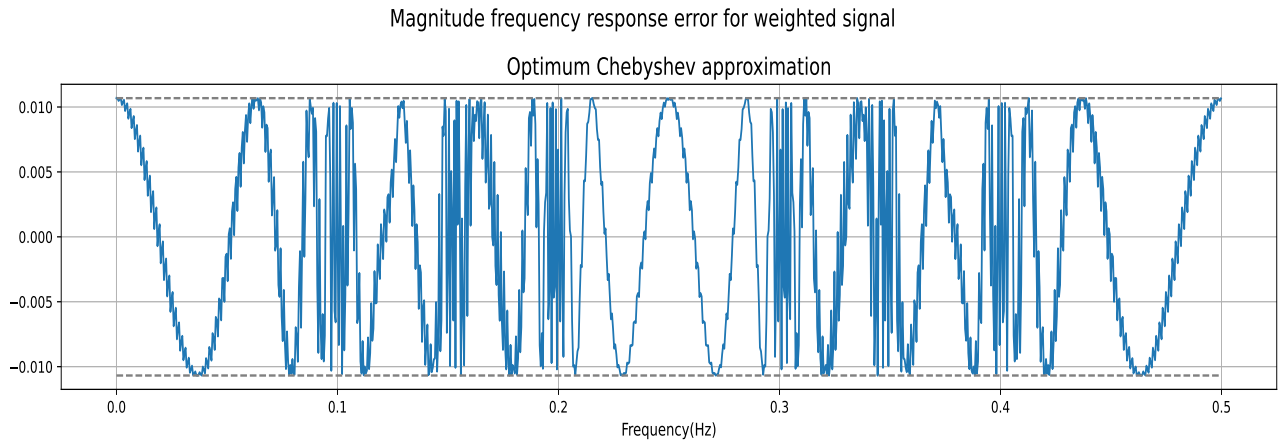
Итак, у нас задано $\{h_n\}_0^K$. Рассмотрим приближение с 26 нулями и 27 полюсами ($M = 26, N = 27$). Посмотрим на собственные значения Ганкелевой матрицы:

Singular values of Hankel matrix of windowed minimum-phase filter



Видим, что числа убывают относительно быстро, $|\lambda_{27}| = 0.01068098$. (Отмечено на графике серым пунктиром).

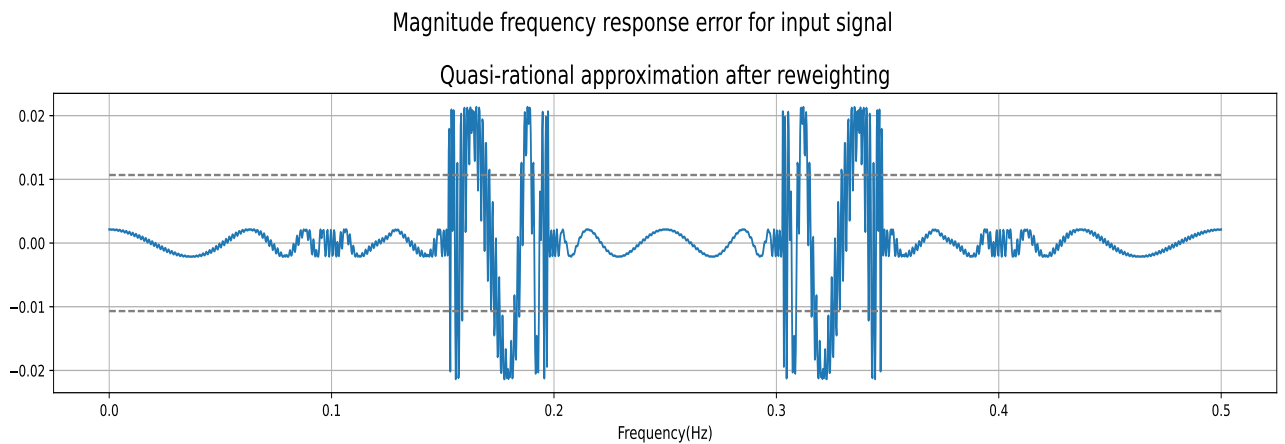
Покажем ошибку аппроксимации взвешенного сигнала оптимальным Чебышевским приближением $|G(e^{iw_n})F_k(e^{iw_n})| - |\widetilde{R_{MN}}(e^{iw_n})|$ то есть ошибку между амплитудами частотных характеристик:

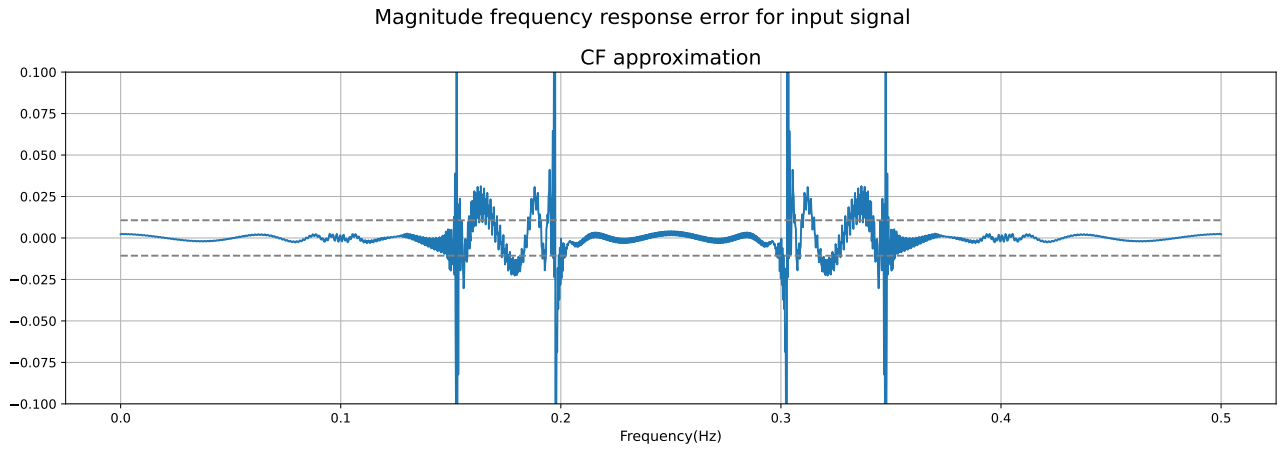


Ошибка аппроксимации Чебышева равна N-ому сингулярному числу: 0.0106809. Серым пунктиром на графике нарисована линия, соответствующая ему.

Посмотрим теперь на ошибку для изначального сигнала с перевзвешенной квази-рациональной аппроксимацией:

$$|F_k(e^{iw_n})| - \left| \frac{\widetilde{R_{MN}}(e^{iw_n})}{G(e^{iw_n})} \right|$$





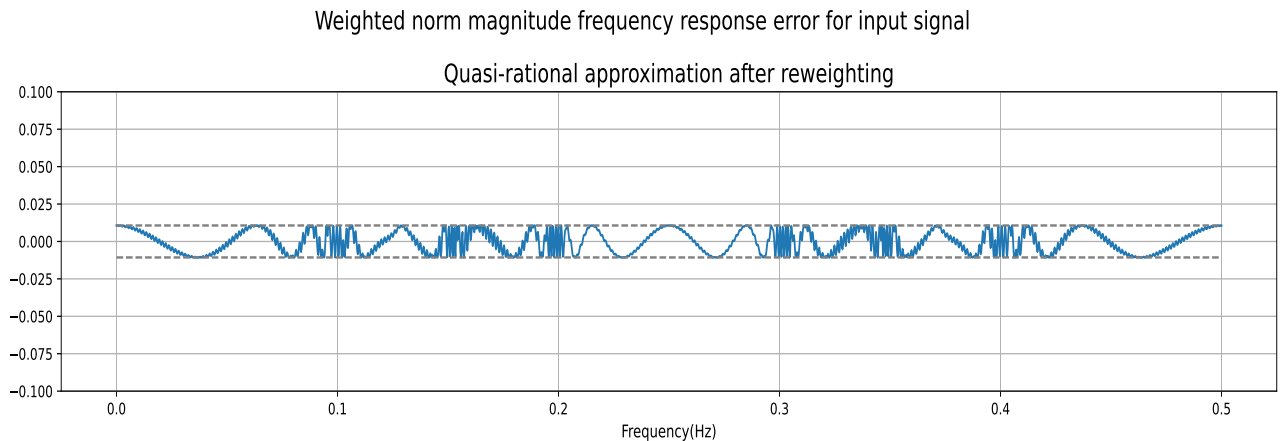
Полная ошибка аппроксимации квази-рациональной функции после перевзвешивания с $G(z)$: 0.021361938

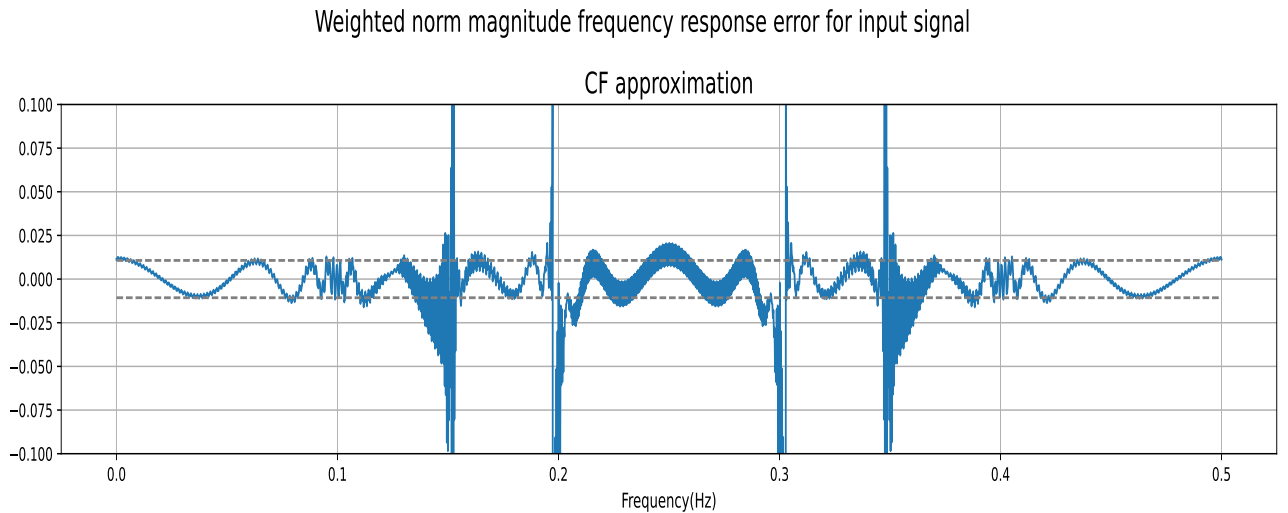
Полная ошибка аппроксимации CF для этой квази-рациональной функции: 0.34593838

График для квази-рациональной функции очень показательный. Мы явно видим рабочие полосы, где после перевзвешивания амплитуда ошибки не превышает $\frac{\lambda_{27}}{5}$ и переходные полосы, где мы наоборот допускаем больше свободы. И в данном случае амплитуда ошибки на переходных полосах не превышает $2\lambda_{27}$. Для аппроксимации Каратеодори-Фейера все то же самое, однако мы видим, что она сильно выбивается из теоретической зоны около граничных точек. Это происходит потому, что веса в данном примере кусочно-постоянные, соответственно граничные точки соответствуют точкам разрыва. Чебышевская аппроксимация может удовлетворять оценке в N-ое сингулярное число на граничных точках за счет расширенной части ряда. Так как CF ее обрезает и оставляет лишь полюса внутри круга, он может переставать быть близким к оптимальному около точек разрыва. Переход от кусочно-постоянных весов к кусочно-линейным должен предотвратить появление таких ошибок. (Это видно из примера 1).

Посмотрим на взвешенную ошибку аппроксимации

$$\gamma(e^{iw_n}) \left(|F_k(e^{iw_n})| - \left| \frac{\widetilde{R_{MN}}(e^{iw_n})}{G(e^{iw_n})} \right| \right)$$



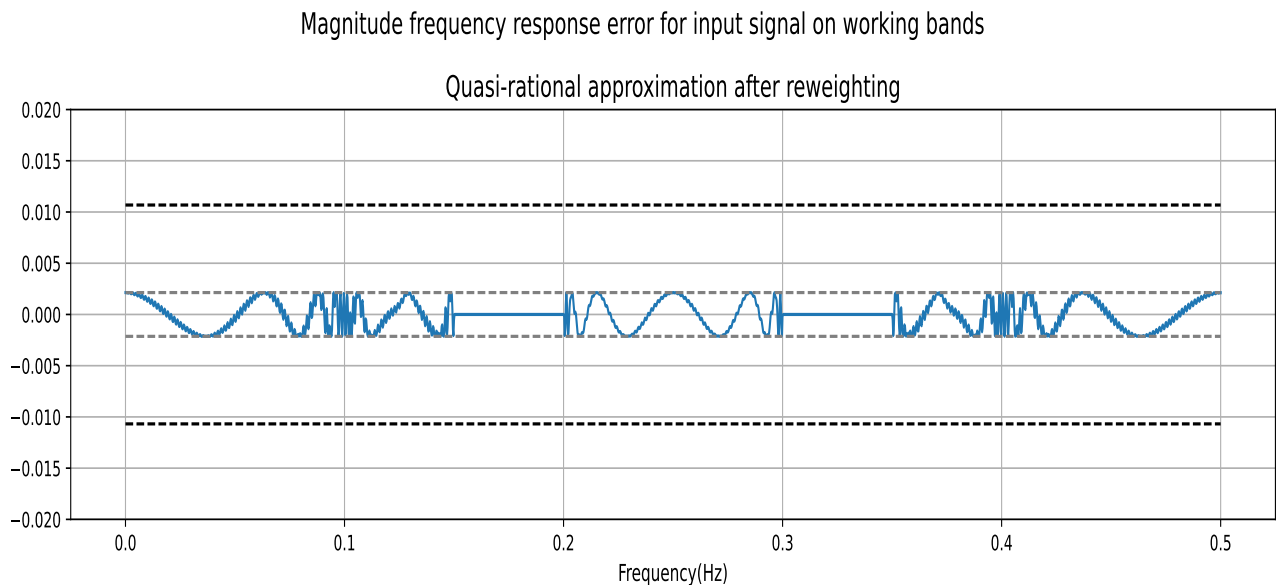


Взвешенная (с γ) ошибка аппроксимации квази-рациональной функции после перевзвешивания с $G(z)$: 0.01068098

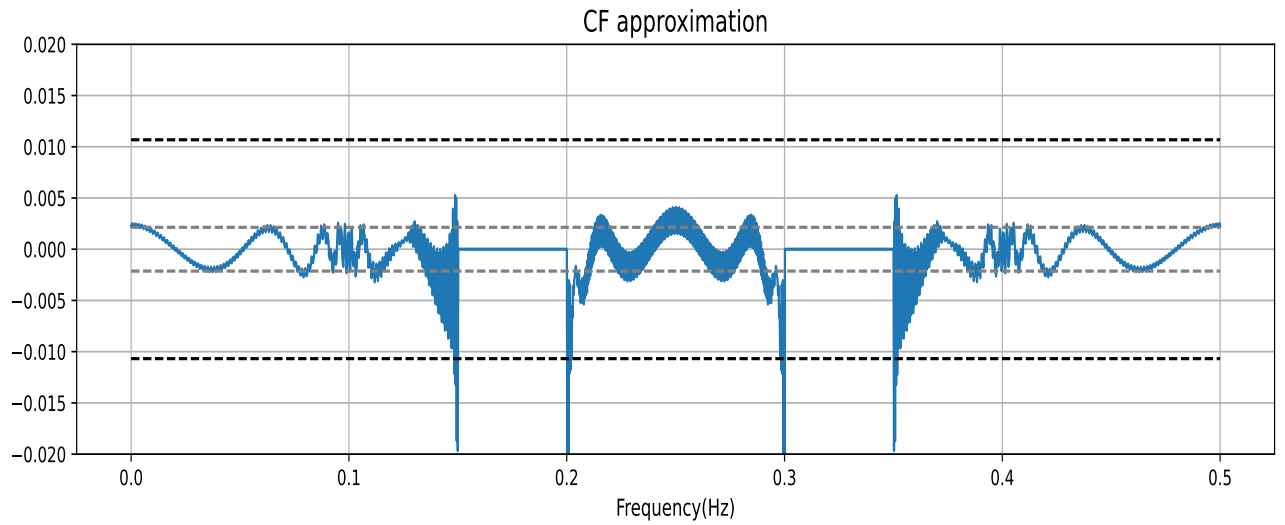
Взвешенная (с γ) ошибка аппроксимации CF для этой квази-рациональной функции: 1.52635789

После перевзвешивания квази-рациональной функции мы снова вернулись к альтернансу, что подтверждает эквивалентность теоретического перехода. Также можно видеть, что Каратеодори-Фейер почти везде лежит внутри пунктира, обозначающего сингулярное число, за исключением граничных точек в частотах 0.15, 0.2, 0.3, 0.35, то есть там, где функция терпит разрывы.

Так как мы хотели приблизить фильтр на рабочих полосах, давайте посмотрим на ошибку аппроксимации исключительно на рабочих полосах фильтра. (Сделаем вес 0 для переходных полос и 1.0 для рабочих): $|F_k(e^{iw_n})| - \left| \frac{\widehat{R_{MN}}(e^{iw_n})}{G(e^{iw_n})} \right|$



Magnitude frequency response error for input signal on working bands



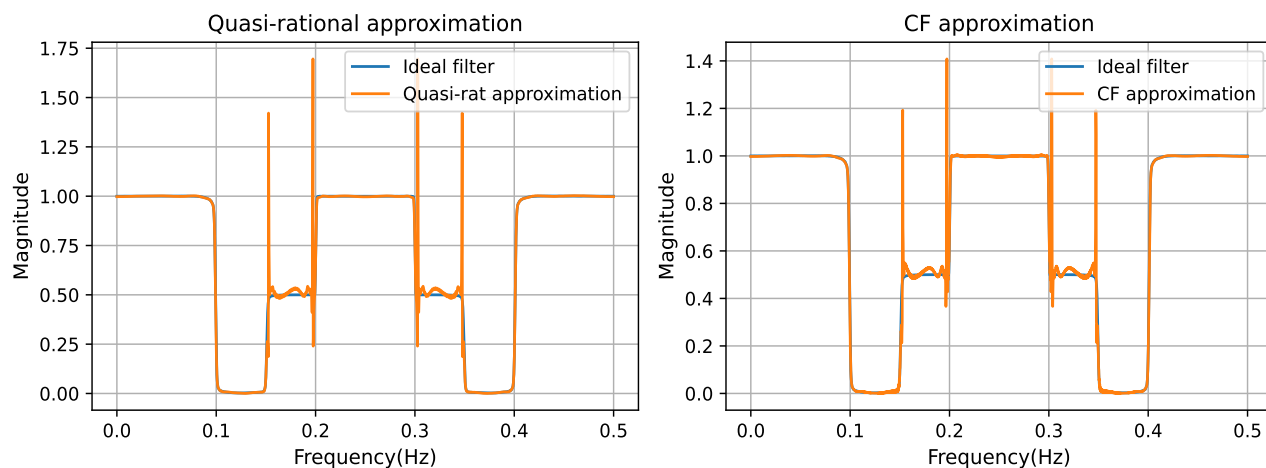
Ошибка аппроксимации квази-рациональной функции после перевзвешивания с $G(z)$ на рабочих полосах фильтра: 0.002136196

Ошибка аппроксимации CF для этой квази-рациональной функции на рабочих полосах фильтра: 0.024341601.

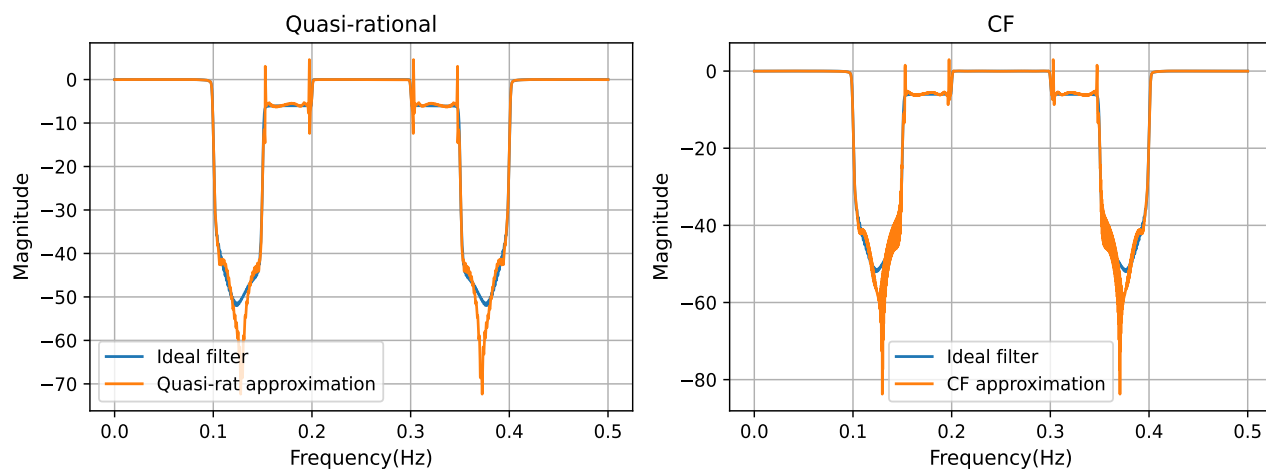
Черным пунктиром на этом графике изображено N-ое сингулярное число $|\lambda_{27}| = 0.01068098$, серым - $\frac{\lambda_{27}}{\gamma(z)}$ - это число, деленное на вес (в данном случае вес равен 5 для рабочих полос). Видно, что квази-рациональная аппроксимация на рабочих полосах полностью лежит в интервале $[-\frac{\lambda_{27}}{5}, \frac{\lambda_{27}}{5}]$, то есть за счет использования веса мы смогли уменьшить ошибку аппроксимации на заданных участках в γ раз. Аппроксимация CF также почти полностью лежит в границах интервала $[-\frac{\lambda_{27}}{5}, \frac{\lambda_{27}}{5}]$, за исключением точек близких к граничным, как уже отмечалось выше. Причем ошибка приближения CF составляет 0.024341601 при $|\lambda_{27}| = 0.01068098$, то есть отличается не сильно.

Теперь посмотрим на амплитуды частотных характеристик.

Magnitude frequency response fit

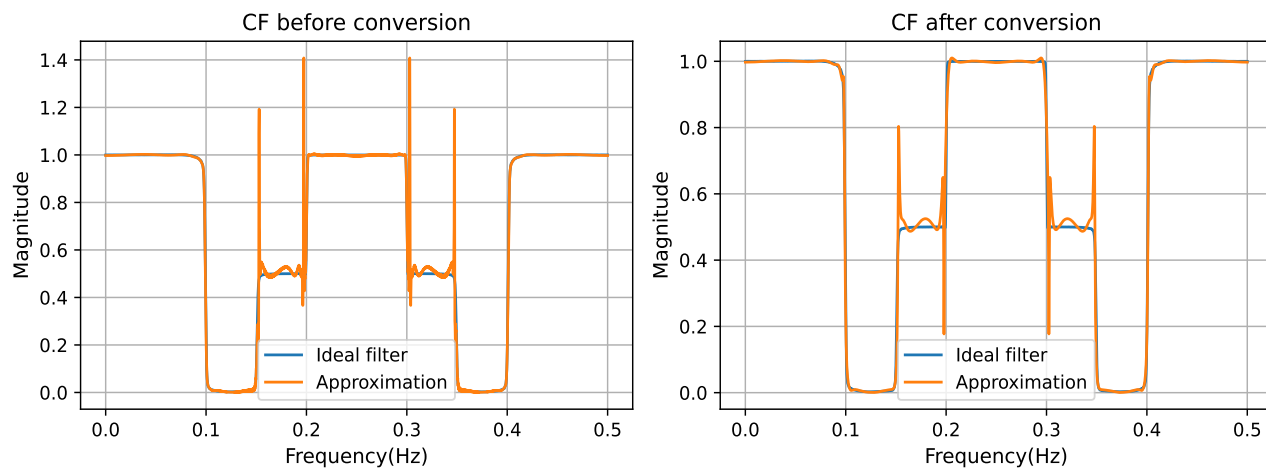


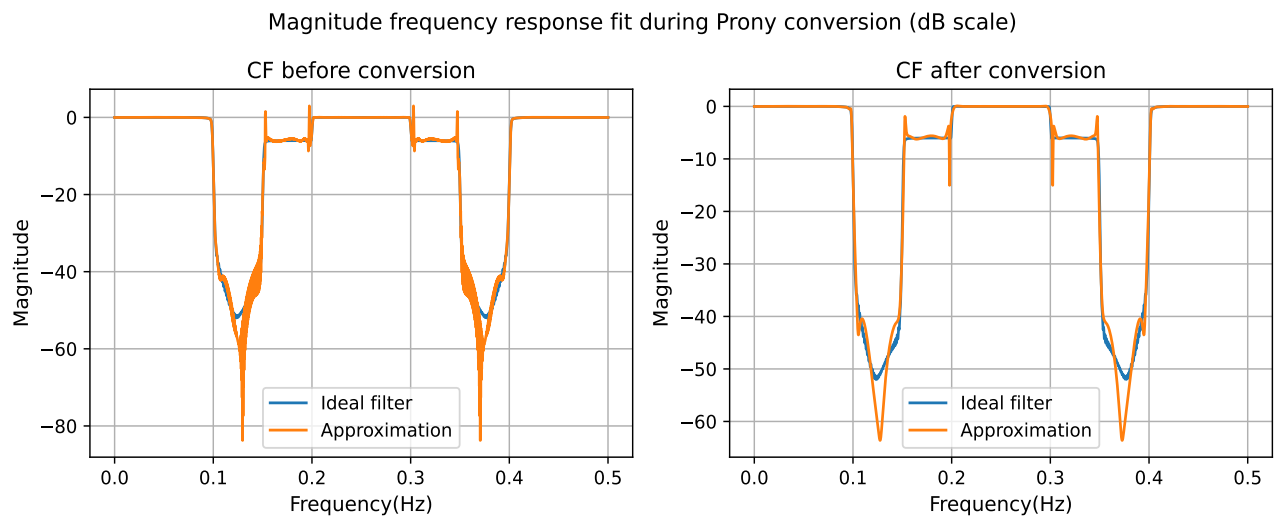
Magnitude frequency response fit (dB scale)



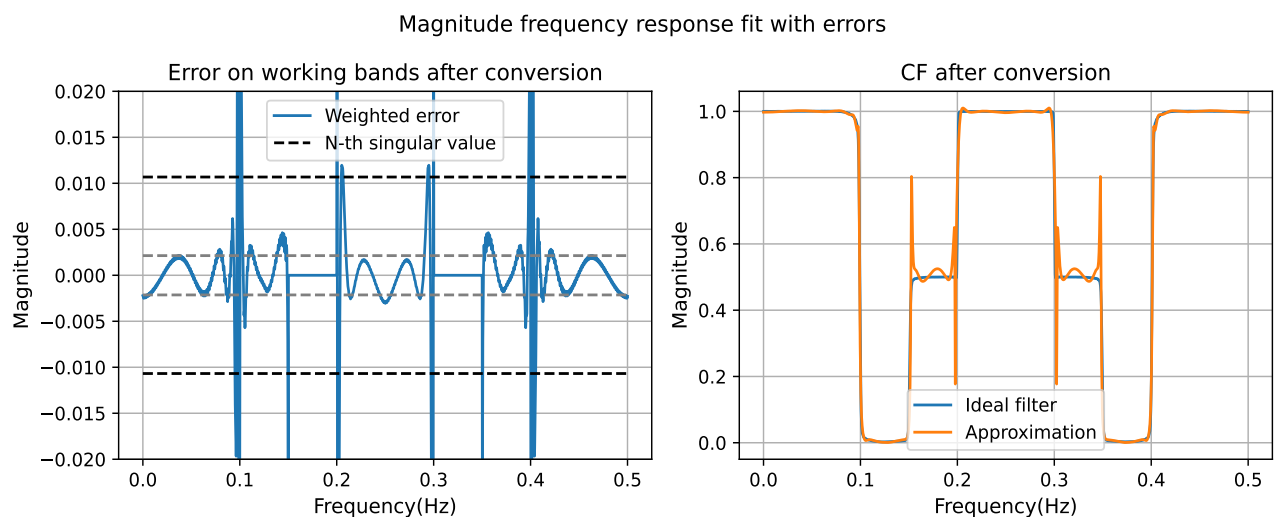
Посмотрим на работу метода Прони:

Magnitude frequency response fit during Prony conversion





Ошибка на рабочих полосах при переводе в параметрическую форму при помощи метода Прони: 0.557271469

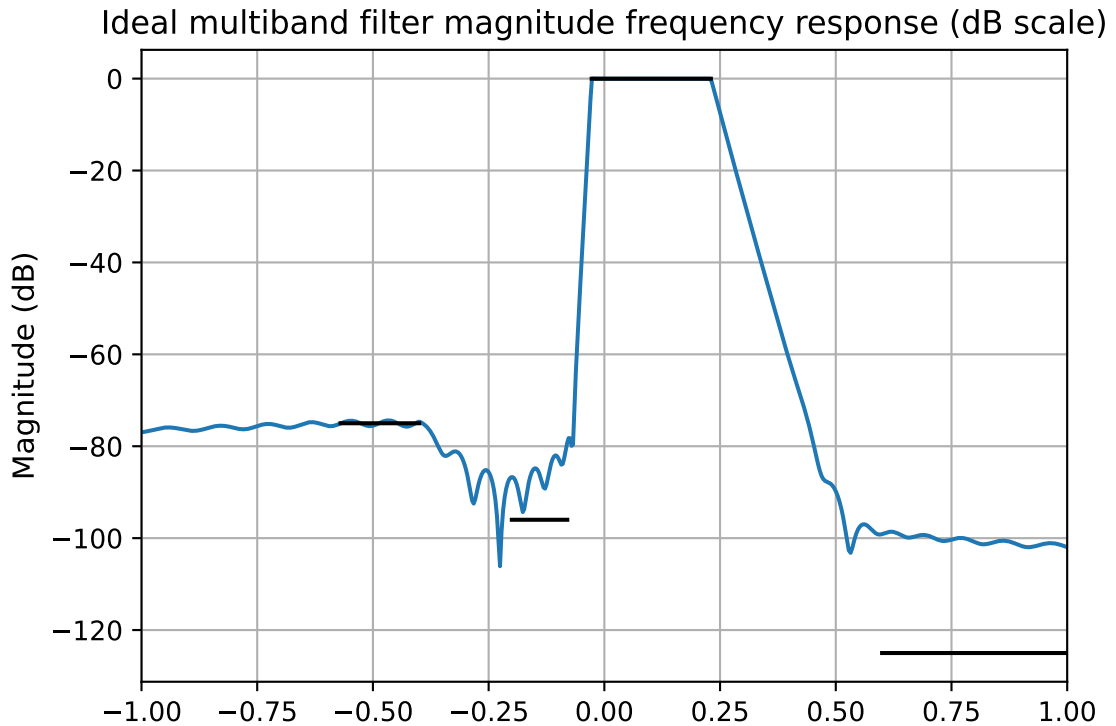


Итоговая ошибка аппроксимации на рабочих полосах в данном примере: 0.064334902

На левом графике изображена функция ошибки на рабочих полосах между заданным фильтром и полученной рациональной функцией. Черным пунктиром показано N -ое сингулярное число λ_{27} , серым - поделенное на вес $\frac{\lambda_{27}}{5}$. Видим, что полученное приближение близко к оптимальному и содержится внутри интервала $[-\frac{\lambda_{27}}{5}, \frac{\lambda_{27}}{5}]$, за исключением граничных точек. Так как метод Прони минимизирует L_2 норму ошибки (к сожалению, без учета важности регионов), ошибка в точках 0.1 и 0.4 Hz возросла. И в целом увеличилась в каждой граничной точке фильтра. Скорее всего, это свидетельствует о недостаточной гладкости приближаемого фильтра, а также о проблеме разрывов из-за кусочно-постоянных весов. Довольно легко проследить отличия данного примера от первого примера с кусочно-экспоненциальными весами и разницу результатов. Аппроксимация Каратеодори-Фейера довольно сильно зависит от гладкости приближае-

мой функции (и, как следствие, гладкости весов), а также гладкости самого фильтра, и скорости убывания сингулярных чисел Ганкелевой матрицы.

6.3 Пример 3



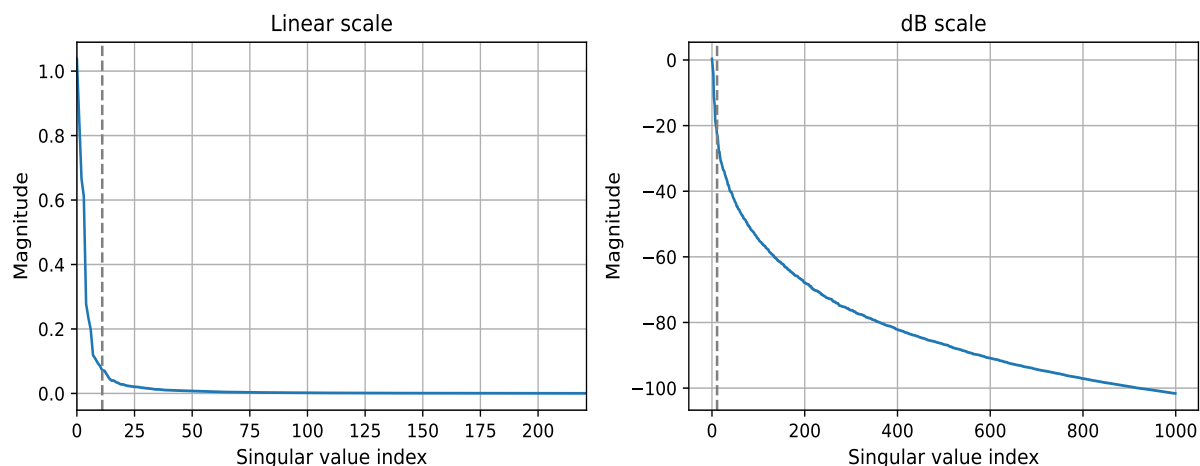
Рассмотрим идеальный фильтр с заданными рабочими полосами: $[-0.57, -0.4]$, $[-0.2, -0.08]$, $[-0.0275, 0.2302]$, $[0.6, 1.5]$, со значениями на них $[-75, -96, -0.0218, -125]$ dB соответственно. Это заданные рабочие полосы, они отмечены на графике черным цветом. Определим функцию в переходных полосах кусочно-экспоненциально. На графике уже показано приближение этой функции конечными суммами ряда Фурье, причем на текущем графике $K = 2048$ членов. Это относительно большое значение, и на этом значении функция все еще не достигла -125 dB. Одна из особенностей метода Каратеодори-Фейера - он зависит от скорости убывания коэффициентов Фурье аппроксиманта. Теоретически можно поставить задачу о том, как продолжить на всю окружность кусочно-постоянную функцию, заданную на рабочих полосах, с максимально быстрым убыванием коэффициентов Фурье. Это бы сильно ускорило сходимость метода CF.

Соответственно мы бы хотели приблизить фильтр на полосах пропускания и задержки с произвольным поведением функции в переходных полосах.

Веса для алгоритма зададим 1 для всех полос, упрощая задачу аппроксимации.

Итак, задано $K = 2048$ членов последовательности $\{h_n\}_0^K$. Рассмотрим приближение с 5 нулями и 10 полюсами ($M = 5, N = 10$). Посмотрим на собственные значения Ганкелевой матрицы:

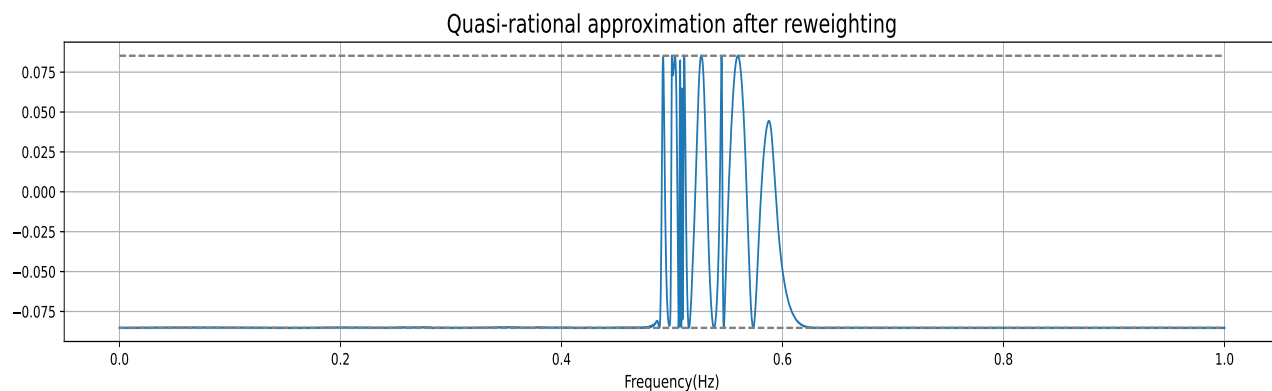
Singular values of Hankel matrix of windowed minimum-phase filter



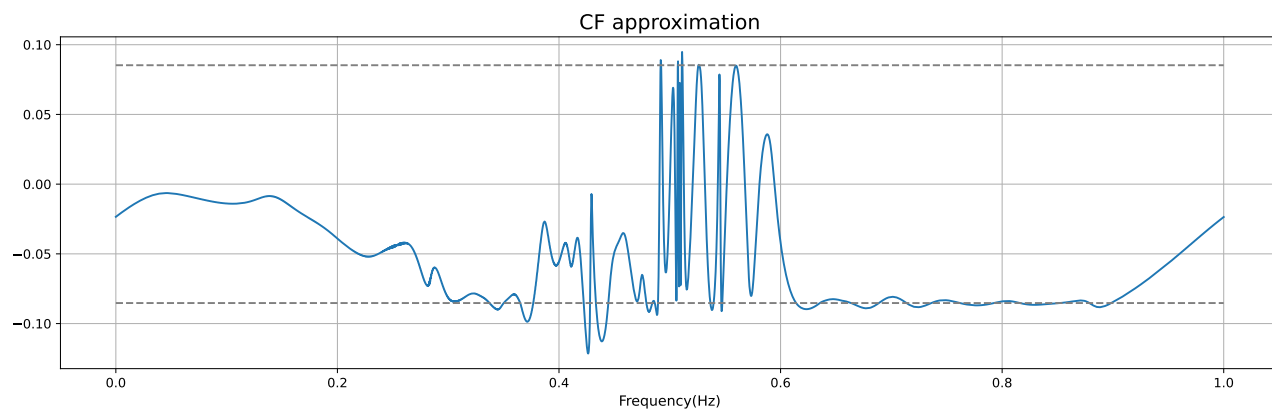
Видно, что сингулярные числа убывают очень медленно, $|\lambda_{10}| = 0.0852793$. (Отмечено на графике серым пунктиром). Чтобы достичь точность порядка -100 dB нужно $N \approx 1000$. С λ_{10} можно получить ошибку аппроксимации только порядка -20 dB.

Покажем ошибку аппроксимации взвешенного сигнала оптимальным Чебышевским $|F_k(e^{iw_n})| - |R_{MN}(e^{iw_n})|$ и CF приближением, то есть ошибку между амплитудами частотных характеристик:

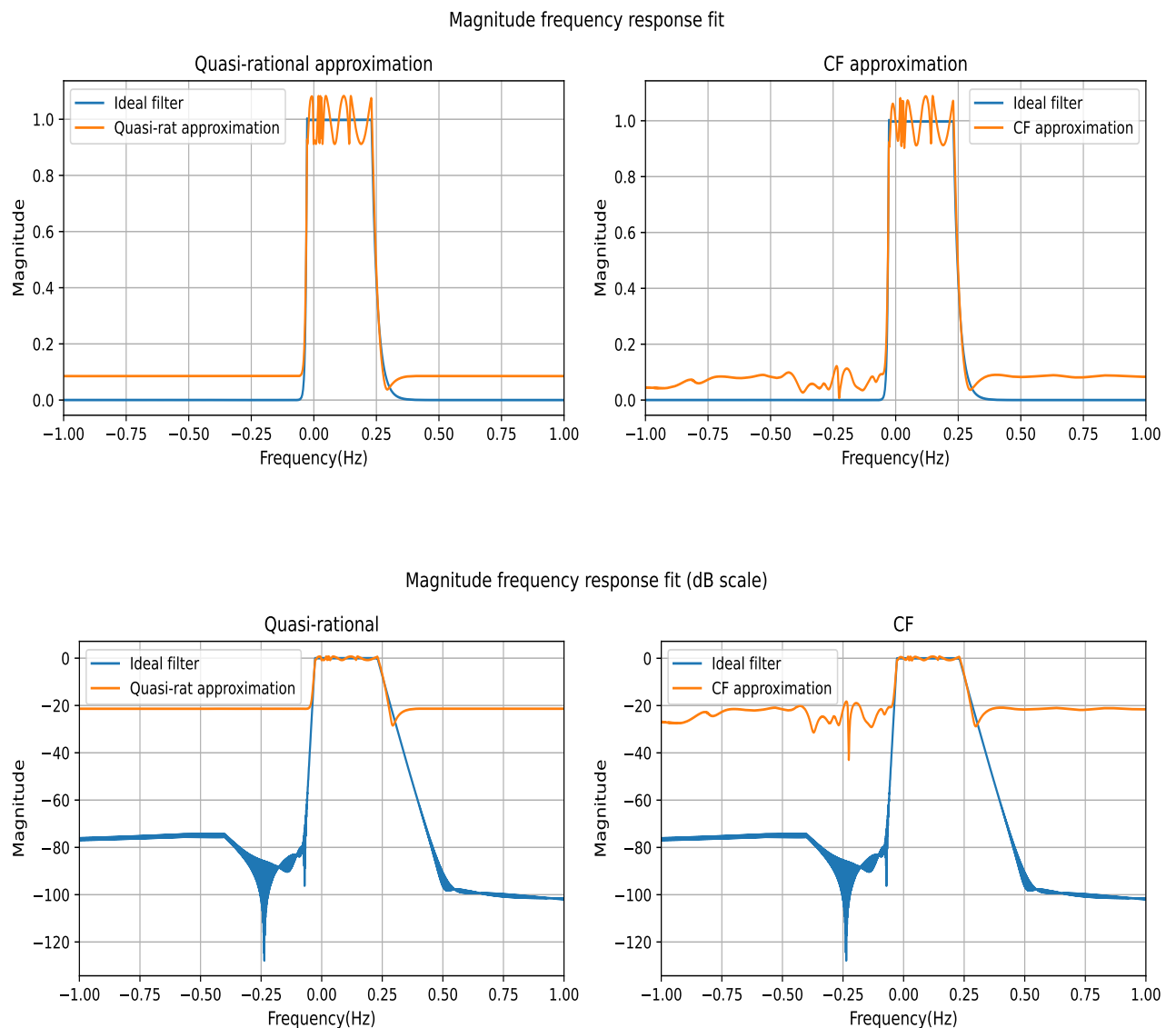
Magnitude frequency response error for input signal



Magnitude frequency response error for input signal



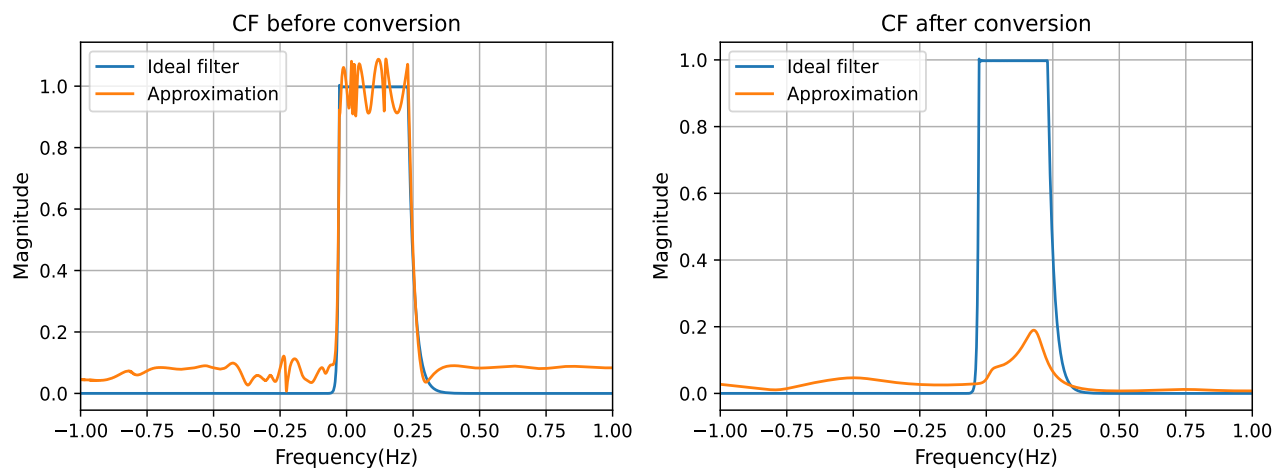
Ошибка аппроксимации Чебышева равна N-ому сингулярному числу: 0.08527931.
 Серым пунктиром на графике нарисована линия, соответствующая ему.
 Ошибка аппроксимации CF: 0.121506010
 Ошибки не сильно отличаются, разница ошибок CF и квази-рациональной: 0.03
 Теперь посмотрим на амплитуды частотных характеристик.



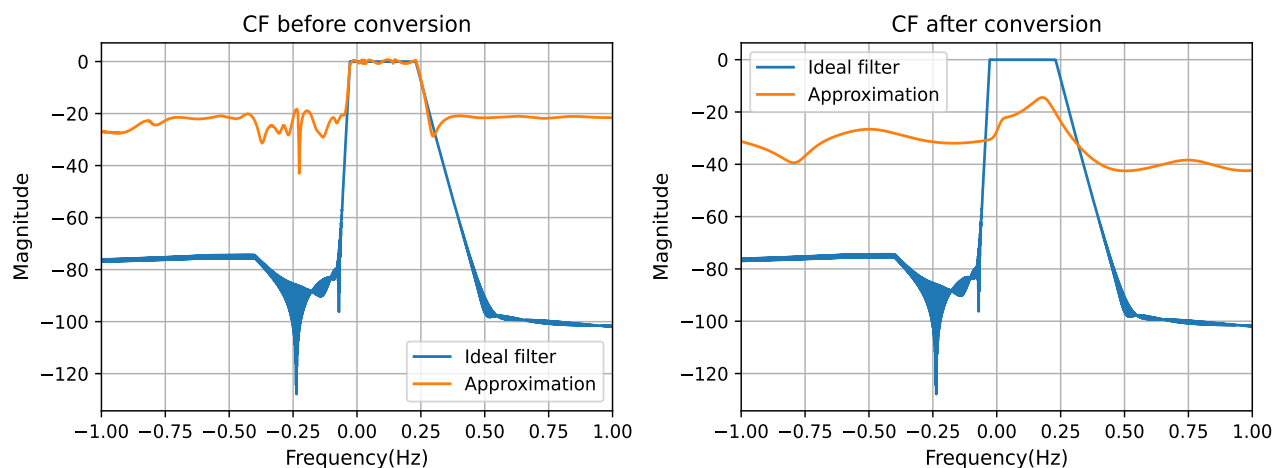
Видно, что функции не смогли получить приближение лучше -20 dB.

Посмотрим на работу метода Прони:

Magnitude frequency response fit during Prony conversion

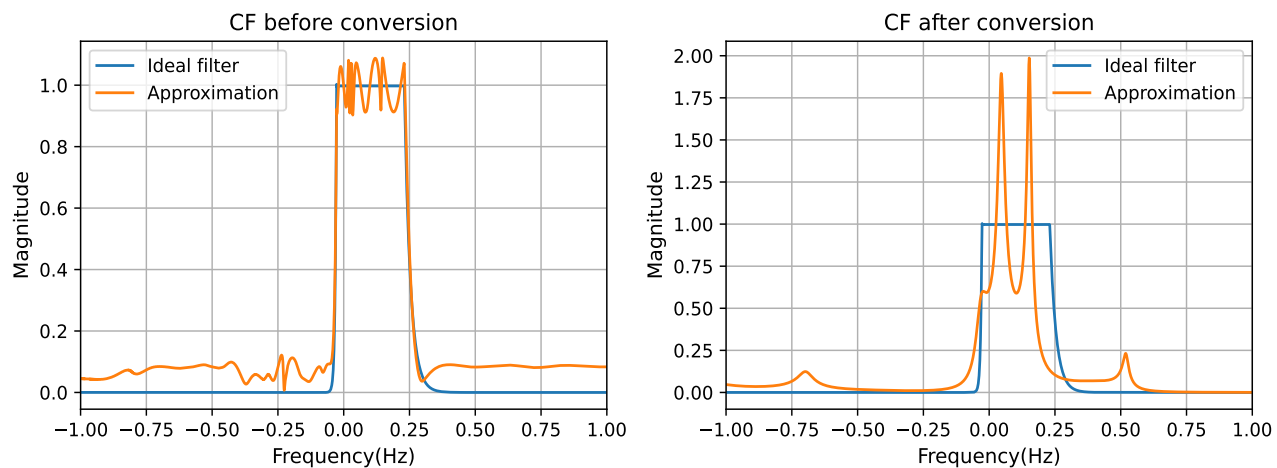


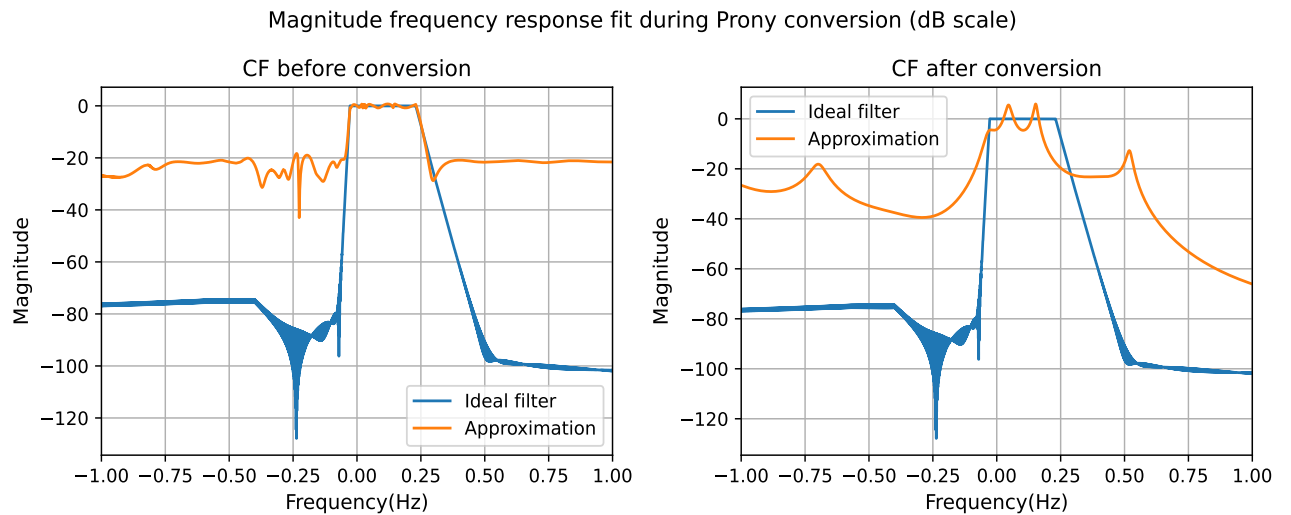
Magnitude frequency response fit during Prony conversion (dB scale)



Посмотрим на работу интервального метода Прони:

Magnitude frequency response fit during Prony conversion





Ошибка при переводе в параметрическую форму при помощи метода Прони: 1.027155763
 Ошибка при переводе в параметрическую форму при помощи интервального метода Прони: 0.9376338

Ошибка до перевода в параметрическую форму: 0.12150601

Итоговая ошибка аппроксимации в данном примере: 0.973069524

Этот пример показывает, что приближение Каратеодори-Фейера плохо работает для функций с медленным убыванием сингулярных чисел Ганкелевой матрицы (Чтобы получить ошибку аппроксимации порядка наименьших значений функции фильтра, нужно брать N около 1000). Кроме того, стандартный метод Прони в данном примере практически уничтожил аппроксимацию, что говорит о том, что этот метод перевода в параметрическую форму совсем не универсальный, и, возможно, метод интерполяции необходимо подбирать исходя из условий и свойств задачи. Интервальный метод Прони отработал немного лучше, но все еще не удовлетворительно.

7 Заключение

В итоге данной работы по общим соображениям был построен алгоритм (такие идеи уже есть [6], однако в свободном доступе алгоритмов с примерами нет), сводящий задачу аппроксимации на нескольких отрезках к классическому случаю аппроксимации Каратеодори-Фейера.

Переход к классическому случаю осуществляется с помощью введения регулируемого параметра веса таким образом, что малым положительным значениям веса соответствуют переходные полосы, где поведение функции малоинтересно. Кроме того, с помощью веса можно регулировать ошибку аппроксимации на заданных регионах, а именно, получать на интересующих областях ошибку меньше чем σ_N , порядка σ_N/γ , где γ - значение веса в конкретной области.

Алгоритм применен к расчету многополосных фильтров, была сделана программная

реализация [9] алгоритма аппроксимации, работоспособность проверена на нескольких примерах, все результаты и графики приведены в данной работе.

В примерах построены фильтры с кусочно-постоянными весами и с кусочно-экспоненциальными весами, для кусочно-экспоненциальных весов алгоритм показал хорошее качество аппроксимации. Для кусочно-постоянных весов метод также показывал низкую ошибку во всех точках, за исключением точек разрыва, где ошибка аппроксимации сильно отклонялась.

Представленный метод имеет несколько особенностей: он зависит от скорости убывания коэффициентов Фурье аппроксиманта, от скорости убывания сингулярных значений Ганкелевой матрицы, а также от вида весовой функции, скорости сходимости ее коэффициентов Фурье, разброса значений задаваемых весов. Стоит отметить, что метод является спектральным и не требует никаких итераций, лишь одно вычисление сингулярных чисел Ганкелевой матрицы.

Также следует отметить, что перевзвешивание фильтра с весовой функцией ухудшает сходимость сингулярных чисел. Можно поставить задачу о продолжении на всю окружность кусочно-постоянной функции, заданной на рабочих полосах, с максимально быстрым убыванием коэффициентов Фурье. Потенциально это может улучшить работоспособность метода CF для более сложных примеров.

Список литературы

- [1] *Achieser Naum I.* Theory of approximation. 2013.
- [2] *Carathéodory Constantin, Fejér Leopold.* Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard-Landau'schen Satz // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940). 1911. 32, 1. 218–239.
- [3] *Gutknecht M, Smith J, Trefethen L.* The Carathéodory-Fejér method for recursive digital filter design // IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing. 1983. 31, 6. 1417–1426.
- [4] *Gutknecht Martin H.* Rational Carathéodory-Fejér approximation on a disk, a circle, and an interval // Journal of approximation theory. 1984. 41, 3. 257–278.
- [5] *Hamming Richard Wesley.* Digital filters. 1998.
- [6] *Hayashi Eric, Trefethen Lloyd N, Gutknecht Martin H.* The CF table // Constructive Approximation. 1990. 6, 2. 195–223.
- [7] *Oppenheim Alan V, Schaffer Ronald W.* Digital signal processing(Book) // Research supported by the Massachusetts Institute of Technology, Bell Telephone Laboratories, and Guggenheim Foundation. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, Inc., 1975. 598 p. 1975.
- [8] *Parks Thomas W, Burrus C Sidney.* Digital filter design. 1987.
- [9] *Rogovoy S.* https://github.com/leesfy/Caratheodory-Fejer_method // Github. 2024.
- [10] *Rudin Walter.* Real and Complex Analysis. V 1986.
- [11] *Takagi Teiji.* On an algebraic problem related to an analytic theorem of carathéodory and fejér and on an allied theorem of landau // Japanese journal of mathematics: transactions and abstracts. 1. 1924. 83–93.
- [12] *Trefethen Lloyd N.* Rational Chebyshev approximation on the unit disk // Numerische Mathematik. 1981. 37. 297–320.
- [13] *Trefethen Lloyd N, Gutknecht Martin H.* The Carathéodory–Fejér method for real rational approximation // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1983. 20, 2. 420–436.