

量子场论

项海波

January 10, 2018

Contents

| | |
|---|-----------|
| 1 狭义相对论: 物理规律以闵氏几何为时空背景 | 1 |
| 1.1 间隔不变及其导致的时空特征, 狭义相对性原理 | 1 |
| 1.1.1 光速/间隔不变, 间隔/时空的划分, 因果律 | 1 |
| 1.1.2 惯性变换/洛伦兹 boost | 2 |
| 1.1.3 四维量的协变性与三维量的相对性: 运动延缓, 长度收缩, 同时相对 | 3 |
| 1.1.4 狭义相对性原理: 物理规律四维协变 | 3 |
| 1.2 力学的洛伦兹协变性; 新发现: 能动关系与质能等价 | 3 |
| 1.3 电磁学的相对论效应, 电动力学的洛伦兹协变性 | 5 |
| 1.3.1 光的多普勒效应与光行差的严格公式 | 5 |
| 1.3.2 麦克斯韦方程组的四维协变形式: 张量表达 | 5 |
| 1.3.3 势的规范冗余, 达朗贝尔方程的四维协变式 | 7 |
| 1.3.4 麦克斯韦方程组用微分形式表达 | 8 |
| 1.4 洛伦兹群表示论 | 8 |
| 1.4.1 正当正时的六个洛伦兹变换的具体形式 | 8 |
| 1.4.2 洛伦兹群的一般李群分析, 场的自旋的出现及其与场性质 (标/矢/旋等) 之间的关系-Wigner 定理 | 11 |
| 1.4.3 狄拉克方程与外尔方程的严格导出, 螺旋, γ 矩阵, 狄拉克表示 | 14 |
| 1.4.4 由狄拉克旋量构造洛伦兹协变量, 狄拉克共轭, γ^5 | 15 |
| 1.4.5 物理规律的离散变换性质: CPT 对称性; CP 破坏, 洛伦兹协变量的进一步分类, 狄拉克方程与外尔方程的离散对称性 | 16 |
| 2 分析力学: 场的力学量的获得 | 22 |
| 2.1 欧拉-拉格朗日方程 | 22 |
| 2.2 诺特定理: 对称性与守恒律 | 22 |
| 2.2.1 能动张量, 时空平移对称性与能动张量守恒 | 23 |
| 2.2.2 空间旋转对称性与角动量守恒, 自旋的出现 | 24 |
| 2.3 规范不变性原理 | 24 |
| 2.3.1 荷场的整体规范变换 (相位平移) 对称性及其守恒荷 | 24 |
| 2.3.2 定域规范变换对称性, 协变导数 D_μ , 荷场与规范场的耦合/相互作用的引入 | 25 |
| 3 实标量场: 零自旋有质量无荷, π^0 介子 | 29 |
| 3.1 标量场的方程: Klein-Gordon 方程; 解中负能项的出现, 产生湮灭算符诠释, 场位形 (configuration) | 29 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.2 | 正则量子化: 动量空间对易关系的赋予与粒子解的获得; 场位形的运动方程 | 30 |
| 3.3 | 发散基态能, 卡西米尔效应 | 33 |
| 3.4 | 单粒子态及其正交归一化分析, 坐标空间场算符对易关系, 协变对易式 | 34 |
| 3.5 | 狭义相对论微观因果律对量子场论的要求: 粒子自旋与对易性/对称性/统计的关系 | 35 |
| 3.6 | 单粒子传播概率幅: 费曼传播子; 四维狄拉克 δ 函数 | 36 |
| 3.7 | 复标量场: 零自旋有质量有荷, π^\pm 介子 | 38 |
| 4 | 复旋量场: 1/2-自旋有质量有荷, 狄拉克费米子 | 39 |
| 4.1 | 狄拉克方程及其共轭方程, 泡利-狄拉克表象, 外尔方程的拉氏密度, 马约拉纳费米子, 轴矢流 | 39 |
| 4.2 | 狄拉克方程的解, $u^s(p)$, $v^s(p)$, Jordan-wigner 量子化: 反对易关系的赋予, 费曼传播子 | 41 |
| 5 | 实矢量场: 1-自旋无荷无质量, 光子 | 43 |
| 5.1 | 电磁场的量子化 | 43 |
| 5.1.1 | 辐射规范量子化, 对易关系的修改, 无散 δ 函数 | 43 |
| 5.1.2 | 协变 (洛伦茨规范) 量子化, 拉氏密度的修改, 费曼规范, Gupta-Bleuler 条件, 标量光子与纵向量子相消, 鬼态 | 46 |
| 5.2 | 有质量矢量场, 质量破坏规范变换 | 49 |
| 6 | 量子场论的泛函表述: 路径积分量子化 | 50 |
| 6.1 | 泛函微积分基础, 量子场论中心等式, 格拉斯曼数 | 50 |
| 6.1.1 | 高斯积分, 高斯重积分, 高斯矩 | 50 |
| 6.1.2 | 泛函积分, 高斯泛函积分 | 51 |
| 6.1.3 | 泛函微商, 量子场论中心等式 | 51 |
| 6.1.4 | 格拉斯曼数 (外代数) 及其微积分 | 52 |
| 6.2 | 量子力学的路径积分表述, 算符编时积, 生成泛函, Bethe-Salpeter 方程 | 53 |
| 6.3 | 量子场论的路径积分形式 | 55 |
| 6.3.1 | 量子场论中的路径积分及其与量子力学中的区别与联系, 场位形及其“超薛定谔方程”, 生成泛函, 格林函数 | 55 |
| 6.3.2 | 自由标量场/旋量场与矢量场的传播子, 生成泛函与两点关联函数 | 56 |
| 7 | 相互作用场论 (散射振幅/截面的计算): 以 ϕ^4 模型, Yukawa 理论与 QED 等为例 | 58 |
| 7.1 | QED 等基本相互作用, ϕ^4 模型, Yukawa 理论 | 58 |

| | | |
|-------|--|----|
| 7.2 | 相互作用场论的基本理论工具 | 59 |
| 7.2.1 | 三种绘景, 相互作用绘景下的时间演化算符, S 矩阵, 散射振幅; 关联函数, 维克定理 | 59 |
| 7.2.2 | 以 ϕ^4 理论的关联函数为例: 连通图, 全连通图; 有效散射图: 全联通+截断; 相互作用下的传播子: 1PI 图, 自能; LSZ 约化公式 | 62 |
| 7.2.3 | ϕ^4 理论的散射矩阵及其费曼图 | 64 |
| 7.2.4 | 衰变宽度, 散射截面 | 66 |
| 7.3 | Yukawa 理论 | 68 |
| 7.3.1 | 以几个过程为例: 散射振幅及其费曼图与费曼规则, 树图 (及其中性虚粒子), 圈图 (与光子自能) | 68 |
| 7.3.2 | 交叉对称性, $s/t/u$ -channel, Mandelstam 变量 | 70 |
| 7.3.3 | Yukawa 势 | 71 |
| 7.4 | 量子电动力学: 电磁散射过程振幅的二阶 (树图) 近似 | 72 |
| 8 | 圈图发散及 (单圈) 重整化: 以量子电动力学为例 | 74 |
| 8.1 | Ward-Takahashi 恒等式, 光学定理 | 75 |
| 9 | 量子色动力学, 杨-Mills 理论 | 76 |
| 9.1 | 夸克: 六种味与三种荷, 色空间的 $SU(3)$ 规范变换, 八种胶子, 杨-Mills 规范场拉氏密度 | 76 |
| 9.2 | 杨-Mills 场的路径积分量子化, Faddeev-Popov 方法 | 78 |
| 9.3 | BRST 对称性 | 79 |
| 10 | 电弱统一: GWS 理论; 标准模型 | 81 |
| 10.1 | 电弱相互作用的拉氏密度: 以轻子为例; 初始轻子无质量; 弱同位旋, 弱超荷; 温伯格转动, 弱混合角; Gell-Mann-Nishijima 公式; 弱同位旋的带电流与中性流 | 81 |
| 10.2 | 整体规范对称性的自发破缺, 希格斯场, Goldstone 定理; 定域破缺, 希格斯机制: 规范场吃掉 Goldstone 玻色子获得质量; W^\pm , Z^0 以及轻子的质量的获得 | 85 |
| 10.3 | 夸克的弱作用, CKM 矩阵 | 90 |
| 10.4 | 粒子物理的标准模型 | 94 |

List of Figures

| | | |
|---|---|----|
| 1 | 间隔/时空区域的划分. | 2 |
| 2 | 卡西米尔效应. | 33 |
| 3 | 费曼惯例: 费曼传播子积围道的选取. | 36 |
| 4 | 推迟势积分围道的选取. | 37 |
| 5 | “墨西哥帽”势: 复标量场 ϕ^4 模型的自发对称破缺. | 86 |

List of Tables

| | | |
|---|------------------------|----|
| 1 | 洛伦兹协变量类型. | 17 |
| 2 | 洛伦兹协变量的离散变换行为. | 21 |

1 狭义相对论：物理规律以闵氏几何为时空背景

1.1 间隔不变及其导致的时空特征，狭义相对性原理

1.1.1 光速/间隔不变，间隔/时空的划分，因果律

物理规律，都是生活在一定的时空背景之中的。时空背景，由几何语言描述。例如，牛顿力学就是生活在欧氏几何时空之内的。在此时空内，在不同惯性系中看来，同样一个事件以伽利略变换相联系。伽利略变换意味着，欧氏时空几何中，物体/讯号/信息运行速度无上限。但是，在对光学/电磁学的研究中人们逐渐认识到，在任何惯性系中，光速不仅是一切物体/讯号/信息运行的最大速度，而且是不变的。于是，对于两个用光速联系着的事件，可在任何惯性系中，它们之间的如下量

$$ds^2 := c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 \quad (1)$$

都是为零的，从而是相等的。若两个事件是用低于或高于光联系着的，它们间的上述量当然就不再为零；但由等价性不难看出，在任何惯性系中它们仍是相等的。由于这样的特殊性，我们将上述量起个名字，称为两个事件之间的间隔。—事实上，此量，即能反映一个时空特点的最基本的不变量；一个物理时空的性质，由间隔完全体现。

我们知道，作为物理规律赖以生活的时空背景，其几何属性将限制物理规律的形式；并且，也许将给出新的物理发现（质能关系/能量导致时空弯曲）。狭义相对论，甚至广义相对论，正是研究这件事情的理论。若再命

$$x^\mu := (x^0, x^i) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r}), \quad (2)$$

$$x_\mu := (x^0, x_i) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) = (ct, -\mathbf{r}), \quad (3)$$

则可将间隔表为

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu; \quad (4)$$

其中

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} := \text{diag}(+, -, -, -) \quad (5)$$

称为度规。间隔的性质，由度规完全体现（当然，由此进而知一个时空的性质由度规完全决定）。由上述度规所描述的时空/几何，我们称为平直的，或闵氏的。

间隔不变性刻画了时空的一种绝对划分：对某一个事件—我们假设它在原点处，—当另外事件与之分别是用大于/等于/小于光速的速度值联系着的时候，那

么在任何参照系下它们都是用大于/等于/小于光速的速度值联系着的. 我们把这三种间隔, 分别称为类空的, 类光的以及类时的. 即对任意惯性系变换, 某种间隔内事件只在本间隔内变换, 而不会外出.

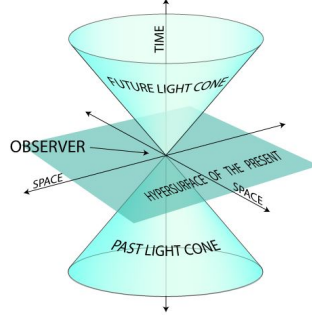


Figure 1: 间隔/时空区域的划分.

稍后不难确证, 对于有着非类空间隔的两件事, 对不同的参照系, 它们的先后次序 (即间隔的时间分量) 仍是不变的; 而有着类空间隔的两件事, 如同时发生的两件事, 它们的先后将随参照系的不同而不同. 这意味着, 非类空间隔的两件事可以建立因果联系, 类空间隔的两件事不可能建立因果关系. 这称为狭义相对论所界定的微观世界的因果律.

1.1.2 惯性变换/洛伦兹 boost

设坐标系 Σ' 与 Σ 的三轴分别平行, 前者沿后者 x 轴的负方向以速度 $v = |\mathbf{v}|$ 运动; 那么, 由光速不变性或由其进一步导致的间隔不变性, 一个事件, 若在 Σ 系看来坐标是 $x^\mu = (ct, x, y, z)$, 则在 Σ' 系看来其坐标就是

$$\begin{cases} ct' = \frac{ct + \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ x' = \frac{vt + x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ y' = y, \\ z' = z; \end{cases} \quad (6)$$

上述变换即同一事件在不同惯性系中的变换式, 亦称为洛伦兹变换在 x 方向上的 boost. 我们还可将上述变换用矩阵形式表为

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad (7)$$

其中已命

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{v}{c}; \quad (8)$$

上式中 γ 可称为洛伦兹因子. 显然, 有

$$\gamma^2 - (\beta\gamma)^2 = 1. \quad (9)$$

最后, 我们不难写出洛伦兹惯性变换的矢量表达式:

$$t' = \gamma \left(t + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right), \quad (10)$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\gamma - 1)r_v \mathbf{v}^0 + \gamma t \mathbf{v}. \quad (11)$$

1.1.3 四维量的协变性与三维量的相对性: 运动延缓, 长度收缩, 同时相对

由洛伦兹变换可见, 某事件的时间间隔, 或某物体的长度/体积, 若在固定于它身上的坐标系—取为 Σ' —看来是 $\Delta\tau$, l_0 或 V_0 , 称为固有时, 固有长度等, 则在 Σ 看来就是

$$\Delta t = \gamma_0 \Delta\tau, \quad l = l_0 / \gamma_0, \quad dV = dV_0 / \gamma_0. \quad (12)$$

显然, 因为时间, 长度与体积等并不是四维量, 而只是作为四维标量的间隔 ds^2 的一部分, 所以在不同参考系下它们的值将发生变化, 自然是不奇怪的. 事实上, 包括我们稍后要讲到的电磁学, 它们的相对论效应, 就出在我们对作为四维协变量的分量化观察之中.

1.1.4 狭义相对性原理: 物理规律四维协变

我们相信, 一切惯性系都应是等价的, 物理规律在何任惯性系中都应被表为相同的形式. 具体操作上讲, 这要求物理规律方程中的出现的每个物理量, 都应是洛伦兹协变量. 这, 称为狭义相对性原理. 它与光速不变一起, 就可揭示出关于我们这个世界的很多以前不为人知的事情. 而当然, 此理论的正确性, 也由这些事情的被发现得以确证.

1.2 力学的洛伦兹协变性; 新发现: 能动关系与质能等价

力学的以伽利略变换作为时空背景的牛顿表述, 显然不具有洛伦兹不变性. 那么首先, 我们来构造洛伦兹协变的力学规律. 我们定义四维速度:

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma_0 \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma_0(c, \mathbf{u}). \quad (13)$$

下面我们证明, 此量的确是一个协变的洛伦兹矢量. 我们知道, 对具有任意度规的空间, 与其中坐标有着相同变换关系的量, 称为矢量. 于是证明 $u^\mu = \gamma_0(c, \mathbf{u})$

为洛伦兹矢量, 等价于证明 $c\gamma'_0 = \gamma(c\gamma_0 + \beta u_x \gamma_0)$ 或 $u'_x \gamma'_0 = \gamma(\beta c\gamma_0 + u_x \gamma_0)$. 由前述洛伦兹 boost 我们可以直接推得三维速度矢量的变换式为¹

$$u'_x = \frac{u_x + v}{1 + \frac{u_x v}{c^2}}; \quad (14)$$

而不难算出, 此式与前述待证明的两式是互致的. 于是 u^μ 是洛伦兹矢量得证. u^μ 是洛伦兹矢量的另一个说明方法如下: 我们知道两个洛伦兹矢量得到一个洛伦兹标量, 所以对于如止定义的四维速度矢量, 这就是 $\gamma_0^2 c^2 - \gamma_0^2 u^2 = c^2$; 而此式的确是成立的².

有了以上之铺垫, 洛伦兹协变的动量四维矢量就可定义为

$$p^\mu := m_0 u^\mu = (\gamma_0 m_0 c, \gamma_0 m_0 \mathbf{u}) = \left(\frac{\gamma_0 m_0 c^2}{c}, \mathbf{p} \right) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \quad (15)$$

(由此可看出 $Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = p^\mu x_\mu$ 是四维标量); 上式中取

$$E = \gamma_0 m_0 c^2 \quad (16)$$

的原因, 是作泰勒展开可以发现 $\gamma_0 m_0 c^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots$. 于是我们发现, 当物体静止时, 仍有

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (17)$$

的能量, 这称为质能等价; 而 $\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m_0^2 c^2$, 即

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4, \quad (18)$$

称为能动关系. 刚才已经知道, 矢量与坐标有着相同变换关系. 所以, 例如对于动量, 假设两系沿 i 轴运动, 我们就有 (已采用自然单位):

$$E' = \gamma(E + \beta p^i), \quad p'^i = \gamma(\beta E + p^i). \quad (19)$$

不难知晓上述第一式, 作为早先发现的 $E = \gamma_0 E_0$ 或 $E' = \gamma'_0 E_0$ 的更一般的推广, 与后二者之间确实是兼容的: $\gamma'_0 E_0 = \gamma(\gamma_0 E_0 + \beta E_0 u_x \gamma_0) \rightarrow \gamma'_0 = \gamma(\gamma_0 + \beta u_x \gamma_0)$.

最后, 我们把牛顿力学改造洛伦兹协变的版本. 首先我们定义 $F^\mu := \frac{dp^\mu}{d\tau}$. 考察此四维力的空间分量, 得出 $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}$; 其中三维动量的定义与前文是一致的, 即 $\mathbf{p} = \gamma_0 m_0 \mathbf{u}$; 相似地, 四维力的三维空间分量, 相比较牛顿理论中的, 亦是作了改造的. 考察四维力的零分量, 得出 $F^0 = \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{c^2 \mathbf{p}}{E} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}}{c}$; 注意其中

$$c^2 \mathbf{p} = c^2 \gamma_0 m_0 \mathbf{u} = E \mathbf{u}. \quad (20)$$

于是最终我们获得 $F^\mu = \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{c}, \mathbf{F} \right)$.

¹由此亦可得出 $\gamma = \gamma_0 \gamma'_0 (1 - \beta_0 \beta'_0)$.

²本段分析亦表明, 不像 (x, y, z) 仍是四维协变坐标的三维分量, $\gamma_0 u_x, \gamma_0 p_x$ 才是四维速度/四维动量的三维分量. 这也就意味着, 我们对牛顿理论中的速度与动量的定义作了改造. 当然这样做的合理性, 仍将由实验的证实得以确立.

1.3 电磁学的相对论效应, 电动力学的洛伦兹协变性

1.3.1 光的多普勒效应与光行差的严格公式

经典的波与运动物体, 就可能出现多普勒效应与“行差”现象; 但光的多普勒效应与光行差现象, 只有使用狭义相对论, 才能给出严格结果. 正如之前已经指出过的, 这些效应, 当然出在我们对四维波矢的分量化观察之中. 下面我们具体考察之.

首先, 不难明确, 相位因子 $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ 应该是洛伦兹标量. 如此, 如下构造四维波矢就是合适的

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right). \quad (21)$$

由此我们可以得出 $\frac{\omega'}{c} = \gamma \left(\frac{\omega}{c} + \beta k_x \right)$, $k'_x = \gamma \left(\beta \frac{\omega}{c} + k_x \right)$; 若再设 \mathbf{k}' , \mathbf{k} 与 x 轴正方向的夹角分别为 θ' , θ , 即 $k_x = \frac{\omega}{c} \cos \theta$, $k'_x = \frac{\omega'}{c} \cos \theta'$ —其中用到了 $\omega = kc$, 则前两式变成

$$\omega' = \omega \gamma \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right), \tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma \left(\cos \theta + \frac{v}{c} \right)}; \quad (22)$$

此即相对论多普勒公式与光行差公式. 进一步地, 我们设光源静止于 Σ' 系, $\omega' = \omega_0$ 即光源自己来看的辐射角频率, 于是

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right)} \quad (23)$$

即 Σ 系中的观测者测出的角频; 其中 θ 即观测者看到的辐射方向与光源运动方向的夹角. 由此可以看出光的多普勒效应的经典公式的确作为上式的低速近似出现. 另外, 在垂直于光源运动方向的方向上, 相对论公式给出 $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$; 此效应称为横向多普勒效应. 作为比较, 此情况下多普勒效应经典公式仍给出 $\omega = \omega_0$, 即未能预言出应有的现象. 这进一步说明经典理论的不足以及相对论的正确性.

我们将看到, 不同于力学牛顿理论的需要被改造, 电磁学背后的动力学规律, 即电动力学, 或具体地说即麦克斯韦方程组, 是相对论协变的. 接下来我们重点研究之.

1.3.2 麦克斯韦方程组的四维协变形式: 张量表达

麦克斯韦方程组的三维矢量式为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (24)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (26)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (27)$$

其中 $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$, 是光速. 我们可以引入矢势与标势, 有

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (28)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (29)$$

下面我们要找出麦克斯韦方程组的四维形式. 为此, 将以上两式用分量形式写出, 即 $B^i = \partial_j A^k - \partial_k A^j$, $E^i = -\partial_i c A^0 - c \partial_0 A^i$; 其中构造了 $A^\mu = (\frac{\varphi}{c}, \mathbf{A})$, 以及 $\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_i) = (\frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$. 进一步变形及命令, 可得:

$$-B^i = \partial^j A^k - \partial^k A^j := F^{jk}, \quad (30)$$

$$-\frac{E^i}{c} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 := F^{0i}, \quad (31)$$

此即意味着场强与势的关系可合写为并列分量值为:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

其中 $F^{\mu\nu}$ 即由 \mathbf{E} 与 \mathbf{B} 构成的电磁场张量. 显然, 上述逆变形式的电磁场张量是反对称的. 我们还可写出电磁场张量的其它形式, 如混合张量

$$F^\mu{}_\nu = \partial^\mu A_\nu - \partial_\nu A^\mu = F^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

相应地, 我们可将麦克斯韦方程组分别表为

$$\partial_x F^{x0} + \partial_y F^{y0} + \partial_z F^{z0} = \partial_i F^{i0} = \mu_0 J^0, \quad (34)$$

$$\partial_j F^{ji} + \partial_k F^{ki} + \partial_0 F^{0i} = \partial_j F^{ji} + \partial_0 F^{0i} = \mu_0 J^i, \quad (35)$$

$$\partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0, \quad (36)$$

$$\partial_j F^{k0} + \partial_k F^{0j} - \partial_0 F^{jk} = 0; \quad (37)$$

其中作了构造³ $J^\mu = (c\rho, \mathbf{J})$. 上述方程前两式与后两式可进一步分别合写为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu, \quad (38)$$

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0; \quad (39)$$

³同时 $J^\mu = \rho_0 u^\mu = \rho_0 \gamma_0 (c, \mathbf{u})$, 对比知 $\rho = \rho_0 \gamma_0$; 这恰好补偿了体积的变化 $dV = dV_0/\gamma_0$, 使总电荷 $Q = \int dV \rho$ 保持为洛伦兹标量. 另外, 可见电荷守恒定律 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = \partial_\mu J^\mu = 0$ 是洛伦兹不变的.

此即麦克斯韦方程组的四维协变形式. 由此我们知晓, 电磁学规律天生就是四维协变的. 另外还可读出, 麦氏方程前两式是独立的, 而后两式, 作为 Bianchi 恒等式, 是 $F^{\mu\nu}$ 自然的拓扑性质.

我们知道对任何一个二阶张量都有 $T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) := T_{(\mu\nu)} + T_{[\mu\nu]}$, 即任一二阶张量都可由一个对称张量与一个反对称张量构成; 如对电磁场张量我们有 $F_{[\mu\nu]} = F_{\mu\nu}$. 如果我们如下定义一个三阶张量的全反对称张量: $T_{[\rho\mu\nu]} = \frac{1}{6}(T_{\rho\mu\nu} + T_{\mu\nu\rho} + T_{\nu\rho\mu} - T_{\rho\nu\mu} - T_{\nu\mu\rho} - T_{\mu\rho\nu})$, 则可知

$$\partial_{[\rho} F_{\mu\nu]} = \frac{1}{3}(\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}) = 0; \quad (40)$$

上式可为麦克斯韦方程第二式的另一写法.

1.3.3 势的规范冗余, 达朗贝尔方程的四维协变式

容易推导出电磁势满足

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}, \quad (41)$$

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (42)$$

称为达朗贝尔方程. 由前述势与场强的关系表达式可以看出, 场强在以下两式进行协同变换—称为规范变换—时保持不变:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \gamma, \quad (43)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \gamma}{\partial t}; \quad (44)$$

用四维语言叙述上两式合成 $A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \gamma$. 也就是说, $(\frac{\varphi}{c}, \mathbf{A})$ 与 $(\frac{\varphi'}{c}, \mathbf{A}')$ 描述的是同一个物理实体. 势的这种规范冗余, 意味着我们可以给它加上条件, 称为规范条件. 常见的有库仑规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 与洛伦茨规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \partial_\mu A^\mu = 0$. 显然洛伦茨规范条件是协变的; 其下势方程化为

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}, \quad (45)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad (46)$$

上两式可合写为 $\partial^2 A^\mu = -\mu_0 J^\mu$, 显然亦是协变的.

当采取库仑规范时, 有 $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$. 对于自由场, 就得到 $\varphi = 0$. 此式连同库仑规范条件, 称为辐射规范. 有人亦将之称为库仑规范. 在辐射规范下, 势方程就变为 $\partial^2 \mathbf{A} = 0$.

辐射规范的两个条件, 将电磁场的自由度由 4 降到了 2; 具体地, 对于平面波, 本规范给出 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0$; 也即电磁场只有两个横向分量是自由有的, 没有纵向分量. 这, 与我们熟知的事实是一致的. 但是, 当然, 此规范是不具有洛伦兹协变性的. 如上所见, 洛伦茨规范倒是洛伦兹协变的, 但却不能消除所有非物理自由度.

1.3.4 麦克斯韦方程组用微分形式表达

电磁势用微分形式写出就是 $A = A_\mu dx^\mu$, 是一个 1-形式; 于是可以看出, 由其得出的如下 2-形式:

$$F = dA = \partial_{[\mu} A_{\nu]} dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (47)$$

即电磁场强; $F_{\mu\nu}$ 即电磁场张量. 我们知道外微分算符 d 总有 $d^2 = 0$, 此即给出麦克斯韦第二式 $\partial_{[\rho} F_{\mu\nu]} = 0$. 具体地,

$$dF = d^2 A = \frac{1}{2} \partial_{[\rho} F_{\mu\nu]} dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = 0. \quad (48)$$

利用 Hodge 星算符⁴ \star , 可求出

$$\begin{aligned} d \star F &= d \star \left(\frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \right) \\ &= d \star \left(F_{0i} dx^0 \wedge dx^i + \frac{1}{2} F_{ij} dx^i \wedge dx^j \right) \\ &= d (F_{i0} dx^j \wedge dx^k + F_{ij} dx^0 \wedge dx^k) \\ &= \partial_i F_{i0} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k + \partial_i F_{ij} dx^i \wedge dx^0 \wedge dx^k \\ &= -\mu_0 \star J_0 dx^0 + \mu_0 \star J_j dx^j \\ &= -\mu_0 \star J; \end{aligned} \quad (51)$$

其中 $J = J_\mu dx^\mu$ 为一个 1-形式. 显然, 上述式子即麦氏方程前两式之合写.

1.4 洛伦兹群表示论

1.4.1 正当正时的六个洛伦兹变换的具体形式

我们已经知道, 在洛伦兹变换中有 $\gamma^2 - (\beta\gamma)^2 = 1$; 因为双曲三角函数⁵恰有此性质, 所以若令

$$\gamma = \cosh \zeta, \quad \beta\gamma = \sinh \zeta, \quad (53)$$

⁴ 利用此算符的定义 $\star(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) = \frac{1}{q!} \epsilon_{j_1 \cdots j_q}{}^{i_1 \cdots i_p} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q}$, 可求得

$$\star dt = dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k, \quad \star dx^i = dt \wedge dx^j \wedge dx^k; \quad (49)$$

$$\star(dt \wedge dx^i) = -dx^j \wedge dx^k, \quad \star(dx^i \wedge dx^j) = dt \wedge dx^k. \quad (50)$$

⁵ 双曲余弦, 双曲正弦的定义及关系为

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \quad (52)$$

—其中 ζ 称为 rapidity, —则 x 方向上的洛伦兹 boost 就进一步可表为⁶

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \zeta & \sinh \zeta & 0 & 0 \\ \sinh \zeta & \cosh \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \exp \begin{bmatrix} 0 & \zeta & 0 & 0 \\ \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (58)$$

于是一个一般的洛伦兹 boost 就是

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \exp \begin{bmatrix} 0 & \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \\ \zeta_x & 0 & 0 & 0 \\ \zeta_y & 0 & 0 & 0 \\ \zeta_z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (59)$$

不难知晓, 连续操作部分的洛伦兹变换, 应包含空间方向上的三个 boost 以及三个旋转这六个操作. Boost 部分业已写出, 下面我们研究旋转部分. 坐标系绕 z 轴正方向作逆时针旋转, 同一个事件在两系中的变换操作为

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \exp \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (60)$$

至此, 三个方向上的 boost 与旋转操作下, 事件在前后坐标系中的关系为

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \exp \begin{bmatrix} 0 & \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \\ \zeta_x & 0 & \theta_z & -\theta_y \\ \zeta_y & -\theta_z & 0 & \theta_x \\ \zeta_z & \theta_y & -\theta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad (61)$$

⁶我们将用到三角函数或双曲三角函数与指数函数的关系等知识. 现摘其相关, 简列如下. 据泰勒展开: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$, 可得

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots, \quad \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots, \quad (54)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots, \quad \sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots, \quad (55)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots; \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^x = \cosh x + \sinh x; \quad (56)$$

于是可得

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \exp \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cosh \zeta & \sinh \zeta \\ \sinh \zeta & \cosh \zeta \end{bmatrix} = \exp \begin{bmatrix} 0 & \zeta \\ \zeta & 0 \end{bmatrix}. \quad (57)$$

这个结果, 是相当之优美的. 一般地, 我们可将上述变换记为⁷

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad (65)$$

其中 $[\Lambda^{\mu}_{\nu}] = \exp[\omega^{\mu}_{\nu}]$. 可以看出, 对洛伦兹变换的六个操作 (或由它们组合成的任意操作) 皆有 $\det[\Lambda^{\mu}_{\nu}] = +1$, $\Lambda^0_0 \geq 1$, 我们称这样的变换是正当正时的. 另外它们还有如下一些关系: $(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu} = \Lambda_{\nu}^{\mu}$, $(\Lambda^{-1})^{\mu\nu} = \Lambda^{\nu\mu}$, $(\Lambda\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha}(\Lambda^{-1})^{\alpha}_{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda_{\nu}^{\alpha} = \delta^{\mu}_{\nu}$, $[\Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda_{\nu}^{\alpha}] = I_{4 \times 4}$. 能保持事件间隔不变的操作, 除了以上六个连续操作外, 还有宇称变换与时间反演两个离散操作. 物理规律在它们之下的变换行为, 我们将在本节末研究.

现在我们对洛伦兹变换矩阵进行分解, 以获取对其之进一步认识. 若我们命

$$L(\omega^{\mu}_{\nu}) = -i \frac{\partial D(\omega^{\mu}_{\nu})}{\partial \omega^{\mu}_{\nu}} \Big|_{\omega^{\mu}_{\nu}=0}, \quad (66)$$

—由此可容易写下 $L(\omega^{\mu}_{\nu})$ 的矩阵形式, 它们可统一表为

$$(L^{\mu}_{\nu})_{\alpha\beta} = -i(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu}_{\beta}g^{\nu\alpha}) = i(g^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta} - \delta^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}), \quad (67)$$

—则我们可将洛伦兹变换写为:

$$[\Lambda^{\mu}_{\nu}] = \exp[\omega^{\mu}_{\nu}] = \exp\left(\frac{i}{2}\omega^{\mu}_{\nu}L(\omega^{\mu}_{\nu})\right). \quad (68)$$

只要作与前一式相应的命令, 我们还可写出相应的 $[\Lambda_{\mu\nu}] = \exp\left(\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}L(\omega_{\mu\nu})\right)$ 等其它其形式; 当然, 此时角动量矩阵亦将变成 $(L^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = -i(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}) = i(g^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta} - g^{\mu\beta}\delta^{\nu\alpha})$ 等形式. 简单分析可知, 我们有 $L(\omega_{\mu\nu}) = L(\omega^{\mu\nu})$, $L(\omega^{\mu}_{\nu}) = L(\omega_{\mu}^{\nu})$.

我们作以下的读取与命令⁸:

$$\omega_j^k = \theta^i, \quad \omega_0^i = -\zeta^i; \quad L(\omega_j^k) = J^j, \quad L(\omega_0^i) = -K^i = -i \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (69)$$

则洛伦兹变换就可写为

$$[\Lambda^{\mu}_{\nu}] = e^{i(\zeta^i K^i + \theta^i J^i)} = e^{i(\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{K} + \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J})}. \quad (70)$$

对于洛伦兹变换的其它形式, 如 $[\Lambda^{\mu\nu}]$, 我们仍能给出上述结果, 不过须注意其中矩阵 K^i , J^i 的形式有相应的不同.

⁷ 为作储备, 我们写出张量与度规运算的以下一些基础:

$$\omega^{\mu\nu} = \omega^{\mu}_{\alpha}g^{\alpha\nu} = g^{\mu\alpha}\omega_{\alpha}^{\nu}, \quad \omega_{\mu\nu} = \omega_{\mu}^{\alpha}g_{\alpha\nu} = g_{\mu\alpha}\omega^{\alpha}_{\nu}, \quad (62)$$

$$\omega^{\mu}_{\nu} = \omega^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = g^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\nu}, \quad \omega_{\mu}^{\nu} = \omega_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = g_{\mu\alpha}\omega^{\alpha\nu}; \quad (63)$$

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}x^{\nu}, \quad x'_{\mu} = \Lambda_{\mu\nu}x^{\nu}, \quad x'^{\mu} = \Lambda^{\mu\nu}x_{\nu}, \quad x'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu}x_{\nu}. \quad (64)$$

规则可以简记为: 度规从后面作用时, 后三列变号; 从前面作用时, 后三行变号.

⁸ 对于其它形式, 我们同样可作相应的读取与命令, 如 $\omega_{0i} = \zeta^i$, $\omega_{ij} = -\theta^k$, $L^{0i} = K^i$, $L^{ij} = -J^k$ 等.

1.4.2 洛伦兹群的一般李群分析, 场的自旋的出现及其与场性质 (标/矢/旋等) 之间的关系—Wigner 定理

群元, 转动角

在不用知晓 Λ^μ_ν 的具体形式的情况下, 仅通过 $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ 以及间隔不变性, 再结合群论的一些知识, 我们就可得到一些有用的信息. 下面我们进行之. 一般地, 我们知道, 物理规律应在十二个操作下保持不变; 这十二个操作分别是空间上的三个 boost 与三个旋转, 时空上的四个平移—这些都是连续操作, 以及时间反演与宇称 (空间反演) 两种离散操作. 其中, 我们将连续操作写为

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + \xi^\mu; \quad (71)$$

这样的操作形成的群称为庞加莱群. 下面我们先不考虑时空平移操作, 而只考虑操作 Λ^μ_ν . 我们已经知道, 上述变换的要求, 是保持间隔不变: $g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\alpha x^\alpha \Lambda^\nu_\beta x^\beta = g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$; 亦即间隔不变的等价表述就是:

$$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta. \quad (72)$$

设我们现在另有一转动 Λ' , 同样满足上述结构, 即有 $g_{\alpha\beta} = g_{kt}\Lambda'^k_\alpha \Lambda'^t_\beta$; 则可发现 $g_{\mu\nu} = g_{kt}(\Lambda'\Lambda)^\mu_k (\Lambda'\Lambda)^\nu_t$. 也就是说, 满足式 (72) 的变换, 成形一个群; 我们称此群为 $O(3,1)$ 群. 进一步分析可知, $\det[\Lambda^\mu_\nu] = \pm 1$, $\Lambda^0_0 \geq 1$ or ≤ -1 ; 我们称 $\det[\Lambda^\mu_\nu] = +1$ 的情况为正当的, $\Lambda^0_0 \geq 1$ 的情况为正时的. 正当正时的操作构成的子群, 记为 $SO^+(3,1)$. 我们常说的兹伦兹群, 一般即指 $SO^+(3,1)$ 群.

洛伦兹变换的无穷小如下

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu; \quad (73)$$

也就是说, 当我们作一个无穷小洛伦兹变换时, 可以写出 $x'^\mu = (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu)x^\nu = x^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu$, 或 $\delta x^\mu = \omega^\mu_\nu x^\nu$. — 将上式代入前述间隔不变的表达式, 有 $g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}(\delta^\mu_\alpha + \omega^\mu_\alpha)(\delta^\nu_\beta + \omega^\nu_\beta) = g_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} + O(\omega^2)$. 也就是说, 间隔不变性加在洛伦兹无穷小上的要求是后者具有下述结构

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}, \quad (74)$$

即洛伦兹无穷小必是反对称的. 数学上我们知, 实反对称四维方程的空间是 6 维的; 于是我们知道洛伦兹群是六维的, 即有六个生成元. 本小节至此对洛伦兹变换的一般分析, 与前一小节我们已获知的洛伦兹变换的具体形式, 是完全一致的.

角动量, 一般函数上的洛伦兹操作 $U(\Lambda)$

下面, 我们继续按李群的一般手续语言说话. 考虑到与前文的一致性, 作以下的命令是合适的⁹:

$$L^\mu_\nu = -i(x^\mu \partial_\nu - x_\nu \partial^\mu); \quad (75)$$

⁹三维情况时此命令退化为 $L^k = L^i_j = -i(x^i \partial_j - x^j \partial_i)$, 这与我们的通常的做法是相符的.

相似地, 我们也可写出其它的形式, 如 $L^{\mu\nu} = -i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)$. 由此, 例如按标量在转动下的变换行为 $U(\Lambda)\phi(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$ 并结合上一小节得到的转动矩阵的具体形式, 我们就可得到¹⁰:

$$U([\Lambda^{\mu\nu}]) = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}\right), \quad (76)$$

以及诸如 $U([\Lambda^\mu_\nu]) = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_\mu{}^\nu L^\mu{}_\nu\right)$ 等其它形式. ($L^{\mu\nu}$ 可待矩阵化, $\omega_{\mu\nu}$ 就是一个个分量, 而不是矩阵.) 此是尚是作用在函数空间上的洛伦兹解析操作; 也就是说, 上式中 $L^{\mu\nu}$ 是微分算符, 区别于上一小节中的 $L(\omega^{\mu\nu})$ 是矩阵.

前文业已言明, 或由计算过程我们可以发现, $U(\Lambda)$ 是函数或坐标系经过洛伦兹转动后, 新老函数间的关系, 具体地, 即¹¹

$$\psi^\alpha(x) \rightarrow \psi'^\alpha(x) = U(\Lambda)\psi^\alpha(x) = M(\Lambda)^\alpha{}_\beta \psi^\beta(\Lambda^{-1}x). \quad (77)$$

其中, 我们称 $M(\Lambda)^\alpha{}_\beta$ 即 Λ 或 $U(\Lambda)$ 以 $\psi^\alpha(x)$ 为表示基的表示矩阵. 具体地, 若¹²

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = U(\Lambda)\phi(x) = I \cdot \phi(\Lambda^{-1}x), \quad (78)$$

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = U(\Lambda)A^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x), \quad (79)$$

则表示基 $\psi(x)$ 与 $A^\mu(x)$ 分别就是标量与矢量, 相应的表示 $I, \Lambda^\mu{}_\nu$ 就称为 Λ 或 $U(\Lambda)$ 的标量表示与矢量表示. 须要注意, 当场被算符化以后, 以标量场为例, 洛伦兹变换对场算符的作用将变成 $U(\Lambda)\phi(x)U^{-1}(\Lambda)$ 这样的形式.

角动量/李代数及其分解组合, $\text{SO}^+(3,1) \sim \text{SU}(2) \otimes \text{SU}(2)$, 洛伦兹群 (Λ 或 $U(\Lambda)$) 的矩阵表示, 场的自旋的出现及其与场性质 (标/矢/旋等) 之间的关系—Wigner 定理, 复场与反粒子

群表示论中, 我们要做的最重要的事之一, 就是找到 $U(\Lambda)$ 或 Λ 的不同矩阵表示. 不同的表示基函数, 就是洛伦兹标量, 矢量与旋量等; 相应的表示就称为标量表示, 矢量表示与旋量表示等. 而同时可以发现, 与标量函数, 矢量函数与旋量函数, 还将分别带有零自旋 0, 自旋 1 以及自旋 1/2. 在稍后的量子场论中我们知道, 粒子将由洛伦兹协变的场描述; 于是前述场的自旋, 就是相应的粒子的自旋. 洛伦兹群的带有某个自旋角动量的场, 对应于物理世界中具有相应角动量的某种粒子, 这, 称为 Wigner 定理. 下面我们就来按手续进行.

利用 $p^\mu = i\partial^\mu$, $[x^\mu, p^\nu] = -ig^{\mu\nu}$, 我们容易算出本群的李代数:

$$[L^{\mu\nu}, L^{\rho\sigma}] = ig^{\mu\sigma}L^{\rho\nu} + ig^{\nu\sigma}L^{\mu\rho} - ig^{\nu\rho}L^{\mu\sigma} - ig^{\mu\rho}L^{\sigma\nu}. \quad (80)$$

¹⁰以三维空间为例, 一般地, $P_R f(\mathbf{r}) = f(R^{-1}\mathbf{r})$; 由此即可求得 P_R .

¹¹可以与三维空间情况作一比较体会. 在三维空间中, 一般地, P_R 或 R 的矩阵表示由下式拿出 $P_R f^a(\mathbf{r}) = \sum_b D(R)_b^a f^b(\mathbf{r})$.

¹²在洛伦兹坐标系变换下, 不考虑坐标点, 标量与矢量的变换行为则分别是 $\phi = 1 \cdot \phi$, $A^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$. 另, ϕ 读作老函数, ϕ' 读作新函数.

我们知道, 每一组满足上述李代数的矩阵, 即构成 $U(\Lambda)$ 或 Λ 的一个表示. 我们将 $L^{\mu\nu}$ 作如下分解, 即分别考察其时间部分与空间部分:

$$K^i = L^{0i}, J^i = -L^{jk}, \quad (81)$$

—此时同样我们可写出作为解析表达式的 $U(\Lambda) = e^{i(\zeta \cdot \mathbf{K} + \theta \cdot \mathbf{J})}$ 系列式子, —则将其代入前述李代数一般式立即可得出

$$[J^i, J^j] = iJ^k, [K^i, K^j] = -iJ^k, [K^i, L^j] = iK^k. \quad (82)$$

由此可见, K^i 操作并不封闭, 也就是说, 洛伦兹 boost 并不能形成一个子群. 而若我们将操作作下述组合:

$$A^i = \frac{J^i + iK^i}{2}, B^i = \frac{J^i - iK^i}{2}, \quad (83)$$

则立可发现

$$[A^i, A^j] = iA^k, [B^i, B^j] = iB^k, [A^i, B^j] = 0; \quad (84)$$

也就是说, $SO^+(3,1) \sim SU(2) \otimes SU(2)$. 由此, 按此两二维么模么正群的本征值, 如记作 A, B , 我们即可找出洛伦兹群的各矩阵表示, 如可标记为 (A, B) ; 且如前文已言明, 我们并可认清特定自旋与场的标/矢/旋之间的关系.

1, $(0, 0)$ 表示. 此时 $L^{\mu\nu} = 0$, 故有

$$M(U(\Lambda)) = M(\Lambda) \equiv \Lambda_0 = I. \quad (85)$$

此矩阵表示对应的粒子的自旋为零, 该种粒子用标量场来描述. 这是洛伦兹群的平庸表示.

2, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 表示. 此时 $J^i = 1, K^i = 0, (L^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = -i(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}) = i(g^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta} - g^{\mu\beta}\delta^{\nu\alpha})$, 故有

$$\Lambda_1 = [\Lambda^{\mu\nu}]. \quad (86)$$

也就是说, 此表示对应的粒子的自旋为 1, 该种粒子用矢量场来描述. 这是洛伦兹群的基本表示.

3, $(0, \frac{1}{2})$ 表示. 此时¹³ $J^i = \frac{1}{2}\sigma^i, K^i = i\frac{\sigma^i}{2}$, 于是

$$\Lambda_{(0, \frac{1}{2})} = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^i\zeta^i + \frac{i}{2}\sigma^i\theta^i\right). \quad (88)$$

¹³泡利矩阵的性质: $\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}, \sigma^{i\dagger} = \sigma^i, \{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta_{ij}$ (中含 $(\sigma^i)^2 = 1$), $[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\sigma^k$; 在 σ^3 表象中, 有

$$\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (87)$$

对于自旋为半奇数的粒子, 这里以自旋 $1/2$ 为例, 若体系在空间转过一周, $U(\Lambda)\psi_L = e^{i\pi}\psi_L = -\psi_L$, 即此时体系并不复原, 而是相差一个负号. 我们称这样的体系的旋量体系, 描述之的波函数, 称为旋量波函数. 因为后面可知的原因, 我们称此表示的表示基函数为左旋外尔旋量.

4, $(\frac{1}{2}, 0)$ 表示. 此时 $J^i = \frac{1}{2}\sigma^i$, $K^i = -i\frac{\sigma^i}{2}$, 故有

$$\Lambda_{(\frac{1}{2}, 0)} = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^i\zeta^i + \frac{i}{2}\sigma^i\theta^i\right). \quad (89)$$

与前一个表示类似, 我们称此表示为右旋外尔旋量表示, 亦描述某种具有 $1/2$ 自旋的粒子. 别外可以看出, 本粒子与上一种粒子, 对洛伦兹空间转动的反应是相同的, 而对 boost 的反应, 在相位上差一个负号.

值得指出的是, 洛伦兹群的表示函数场, 是可实可复的. 其中, 复场, 在量子场论中, 通过规范原理与算符诠释, 事实上预言了反粒子 (如正电子) 的存在.

1.4.3 狄拉克方程与外尔方程的严格导出, 螺旋, γ 矩阵, 狄拉克表示

若左右旋外尔粒子具有质量, 则我们就可使自己位于与它们静止的参考系中; 而这时对于我们而言, 这两种粒子将不可分辨. 事实上, 当获得质量后, 左右旋外尔费米子将变成同一种粒子, 称为狄拉克费米子. 下面, 我们就来具体研究这件事, 并导出狄拉克费米子的运动方程, 或即狄拉克旋量满足的方程.

$$\begin{aligned} \psi_L^p &= \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\zeta}\right) \psi_L^0 = \left(\cosh \frac{\zeta}{2} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}^0 \sinh \frac{\zeta}{2}\right) \psi_L^0 \\ &= \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}^0 \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\right) \psi_L^0 \\ &= \frac{E+m-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\sqrt{2m(E+m)}} \psi_L^0; \end{aligned} \quad (90)$$

上述推导中用到了双曲三角函数的一些性质, 以及粒子的相对论关系 $E = \gamma m$, $|\mathbf{p}| = \sqrt{E^2 - m^2}$. 其中 $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}^0$ 描述粒子自旋在动量方向上的投影, 称为螺旋. 同样可推得

$$\psi_R^p = \exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\zeta}\right) \psi_R^0 = \frac{E+m+\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\sqrt{2m(E+m)}} \psi_R^0. \quad (91)$$

粒子在静止时不可分辨, 从而有静止条件 $\psi_L^0 = \psi_R^0$; 于是我们可得

$$\frac{\psi_L}{\psi_R} = \frac{E+m-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m+\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}} = \frac{E-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m}, \quad \frac{\psi_R}{\psi_L} = \frac{E+\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m}; \quad (92)$$

其中用到了 $E^2 = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 + m^2$. 采用矩阵形式, 上式即可被表为

$$\begin{bmatrix} -m & E-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ E+\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m & \sigma^\mu p_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix} = 0; \quad (93)$$

其中我们作了命令 $\sigma^\mu = (1, \sigma^i)$, $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i)$. 由此亦知 $\bar{\sigma}^\mu p_\mu \sigma^\nu p_\nu = m^2$. 若我们再令¹⁴

$$\gamma^\mu = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{bmatrix}; \quad \gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}, \quad (94)$$

则我们可将前述式子表为

$$\gamma^0 = (\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i - m)\psi = (\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = 0; \quad (95)$$

上式中 $\psi \equiv \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix}$ 称为狄拉克旋量此方程即称为狄拉克方程. 注意从数学上讲, 能动关系 $p^2 = m^2$ 可分为两个式子: $\gamma^\mu p_\mu = m$, $\gamma^\mu p_\mu = -m$, 或 $(\gamma^\nu p_\nu + m)(\gamma^\mu p_\mu - m) = \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu - m^2 = p^2 - m^2 = 0$.

当粒子无质量, 可见狄拉克方程退化为分别描述左右外尔旋量的两个方程:

$$\bar{\sigma}^\mu p_\mu \psi_L = (E + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\psi_L = 0, \quad \sigma^\mu p_\mu \psi_R = (E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\psi_R = 0; \quad (96)$$

称为外尔方程. 对于无质量粒子, $E = |\mathbf{p}|$, 于是可得

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \psi_L = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}^0 \psi_L = -\psi_L, \quad \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \psi_R = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}^0 \psi_R = +\psi_R; \quad (97)$$

由此可知左手外尔旋量的螺旋为 -1 , 右手的为 $+1$.

现在我们来找出狄拉克旋量表示的表示矩阵. 左右手外尔旋量的 boot 与旋转可分别合成为

$$S^{0i} = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{bmatrix}, \quad S^{ij} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{bmatrix} := -\frac{1}{2} \Sigma^k; \quad (98)$$

容易发现上述合写即 $S^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. 不难验证, $S^{\mu\nu}$ 的确是符合前述洛伦兹群的李代数的. 于是

$$\Lambda_{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right) \quad (99)$$

即洛伦兹变换的以狄拉克旋量为表示基的表示矩阵, 可称为狄拉克旋量表示.

1.4.4 由狄拉克旋量构造洛伦兹协变量, 狄拉克共轭, γ^5

对 γ 矩阵, 我们可以发现如下性质

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] &= \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\rho \gamma^\sigma] = \frac{i}{2}(\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu) \\ &= \frac{i}{2}(\{\gamma^\mu, \gamma^\rho\} \gamma^\sigma - \gamma^\rho \{\gamma^\sigma, \gamma^\mu\}) = i(g^{\mu\rho} \delta^{\sigma\nu} - g^{\sigma\mu} \delta^{\rho\nu}) \gamma^\nu \\ &= (L^{\mu\nu})_{\rho\sigma} \gamma^\nu = (L^\rho{}_\sigma)_{\mu\nu} \gamma^\nu; \end{aligned} \quad (100)$$

¹⁴可知 γ 矩阵有性质 $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$, $\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$; $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ (中含 $(\gamma^\mu)^2 = g^{\mu\mu}$); 当 $\mu \neq \nu$ 时 $[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2\gamma^\mu \gamma^\nu$. 此代数称为 Clifford 代数.

注意圆括号左下脚标只是一种标记, 是不分逆协的; 矩阵的逆协由括号内 L 身上的指标反映. 从而我们可求得 $\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\gamma^\nu$, 或等价的

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu. \quad (101)$$

这在稍后构造洛伦兹矢量时将用到, 兹列此处.

我们知道, 出现在物理规律/公式中的各量, 一定都是对所在空间协变的量. 也就是说, 我们需要用狄拉克旋量来构造洛伦兹协变量. 下面我们就来完成这件事.

在洛伦兹变换下, 狄拉克旋量的变换行为是 $\psi(x) \rightarrow \Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x)$, $\psi^\dagger(x) \rightarrow \psi^\dagger(\Lambda^{-1}x)\Lambda_{\frac{1}{2}}^\dagger$. 于是我们发现, 因为狄拉克表示不是酉的, 即 $\Lambda_{\frac{1}{2}}^\dagger\Lambda_{\frac{1}{2}} \neq 1$ 或 $\Lambda_{\frac{1}{2}}^\dagger \neq \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}$, 从而 $\psi^\dagger\psi$ 并不是洛伦兹标量. 但计算得 $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = (\gamma^\mu)^\dagger$, 从而有 $(S^{\mu\nu})^\dagger = \gamma^0 S^{\mu\nu} \gamma^0$, 于是知 $\Lambda_{\frac{1}{2}}^\dagger = \gamma^0 \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^0$; 如此发现, 若我们定义

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0, \quad (102)$$

称为狄拉克共轭, 则 $\bar{\psi}\psi$ 就是洛伦兹标量. 或者说, 在洛伦兹变换下 $\bar{\psi}$ 的变换行为即 $\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}$. 进一步非常容易证明, $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 是洛伦兹矢量, $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi$ 是洛伦兹张量.

我们定义 $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, 则可知其有 $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$, $(\gamma^5)^2 = 1$, $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$. 前述最后一式意味着 γ^5 在洛伦兹变换下有着标量行为; 据舒尔引理, 这也意味着狄拉克表示是可约的. 在本文至此我们一直采用的表象—称为外尔或手征表象—中, 可以得出 $\gamma^5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; 这说明狄拉克左右分量, 分别是 γ^5 的具有 ± 1 本征值的本征态. 于是我们定义 $P_{R/L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$, 称为手征投影算符; 此算符即可将狄拉克左右分量挑选出来.

1.4.5 物理规律的离散变换性质: CPT 对称性; CP 破坏, 洛伦兹协变量的进一步分类, 狄拉克方程与外尔方程的离散对称性

前文已经说过, 能保持间隔不变的变换, 除了六个连续操作, 尚有时间反演 $T: t \rightarrow t' = -t$ 与宇称变换 $P: \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ 两个操作. 同时, 非时空坐标变换的荷共轭 (即正反粒子变换) $C: q \rightarrow q' = -q$ 也是一个重要的离散变换. 从光速不变事实出发, 狭义相对论以观测者的惯性位置任意被允许性 (即狭义相对性原理; 这进而也就表明狭义相对论是关于物理规律背景时空的一个理论) 得出, 在正当正时的洛伦兹操作下, 物理量必须是协变的, 物理规律方程必须是不变的. 但是, 对于这三个离散变换, 我们并没有一个很好的基本原理, 来要求物理规律对之也是具有对称/不变性的; 物理规律对它们的变换行为, 只能通过具体分析或实验得到. 下面我们就来具体分析, 在量子场论中, 场/方程/洛伦兹协变量在这三个离散变换下的变换行为. 我们主要以狄拉克旋量为例¹⁵.

¹⁵作为回忆, 经典物理学如牛顿力学电动力学等, 都是具有对 CPT 的分别 (当然进而联合) 的对称性的. 例如, 麦氏方程在电荷共轭变换下, 荷反号, 场反号, 方程不变.

P-对称性

在 P 变换下¹⁶, 除了空间坐标外, 动量变号; 角动量作为赝矢量, 不变号. 这此在下面的工作过程中将会被看到. 定义 $P_\pm \psi = \psi_\pm$, 由左右旋量对 boost 变向是交换的可知 $P : \psi_\pm(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi_\mp(-\mathbf{r}, t)$; 所以可得

$$P : \psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi'(-\mathbf{r}, t) \equiv \bar{P}\psi(-\mathbf{r}, t) = \gamma^0\psi(-\mathbf{r}, t); \quad (103)$$

注意此式中出现的两个 ψ 标示值是相等的. 由此即得 $P : \bar{\psi}(\mathbf{r}, t) = \psi^\dagger(\mathbf{r}, t)\gamma^0 \rightarrow \psi^\dagger(-\mathbf{r}, t)\bar{P}\gamma^0 = \bar{\psi}(-\mathbf{r}, t)\gamma^0\bar{P}\gamma^0 = \bar{\psi}(-\mathbf{r}, t)\gamma^0$, 所以可得对洛伦兹标量有 $P : \bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}\psi(-\mathbf{r}, t)$. 对洛伦兹矢量, $P : \bar{\psi}\gamma^0\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \bar{\psi}\gamma^0\psi(-\mathbf{r}, t)$, $\bar{\psi}\gamma^i\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\bar{\psi}\gamma^i\psi(-\mathbf{r}, t)$. 这些行为与连续洛伦兹变换, 都是可类比的. 有意思的地方, 出在 γ^5 的引入上. 可算出:

$$P : \bar{\psi}\gamma^5\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\bar{\psi}\gamma^5\psi(-\mathbf{r}, t), \quad (104)$$

$$P : \bar{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi \rightarrow -\bar{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi(-\mathbf{r}, t), \quad \bar{\psi}\gamma^i\gamma^5\psi \rightarrow +\bar{\psi}\gamma^i\gamma^5\psi(-\mathbf{r}, t); \quad (105)$$

即 $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ 与 $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^0\psi$ 分别为洛伦兹四维赝标量与赝/轴矢量. 另外, 可以算出 $P : \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi(-\mathbf{r}, t)$. 总结起来, 我们有表 1 中的结果.

| 类型 | 构型 | 数目 |
|-----|--------------------------------------|----|
| 标量 | $\bar{\psi}\psi$ | 1 |
| 矢量 | $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ | 4 |
| 张量 | $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi$ | 6 |
| 轴矢量 | $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ | 4 |
| 赝标量 | $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ | 1 |

Table 1: 洛伦兹协变量类型.

$P : (i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m)\psi(\mathbf{r}, t) = 0 \rightarrow \gamma^0 [i\gamma^0\partial_0 - i\gamma^i(-\partial_i) - m] \psi(-\mathbf{r}, t) = 0$. 由此可见, 狄拉克方程在 T -变换下的确是不变的: T 变换过后的体系满足的方程, 相当于变换前具有相反动量的体系的方程. 注意在推导中我们有

$$P : \partial_\mu \rightarrow (-1)^\mu \cdot \partial_\mu, \quad \gamma^\mu \rightarrow \gamma^\mu; \quad (106)$$

也就是说, 在 P 变换之下, ∂_μ 的变换行为与坐标一致, 而 γ^μ 保持不变; 前一行对应于动量反号, 后一行对应于角动量不变号. 现在我们来考虑外尔方程. 以右旋外尔方程为例: $P : i(\sigma^0\partial_0 + \sigma^i\partial_i)\psi_R(\mathbf{r}, t) = 0 \rightarrow i(\sigma^0\partial_0 - \sigma^i\partial_i)\psi_L(-\mathbf{r}, t) = i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L(-\mathbf{r}, t) = 0$. 也就是说, 两个外尔方程在宇称变换下互换; 单一个外尔方程或单一的外尔旋量 (所对应的粒子) 没有宇称对称性.

¹⁶当作宇称变换时, 三维矢量的变换行为是 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) \rightarrow -\mathbf{V}(-\mathbf{r})$; 三维赝矢量, 如轴矢量, 有 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{A}(-\mathbf{r})$.

本段最后, 呈述 \bar{P} 的另一些求法. 首先, 狄拉克方程经受变换后为

$$\begin{aligned} 0 &= (i\gamma'^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(-\mathbf{r}, t) = (i\gamma^0 \partial_0 - i\gamma^i \partial_i - m)\bar{P}\psi(-\mathbf{r}, t) \\ &= \bar{P}^\dagger (i\gamma^0 \partial_0 - i\gamma^i \partial_i - m)\bar{P}\psi(-\mathbf{r}, t); \end{aligned} \quad (107)$$

其中我们应用了 ∂_μ , γ^μ 对 P 的变换行为. 由上式发现, 只要我们取

$$\bar{P}^\dagger \gamma^0 \bar{P} = \gamma^0, \quad \bar{P}^\dagger \gamma^i \bar{P} = -\gamma^i, \quad \bar{P}^\dagger \bar{P} = 1, \quad (108)$$

则狄拉克方程就是 T -对称的了. 上述条件是可以找到的, 即 $\bar{P} = \gamma^0$. 由此亦可知其 $\bar{P}^\dagger = \bar{P}^{-1} = \bar{P}$. 此种方法, 不仅求得了 \bar{P} , 更顺带证明了狄拉克方程的 T -对称性. 其次, 我们也可以考察拉氏密度:

$$\begin{aligned} &\bar{\psi}(\mathbf{r}, t)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \bar{\psi}'(-\mathbf{r}, t)(i\gamma'^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(-\mathbf{r}, t) \\ &= \bar{\psi}(-\mathbf{r}, t)\gamma^0 \bar{P}^\dagger \gamma^0 (i\gamma^0 \partial_0 - i\gamma^i \partial_i - m)\bar{P}\psi(-\mathbf{r}, t) \\ &= \bar{\psi}(-\mathbf{r}, t)(i\gamma^0 \partial_0 - \gamma^0 \bar{P}^\dagger \gamma^0 \gamma^i \bar{P} \partial_i - m\gamma^0 \bar{P}^\dagger \gamma^0 \bar{P})\psi(-\mathbf{r}, t); \end{aligned} \quad (109)$$

由上式读出的拉氏密度不变的条件是

$$\bar{P}^\dagger \gamma^0 \gamma^i \bar{P} = \gamma^i \gamma^0, \quad \bar{P}^\dagger \gamma^0 \bar{P} = \gamma^0, \quad \bar{P}^\dagger \bar{P} = 1; \quad (110)$$

这与前面所发现的是完全等价的.

T -对称性

在 T 变换下, 除了时间坐标外, 动量变号, 角动量变号; 这在下面的工作过程中将会被看到. 首先讲述非相对论量子力学中的情况. 此时, 对于无旋粒子量子态 $\psi(\mathbf{r}, t)$, 其时间反演定义为 $T: \psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi_{-\mathbf{p}}(\mathbf{r}, -t)$. 也就是说, 对无自旋体系有 $\psi_{-\mathbf{p}}(\mathbf{r}, -t) = \psi^*(\mathbf{r}, t)$, 即 $T = K$; K 为取复共轭. 对于半自旋体系, 我们进一步定义其时间反演为 $T: \psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi_{-\mathbf{p}, -\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}, -t)$, 则可求得 $T = -i\sigma^2 K = \sigma^1 \sigma^3 K$. 注意推导中明确了 $T\sigma^i = (\sigma^i)^*$. 不难发现, 对玻色子, 有 $T^2 = +1$; 对费米子 $T^2 = -1$.

若一算符 θ 满足 $\theta(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) = c_1^*\theta\phi_1 + c_2^*\theta\phi_2$, 我们就称之为反线性算符; 若其再满足 $(\theta\phi, \theta\psi) = (\phi, \psi)$, 我们就之为反酉算符. (例如, K 就是反酉的.) 容易证明, 一个反酉算符总可被表为 $\theta = UK$. 由前段推导发现/由能量下界分析确定, 量子力学中, 时间反演算符必须是反酉的. 如此, 便可导出要求体系具有时间反演对称性, 等价于要求 $[T, H] = 0$; 此式还可进一步被表为 $H^* = U^\dagger H U$. 也就是说, 如能找到一个酉变换使前式成立, 则体系具有时间反演对称性. 作为例子, 对无自旋粒子我们已找到 $U = 1$; 半自旋 $T = i\sigma^2$. 当然, 薛定谔方程的时间反演不变性, 也可由对方程直接分析获知. 以无自旋的情

况为例, $T : i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = H\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow i \frac{\partial}{\partial(-t)} \psi^*(\mathbf{r}, t) = H\psi^*(\mathbf{r}, t)$; 变换后的结果即原方程的整体取复共轭. 可见在时间反演变换下, 薛定谔方程的确是 invariant 的.

量子场论中, 在 T -变换下, 狄拉克旋量的反应为

$$T : \psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{r}, -t) \equiv \bar{\bar{T}}\psi(-\mathbf{r}, t). \quad (111)$$

下面我们即要求出 $\bar{\bar{T}}$; 我们以要求狄拉克方程对 T 的不变性来进行:

$$\begin{aligned} 0 &= (i'\gamma'^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(\mathbf{r}, -t) = (i\gamma^0 \partial_0 - i(\gamma^i)^* \partial_i - m)\bar{\bar{T}}\psi(\mathbf{r}, -t) \\ &= \bar{\bar{T}}^\dagger (i\gamma^0 \partial_0 - i(\gamma^i)^* \partial_i - m)\bar{\bar{T}}\psi(\mathbf{r}, -t). \end{aligned} \quad (112)$$

其中, 我们应用了

$$T : \partial_\mu \rightarrow -(-1)^\mu \cdot \partial_\mu, \quad \gamma^\mu = (\gamma^\mu)^*, \quad i \rightarrow -i; \quad (113)$$

此三者分别对应于动量反号, 角动量反号以及时间反演算符的反酉性. 由上述过程发现, 只要我们能取

$$\bar{\bar{T}}^\dagger \gamma^0 \bar{\bar{T}} = \gamma^0, \quad \bar{\bar{T}}^\dagger (\gamma^i)^* \bar{\bar{T}} = -\gamma^i, \quad \bar{\bar{T}}^\dagger \bar{\bar{T}} = 1, \quad (114)$$

则拉氏方程就是 T -对称的. 上述要求是有解的, 为 $\bar{\bar{T}} = \gamma^3 \gamma^1$. 由此亦可知 $\bar{\bar{T}}^\dagger = \bar{\bar{T}}^{-1} = -\bar{\bar{T}}$. 所以我们有:

$$T : \psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \gamma^3 \gamma^1 \psi(\mathbf{r}, -t); \quad (115)$$

于是就知 $T : \bar{\psi}(\mathbf{r}, t) = \bar{\psi}(\mathbf{r}, -t) \gamma^1 \gamma^3$. 至此, 考察洛伦兹协变量在 T 变换下的行为, 就是非常明了的了. 如对标量, 有 $T\bar{\psi}\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow +\bar{\psi}\psi(\mathbf{r}, -t)$; 余者不表.

现在, 我们来考察外尔方程对 T -变换的变换行为. 首先, 外尔旋量的变换行为可由狄拉克旋量的直接读出

$$T : \begin{bmatrix} \psi_L(\mathbf{r}, t) \\ \psi_R(\mathbf{r}, t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma^1 \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \sigma^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_L(\mathbf{r}, -t) \\ \psi_R(\mathbf{r}, -t) \end{bmatrix}; \quad (116)$$

从而 $T : i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R(\mathbf{r}, t) = 0 \rightarrow i'(\sigma^\mu)^* \partial'_\mu \sigma^1 \sigma^3 \psi_R(\mathbf{r}, t) = \sigma^1 \sigma^3 i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R(\mathbf{r}, -t) = 0$; 也就是说外尔方程亦是具有 T -对称性的.

最后展示一下以分析拉氏密度的方式求 $\bar{\bar{T}}$ 的步骤:

$$\begin{aligned} &\bar{\psi}(\mathbf{r}, t)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \bar{\psi}'(\mathbf{r}, -t)(i'\gamma'^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(\mathbf{r}, -t) \\ &= \bar{\psi}(\mathbf{r}, -t)\gamma^0 \bar{\bar{T}}^\dagger \gamma^0 (i\gamma^0 \partial_0 - i(\gamma^i)^* \partial_i - m)\bar{\bar{T}}\psi(\mathbf{r}, -t) \\ &= \bar{\psi}(-\mathbf{r}, t)(i\gamma^0 \partial_0 - \gamma^0 \bar{\bar{T}}^\dagger \gamma^0 \gamma^i \bar{\bar{T}} \partial_i - m\gamma^0 \bar{\bar{T}}^\dagger \gamma^0 \bar{\bar{T}})\psi(-\mathbf{r}, t); \end{aligned} \quad (117)$$

要求变换前后拉氏密度不变, 得出与前述相同的条件.

C-对称性

C-变换是荷变换, 或曰正反粒子变换; 下一章我们将知道, 规范变换的相位即粒子的荷. 所以, 在作为非时空坐标变换的 C 变换下, 将狄拉克旋量的反应取为下述形式是恰当的:

$$C : \psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi_C(\mathbf{r}, t) \equiv \bar{\bar{C}}\psi^*(\mathbf{r}, t) = \bar{\bar{C}}\gamma^0\bar{\psi}^T. \quad (118)$$

于是我们就有 $C : \bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 \rightarrow \psi^T\bar{\bar{C}}^\dagger\gamma^0 = \bar{\psi}^*\gamma^0\bar{\bar{C}}^\dagger\gamma^0$. 我们的工作仍然是要求出 $\bar{\bar{C}}$. 下面来进行之. 引入规范场后的狄拉克方程为 $[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m]\psi = (i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0$; 此方程在 C-变换下有 $T : (i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0 \rightarrow (i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\bar{\bar{C}}\psi^* = 0$; 其中

$$C : q \rightarrow -q, A_\mu \rightarrow A_\mu. \quad (119)$$

注意上述规范场之所以不变号, 是因为本荷共轭是对旋量场施行的; 若是对规范场取荷共轭, 则是有 $C : A_\mu \rightarrow -A_\mu$ 的. 我们对变换后的方程取复共轭, 则有 $(i\gamma^{\mu*}\partial_\mu + q\gamma^{\mu*}A_\mu + m)\bar{\bar{C}}^*\psi = 0$, 要求它回到变换前的形式, 即可读出必须有 $\bar{\bar{C}}^T\gamma^{\mu*}\bar{\bar{C}}^* = -\gamma^\mu$, $\bar{\bar{C}}^T\bar{\bar{C}}^* = 1$, 或

$$\bar{\bar{C}}^\dagger\gamma^\mu\bar{\bar{C}} = -\gamma^{\mu*}, \bar{\bar{C}}^\dagger\bar{\bar{C}} = 1. \quad (120)$$

上述要求是有解的, 即 $\bar{\bar{C}} = -i\gamma^2$. 由此亦可见 $\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{C}}^\dagger = \bar{\bar{C}}^{-1}$. 各洛伦兹协变量的证明至此就是轻而易举的了, 如对标量有 $C : \bar{\psi}\psi \rightarrow \psi^T(-i\gamma^2)\gamma^0(-i\gamma^2)\gamma^0\bar{\psi}^T = -(\bar{\psi}\psi)^T = \bar{\psi}\psi$. 余者不赘.

同样地, 我们也呈示一下用拉氏密度的对称性分析来求得 $\bar{\bar{C}}$ 的过程. $C : \bar{\psi}[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m]\psi \rightarrow \bar{\psi}^*\gamma^0\bar{\bar{C}}^\dagger\gamma^0[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m]\bar{\bar{C}}\psi^*$; 将变换后的结果取复共轭, 就有 $\bar{\psi}\gamma^0\bar{\bar{C}}^T\gamma^0[-i\gamma^{\mu*}(\partial_\mu - iqA_\mu) - m]\bar{\bar{C}}^*\psi$. 要求此结果与变换前的相同, 可读出与前述相同的条件.

最后, 我们来考察外尔方程在 C-变换下的行为. 还是先由狄拉克旋量的变换式读出

$$C : \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_L^* \\ \psi_R^* \end{bmatrix}. \quad (121)$$

以右手外尔旋量为例, $C : i\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R = 0 \rightarrow i\sigma^\mu\partial_\mu i\sigma^2\psi_L^* = 0 \xrightarrow{*} i\sigma^{\mu*}\partial_\mu\sigma^2\psi_L = i\sigma^2\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L = 0$. 由此可见, 外尔方程不具有 C-对称性. 但显然, 结合前文可知, 外尔方程是具有 CP-对称性的.

最后, 我们列出各洛伦兹协变量在所有离散变换下的反应行为, 见表 2. 我们已经看到, 对单一的某个离散变换, 的确不是所有物理规律都是保持不变的. 事实上, 我们也完全可以容易地构造出不具有单一离散对称性的拉氏量. 外尔方程

不具有 C/P 单一变换的对称性, 而具有 $CP/T/CPT$ 的对称性, 是因为其拉氏量中所含的 γ^5 的变换特性. 由下表, 我们可以大胆推断, 对于 CPT 联合变换, 所有物理规律都是不变的.

| | i | ∂_μ | γ^μ | $\bar{\psi}\psi$ | $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ | $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi$ | $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ | $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ | $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ |
|-------|-----|----------------|------------------|------------------|----------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|--------------------------|--|
| P | 1 | 1, -1 | 1 | 1 | 1, -1 | 1 | -1, 1 | -1 | 1 |
| T | -1 | -1, 1 | $(\gamma^\mu)^*$ | 1 | 1, -1 | -1 | 1, -1 | -1 | 1 |
| C | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 |
| CPT | -1 | -1 | $(\gamma^\mu)^*$ | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 |

Table 2: 洛伦兹协变量的离散变换行为.

上面是具体的理论分析; 最后, 我们再来谈一下实验验证的情况. 实验指出, 引力, 电磁力与强力三者, 对这三个离散变换中的每一个都是方程不变的; 弱作用对于 C 与 P 中单独的一个是破坏的, 但对 CP (从而即 T) 联合作用是不变的. 我们称此为 CP 对称性. 这些, 与我们前述的分析都是相同的. 但, 精确实验发现, 弱作用其实亦有稍微的 CP 破坏的迹象. 这, 由卡比博-小林-益川矩阵得以说明.

然而, 与上述分析相应地, 观测亦表明, 对于 CPT 的联合作用, 物理规范方程一定是不变的. 事实上, 此事实可以推导自数学上的 Wightman 公理. 若以后者为基本原理, 我们可严格导出: 任何带有厄米哈密顿量的洛伦兹不变的定域量子场论, 必具有 CPT 对称性.

2 分析力学：场的力学量的获得

2.1 欧拉-拉格朗日方程

我们设场 ϕ 的拉氏密度仅与场及其一次导数项有关 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. 总拉氏量与拉氏密度的关系为 $L = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$; 场的作用量为 $S = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. 根据最小作用量原理:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta(\partial_\mu \phi) \right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \cdot \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi \right) \right], \end{aligned} \quad (122)$$

可得场的运动方程即¹⁷

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = 0; \quad (124)$$

称为欧拉-拉格朗日方程. 同时我们知道

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}, \quad \mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}, \quad H = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H}; \quad (125)$$

$$\dot{\pi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi}, \quad \dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi}. \quad (126)$$

显然 \mathcal{L} 以 $\phi, \partial_\mu \phi$ 为独立变量; \mathcal{H} 以 ϕ, π 为独立变量.

2.2 诺特定理：对称性与守恒律

参照系变换, 即数学上的坐标变换¹⁸; 一般地 (即对任意度规成立地), 此即 $x_\nu \rightarrow x'_\mu = x'_\mu(x_\nu)$. 狭义相对论说的即是, 在狭义相对论这一框架下, 能允许的最一般的坐标变换, 应退化到/满足式 $x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu + \xi_\mu$. 此处, 我们将考察在时空平移或旋转的操作下, 最小作用量原理能给出什么.

显然, 此种情况下, 作用量变分变为

$$\delta S = \int \delta(d^4x) \mathcal{L} + \int d^4x \delta_{xx'}(\mathcal{L}); \quad (127)$$

显然, 我们要分别求出 $\delta(d^4x)$ 与 $\delta_{xx'}(\mathcal{L})$. 首先, 我们来求 $\delta(d^4x)$. 为之, 我们将时空平移或旋转操作的无穷小表为 $x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu$. 作为例子, 如对于旋转, 前式中即有 $\delta x_\mu = \omega_\mu{}^\nu x_\nu$. 然后, $dx'^\mu = d(x^\mu + \delta x^\mu) = (\delta^{\mu\nu} + \partial_\nu \delta x^\mu) dx^\nu =$

¹⁷作为对比, 三维情况的 E-L 方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (123)$$

¹⁸这一点是很重要的; 尤其是对于广义相对论: 正是据此, 我们得出引力即时空弯曲.

$dx^\mu + \partial_\nu \delta x^\mu dx^\nu$. 我们知道 $d^4x' = J(x'/x)d^4x$, 由前述推导知 $J = \det(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}) = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu$, 故知

$$\delta(d^4x) = (\partial_\mu \delta x^\mu) d^4x. \quad (128)$$

下面, 我们计算作用量变分中的第二项: $\delta_{xx'} \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}(x') + \mathcal{L}(x') - \mathcal{L}(x) = \delta \mathcal{L}(x') + \partial_\mu \mathcal{L}(x) \delta x^\mu = \delta \mathcal{L}(x) + \partial_\mu \mathcal{L}(x) \delta x^\mu$. 同理可得 $\delta_{xx'} \phi(x) = \delta \phi(x) + \partial_\mu \phi(x) \delta x^\mu$. 于是

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \delta(d^4x) \mathcal{L} + \int d^4x \delta_{xx'}(\mathcal{L}) \\ &= \int d^4x \partial_\mu (\delta x^\mu) \mathcal{L} + \int d^4x \delta \mathcal{L} + \int d^4x \partial_\mu \mathcal{L}(x) \cdot \delta x^\mu \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \cdot \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi \right) + \partial_\mu (\delta x^\mu) \mathcal{L} + \partial_\mu \mathcal{L} \cdot \delta x^\mu \right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \cdot \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi + \mathcal{L}(x) \delta x^\mu \right) \right]; \end{aligned} \quad (129)$$

最小作用量原理要求上述结果为零; 于是上述结果中前两项即给出欧拉-拉格朗日方程, 后面圆括号项给出 $\partial_\mu j^\mu \equiv \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi + \mathcal{L}(x) \delta x^\mu \right) = 0$. 也就是说, 相应于每一个能保持体系作用量不变的连续时空操作 δx^μ , 都有一个

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi + \mathcal{L}(x) \delta x^\mu \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta_{xx'} \phi - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi(x) - \mathcal{L}(x) g^\mu{}_\nu \right) \delta x^\nu \end{aligned} \quad (130)$$

为守恒流密度. 这, 称作诺特定理. 当然, 守恒荷密度即四维守恒流矢量的零分量 j^0 .

2.2.1 能动张量, 时空平移对称性与能动张量守恒

我们若作命令

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial^\nu \phi(x) - \mathcal{L}(x) g^{\mu\nu}, \quad (131)$$

—由此可知 $j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta_{xx'} \phi - \mathcal{T}^{\mu\nu} \delta x_\nu$, —则可发现, $\mathcal{T}^{00} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \mathcal{H}$; 此即场在某点附近的能量密度. 也就是说,

$$\mathcal{P}^\nu = \mathcal{T}^{0\nu} = \pi \partial^\nu \phi - \mathcal{L} g^{0\nu} \quad (132)$$

即场的四维动量密度. 当然 $\mathcal{P}^i = \mathcal{T}^{0i} = \pi \partial^i \phi = -\pi \partial_i \phi$ 即场的三维动量密度. 因此, 我们称前述所命的 $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ 为能动张量.

若发生的能保持体系作用量不变的操作为时空的平移, 即 $\delta x^\mu = \epsilon^\mu$, 则可知, 对任意场, 即无论是标量场矢量场还是旋量场, 都有 $\delta_{xx'} \phi = 0$; 于是有代入诺特守恒流就有 $j^\mu = -\mathcal{T}^{\mu\nu} \epsilon_\nu$, $-\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0$. 也就是说, 时空平移对称性导致能动张量守恒.

2.2.2 空间旋转对称性与角动量守恒, 自旋的出现

若发生的能保持体系作用量不变的操作为空间的旋转, 则 $\delta x^\mu = \delta x^i = \omega^i_j x^j = \varepsilon_{ijk} \theta^k x^j$; 前式中已设体系的转动是逆着 k 轴看来顺时针进行的. 对于标量场, 在旋转下亦有 $\delta_{xx'} \phi = 0$, 故我们可拿出其对应于空间旋转对称性的守恒量如下

$$\begin{aligned} j^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi} \delta_{xx'} \phi - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi} \partial_i \phi(x) - \mathcal{L}(x) g^0_i \right) \delta x^\nu \\ &= \mathcal{P}^i \varepsilon_{ijk} \theta^k x^j \end{aligned} \quad (133)$$

$$= -\mathcal{M}^k \theta^k. \quad (134)$$

显然, $\mathcal{M}^k = x^i \mathcal{P}^j \varepsilon_{ijk}$ 即场的轨道角动量密度. 对于矢量场, 这时我们有 $\delta_{xx'} A^i = \varepsilon_{ijk} \theta^k A^j$. 于是对应的守恒量就是

$$\begin{aligned} j^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 A^i} \delta_{xx'} A^i - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 A^i} \partial_i A^i - \mathcal{L} g^0_i \right) \delta x^\nu \\ &= \pi^i \varepsilon_{ijk} \theta^k A^j + \mathcal{P}^i \varepsilon_{ijk} \theta^k x^j \\ &= -(S^k + \mathcal{M}^k) \theta^k. \end{aligned} \quad (135)$$

上述结果中, 后一项是轨道角动量密度, 前一项 $S^k \equiv \varepsilon_{ijk} A^i \pi^j$ 称为自旋角动量密度. 由此看到, 对照于轨道角动量的产生原因是体系的转动, 自旋角动量的产生原因, 是因体系转动而导致的描述体系的场的变化. —当然, 与此同时, 标量场没有自旋角动量, 也就是可以理解的了.

下面我们研究旋量场. 当作空间旋转时, 对旋量场我们有 $\delta_{xx'} \psi = \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \psi = \frac{i}{2} \omega_{ij} S^{ij} \psi = \frac{i}{2} \Sigma^k \theta^k \psi$, 故可得

$$\begin{aligned} j^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \psi} \delta_{xx'} \psi - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \psi} \partial_i \psi(x) - \mathcal{L}(x) g^0_i \right) \delta x^\nu \\ &= \pi \frac{i}{2} \Sigma^k \theta^k \psi + \mathcal{P}^i \varepsilon_{ijk} \theta^k x^j \\ &= -(S^k + \mathcal{M}^k) \theta^k. \end{aligned} \quad (136)$$

由此可见, 旋量场有角动量密度 $S^k = \pi \frac{i}{2} \Sigma^k \psi$. 先前由群分析我们知道旋量场自旋为 $1/2$, 在此亦可见一致.

2.3 规范不变性原理

2.3.1 荷场的整体规范变换 (相位平移) 对称性及其守恒荷

对复数场, 我们来考虑它的相位变换:

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{iq\gamma} \phi; \quad (137)$$

此即规范变换之所谓. 如果相位 γ 是常数, 上式就称为整体或第一类规范变换; 若是时空坐标的实函数, 就称为定域或第二类规范变换.

首先, 我们来考察场在定域规范对称性下, 将发生什么. 此时, $\delta\phi = iq\gamma\phi$, $\delta\phi^\dagger = -iq\gamma\phi^\dagger$. 将之代入一般的诺特流式, 就得到

$$j^\mu = iq\gamma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \phi - \phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^\dagger} \right) := -j_{(q)}^\mu \gamma; \quad (138)$$

推导上式时要注意复场情况下 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi; \phi^\dagger, \partial_\mu \phi^\dagger)$. 上式中,

$$j_{(q)}^\mu = \frac{q}{i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \phi - \phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^\dagger} \right); \quad (139)$$

即复场的对应于整体规范对称性的守恒流密度; 其中 q 即对应守恒荷. 由本节稍后的内容我们将确认/由以后的具体的场量子化将进一步确认, 此荷, 就是电荷, 弱同位旋, 或色荷等.

当然, 因为简单性, 我们也可以通过直接对哈氏密度变分来求得守恒流:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \delta \phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta(\partial_\mu \phi) + \delta(\partial_\mu \phi^\dagger) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^\dagger} \\ &= iq\gamma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \phi - \phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu \phi - \partial_\mu \phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^\dagger} \right) \\ &= iq\gamma \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \phi - \phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^\dagger} \right) = -\partial_\mu j_{(q)}^\mu \cdot \gamma; \end{aligned} \quad (140)$$

其中用到了 E-L 方程 $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$, 并注意 $\delta(\partial_\mu \phi) = iq\gamma \partial_\mu \phi$, $\delta(\partial_\mu \phi^\dagger) = -iq\gamma \partial_\mu \phi^\dagger$. 从上式读出的结果守恒流, 与我们通过一般的诺特流式来做是一模一样的.

具体地, 下面举两个例子. 对复标量场, $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$, 于是可知其守恒流为 $j_{(q)}^\mu = iq(\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^\dagger)$. 对于狄拉克场, $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$, 其守恒流即为 $j_{(q)}^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$.

2.3.2 定域规范变换对称性, 协变导数 D_μ , 荷场与规范场的耦合/相互作用的引入

定域情况下, $\gamma = \gamma(x)$, 于是我们有 $\delta(\partial_\mu \phi) = iq\partial_\mu(\gamma\phi) = iq\gamma\partial_\mu\phi + iq\phi\partial_\mu\gamma$; 此时继续对 \mathcal{L} 进变分, 我们就可以得到

$$\delta \mathcal{L} = -\partial_\mu \left(\gamma j_{(q)}^\mu \right). \quad (141)$$

而此变分, 显然是不能再被要求为零的了; 即 $\gamma j_{(q)}^\mu$ 并不能被看作是系统对应于定域规范变换不变性的守恒流.

不难发现, 之所以不能得到类似整体规范时的结论, 是因为定域情况下 $(\partial_\mu \phi)' = \partial_\mu \phi' = \partial_\mu(e^{iq\gamma}\phi) = e^{iq\gamma}(\partial_\mu + iq\partial_\mu\gamma)\phi$, 即 ∂'_μ 无法自由地穿过 $e^{iq\gamma}$ 进而变成 ∂_μ . 病因既明, 医方即出. 我们改造偏微分算符—事实上即是引入与原

荷场耦合的某种新场, 称为规范场, 以使当新偏微分算符作到撇的变化时, 这被引入的新场也作具有某种相应行为的到撇的变化, 而这后者正好抵掉 $iq\gamma$ 这一项. 我们将发现, 这不仅是可以做到的, 而且是具有物理意义的. 我们命

$$D_\mu := \partial_\mu + iqA_\mu, \quad (142)$$

称为协变导数; 并要求当其作 $D_\mu \rightarrow D'_\mu = \partial_\mu + iqA'_\mu$ 时, 被引入的矢量规范场 A_μ 的变化行为是 $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\gamma$; 如此, 便有

$$(D_\mu\phi)' = D'_\mu\phi' = e^{iq\gamma}D_\mu\phi \quad (143)$$

了. 也就是说, 此时我们就可以得出 $\delta(D_\mu\phi) = iq\gamma D_\mu\phi$ 了. 由此, 通过一番运算, 我们即可拿出耦合场的对应于定域规范不变的守恒流. 不过, 在此我们先暂停一下, 来讲述一下由定域规范不变性而引入的规范场的相关知识.

规范场, 4 种基本相互作用, 规范场的质量与自发对称破缺, 希格斯机制, 杨-Mills 规范场; QED, QCD, GWS 模型

由其变换冗余可看出, 通过要求荷场具有定域规范不变性, 我们得到的与之耦合的场, 正是电磁场. 事实上, 不仅电磁场与带电荷场的耦合—自然界中的四种基本相互作用之一, 称为电磁相互作用—具有定域规范不变性, 自然界中的另外两种基本相互作用, 即强相互作用中胶子与夸克的耦合, 以及弱相互作用中 W^\pm , Z^0 玻色子与轻子的耦合等, 也是如此. 另外, 万有引力, 作为自然界中的又一种基本相互作用 (强, 弱, 电磁, 万有引力: 自然界的基本相互作用, 目前我们只发现有这 4 种), 亦与规范变换之间具有深刻联系.

于是, 反过来, 我们一般把定域规范不变性当做一条基本原理, 并用它来引入带荷场与规范场之间的相互作用. 这在具体的方法上, 只要把一般偏微分算符 ∂_μ 代换为协变导数 D_μ 就可以了. 如同描述物质运动的最小作用量原理, 介定物理规范时空背景框架的相对性原理一样, 规范不变性原理, 亦是物质世界中最重要最深刻的基本原理之一.

这里我们再对规范场的质量问题作一说明. 我们知道, 作为与电荷场耦合的电磁场, 是无静质量的. 事实上, 以后我们将看到, 有质量的场将不具有规范冗余, 即不能参与上述规范变换, 或曰不能作为中间玻色场出现. 而实验表明, 作为弱作用中间玻色子的 W^\pm , Z^0 粒子却就是具有质量的, 而且还十分地重. 调和这两件事, 将导致自发对称破缺与希格斯机制的出场.

进一步, 变换 (137) 是一维复空间何持矢量长度不变的变换, 记为 $U(1)$, 是故以此被引入的电磁场就被称为 $U(1)$ 规范场. $U(1)$ 群元是对易的, 故 $U(1)$ 规范场又称为阿贝尔规范场. 以后我们将明白, 描述弱与强相互作用的分别是 $U(2)$ 与 $U(3)$ 群, 其生成元不对易; 故由此引入的场称为非阿贝尔规范场, 或更常见地, 杨-Mills 规范场.

具体地, 描述电磁相互作用的理论, 我们称为 QED: 量子电动力学. 分别地, 自旋为零的带电粒子—即复标量场—与电磁场的相互作用, 称为标量电动力学; 按

照代换原则, 其拉氏密度即:

$$\mathcal{L} = D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (144)$$

描述半自旋的带电粒子—即狄拉克旋量场—与电磁场的相互作用的理论, 称为旋量电动力学; 其拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (145)$$

另外, 描述强相互作用理论, 称为 QCD: 量子色动力学; 统一描述电磁与弱作用的理论, 称为 GWS (格拉肖-温伯格-萨拉姆) 模型; 这些, 我们都在将以后逐一研究.

协变导数 D_μ 的运算性质

下面我们继续研究协变导数 D_μ 的一些重要性质. 首先, 为了使 $D_\mu(\phi\varphi^\dagger)$ 这样的式子获得有意义的运算, 我们需要将协变导数的前述定义调整为

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu + iqA_\mu)\psi, \quad D_\mu \psi^\dagger = (\partial_\mu - iqA_\mu)\psi^\dagger. \quad (146)$$

此时, 我们就可获得 $D_\mu(\phi\varphi^\dagger) = \phi D_\mu \varphi^\dagger + D_\mu \phi \cdot \varphi^\dagger = \partial_\mu(\phi\varphi^\dagger)$. 其次, 引入耦合项后的拉氏密度, 即将偏微分改为协变导数后的拉氏密度为 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, D_\mu \phi; \phi^\dagger, D_\mu \phi^\dagger)$; 这时候, 我们可以通过

$$D_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_\mu \phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (147)$$

来求得荷场的运动方程. 只不过, 此时求出的方程已是含激发源的非齐次方程, 而非自由场方程. 当然, 将协变导数分写开来, 方程 $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$ 仍是适用的; 求出的方程, 也是含激发源的非齐次方程.

有了以上知识, 我们就可以写出引入耦合后的拉氏量的变分如下

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= iq\gamma(x) D_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_\mu \phi} \phi - \phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_\mu \phi^\dagger} \right) = iq\gamma(x) \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_\mu \phi} \phi - \phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_\mu \phi^\dagger} \right) \\ &= iq\gamma(x) \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \phi - \phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^\dagger} \right) := -\partial_\mu J_{(q)}^\mu \cdot \gamma(x); \end{aligned} \quad (148)$$

其中 $J_{(q)}^\mu$ 为荷场对应于定域规范不变性的守恒流, 称为协变守恒流.

最后, 我们主要以复标量场为例, 对上述一般手续作一次具体展示, 并由此进一步确信引入耦合的代换原则的合理性.

在上述自由复标量场拉氏密度中作代换, 则引入耦合项的拉氏密度即 $\mathcal{L} = D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi = \mathcal{L}_{free} + iqA^\mu \phi \partial_\mu \phi^\dagger - iqA_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + q^2 A^2 \phi^\dagger \phi = \mathcal{L}_{free} - A_\mu j_{(q)}^\mu + q^2 A^2 \phi^\dagger \phi$. 场的运动方程就是 $(D_\mu D^\mu + m^2)\phi = 0 \rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = q^2 A^2 \phi - 2iqA^\mu \partial_\mu \phi - iq\phi \partial^\mu A_\mu$. 而将电磁场的拉氏量与其与复标量场的耦合项合写起来, 对电磁场运用拉氏方程, 我们就可得到 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J_{(q)}^\nu$.

我们重点考察守恒流. 复场的对应于定域规范不变性的协变守恒流是

$$\begin{aligned} J_{(q)}^\mu &= \frac{q}{i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_\mu \phi} \phi - \phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_\mu \phi^\dagger} \right) = iq(\phi^\dagger D^\mu \phi - \phi D^\mu \phi^\dagger) \\ &= j_{(q)}^\mu - 2q^2 A^\mu \phi^\dagger \phi. \end{aligned} \quad (149)$$

当然, 上述的是 $j_{(q)}^\mu$ 只是形式与自由场时的守恒流相同; 其中的 ϕ 满足的具体运动方程是不同的: 一个是自由场的齐次方程, 另一是含激发源的非齐次方程. 以对 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi; \phi^\dagger, \partial_\mu \phi^\dagger; A_\mu)$ 进行直接变分的方法, 也可以求出协变守恒流:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \delta \phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta(\partial_\mu \phi) + \delta(\partial_\mu \phi^\dagger) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^\dagger} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu \\ &= -\gamma(x) \partial_\mu \left(j_{(q)}^\mu - 2q^2 A^\mu \phi^\dagger \phi \right). \end{aligned} \quad (150)$$

注意上述推导中我们亦用到了 EL 方程 $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$; 但此时的拉氏密度已是引入耦合项后的拉氏密度, 而非推出式 (140) 过程中所采用的自由场拉氏密度. 或曰场 ϕ 满足的具体运动方程与先前采用的是不同的. 对于狄拉克场, 不难发现其协变守恒流 $J_{(q)}^\mu = q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$; 当然其亦仅在形式上与自由场时之守恒流是相同的.

上述一系列计算, 用协变导数做以及用偏微分对全拉氏量去做, 的确是等价的. 由此我们确信, 用由偏微分到协变导数的代换来引入相互作用, 的确是自洽而简洁的. 而它的最终合理性, 也将由实验得到完全证明.

3 实标量场：零自旋有质量无荷, π^0 介子

3.1 标量场的方程：Klein-Gordon 方程；解中负能项的出现，产生湮灭算符诠释，场位形 (configuration)

在狭义相对论中我们已知，相对论粒子的能动关系为 $p^2 - m^2 = 0$ ；由量子力学，我们已知从经典到量子的一般代换原则为 $p^\mu = i\partial^\mu$, $p_\mu = i\partial_\mu$ ；据此，我们可得方程

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0; \quad (151)$$

称为 Klein-Gordon 方程。此方程，是无论是洛伦兹标量，矢量还是旋量场，都必然满足的；具体地，矢量与标量还满足更强要求的式子；只满足上式而无更强关系的——也就是本章将研究的场，则只是自旋为 0 的标量场。第二点，场方程中含有质量项，这表示对应粒子有质量。最后，本章的大部分篇幅中，我们将取本场为实，即 $\phi^\dagger = \phi$ 。由前文分析力学一章我们已知，这意味着本场描述的粒子无荷。总之，本场描述的粒子为零自旋，有质量，无荷；这对应的自然界中的粒子，是 π^0 介子。

下面我们具体研究场方程的解。由方程的形式可看出，它有两部分解，分别是 $\propto e^{-ip^\mu x_\mu}$ 的——称为正能解，与 $\propto e^{ip^\mu x_\mu}$ 的——称为负能解。由前二平面波叠加成的 K-G 方程的一般实解为

$$\begin{aligned} \phi(x) = & \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx}) \\ & \left(: = \phi^+(x) + \phi^-(x) := \int d^3\mathbf{p} [\varphi_{\mathbf{p}}(x) a_{\mathbf{p}} + \varphi_{\mathbf{p}}^*(x) a_{\mathbf{p}}^\dagger] \right); \end{aligned} \quad (152)$$

其中因子 $\frac{1}{(2\pi)^3}$ 是因归一化而出现的，我们早已知晓；而 $\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}$ 是因相对论不变性而出现的，证明如下：数学上我们知¹⁹ $\int dx \delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|}$ ，因此 $\int dp^0 \delta(p^2 - m^2) \theta(p_0) = \frac{1}{|2p^0|_{p^0=+E_{\mathbf{p}}}} = \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}$ ，故有相对论不变的

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(p^2 - m^2) \theta(p_0) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}. \quad (153)$$

注意，上述式子左边的 δ 函数，把四维动量积分 $\int d^4p$ 约束为满足相对论色散关系的积分（正因此才能得到右边的结果），这区别于以后将遇到的如费曼传播子或四维动量空间中的狄拉克 δ 函数等中的对四维动量的积分（已被解析延拓到整个复平面）并不要求色散关系。——稍后将见，我们 $a_{\mathbf{p}}$ 并不是洛伦兹协变的， $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}$ 才是，且是洛伦兹标量；于是我们确信上述给出的一般解是洛伦兹标量。

从负能解的出现，我们就可发现，继续把 $\phi(x)$ 诠释为描述单粒子概率幅的波函数，或即继续把 K-G 方程诠释为单粒子的概率波幅方程，已是不可能的了：否

¹⁹参考 $\int dx \delta(cx) = \frac{1}{|c|}$, $\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$; 如 $\delta(x^2 - c^2) = \frac{1}{2|c|} [\delta(x-c) + \delta(x+c)]$.

则会产生负能量的困难. 事实上, 稍后我们即将确知, 这里的 $a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{p}}$ 应被诠释为具有确定动量的粒子的产生湮灭算符²⁰ (从而 $\phi(x)$ 就是具有确定空间位置的粒子的产生湮灭算符; K-G 方程就是算符的运算方程). 具体地, 本方程/函数场的正能部分, 对应于粒子的湮灭; 负能部分, 对应于粒子的产生. 据此, 以免混淆, 我们一般又将正负能项分别称为正负频项. —单粒子概率波诠释下遇到的负能困难, 至此得以完满解决.

在算符诠释之前, 在洛伦兹群表示论中, 我们把 $\phi(x)$ 直接称为场; 由电磁场 (天生完成了一次量子化) 势满足的麦克斯韦方程可看出, $\phi(x)$ 具有场势的地位. 算符化 (因此包括以前分析力学中所拿出的场的各种力学量, 也就成了相应的力学量算符) 以后, $\phi(x)$ 可称之为场算符. 显然, 它的作用对象便是粒子数基, 或具有某种粒子数分布的量子态:

$$|\phi\rangle := |n_1, \dots, n_i\rangle; \quad (154)$$

一般地, 我们称其为场的一种特定的位形 (configuration). 我们稍后就将发现, 场位形的随时演化仍是满足方程 $i\frac{\partial}{\partial t}|\phi\rangle_{S/I} = H_{\text{total}/I}|\phi\rangle_{S/I}$ 的, 这正是相互作用场论的根本基础之一.

最后, 不难看出, 我们有

$$\int d^3\mathbf{x} \varphi_{\mathbf{p}}(x) i\overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi_{\mathbf{p}'}(x) = 0, \quad (155)$$

$$\int d^3\mathbf{x} \varphi_{\mathbf{p}}^*(x) i\overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi_{\mathbf{p}'}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'); \quad (156)$$

其中 $A\overleftrightarrow{\partial}_\mu B := A\partial_\mu B - \partial_\mu A \cdot B$. 恰当运用上两式, 可使计算过程变得大为明了与简洁. 由上式亦可看出

$$a_{\mathbf{p}} = (2\pi)^3 \int d^3\mathbf{x} \varphi_{\mathbf{p}}^*(x) i\overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x), \quad (157)$$

$$a_{\mathbf{p}}^\dagger = -(2\pi)^3 \int d^3\mathbf{x} \varphi_{\mathbf{p}}(x) i\overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x). \quad (158)$$

3.2 正则量子化: 动量空间对易关系的赋予与粒子解的获得; 场位形的运动方程

在上一小节的基础上, 我们现在用分析力学的方法来找出其各力学量 (算符). 首先, 能导致本场方程的拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2); \quad (159)$$

显然上式为洛伦兹标量, —这是所有场的拉氏密度都应满足的. 于是, 可计算出场的共轭动量为

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx}); \quad (160)$$

²⁰我们曾将第 i 个谐振子的 x, p 合成 a, a^\dagger , 从而以产生湮灭算符的手段得到了谐振子能级.

注意场的共轭动量并非洛伦兹协变量. 接下来, 因为意义的鲜明性, 我们在动量空间中对本场赋予以下对易关系:

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (161)$$

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = 0; \quad (162)$$

至于为什么赋予此对易关系而不是反对易关系, 将由稍后力学量推导过程可以看出, 更由后文的因果律得以根本说明. 有了上述准备, 就可求得本场所描述的粒子的力学量了, 如能量为²¹

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\mathbf{x} (\pi\dot{\phi} - \mathcal{L}) = \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} [\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2] \\ &= \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} (\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + m^2\phi^2) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} (p_\mu p_\mu a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger + p_\mu p_\mu a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + m^2 a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger + m^2 a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} (p_\mu p_\mu + m^2) (a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{E_{\mathbf{p}}}{2} (a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{E_{\mathbf{p}}}{2} [2a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3 \delta^3(0)]; \end{aligned} \quad (163)$$

其中用到了归一化²²

$$\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{\pm i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}}. \quad (165)$$

至此确认, 我们用产生湮灭算符来诠释函数场, 的确得到了一个可以接受的理论. 另外, 从相对论中我们早已知道, 作为四维动量的零分量的能量当然并不是洛伦兹协变量, 这与上述哈氏密度中出现了 $p_\mu p_\mu$ 这样组合的量值是一致的. 相似地, 我们亦可求得场/粒子的总动量如下

$$\begin{aligned} P &= \int d^3\mathbf{x} \mathcal{P} = \int d^3\mathbf{x} (-\pi\nabla\phi) = \int d^3\mathbf{x} (-\dot{\phi}\nabla\phi) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{p}}{2} [2a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + (2\pi)^3 \delta^3(0)]. \end{aligned} \quad (166)$$

下面, 我们介绍一下计算动量空间中力学量表达式的另一种方法. 事实上, 此方法核心理念就是充分利用关系式 (155) 与 (156). 舍弃全散度项, 以及应用

²¹一个小技巧: 为了运算简洁, 我们可以在推导过程中作简记 $K = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}$.

²²作为对比, 回忆在三维情况, 我们有

$$\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3\mathbf{r} e^{i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r} / \hbar}. \quad (164)$$

-我们稍后还将见到 $\delta^4(p - p')$ 的表达.

场满足的 K-G 方程, 我们就可得

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} [(\partial_0\phi)^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2] \\
&= \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} [(\partial_0\phi)^2 + \nabla \cdot (\phi\nabla\phi) - \phi\nabla^2\phi - \phi\partial^2\phi] \\
&= \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} [(\partial_0\phi)^2 - \phi\partial_0^2\phi] \\
&= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} i\phi i\overleftrightarrow{\partial}_0\partial_0\phi;
\end{aligned} \tag{167}$$

由此, 结合关系式 (155) 与 (156), 我们可立马读出积分结果. 另外, 对动量, 我们也可计算出

$$\begin{aligned}
P^i &= \int d^3\mathbf{x} \partial_0\phi\partial^i\phi = \int d^3\mathbf{x} [\partial_0(\phi\partial^i\phi) - \phi\partial_0\partial^i\phi] \\
&= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} [\partial_0\phi\partial^i\phi - \phi\partial_0\partial^i\phi] \\
&= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} i\phi i\overleftrightarrow{\partial}_0\partial^i\phi;
\end{aligned} \tag{168}$$

由此读出积分结果亦是显然的. 由上式述过程可知我们可合写出四维能动矢量, 进一步读出其积分结果为

$$\begin{aligned}
P^\mu &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} i\phi i\overleftrightarrow{\partial}_0\partial^\mu\phi \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{p^\mu}{2} (a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}).
\end{aligned} \tag{169}$$

由前文过程我们可以看到, 在此自由理论中, 算符含时, 场位形不含时; 即我们是工作在海森堡绘景中的. 我们可以算出 $i\frac{\partial}{\partial t}\phi(x) = i\pi(x) = [\phi(x), H]$, $i\frac{\partial}{\partial t}\pi(x) = i(\nabla^2 - m^2)\phi(x) = [\pi(x), H]$, 从而得 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = (\nabla^2 - m^2)\phi$, 即 K-G 方程. 也就是说, 在量子场论中, 我们仍有海森堡方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{O} = [\mathcal{O}, H] \tag{170}$$

是成立的. 从而也就意味着, 我们仍可将场写为 $\phi(x) = e^{iHt}\phi(\mathbf{x})e^{-iHt}$ 这样的形式. 进一步, $U(t, 0) := e^{-iHt}$ 就可以看成是本场位形的传时间演化算符. 对于以后将研究的有相互作用的情况, 就有 $\phi_I(x) := e^{iH_0t}\phi(\mathbf{x})e^{-iH_0t}$, 以及 $\phi_H = e^{iHt}e^{-iH_0t}\phi_Ie^{iH_0t}e^{-iHt}$. 前述最后一式中即有 $U_I(t, 0) := e^{iH_0t}e^{-iHt}$; 于是 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_I = H_I'U_I$. 这些结论, 与量子力学中都是完全一致的. 言而总之, 上述情况皆为表明, 转换到薛定谔或相互作用绘景中, 我们就有

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\phi\rangle_{S/I} = H_{\text{total}/I}|\phi\rangle_{S/I} \tag{171}$$

是场位形的运动方程. 正如前文已经说过, 以后即交见到的, 上式是相互作用场论的重要基础.

3.3 发散基态能, 卡西米尔效应

可以看出, 以能量为例, 在基态时, 对每个动量模我们仍然存在 $\frac{1}{2}E_p$ 的能量. 显然对分布于全空间/动量空间的场来说, 总基态值将是发散的. 因为一般来说, 我们关心的是能量在真空上的起伏, 故我们把此发散值直接略去是不成问题的. 简单地通过算符正规化 $N(a_p a_p^\dagger + a_p^\dagger a_p) = 2a_p^\dagger a_p$ 即可实现这一点.

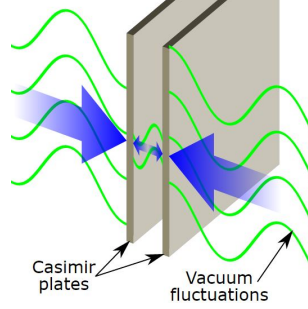


Figure 2: 卡西米尔效应.

但是, 基态能的出现, 意味着我们所谓的真空也许并非真是那么空空如也的. 两块金属板之间有吸引力, 称为卡西米尔效应; 此效应, 就可以用电磁场的真空能来说明. 假设两块平行金属板距离为 d , 且平行于 $x-y$ 平面; 它们面积相等, 为 A . 于是我们可得 d 间隔内, 对电磁场, 单位面积上的基态能量为

$$\frac{\langle E \rangle}{A} = 2 \int \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hbar}{2} \omega_n = 2 \int \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hbar}{2} c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2}; \quad (172)$$

其中对 z 方向我们采用量子力学计算结果, 对 x, y 方向我们采用了周期边界条件, 即 $k = \frac{2\pi}{L}$. 上述积分值是发散的; 我们采用 zeta 正规化, 并转移到极坐标之中, 就有

$$\begin{aligned} \frac{\langle E(s) \rangle}{A} &= \hbar \int \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n |\omega_n|^{-s} \\ &= \frac{\hbar c^{1-s}}{4\pi^2} \sum_n \int_0^\infty 2\pi q dq \left| q^2 + \frac{n^2 \pi^2}{d^2} \right|^{(1-s)/2} \\ &= -\frac{\hbar^{1-s} \pi^{2-s}}{2a^{3-s}} \frac{1}{3-s} \sum_n |n|^{3-s}. \end{aligned} \quad (173)$$

如此我们便可算出

$$\frac{\langle E \rangle}{A} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\langle E(s) \rangle}{A} = -\frac{\hbar c \pi^2}{6a^3} \zeta(-3) = -\frac{\hbar c \pi^2}{720a^3}; \quad (174)$$

其中用到了 $\zeta(-3) = \frac{1}{120}$. 于是卡西米尔力就是

$$\frac{F_c}{A} = -\frac{\partial}{\partial d} \frac{\langle E \rangle}{A} = -\frac{\hbar c \pi^2}{240a^4}. \quad (175)$$

3.4 单粒子态及其正交归一化分析, 坐标空间场算符对易关系, 协变对易式

从量子力学中我们已熟知, 前文动量空间场算符的对易关系, 意味着 $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ 是粒子的产生算符, 即 $a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle = |\mathbf{p}\rangle$. 于是可知 $\langle 0|[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger]|0\rangle = \langle 0|a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}'}^\dagger|0\rangle = \langle \mathbf{p}|\mathbf{p}'\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$. 进一步地,

$$\begin{aligned}\phi(x)|0\rangle &= \phi^\dagger(x)|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} e^{ipx} a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} e^{ipx} |\mathbf{p}\rangle := |x\rangle\end{aligned}\quad (176)$$

就表示在 x 点处产生一个可分解为诸动量模叠加的粒子; 注意上述量子态是洛伦兹标量, 即对任何惯性系, 都给出同样的物理. 由此可以得到²³

$$\langle x|y\rangle := \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} := D(x-y) \quad (177)$$

即描述粒子从 y 到 x 的传播. 注意此传播关系亦是洛伦兹标量.

数学上我们知道, $\delta(f(x) - f(x_0)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0)$, 故可计算得

$$\begin{aligned}\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') &= \delta^3(\mathbf{p}_b - \mathbf{p}'_b) \frac{dp_b^i}{dp^i} = \delta^3(\mathbf{p}_b - \mathbf{p}'_b) \gamma (1 + \beta \frac{dE_{\mathbf{p}}}{dp^i}) \\ &= \delta^3(\mathbf{p}_b - \mathbf{p}'_b) \frac{\gamma}{E_{\mathbf{p}}} (E_{\mathbf{p}} + \beta p^i) = \delta^3(\mathbf{p}_b - \mathbf{p}'_b) \frac{E_{\mathbf{p}_b}}{E_{\mathbf{p}}};\end{aligned}\quad (178)$$

其中用到了能量动量四维矢量的洛伦兹变换式 (19). 由上述过程可见, $E_{\mathbf{p}}\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ 是洛伦兹不变的. 把因子平分到产生湮灭算符上, 就得 $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}a_{\mathbf{p}}$ 是洛伦兹标量. 在表明 K-G 场方程解 (152) 是洛伦兹标量时, 前文曾提到过这个问题, 现在得以解决²⁴. 于是, 如下量子态

$$|p\rangle := |p^\mu\rangle := \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}|p\rangle \quad (179)$$

就是洛伦兹不变的; 还可得其归一化为 $\langle p|p'\rangle = 2E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$. 有了以上知识, 我们就可计算出

$$\langle p|x\rangle = e^{ipx}, \quad \langle x|p\rangle = e^{-ipx}; \quad (180)$$

于是就可得到

$$I = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} |p\rangle\langle p|, \quad I = 2E_{\mathbf{p}} \int d^3\mathbf{x} |x\rangle\langle x|. \quad (181)$$

²³作为对比, $\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/\hbar}$.

²⁴用与第一章中描述场在实空间转动下的变化行为的方式相似的方式叙述, 就是 $U(\Lambda_p)\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}a_{\mathbf{p}} = \sqrt{2E_{\Lambda_p^{-1}\mathbf{p}}}a_{\Lambda_p^{-1}\mathbf{p}} = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}a_{\mathbf{p}}$.

若再选定等时的 $\langle \mathbf{p} | \mathbf{x} \rangle = e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$, $\langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle = e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$, 以及 $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, 则还可计算出

$$I = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}|, \quad I = \int d^3 \mathbf{x} |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}|. \quad (182)$$

类似刚才给出的 $|p\rangle$ 与 $|\mathbf{p}\rangle$ 的关系, 我们也可给出 $\sqrt{2E_{\mathbf{p}}} |x\rangle \leftrightarrow |\mathbf{x}\rangle$.

应用前一节我们给出的动量空间场算符的对易关系, 不难计算出坐标空间:

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} \left[e^{-ip(x-y)} - e^{-ip(y-x)} \right] \\ &= D(x-y) - D(y-x), \end{aligned} \quad (183)$$

$$[\pi(x), \pi(y)] = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{E_{\mathbf{p}}}{2} \left[e^{-ip(x-y)} - e^{-ip(y-x)} \right], \quad (184)$$

$$[\phi(x), \pi(y)] = \frac{i}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[e^{-ip(x-y)} + e^{-ip(y-x)} \right]; \quad (185)$$

上述第一个对易关系, 或称为协变对易关系, 是洛伦兹标量; 后两个则不是. 再应用本节给出的四维到三维的退变手续, 我们即可由上述式子读出等时对易关系

$$[\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] = 0, \quad [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0, \quad (186)$$

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (187)$$

最后, 由式 (157) 体现出的意涵不难写出

$$a_{\mathbf{p}} = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \int d^3 \mathbf{x} e^{ipx} \frac{1}{2} \left[\phi(x) + \frac{i\pi(x)}{E_{\mathbf{p}}} \right], \quad (188)$$

$$a_{\mathbf{p}}^\dagger = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \int d^3 \mathbf{x} e^{-ipx} \frac{1}{2} \left[\phi(x) - \frac{i\pi(x)}{E_{\mathbf{p}}} \right]; \quad (189)$$

若先设出坐标空间场量的含时对易关系, 从上式亦是推出动量空间的对易式的.

3.5 狭义相对论微观因果律对量子场论的要求: 粒子自旋与对易性/对称性/统计的关系

狭义相对论表明, 类时或类光间隔的两个事件, 可以建立信号联接; 而类空间隔的事件是不可以的, 后者将失去确定的先后次序. 这称为狭义相对论所界定的微观世界的因果律. 反映在量子场论上, 这就是要求, 类空间隔两点上的力学量算符, 必须是互相对易的, 即

$$[\mathcal{O}(x), \mathcal{O}(y)] = 0, \quad \text{when } (x - y)^2 < 0. \quad (190)$$

容易看出, 此条件反映在组成力学量算符的场算符上, 就是要求, 场算符所取的对易关系类型, 要使得在类空间隔内, 场的采取同样对易关系的协变运算式结果

为零. 由上一小节的计算我们已知 $[\phi(x), \phi(y)] = D(x-y) - D(y-x)$; 在类空间隔内, 此对易式的值的确是等于零的. 同时也可看出, 若将场量取为反对易式, 则类空间隔内它们的反对易结果显然不为零. 是故自旋为零的标量场必取对易关系. 同样, 在下一章狄拉克场中我们也将看到, 对具有 $1/2$ 自旋的粒子, 在类空间隔内, 其采取反对易式的场的协变运算式结果为零. 是故自旋为 $1/2$ 的粒子必取反对易关系.

进一步, 我们将发现, 因狭义相对论因果律的要求, 具有整数自旋的粒子, 必须被赋予对易关系; 粒子波函数对粒子交换是对称的, 粒子系满足玻色-爱因斯坦统计; 这样的粒子称为玻色子. 而具有半奇数自旋的粒子, 必须被赋予反对易关系; 粒子波函数对粒子交换是反对称的, 粒子系满足费米-狄拉克统计; 这样的粒子称为费米子.

3.6 单粒子传播概率幅: 费曼传播子; 四维狄拉克 δ 函数

前面我们已知道 $\langle x|y \rangle = D(x-y)$ 表示粒子从位置空间的 y 点到 x 点的传播; 但其中我们并没有计及时间的先后. 考虑进时间先后的传播关系 $D_F(x-y) := \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0 \rangle$, 称为费曼传播子. 另外, $D_R(x-y) := \theta(x^0 - y^0)\langle 0|[\phi(x), \phi(y)]|0 \rangle$ 称为推迟格林函数, 等等. 下面, 我们以费曼传播子为例, 来进行进一步计算.

$$\begin{aligned}
D_F(x-y) &= \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0 \rangle \\
&= \theta(x^0 - y^0)\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0 \rangle + \theta(y^0 - x^0)\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0 \rangle \\
&= \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip(y-x)} \\
&= \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} \Big|_{p^0=E_{\mathbf{p}}} \\
&\quad - \theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 (-2E_{\mathbf{p}})} e^{-ip(x-y)} \Big|_{p^0=-E_{\mathbf{p}}} \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-1}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \text{ with Feynman prescription} \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \text{ with Feynman prescription;} \tag{191}
\end{aligned}$$

其中用到了留数定理 $\oint_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_k f(a_k)$, 而积分围道的选择表示在

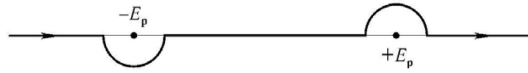


Figure 3: 费曼惯例: 费曼传播子积分围道的选取.

图 3 中, 称为费曼惯例. 注意上述过程中的解析延拓意味着对四维动量的

积分, 并不要求四维动量满足色散关系, 后者作为积分的奇点存在. 显然, 对 $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)}$ 积分围道的不同选择, 将给出不同的传播子; 如图 4 即给出推迟格林函数.



Figure 4: 推迟势积分围道的选取.

对于费曼传播子, 一般我们又会采用如下记法:

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}, \quad (192)$$

或称为 ϵ 惯例.

注意, 传播子的表达式, 以费曼传播子为例, 就是其与 $D_F(p) := \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$ 的四维傅立叶变换; 其中后者即传播子在动量空间的表达式. 把传播子代入 K-G 方程, 可得

$$(\partial^2 + m^2)D_F(x-y) = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} := -i\delta^4(x-y), \quad (193)$$

即传播子是场方程的格林函数. 由上述方程, 通过直接假设出 $D_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} D_F(p) e^{-ip(x-y)}$ 并代入之, 我们亦可直接得到 $D_F(p)$ 进而 $D_F(x-y)$ 的表达式. 在上式中, 我们定义了位置空间四维狄拉克 δ 函数

$$\begin{aligned} \delta^4(x-y) &= \delta(x^0 - y^0) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta(x^0 - y^0) \frac{1}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)}. \end{aligned} \quad (194)$$

注意, 正如前文已经说过的那样, 上述对四维动量的积分, 不要求色散关系, 否则显然又过渡回传播子了. 作为对比, 若我们定义 $\langle p | p' \rangle = 2E_{\mathbf{p}} \langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') := (2\pi)^4 \delta^4(p - p')$, 并取 $I = \int d^4 x |x\rangle \langle x|$, 就可得到四维动量空间的狄拉克 δ 函数如下:

$$\delta^4(p - p') = \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} e^{-i(p-p')x}. \quad (195)$$

在以后的相互作用场论中, 对某个过程的某阶近似, 我们通常会将其相应的解析表达式用图形的方法画出. 这些图形, 称为费曼图; 图形与解析式之间的对应规则, 称为费曼规则. 例如, 最简单的费曼图, 就是用连接两点的一条线段表示费曼传播子:

$$D_F(x-y) = \overline{x \quad y}. \quad (196)$$

3.7 复标量场: 零自旋有质量有荷, π^\pm 介子

我们已知, 本章以前部分讲述的实标量场, 描述的是 π^0 介子. 还有一类带正负电荷的介子, 记为 π^\pm ; 由前章内容知, 描述它们的即为复标量场. 复标量场的拉氏密度, 以及由之导致的场的运动方程, 进而场的解为:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi, \quad (197)$$

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0, \quad (\partial^2 + m^2)\phi^\dagger = 0; \quad (198)$$

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx}), \quad (199)$$

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx} + b_{\mathbf{p}} e^{-ipx}); \quad (200)$$

其中 $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ 与 $b_{\mathbf{p}}^\dagger$ 即描述带分别带正负电荷的两种粒子. 本场的正则动量以及哈氏密度就是

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger, \quad \pi^\dagger = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi}; \quad (201)$$

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} + \pi^\dagger \dot{\phi}^\dagger - \mathcal{L}. \quad (202)$$

赋予本场如下对易关系, 即可实现体系的量子化:

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad [b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'); \quad (203)$$

$$\Leftrightarrow [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi^\dagger(\mathbf{x}), \pi^\dagger(\mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \quad (204)$$

其它的对易皆为零. 场的协变对易关系很容易读出为

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0, \quad [\phi^\dagger(x), \phi^\dagger(y)] = 0, \quad (205)$$

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = D_a(x - y) - D_b(y - x). \quad (206)$$

复标量场的大部分力学性质与实标量场的是对应一致的; 我们主要研究复标量场所带的规范荷. 复标量场对应于整体规范不变的守恒流密度为

$$\begin{aligned} j_{(q)}^\mu &= \frac{q}{i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \phi - \phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^\dagger} \right) \\ &= iq(\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^\dagger); \end{aligned} \quad (207)$$

这是我们在分析力学中我们就已求出过的. 于是我们可以求出本场的总守恒荷为

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3\mathbf{x} j_{(q)}^0 = iq \int d^3\mathbf{x} (\phi^\dagger \partial^0 \phi - \phi \partial^0 \phi^\dagger) \\ &= q \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}) \end{aligned} \quad (208)$$

由此确认, $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ 与 $b_{\mathbf{p}}^\dagger$ 描述的粒子荷性的确相反.

4 复旋量场: 1/2-自旋有质量有荷, 狄拉克费米子

4.1 狄拉克方程及其共轭方程, 泡利-狄拉克表象, 外尔方程的拉氏密度, 马约拉纳费米子, 轴矢流

前文群论一章中, 我们已严格导出旋量满足的方程 $(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = 0$. 作代换 $p_\mu = i\partial_\mu$, 便可得到量子方程

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0; \quad (209)$$

称为狄拉克方程. 能导致狄拉克方程的拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi; \quad (210)$$

可见真实运动使场的拉氏密度为零. 将其对 $\bar{\psi}$ 应用拉格朗日方程即可得前述狄拉克方程; 将其对 ψ 应用拉氏方程, 可得

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0; \quad (211)$$

此即狄拉克方程的共轭方程. 当然, 上式也可由狄拉克方程作演换获得. 我们曾经说过, 任何场都是要满足 Klein-Gordon 方程的. 对狄拉克方程我们验证如下 $-(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = (\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\psi = (\partial^2 + m^2)\psi = 0$.

我们已经证明了狄拉克方程对离散变换是对称的; 下面, 我们来证明狄拉克方程在连续洛伦兹变换下的不变性. 事实上, 原则地, 一个量只要由两个洛伦兹矢量构成, 则就是对洛伦兹变换不变的标量. 不过现在我们还是具体做一遍. 若体系或坐标系发生一个洛伦兹转动, 则有

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 &\rightarrow \left(i\Lambda_{\frac{1}{2}} \gamma^\mu \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu - m\right) \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x) \\ &= \left[i\Lambda_{\frac{1}{2}} \gamma^\mu \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \partial_\mu - m\right] \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x) \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(\Lambda^{-1}x) = 0; \end{aligned} \quad (212)$$

由此可见, 在连续洛伦兹变换下, 狄拉克方程的确是 invariant 的.

此外, 在群论一章中推导时, ψ 的上下分量是具有确定手征性左右旋量; 相应得到的 γ^μ 或方和的矩阵形式, 称是外尔表象或手征表象下的. 数学上我们知道, 每一组满足 γ^μ 的代数的矩阵, 都是狄拉克方程的一个表示. 若取 $\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, 而取 γ^i 的形式与外尔表象中的相同, 则不难发现, 这样的一组矩阵, 亦是满足 γ^μ 的代数的. 产生此表示的表象, 我们称为泡利-狄拉克表象. 此时, 狄拉克方程的矩阵形式如下

$$\begin{bmatrix} E - m & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -E - m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} = 0. \quad (213)$$

我们已知, 当粒子质量为零时, 狄拉克方程退化为两个外尔方程, 狄拉克旋量退化为两个分别描述左右旋态的外尔旋量. 也就是说, 当粒子的动能远高于静质量时, 采用外尔表象是方便的. 同样可看出, 当粒子动能较小, 例如远小于静质量时, 采用狄拉克表象是方便的.

容易用左右手外尔旋量的形式表达出狄拉克场拉氏密度²⁵:

$$\mathcal{L} = \psi_L^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + \psi_R^\dagger i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m(\psi_R^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger \psi_R). \quad (214)$$

显然, 质量造成了左右外尔旋量的耦合. 在质量为零时, 狄拉克场拉氏密度退化为外尔场的拉氏量, 后者即给出分别描述左右手旋量运动的两个方程.

我们可以将狄拉克方程写为 $i\gamma^0 \partial_0 \psi = (-i\gamma^i \partial_i + m)\psi$, 从而 $i\partial_0 \psi = (-i\gamma^0 \gamma^i \partial_i + \gamma^0 m)\psi$; 若命 $\gamma^0 = \beta$, $\alpha^i = \gamma^0 \gamma^i$, 则就得

$$i\partial_0 \psi = (-i\alpha^i \partial_i + \beta m)\psi; \quad (215)$$

此即狄拉克最早写下的形式.

我们来谈一下马约拉纳费米子. 若我们为 Clifford 代数选取下述表示矩阵: $\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{bmatrix}$, $\gamma^1 = \begin{bmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{bmatrix}$, $\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{bmatrix}$, $\gamma^3 = \begin{bmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{bmatrix}$, 称为马约拉纳基, 则可发现我们得到了洛伦兹群的一个实旋量表示; 相应的表示基函数就称为马维拉纳旋量. 显然, 马维拉纳旋量的荷共轭, 即 C 变换结就是其自身 $\psi = \begin{bmatrix} \psi_L \\ i\sigma^2 \psi_L^* \end{bmatrix}$. 我们反粒子是其自身的粒子, 为马约拉纳费米子.

总之, 有质量复旋量场描述的粒子, 1/2-自旋有质量有荷, 如电子, 夸克等, 称为狄拉克费米子; 无质量复旋量场描述的粒子, 1/2-自旋无质量有荷, 称为外尔费米子; 有质量实旋量场描述的粒子, 1/2-自旋有质量无荷, 称为马约拉纳费米子.

最后, 我们拿出本场的一些力学量. 本场的共轭正则动量及能量为

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\bar{\psi}\gamma^0 = i\psi^\dagger, \quad (216)$$

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\psi} - \mathcal{L} = i\psi^\dagger \dot{\psi} - \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = \bar{\psi}(-i\gamma^i \partial_i + m)\psi. \quad (217)$$

在分析力学中, 我们已知本场的对应于作为内部对称性的规范变换的守恒流为

$$j_{(q)}^\mu = \frac{q}{i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \phi - \phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^\dagger} \right) = q\bar{\psi}\gamma^\mu \psi; \quad (218)$$

²⁵这里我们相当于令 $\psi = \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix}$. 若我们命 $\psi = \begin{bmatrix} L \\ R \end{bmatrix}$, 而 $\psi_L = \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix}$, $\psi_R = \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}$, 则 $\psi = \psi_L + \psi_R$, $\bar{\psi}\psi = R^\dagger L + L^\dagger R = \bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R$; 而 $\bar{\psi}\gamma^\mu \psi = L^\dagger \bar{\sigma}^\mu L + R^\dagger \sigma^\mu R = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R$.

从而本场的总守恒荷即 $Q = q \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi} \gamma^0 \psi = q \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger \psi$. 如果狄拉克旋量的左右旋部分按相反的方向作规范变换, 即 $\psi \rightarrow e^{iq_H \alpha \gamma^5} \psi$, $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{iq_H \alpha \gamma^5}$, -这又称为手征变换, -则相似地, 我们可以拿此对应于此的流为

$$j_{(q)A}^\mu = q_H \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi; \quad (219)$$

称之为轴矢流. 但需注意, 因为 $\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi) = 2im \bar{\psi} \gamma^5 \psi$, 显然此流只在质量为零时才成为守恒流. 事实上, 此即外尔费米子的螺旋. 对左右部分, 显然有

$$j_{(q)AL}^\mu = q_H \bar{\psi} \gamma^\mu P_L \psi, \quad j_{(q)AR}^\mu = q_H \bar{\psi} \gamma^\mu P_R \psi. \quad (220)$$

4.2 狄拉克方程的解, $u^s(p)$, $v^s(p)$, Jordan-wigner 量子化: 反对易关系的赋予, 费曼传播子

我们可以直接定出, 作为四分量狄拉克旋量的狄拉克方程的解是

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{E_{\mathbf{p}}}} \sum_s (a_{\mathbf{p}}^s u^s(p) e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ipx}); \quad (221)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{E_{\mathbf{p}}}} \sum_s (a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(p) e^{ipx} + b_{\mathbf{p}}^s \bar{v}^s(p) e^{-ipx}). \quad (222)$$

重要之处, 是要定下其中 $u^s(p)$, $v^s(p)$ 的性质. 以正频部分为例, 我们方程的正频平面波解 $u(p) e^{-ipx} := (u_1, u_2)^T e^{-ipx}$ 代入方程, 在手征表象中, 则有

$$\begin{bmatrix} -m & \sigma^\mu p_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0; \quad (223)$$

由此知 $\frac{u_1}{u_2} = \frac{\sigma^\mu p_\mu}{-m} = \frac{m}{\bar{\sigma}^\mu p_\mu}$. 由此, 为了形式对称, 我们即可将 $u(p)$ 的结果定下来; 用相似的办法也可将 $v(p)$ 定下来; 它们的结果为

$$u(p) = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma^\mu p_\mu} \xi \\ \sqrt{\bar{\sigma}^\mu p_\mu} \xi \end{bmatrix}, \quad v(p) = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma^\mu p_\mu} \eta \\ -\sqrt{\bar{\sigma}^\mu p_\mu} \eta \end{bmatrix}; \quad (224)$$

其中 $\xi^{s\dagger} \xi^r = \delta^{sr}$, $\eta^{s\dagger} \eta^r = \delta^{sr}$; $s, r = 1, 2$. 注意当粒子静止时, 我们有 $u(\mathbf{p} = 0) = \sqrt{m}(\xi, \xi)^T$, $v(\mathbf{p} = 0) = \sqrt{m}(\eta, -\eta)^T$. 我们将确信, ξ^s 表征了电子的自旋状态; 例如说, $\xi^1 = (1, 0)^T$, $\xi^2 = (0, 1)^T$. 至此, 我们非常容易计算出:

$$u^{s\dagger}(p) u^r(p) = 2E_{\mathbf{p}} \delta^{sr}, \quad \bar{u}^s(p) u^r(p) = 2m \delta^{sr}; \quad (225)$$

$$v^{s\dagger}(p) v^r(p) = 2E_{\mathbf{p}} \delta^{sr}, \quad \bar{v}^s(p) v^r(p) = -2m \delta^{sr}; \quad (226)$$

$$\bar{u}^s(p) v^r(p) = \bar{v}^s(p) u^r(p) = 0; \quad (227)$$

$$u^{s\dagger}(\mathbf{p}) v^r(-\mathbf{p}) = v^{s\dagger}(\mathbf{p}) u^r(-\mathbf{p}) = 0; \quad (228)$$

$$\sum_{s=1}^2 u^s(p) \bar{u}^s(p) = \gamma^\mu p_\mu + m, \quad \sum_{s=1}^2 v^s(p) \bar{v}^s(p) = \gamma^\mu p_\mu - m. \quad (229)$$

显然 $\bar{u}^s(p)u^r(p)$ 与 $\bar{v}^s(p)v^r(p)$ 是洛伦兹不变的.

前文相关章节通过因果系我们已论述过, 因因果律的限制, 费米子必须被赋予反对易关系, 这或称为 Jordan-Wigner 量子化; 故本场有

$$\{a_{\mathbf{p}}^s, a_{\mathbf{p}'}^{r\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{sr}, \quad (230)$$

$$\Leftrightarrow \{\psi_\alpha(\mathbf{s}), \psi_\beta^\dagger(\mathbf{y})\} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{\alpha\beta}. \quad (231)$$

事实上, 我们也将看到, 只有被赋予反对易关系, 费米子的力学量才能得到正定结果. 例如体系的总能量为

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi}(-i\gamma^i \partial_i + m)\psi = \int d^3\mathbf{x} i\psi^\dagger \dot{\psi} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_s E_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s). \end{aligned} \quad (232)$$

再例如场的总电荷

$$Q = q \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi} \gamma^0 \psi = q \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger \psi = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_s q (a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s - b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s). \quad (233)$$

场的总自旋是 $S^k = \int d^3\mathbf{x} \pi \frac{-i}{2} \Sigma^k \psi = \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger \frac{1}{2} \Sigma^k \psi$; 将其在动量表象中展开, 便可发现 $\xi = (1, 0)^T, (0, 1)^T$ 分别具有自旋 $1/2, -1/2$; 而 $\eta = (1, 0)^T, (0, 1)^T$ 分别具有自旋 $-1/2, 1/2$.

不难解出场的如下传播关系

$$\langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle = (i\gamma_\mu \partial_x^\mu + m)_{\alpha\beta} D(x - y), \quad (234)$$

$$\langle 0 | \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x) | 0 \rangle = -(i\gamma_\mu \partial_x^\mu + m)_{\alpha\beta} D(y - x). \quad (235)$$

于是本场的协变反对易关系就是

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = (i\gamma_\mu \partial_x^\mu + m)_{\alpha\beta} [D(x - y) - D(y - x)]. \quad (236)$$

本场的费曼传播子就是

$$S_F := \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = \begin{cases} \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle, & x^0 > y^0 \\ -\langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle, & x^0 < y^0 \end{cases} \quad (237)$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}. \quad (238)$$

其中积分围道的选取, 与实标量场时的情况是相同的.

5 实矢量场: 1-自旋无荷无质量, 光子

电磁场由麦克斯韦方程描述, 电磁场的量子, 即光子. 由麦克斯韦方程 (即实验的总结) 看出, 电磁场或光子, 是没有静质量的.

另外, 由麦克斯韦方程形式还可看出, 电磁场是矢量场. 由前文群论中的分析, 我们知道矢量场的自旋为 1; 将电磁场量子化后, 我们更可确认这一点.

最后, 从与荷场的耦合, 我们也可获知电磁场必须是矢量场, 且是无质量的. 事实上, 规范场—或曰中间玻色子, 都是矢量场. 我们可以提前指出, 弱作用的中间玻色子是有质量的; 这将由无质量中间玻色子经过对称性破缺得以实现.

本章我们重点讲电磁场的量子化.

5.1 电磁场的量子化

我们已知自由电磁场的方程为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (239)$$

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0; \quad (240)$$

其中第一式是独立的, 第二式是 Bianchi 恒式等. 由以下洛伦兹标量

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (241)$$

对 A_ν 运用欧拉方程, 即可得 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\nu} = 0 + \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$. 是故 (241) 式即能导致麦克斯韦方程的电磁场的拉氏密度. 将张量 $F_{\mu\nu}$ 具体写开后我们还可发现 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\frac{\mathbf{E}^2}{c^2} - \mathbf{B}^2)$. 场 A_μ 的正则动量就是

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = F^{\mu 0} = \partial^\mu A^0 - \partial^0 A^\mu; \quad (242)$$

即 $\pi^0 = 0$, $\pi^i = E^i$. 可以看出, 共轭于场的时间分量 A_0 的正则动量为零. 进一步可得场的哈密顿密度就是

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} = \pi^i \dot{A}_i - \mathcal{L} = -\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathcal{L} = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{E} + \nabla \varphi) - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \mathbf{E} \cdot \nabla \varphi = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - \varphi \nabla \cdot \mathbf{E}; \end{aligned} \quad (243)$$

其中已采用自然单位. 上述最后一步的运算结果中去了一个全散度项.

5.1.1 辐射规范量子化, 对易关系的修改, 无散 δ 函数

电磁场/势的规范冗余, 意味着我们可以给它加上限制条件, 称为规范条件. 库仑规范是 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 这相当于排除了电磁场三个空间分量—称为类空分量—中

的纵向分量, 认定电磁场是横场. 对于自由场, $\rho = 0$, 于是就得另外一条件, 即 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 或等价的 $\varphi = A^0 = 0$; 后者可名为为电磁场的类时分量/标量光子. 此条件与库伦规范条件合称为辐射规范.

从实践中我们早已知道, 电磁场只有横向的两个自由度, 纵向分量为零. 辐射规范两个条件, 恰将电磁场自由度限制为与运动方向垂直的两个方向; 即与事实是一致的. 不过, 显然辐射规范下我们将不再保有理论的洛伦兹协变性. 无论如何, 我们先在此规范下进行体系的量子化.

对应于电磁场的两个横向自由度, 即两个横向偏振方向, 我们取相应的两个单位矢量, 称为单位极化矢量 $\epsilon_r(\mathbf{p})$, $r = 1, 2$. 它们首先当然满足 $\epsilon_r(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} = 0$; 另外, 它们的正交归一化关系及完备性关系分别为

$$\epsilon_r(\mathbf{p}) \cdot \epsilon_s(\mathbf{p}) = \delta_{ij} \epsilon_r^i(\mathbf{p}) \epsilon_s^j(\mathbf{p}) = \delta_{rs}, \quad (244)$$

$$\sum_{r=1}^2 \epsilon_r^i(\mathbf{p}) \epsilon_r^j(\mathbf{p}) = \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{\mathbf{p}^2}. \quad (245)$$

其中 i, j 为极化矢量的两个分量指标. 完备性关系的修改项的原因, 在接下来将会看到.

辐射规范下的场方程为 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \partial^2 \mathbf{A} = 0$, 故可取得本方程的解及正则动量为

$$\mathbf{A}(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{r=1}^2 \epsilon_r(\mathbf{p}) (a_{\mathbf{p}}^r e^{-ipx} + a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} e^{ipx}), \quad (246)$$

$$\mathbf{E}(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}} \sum_{r=1}^2 \epsilon_r(\mathbf{p}) (a_{\mathbf{p}}^r e^{-ipx} - a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} e^{ipx}). \quad (247)$$

一般地, 我们已知场的类时分量的共轭共则动量为零; 而辐射规范下, 我们恰有场的类时分量亦为零. 于是, 辐射规范下我们只用考虑空间部分 A^i , $\pi^i = -\partial_0 A^i$ 的对易关系. 与以往一样, 因为因果律, 我们赋予作为自旋为 1 的矢量场的本场以如下等时对易关系, 是恰当的:

$$[A_i(\mathbf{x}), A_j(\mathbf{y})] = 0, [\pi^i(\mathbf{x}), \pi^j(\mathbf{y})] = 0. \quad (248)$$

但是 $[A_i(\mathbf{x}), \pi^j(\mathbf{y})] = i g_i^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 却是不能满足要求的, 因为此式被作散度过后, 左边 $\partial_i [A^i(\mathbf{x}), \pi_j(\mathbf{y})] = [\partial_i A^i(\mathbf{x}), \pi_j(\mathbf{y})] = 0$, 而右边 $\partial_i i g_i^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \partial_i i g_i^j \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} = - \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} p_j e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \neq 0$. 病因既明, 医方即出. 若取

$$\begin{aligned} [A_i(\mathbf{x}), \pi^j(\mathbf{y})] &= i \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left(g_i^j - \frac{p_i p^j}{\mathbf{p}^2} \right) e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \\ &= i \left(g_i^j - \frac{\partial_i \partial^j}{\nabla^2} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) := i \bar{\delta}^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (249)$$

则就能满足两边散度同时为零的要求了. 我们有时又把 $\bar{\delta}^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 称为无散 δ 函数. 通过场的解, 不难获知以上实空间的对易关系与以下动量空间中的对易关系

$$[a_{\mathbf{p}}^r, a_{\mathbf{p}'}^{s\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{rs} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), [a_{\mathbf{p}}^r, a_{\mathbf{p}'}^s] = [a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}, a_{\mathbf{p}'}^{s\dagger}] = 0; \quad (250)$$

是互致的. 与实标量场时的情况相同, 动量空间场量用实空间场量表达即

$$a_{\mathbf{p}}^r = (2\pi)^3 \int d^3\mathbf{x} \varphi_{\mathbf{p}}^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 [\boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{A}(x)], \quad (251)$$

$$a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} = -(2\pi)^3 \int d^3\mathbf{x} \varphi_{\mathbf{p}}(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 [\boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{A}(x)]. \quad (252)$$

现在, 我们即可得到本场的量子化的力学量, 如能量为²⁶

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{A}}^2 + (\nabla \times \mathbf{A})^2] \\ &= \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{A}}^2 - \mathbf{A} \cdot \nabla^2 \mathbf{A}] = \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{A}}^2 - \mathbf{A} \cdot \partial_0^2 \mathbf{A}] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} i \mathbf{A} \cdot i \overleftrightarrow{\partial}_0 \partial_0 \mathbf{A} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \sum_{r=1}^2 a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} a_{\mathbf{p}}^r. \end{aligned} \quad (254)$$

其中我们舍弃了全微分项以及应用了场满足的方程 $\partial^2 \mathbf{A} = 0$; 最后用到了 $\boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs}$. 同样, 我们亦可求出动量的相应的表达, 并写出其与能量的合成

$$P^i = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} i \mathbf{A} \cdot i \overleftrightarrow{\partial}_0 \partial^i \mathbf{A}, \quad (255)$$

$$P^\mu = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} i \mathbf{A} \cdot i \overleftrightarrow{\partial}_0 \partial^\mu \mathbf{A}. \quad (256)$$

下面, 我们再来展示一下自旋的获得. 首先, $\mathcal{S}^k = \varepsilon_{ijk} A^i \pi^j = -A^i \partial_0 A^j \varepsilon_{ijk} = -A^i \partial_0 A^j \varepsilon_{ijk} + A^j \partial_0 A^i \varepsilon_{ijk} - A^j \partial_0 A^i \varepsilon_{ijk} = A^j \overleftrightarrow{\partial}_0 A^i \varepsilon_{ijk} - \mathcal{S}^k$, 故有

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^k &= \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{2} i A^i i \overleftrightarrow{\partial}_0 A^j \varepsilon_{ijk} \\ &= \frac{i}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \epsilon_r^i(\mathbf{p}) \epsilon_s^j(\mathbf{p}) \varepsilon_{ijk} (a_{\mathbf{p}}^s a_{\mathbf{p}}^{r\dagger} - a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^r) \\ &= \frac{i}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} [(a_{\mathbf{p}}^{i\dagger} a_{\mathbf{p}}^j + a_{\mathbf{p}}^j a_{\mathbf{p}}^{i\dagger}) - (a_{\mathbf{p}}^i a_{\mathbf{p}}^{j\dagger} + a_{\mathbf{p}}^{j\dagger} a_{\mathbf{p}}^i)] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} [(a_{\mathbf{p}}^{+\dagger} a_{\mathbf{p}}^+ + a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}}^{+\dagger}) - (a_{\mathbf{p}}^- a_{\mathbf{p}}^{-\dagger} + a_{\mathbf{p}}^{-\dagger} a_{\mathbf{p}}^-)]; \end{aligned} \quad (257)$$

²⁶ 我们对 $\int d^3\mathbf{x} (\nabla \times \mathbf{A})^2 = -\int d^3\mathbf{x} \mathbf{A} \cdot \nabla^2 \mathbf{A}$ 的计算作一展示:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{A})^2 &= \sum_{j,k=1,2,3; \text{even}} (\partial_j A_k - \partial_k A_j)(\partial_j A_k - \partial_k A_j) \\ &= \sum_{j,k=1,2,3; \text{any}} (\partial_j A_k)(\partial_j A_k - \partial_k A_j) := \partial_j A_k \partial_j A_k - \partial_j A_k \partial_k A_j \\ &= \sum_{k=1,2,3} \sum_{j=1,2,3} \left\{ \left[\partial_j (A_k \partial_j A_k) - A_k \partial_j \partial_j A_k \right] - \left[\partial_j (A_k \partial_k A_j) - A_k \partial_j \partial_k A_j \right] \right\} \\ &= \sum_{j,k=1,2,3} \left\{ \left[\partial_j (A_k \partial_j A_k) - A_k \nabla^2 A_k \right] - \left[\partial_j (A_k \partial_k A_j) - A_k \partial_k \nabla \cdot \mathbf{A} \right] \right\} \end{aligned} \quad (253)$$

全散度的积分为零, 于是积分后上述结果中两个中括号内的第一项皆消失; 而辐射规范下我们有 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 于是最终得 $\int d^3\mathbf{x} (\nabla \times \mathbf{A})^2 = -\int d^3\mathbf{x} \mathbf{A} \cdot \nabla^2 \mathbf{A}$.

其中

$$a_{\mathbf{p}}^{\pm} := \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\mathbf{p}}^i \pm i a_{\mathbf{p}}^j), \quad a_{\mathbf{p}}^{\pm\dagger} := \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\mathbf{p}}^{i\dagger} \mp i a_{\mathbf{p}}^{j\dagger}), \quad (258)$$

分别描述右旋与左旋粒子的消灭与产生. 由前述结果知, 右旋光子具有自旋 1, 左旋光子具有自旋 -1.

场在本规范下的协变对易关系为

$$\begin{aligned} [A_i(x), A_j(y)] &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} \sum_{r=1}^2 \epsilon_r^i(\mathbf{p}) \epsilon_r^j(\mathbf{p}) \left[e^{-ip(x-y)} - e^{-ip(y-x)} \right] \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} \left(\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{\mathbf{p}^2} \right) \left[e^{-ip(x-y)} - e^{-ip(y-x)} \right] \\ &= \left(\delta_{ij} + \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} \right) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} \left[e^{-ip(x-y)} - e^{-ip(y-x)} \right] \\ &= \left(\delta_{ij} + \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} \right) [\phi(x), \phi(y)]; \end{aligned} \quad (259)$$

于是场在本规范下的费曼传播子为

$$D_{ij}(x-y) = \langle 0 | T A_i(x) A_j(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 + i\epsilon} \left(\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{\mathbf{p}^2} \right) e^{-ip(x-y)}. \quad (260)$$

5.1.2 协变 (洛伦茨规范) 量子化, 拉氏密度的修改, 费曼规范, Gupta-Bleuler 条件, 标量光子与纵向量子相消, 鬼态

不像辐射规范, 在洛伦茨规范 $\partial_\mu A^\mu = 0$ 中, 理论将保有洛伦兹协变性. 此规范下, 我们得到的自由场的运动方程是 $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = 0 \rightarrow \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \xrightarrow{\partial_\mu A^\mu = 0} \partial^2 A^\mu = 0$. 现在, 我们略作改变; 我们通过修改拉氏密度的办法, 来直接得到这个方程. -当然这也就意味着此办法是与洛伦茨规范条件等价的, 或曰此办法下我们已不用要求洛伦兹条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$. -由以下拉氏密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (g^{\nu\mu} \partial_\mu A_\nu)^2 \quad (261)$$

对 A_ν 运用欧拉方程, 就得 $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu + \partial_\mu g^{\mu\nu} \partial_\rho A^\rho = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0$. 由此可确知上述拉氏密度的确是与洛伦茨规范条件等价的表述.

另外, 我们往往还会做得更一般化一些, 即把拉氏密度写作

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2; \quad (262)$$

后加入的一项 $-\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2$ 称作规范固定项; ξ 称为规范固定参数; $\xi = 1$ 的情况称作费曼规范, $\xi = 0$ 的情况称为朗道规范. 由上式得到的场的运动方程就是

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} \partial^\nu \partial_\rho A^\rho = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\nu \partial_\rho A^\rho = 0. \quad (263)$$

显然, 当取费曼规范时, 我们回到洛伦茨规范下的场方程.

由于拉氏密度出现在积分中, 而当求场的总力学量时, 共轲动量也将被积分, 故我们把拉氏密度中的四维散度项去掉, 是可以的. 这样以后的拉氏密度可进一步写为

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\ &= -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu.\end{aligned}\quad (264)$$

不难验证由上式的确是可以拿出洛伦茨规范下的场方程的.

由此, 我们可以写出在费曼规范下, 与场共轲的正则动量为

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = F^{00} - \partial_\mu A^\mu = -\partial_\mu A^\mu = \partial^i A^i - \partial^0 A^0, \quad (265)$$

$$\pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = F^{i0} - 0 = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = E^i; \quad (266)$$

而当在拉氏密度中去掉四维散度项后, 场的正则动量就是

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\dot{A}^\mu. \quad (267)$$

比较上式与由未去掉四维散度项的拉氏密度得出的动量可得, 在拉氏密度中去掉四维散度项, 相当于在共轲动量中去掉空间三维散度项.

因为现在场量 A^μ 有 4 个分量, 故我们需要引入 4 个独立的四维极化矢量 $\epsilon_\mu^\lambda(\mathbf{p})$, $\lambda = 0, 1, 2, 3$. 它们满足的正交归一化关系和完备关系如下

$$g^{\mu\nu} \epsilon_\nu^\lambda(\mathbf{p}) \epsilon_\mu^{\lambda'}(\mathbf{p}) = g^{\lambda\lambda'}, \quad (268)$$

$$g_{\lambda\lambda'} \epsilon_\mu^\lambda(\mathbf{p}) \epsilon_\nu^{\lambda'}(\mathbf{p}) = g_{\mu\nu}. \quad (269)$$

我们取波矢沿第三轴时, $p^\mu = k^\mu = (\omega, 0, 0, k)$; 而为反映电磁波有两个横向分量这个事实, 我们应有 $g^{\mu\nu} p_\mu \epsilon_\nu^1 = 0$, $g^{\mu\nu} p_\mu \epsilon_\nu^2 = 0$; 于是此时 4 个四维极化矢即选为如下 $\epsilon^0 = (1, 0, 0, 0)^T$, $\epsilon^1 = (0, 1, 0, 0)^T$, $\epsilon^2 = (0, 0, 1, 0)^T$, $\epsilon^3 = (0, 0, 0, 1)^T$.

现在我们写出本场的解

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^\lambda(\mathbf{p}) (a_{\mathbf{p}}^\lambda e^{-ipx} + a_{\mathbf{p}}^{\lambda\dagger} e^{ipx}), \quad (270)$$

$$\pi^\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} i \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}} \sum_{\lambda=0}^3 (\epsilon^\mu)^\lambda(\mathbf{p}) (a_{\mathbf{p}}^\lambda e^{-ipx} - a_{\mathbf{p}}^{\lambda\dagger} e^{ipx}). \quad (271)$$

本场被赋予以下等时对易关系是恰当的:

$$[A_\mu(\mathbf{x}), A_\nu(\mathbf{y})] = [\pi^\mu(\mathbf{x}), \pi^\nu(\mathbf{y})] = 0, \quad (272)$$

$$[A_\mu(\mathbf{x}), \pi_\nu(\mathbf{y})] = ig_{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \quad (273)$$

相应的动量空间中的对易关系就是:

$$[a_{\mathbf{p}}^\lambda, a_{\mathbf{p}'}^{\lambda'}] = [a_{\mathbf{p}}^{\lambda\dagger}, a_{\mathbf{p}'}^{\lambda'\dagger}] = 0, \quad (274)$$

$$[a_{\mathbf{p}}^\lambda, a_{\mathbf{p}'}^{\lambda'\dagger}] = -g_{\lambda\lambda'}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (275)$$

由上述最后一式不难看出, 标量光子的归一化是负的: $\langle 0|a_{\mathbf{p}}^{0\dagger}a_{\mathbf{p}}^0|0\rangle = -(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$, 是鬼态. 具有负归一化的态, 是非物理的, 我们称为鬼态.

现在就可拿出场的各种力学量了; 不过在此之前, 我们来对原先的洛伦兹条件作一分析, 并进而解决鬼态的问题

我们已经说过, 在费曼规范中, 我们已不用要求洛伦兹条件 $\partial_\mu A^\mu$. 的确, 我们也可以看出, 这个条件与上述实空间中场与其共轭动量的对易关系是矛盾的. 但若我们一定要问, 原来的洛伦兹条件, 在此时, 扮演的却又是何种角色呢? 由稍后的分析不难确证, 此时我们有

$$\langle\psi|\partial_\mu A^\mu|\psi\rangle = 0. \quad (276)$$

上式称为弱洛伦兹条件, 或称为 Gupta-Bleuler 条件. 进一步地, 此条件还可写为 $\partial^\mu A_\mu^+|\phi\rangle = 0$. 不难解出, 前式在动量空间中即

$$(a_{\mathbf{p}}^3 - a_{\mathbf{p}}^0)|\phi\rangle = 0; \quad (277)$$

此即动量空间中的 Gupta-Bleuler 条件. 上式鲜明展示出, 在任何情况下, 标量光子与纵光子同时存在, 且互相抵消. 例如, 对于粒子数, 上式就给出 $\langle\psi|a_{\mathbf{p}}^{3\dagger}a_{\mathbf{p}'}^3 - a_{\mathbf{p}}^{0\dagger}a_{\mathbf{p}'}^0|\psi\rangle = 0$.

本场的总力学量, 如能量, 可求出为

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\mathbf{x} \left(-\dot{A}^\mu \dot{A}_\mu + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu \right) = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left(A_\mu \partial_0 \partial^0 A^\mu - \dot{A}^\mu \dot{A}_\mu \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} i A_\nu i \overleftrightarrow{\partial}_0 \partial^0 A^\nu = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} (-g_{\lambda\lambda'}) a_{\mathbf{p}}^{\lambda'\dagger} a_{\mathbf{p}}^\lambda \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^{i\dagger} a_{\mathbf{p}}^i - a_{\mathbf{p}}^{0\dagger} a_{\mathbf{p}}^0) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \sum_{i=1}^2 a_{\mathbf{p}}^{i\dagger} a_{\mathbf{p}}^i. \end{aligned} \quad (278)$$

当然, 我们亦有 $P^\mu = -\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} i A_\nu i \overleftrightarrow{\partial}_0 \partial^\mu A^\nu$. 显然可见, 在本协变量子化中, 得益于 Gupta-Bleuler 条件, 我们依然使理论获得了真实解.

场在本规范下的协变对易关系为

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = -g_{\mu\nu}[\phi(x), \phi(y)]; \quad (279)$$

场在本规范下的费曼传播子为

$$D_{F\mu\nu}(x-y) = \langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}. \quad (280)$$

对于前文中具有任意 ξ 值的拉氏密度, 相应的场的费曼传播子就是

$$D_{F\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) e^{-ip(x-y)}. \quad (281)$$

5.2 有质量矢量场, 质量破坏规范变换

在自由电磁场的拉氏量中加入一质量项:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu, \quad (282)$$

我们就得到了描述有质量的矢量场的拉氏密度. 上式导致的运动方程即

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \quad (283)$$

对上式两边取散度, 可得 $m^2 \partial_\nu A^\nu = 0$; 进而知 $\partial_\nu A^\nu = 0$ (此条件亦使上述方程化为 $(\partial^2 + m^2)A^\mu = 0$). 此结果是对场的必然限制, 表明有质量的矢量场不再可以被施行规范变换了.

我们曾经说过, 调和中间玻色子的质量与规范变换这两件事, 将导致自发对称破缺与希格斯机制的出场. 静待后详, 兹不赘述.

6 量子场论的泛函表述：路径积分量子化

行文至此，一般地，就可以直接进入相互作用理论了。但是，鉴于无论在自由场论还是在相互作用场论中，路径积分都有其重要且更简洁的一面，所以在进入相互作用理论之前，我们先研究作为量子场论/力学的泛函方法的路径积分理论。

之前讲述的场的粒子结果—即量子化，是以先拿出场的运动方程与解，进而赋予实空间或动量空间中的场量以恰当的对易关系而进行的。这种量子化的方法，叫正则（若关系是对易的）或 Jordan-Wigner（若关系是反对易的）量子化。路径积分的表述形式，将包含正则量子化，但在某些方面比后者更为有效。本章我们就研究之。

6.1 泛函微积分基础，量子场论中心等式，格拉斯曼数

6.1.1 高斯积分，高斯重积分，高斯矩

通过平方转换到极坐标系再开方，可得基本高斯积分 $\int dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{2\pi}$ ；进一步可得出如下标度高斯积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}. \quad (284)$$

由上式，我们还可得下述积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2 \pm Jx} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{J^2/2a}, \quad (285)$$

称为有源高斯积分；其中 a, J 可取复数。

若我们设 $\det S$ 是从 $\mathbf{x} := (x^1, x^2, \dots, x^n)^T$ 到 $\mathbf{y} = S\mathbf{x}$ 的雅可比行列式，使 $\mathbf{x}^T K \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{y}$ ；从而我们得到 $K = S^T S$ 是对称矩阵，有 $\det S = \sqrt{\det K}$ 。于是，我们可求得实空间 n 维高斯重积分如下

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d^n x e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T K \mathbf{x}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n y}{\det S} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{y}^T \mathbf{y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det K}} \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} dy_i e^{-\frac{1}{2}y_i^2} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det K}}. \end{aligned} \quad (286)$$

同样，有源高斯重积分就是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^n x e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T K \mathbf{x} + \mathbf{J}^T \mathbf{x}} := \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det K}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{J} K^{-1} \mathbf{J}}. \quad (287)$$

另外，对标度高斯积分中的 a 进行 n 次求导，我们还可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^{2n} e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \frac{1}{a^n} (2n-1)(2n-3)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1 = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \frac{1}{a^n} (2n-1)!!, \quad (288)$$

称为高斯矩. 从而, 我们可得如下平均

$$\langle x^{2n} \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^{2n} e^{-\frac{1}{2}ax^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2}} = \frac{1}{a^n} (2n-1)!! \quad (289)$$

6.1.2 泛函积分, 高斯泛函积分

我们把泛函积分定义为如下无限维重积分:

$$\int \mathcal{D}\xi F[\xi] := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int \left(\prod_x \frac{d\xi_x}{C} \right) F(\xi_x); \quad (290)$$

由此定义可看出, 泛函积分具有如下平移不变性:

$$\int \mathcal{D}\xi F[\xi] = \int \mathcal{D}\xi F[\xi + \eta]. \quad (291)$$

由上述定义, 我们可求得泛函高斯积分为

$$\int \mathcal{D}\xi e^{-\frac{1}{2}\xi^2} := \int \mathcal{D}\xi e^{-\frac{1}{2} \int dx \xi^2(x)} = 1; \quad (292)$$

最后的结果是我们选择相应的常数 C 所致; 且我们采用了简记 $\xi := \int dx \xi$. 于是我们进一步可得

$$\int \mathcal{D}\xi e^{-\frac{1}{2}\xi^2 \pm J\xi} = e^{\frac{1}{2}J^2}, \quad (293)$$

$$\int \mathcal{D}\xi e^{-\frac{1}{2}\xi K \xi + J\xi} = \frac{1}{\sqrt{\det K}} e^{\frac{1}{2}J K^{-1}J}, \quad (294)$$

$$\int \mathcal{D}\xi^* \mathcal{D}\xi e^{-\xi^* K \xi + J^* \xi + J \xi^*} = \frac{1}{\det K} e^{J^* K^{-1}J}. \quad (295)$$

其中亦采用了简记 $\xi^* K \xi := \int dx dy \xi^*(x) K(x, y) \xi(y)$ 等.

6.1.3 泛函微商, 量子场论中心等式

设函数 $\xi(x)$ 在 y 点有改变 $\varepsilon \delta(x-y)$, 则可定义泛函有如下微商:

$$\frac{\delta F[\xi(x)]}{\delta \xi(y)} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F[\xi(x) + \varepsilon \delta(x-y)] - F[\xi(x)]}{\varepsilon}. \quad (296)$$

由此发现 $\frac{\delta}{\delta \xi(y)} \xi(x) = \delta(x-y)$. 于是不难求得我们有如下泛函微商 (注意其中开始采用简记):

$$\frac{\delta}{\delta \xi(x)} \xi = \frac{\delta}{\delta \xi(x)} \int dy \xi(y) = \int dy \delta(x-y) = 1, \quad \frac{\delta}{\delta \xi(x)} \xi G \eta = G \eta, \quad (297)$$

$$\frac{\delta}{\delta \xi(x)} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} = -\xi e^{-\frac{1}{2}\xi^2}, \quad \frac{\delta}{\delta \xi(x)} e^{-\xi \eta} = -\eta e^{-\xi \eta}. \quad (298)$$

据此, 我们可以演算出下述积分

$$\int \mathcal{D}\xi F(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi K \xi + J\xi} = \int \mathcal{D}\xi \sum_n f_n \xi^n e^{-\frac{1}{2}\xi K \xi + J\xi} = F(\delta/\delta J) e^{\frac{1}{2}J K^{-1}J}; \quad (299)$$

其中已略去因子 $1/\sqrt{\det K}$. 由此我们立得下式

$$\int \mathcal{D}\xi e^{-\frac{1}{2}\xi K \xi - V(\xi) + J\xi} = e^{-V(\delta/\delta J)} e^{\frac{1}{2}JK^{-1}J}, \quad (300)$$

称为量子场论的中心等式.

6.1.4 格拉斯曼数 (外代数) 及其微积分

在费米子或超对称等理论中, 我们需要用到格拉斯曼数, 或外代数. 一个 n 维格拉斯曼代数有 n 个生成元 ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, 满足 $\{\xi_i, \xi_j\} = 0$. 从而我们立知, 对任何格拉斯曼数都有

$$\xi^2 = 0. \quad (301)$$

亦因此, 格拉斯曼函数展开式只包括有限项, 如 $f(\xi) = p + q\xi$, $g(\xi, \eta) = p + q\xi + r\eta + s\xi\eta$ 等; 其中 p, q, r, s 为 c 数. 另外, 格拉斯曼数在复共轭运算下有 $(\xi^*)^* = \xi$, $(\xi\eta)^* = -\eta^*\xi^*$.

我们要求格拉斯曼数的函数积分仍然满足平移不变性, 即 $\int d\xi f(\xi + \eta) = \int d\xi f(\xi)$; 将 $f(\xi) = p + q\xi$ 代入, 就得到 $\int d\xi q\eta = 0$. 要求上式对任何 c 数 q 都成立, 就必然得出

$$\int d\xi = 0. \quad (302)$$

注意微分 $d\xi_i$ 也是一个格拉斯曼变量, 即亦有 $\{\xi_i, d\xi_j\} = 0$, $\{d\xi_i, d\xi_j\} = 0$. 另外, 作为一个 c 数, 我们定义

$$\int d\xi \xi = 1. \quad (303)$$

以上两条是格拉斯曼数的基本积分性质, 由它们我们就可以进行具体运算了. 例如 $\int d\xi f(\xi) = q$, $\int d\xi g(\xi, \eta) = q + s\eta$, $\int d\eta g(\xi, \eta) = r - s\xi$.

我们现在考虑多维情况, 即 $\xi := (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. 在积分元变换即 $\xi = S\eta$ 下, 我们有

$$d^n \xi = \frac{1}{\det S} d^n \eta; \quad (304)$$

显然这与 c 数的情况是恰好相反的.

下面我们研究格拉斯曼数的微商性质. 微商运算包含用因子 $\frac{1}{\Delta \xi_i}$ 相乘的运算, 所以结果与次序有关; 我们定义作用在左边. 于是可得

$$\frac{\partial}{\partial \xi} g(\xi, \eta) = q + s\eta, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} g(\xi, \eta) = r - s\xi. \quad (305)$$

由此可见, 格拉斯曼数的微商与积分给出相同的结果. 另外, 我们容易证明

$$\left\{ \xi_i, \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right\} = \delta_{ij}, \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_i}, \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right\} = 0. \quad (306)$$

最后, 我们来考虑格拉斯曼数的高斯积分. 对于两个独立的格拉斯曼变量, 显然可知 $e^{-\bar{\xi}\xi} = 1 - \bar{\xi}\xi$; 于是我们可得

$$\int d\bar{\xi}d\xi e^{-\bar{\xi}\xi} = 1, \quad \int d\bar{\xi}d\xi e^{-\bar{\xi}a\xi} = a = e^{\ln a}. \quad (307)$$

推广到多维情况, 我们亦可算出

$$\int d^n \bar{\xi} d^n \xi e^{-\bar{\xi} \cdot \xi} = 1. \quad (308)$$

在如下换元 $\eta = S\xi$, $\bar{\eta} = \bar{S}\bar{\xi}$ 的情况下, 我们可算得

$$\int d^n \bar{\eta} d^n \eta e^{-\bar{\eta} \cdot \eta} = \frac{1}{\det(\bar{S}^{(T)}S)} \int d^n \bar{\xi} d^n \xi e^{-\bar{\xi}^T \bar{S}^T S \xi} = 1, \quad (309)$$

所以有

$$\int d^n \bar{\xi} d^n \xi e^{-\bar{\xi} K \xi} = \det K; \quad (310)$$

其中 $K := \bar{S}^T S$. 同样, 我们可得如下泛函积分:

$$\int \mathcal{D}\bar{\xi} \mathcal{D}\xi e^{-\bar{\xi} K \xi} = \det K; \quad (311)$$

其中有简记 $\bar{\xi} K \xi := \int dx dy \bar{\xi}(x) K(x, y) \xi(y)$; 因子 $\det K$ 可被吸入积分测度中.

6.2 量子力学的路径积分表述, 算符编时积, 生成泛函, Bethe-Salpeter 方程

对 $K(q_n, t; q_0, t_0) = \langle q|U(t, t_0)|q_0\rangle = \langle q|e^{-iH(t-t_0)}|q_0\rangle = \langle q_n, t|q_0, t_0\rangle$, 即薛定谔方程/场的传播子/跃迁振幅, 我们可以进行如下运算 (其中我们将 $e^{-iH(t-t_0)/n}$ 用 $e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}$ 作分解, 并忽略了高阶项, 然后又进行了合并):

$$\begin{aligned} K(q_n, t; q_0, t_0) &= \langle q_n|e^{-iH(t-t_0)}|q_0\rangle \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} \int dq_i \langle q_{i+1}|e^{-iH(t-t_0)/n}|q_i\rangle = \prod_{i=0}^{n-1} \int dq_i dp_i \langle q_{i+1}|p_i\rangle \langle p_i|e^{-iH(t-t_0)/n}|q_i\rangle \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} \int \frac{dq_i dp_i}{2\pi} e^{ip_i(q_{i+1}-q_i)} e^{-iH(t-t_0)/n} = \prod_{i=0}^{n-1} \int \frac{dq_i dp_i}{2\pi} e^{ip_i \dot{q} dt} e^{-iH dt} \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} \int \frac{dq_i dp_i}{2\pi} e^{i(p_i \dot{q} - H) dt} := \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{i \int dt (p \dot{q} - H)}; \end{aligned} \quad (312)$$

注意从上述第三行开始, H 已不是算符. 另外, 因为在某个具体计算过程中, 我们都会考虑归一化, 所以上述以及下述泛函积分中, 我们都省略了一个常数因子. 若哈密顿量具有 $H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ 的形式, 则我们进一步可得

$$\begin{aligned} K &= \int \mathcal{D}q e^{-i \int dt V(q)} \int \mathcal{D}p e^{i \int dt (-\frac{i}{2m} p^2 + i \dot{q} p)} = \int \mathcal{D}q e^{-i \int dt V(q)} e^{i \int dt \frac{1}{2} m \dot{q}^2} \\ &= \int \mathcal{D}q e^{i \int dt [\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)]} = \int \mathcal{D}q e^{i \int dt L} = \int \mathcal{D}q e^{iS}; \end{aligned} \quad (313)$$

其中用到了泛函积分式 (294).

将传播子用把作用量对所有可能的经典路径 (即不限于 $S = 0$ 的那条) 进行泛函积分的方式表示出来, 称为量子力学的路径积分形式; 此泛函方法构成了我们描述或计算量子力学的平行于薛定谔方程 (或曰量子力学的正则形式) 的又一方法. 前述, 传播子路径积分 $K = \int \mathcal{D}q e^{iS}$ 是作为薛定谔方程的自然推论出现的; 当然, 我们也可把此结果本身就当成一个原理 (自然, 以之为基础亦是导出薛定谔方程的), 称为量子作用量原理.

路径积分, 从物理图像上讲, 亦是相当清晰直观的. 我们已经知道, 对比于经典力学中, 粒子满足的力学规律使其下粒子按具有最小作用量的方式进行运动, 显然, 在微观世界中, 粒子的满足薛定谔方程的路径, 是具有各种经典作用量值的路径的叠加; 这由传播子满足的 (经插入完备关系而可见的) 惠更斯原理就可看出. 那么把这件事情/思想本身当成一个原理 (而不作为薛定谔方程的推论), 也就是非常自然的了.

在路径积分量子力学中, 空间坐标 $q(t)$ 的编时积显然就是

$$\langle q, t | T q(t_1) \cdots q(t_n) | q_0, t_0 \rangle = \int \mathcal{D}q q(t_1) \cdots q(t_n) e^{i \int dt L(q, \dot{q})}; \quad (314)$$

体系引入外源 $L \rightarrow L + Jq$ 后的跃迁振幅就可表为

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle_J = \int \mathcal{D}q e^{i \int dt J q} e^{i \int dt L(q, \dot{q})} = \langle q, t | T e^{i \int dt J q} | q_0, t_0 \rangle. \quad (315)$$

在外源作用下体系的从初基态到末基态的跃迁振幅

$$Z[J] := \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle_J = \langle 0, \infty | T e^{i \int dt J q} | 0, -\infty \rangle \quad (316)$$

称为生成泛函; 于是我们可知坐标编时积的基态平均与生成泛函的微商之间有如下关系:

$$\langle 0, \infty | T q(t_1) \cdots q(t_n) | 0, -\infty \rangle = \frac{\delta^n Z[J]}{i^n \delta J(t_1) \cdots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0}. \quad (317)$$

事实上, 以上诸式子在量子场论中更具意义.

若拉氏量可分解为两项, 其中一项 L_0 使传播子有严格解, 另一项 $-V$ 是微扰, 则我们可得

$$\begin{aligned} K(q, t; q_0, t_0) &= \int \mathcal{D}q e^{i \int dt (L_0 - V)} = \int \mathcal{D}q e^{i \int dt L_0} e^{-i \int dt V} \\ &= \int \mathcal{D}q e^{i \int dt L_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-i \int dt V \right)^n = K_0 + \int \mathcal{D}q e^{i \int dt L_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-i \int dt V \right)^n \\ &:= K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n K_n := K_0 + K_0(-iV)K_0 + K_0(-iV)K_0(-iV)K_0 + \cdots \\ &= K_0 - iK_0VK = K_0 - iKVK_0; \end{aligned} \quad (318)$$

注意上述相关步骤中采取了积分的简写; 而简写结果事实上也即动量空间中的公式. 上式称为 Bethe-Salpeter 方程; 亦可进一步变换为 $K = \frac{K_0}{1+iVK_0}$.

6.3 量子场论的路径积分形式

6.3.1 量子场论中的路径积分及其与量子力学中的区别与联系, 场位形及其“超薛定谔方程”, 生成泛函, 格林函数

类比于量子力学中的公式, 量子场论中的路径积分公式我们先直接取定为

$$\begin{aligned} K(\phi, t; \phi_0, t_0) &= {}_S\langle \phi, t | \phi_0, t_0 \rangle_S = {}_S\langle \phi | e^{-iH(t-t_0)} | \phi_0 \rangle_S = {}_I\langle \phi | e^{-iH_{\text{int}}^I(t-t_0)} | \phi_0 \rangle_I \\ &= \int \mathcal{D}\phi e^{i \int dx \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)} = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int dt L(\phi, \partial_\mu \phi)}, \end{aligned} \quad (319)$$

其中 $H = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H}$ 为场/体系的总哈密顿量, 而 $|\phi\rangle := |n_1, \dots, n_i\rangle$ 是场位形.

类比于在量子力学中, 薛定谔方程或量子力学路径积分把粒子运动的经典路径非惟一化 (但“量子路径”是惟一的), 上述式子把量子路径 (场方程; 如麦氏方程或 K-G 方程等) 也非惟一化了. 也就是说, 上式意味着场算符未必要满足前文的那些拥有最小量子作用量的量子场方程; 如同量子力学中指出的经典粒子未必要满足拥有最小经典作用量的那条路径一样.

从而, 也就是说, $K(\phi, t; \phi_0, t_0)$ 意味着场从某个位形到另一个位形的传播概率幅. 但是, 这却并不是我们相要的传播子; 我们想要的, 还是前文提到过的描述单粒子传播的费曼传播子. 我们很快将发现, 这个要求, 不仅是不奇怪的, 而且与路径积分量子力学中的相关公式恰是相一致的.

量子场论中, 无相互作用情况下, 体系的生成泛函即

$$Z_0[J] := \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle_J = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int_{-\infty}^{\infty} dx (\mathcal{L}_0 + J\phi + \frac{1}{2}i\varepsilon\phi^2)} = \langle 0 | T e^{i \int dx J\phi} | 0 \rangle; \quad (320)$$

我们定义下述量为体系的 n 点关联函数或格林函数

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n) &:= \langle 0 | T \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{i \int dx \mathcal{L}_0} \\ &= \frac{\delta^n Z_0[J]}{i^n \delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \end{aligned} \quad (321)$$

对于有相互作用的情况, 生成泛函即为

$$\begin{aligned} Z[J] &:= \int \mathcal{D}\phi e^{i \int_{-\infty}^{\infty} dx (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} + J\phi + \frac{1}{2}i\varepsilon\phi^2)} \\ &= e^{i\mathcal{L}_{\text{int}}(\delta/i\delta J)} Z_0[J]; \end{aligned} \quad (322)$$

其中第二步我们假设了 $\mathcal{L}_{\text{int}} = \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi)$, 并用到了泛函积分式 (300). 场的 n 点关联函数就是

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n) &:= \langle \Omega | T \phi_H(x_1) \cdots \phi_H(x_n) | \Omega \rangle = \int \mathcal{D}\phi \phi_H(x_1) \cdots \phi_H(x_n) e^{i \int dx \mathcal{L}} \\ &= \frac{\delta^n Z[J]}{i^n \delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \end{aligned} \quad (323)$$

另外, 因为我们将在下一章证明的式子 (353), 我们亦有

$$\langle \Omega | T \phi_H(x_1) \cdots \phi_H(x_n) | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_n) e^{i \int dx \mathcal{L}}}{\int \mathcal{D}\phi e^{i \int dx \mathcal{L}}}. \quad (324)$$

6.3.2 自由标量场/旋量场与矢量场的传播子, 生成泛函与两点关联函数

自由标量场

考虑到可以相差任意四维散度项, 自由标量场的拉氏密度可以写为 $\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) = -\frac{1}{2}\phi(\partial^2 + m^2)\phi$; 再引入外源与小的负虚数项, 我们就可得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + J\phi + \frac{1}{2}i\varepsilon\phi^2 = -\frac{1}{2}\phi(\partial^2 + m^2 - i\varepsilon)\phi + J\phi \\ &:= \frac{i}{2}\phi D_F^{-1}\phi + J\phi; \end{aligned} \quad (325)$$

其中 $D_F := -i(\partial^2 + m^2 - i\varepsilon)^{-1}$. 对比正则形式的场论知识, 我们知道此即本场的费曼传播子. 也就是说, 在二次型的拉氏密度中, 两场量之间所夹算符就之逆, 就是自由场的传播子. 这个结论是具有一般性的. 自由标量场的生成泛函为

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \int \mathcal{D}\phi e^{-i \int dx [\frac{1}{2}\phi(\partial^2 + m^2 - i\varepsilon)\phi - J\phi]} \\ &= e^{-\frac{1}{2}J[i(\partial^2 + m^2 - i\varepsilon)]^{-1}J} \\ &:= e^{-\frac{1}{2}JD_F J}. \end{aligned} \quad (326)$$

注意上述过程中, 我们采取了简记, 如 $e^{-\frac{1}{2}JD_F J} := e^{-\frac{1}{2} \int dx dy J(x) D_F(x-y) J(y)}$.

通过格林函数与生成泛函的关系式, 我们不难求出场的单点格林函数为

$$G(x) = \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = \frac{\delta}{i\delta J(x)} e^{-\frac{1}{2}JD_F J} = (iD_{Fxy}J_y) e^{-\frac{1}{2}JD_F J} \Big|_{J=0} = 0; \quad (327)$$

相似地, 我们可求得场的两点格林函数为

$$G(x, y) = \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = D_F(x - y); \quad (328)$$

即场的费曼传播子. 一般地, 我们不难算出, 自由场中奇数点格林函数为 0, 偶数点格林函数等所场量的所有缩并, 即所有两点格林函数乘积之和.

自由旋量场

对自由旋量场的拉氏密度 $\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$ 中的两个场量分别引进外源, 再引入一个小的负虚数项, 就得

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + i\varepsilon\bar{\psi}\psi \\ &:= -i\bar{\psi}S_F^{-1}\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta; \end{aligned} \quad (329)$$

其中我们亦知 $S_F := i(\gamma^\mu \partial_\mu - m + i\varepsilon)^{-1}$ 即本场的费曼传播子. 于是, 我们可算得本场的生成泛函为

$$\begin{aligned} Z_0[\bar{\eta}, \eta] &= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int dx (-i\bar{\psi} S_F^{-1} \psi + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta)} \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int dx [-i(\bar{\psi} - i\bar{\eta} S_F) S_F^{-1} (\psi - i S_F \eta) + i\bar{\eta} S_F \eta]} \\ &= e^{-\bar{\eta} S_F \eta}. \end{aligned} \quad (330)$$

由此可得本场的两点格林函数为

$$G(x, y) = \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = - \frac{\delta}{i^2 \delta \bar{\eta}(x) \delta \eta(y)} \Big|_{\bar{\eta}=\eta=0} = S_F. \quad (331)$$

自由矢量场

前述, 我们已一般地知道, 在二次型的拉氏密度中, 两场量之间所夹算符就之逆, 就是自由场的传播子. 现在我们把电磁场的拉氏量化成二次型, 以拿到其传播子.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} A_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} A_\nu \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= \frac{1}{2} A_\nu (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\mu. \end{aligned} \quad (332)$$

但是, $i(\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu)^{-1}$ 在任何情况下趋于无穷大, 并不能作为本场的传播子. 原因是显然的: 我没尚未考虑规范条件. 我们取洛伦茨规范, 于是此时 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} A_\nu \partial^2 g^{\mu\nu} A_\mu$, 显然

$$D_{F\mu\nu} := \frac{i}{g^{\mu\nu} \partial^2} = \frac{i g^{\mu\nu}}{\partial^2 - i\varepsilon} \quad (333)$$

就的确是本场的传播子了.

在矢量场的正则量子化中, 我们曾把本场拉氏密度写成了更一般的形式; 我们可同样求出此一般形式下的传播子.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu \\ &= \frac{1}{2} A_\nu (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\mu + \frac{1}{2\xi} A_\nu \partial^\nu \partial^\mu A_\mu \\ &= \frac{1}{2} A_\nu \left[\partial^2 g^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi}) \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\mu; \end{aligned} \quad (334)$$

由此可得此时的场的传播子即

$$D_{F\mu\nu} = \frac{-i}{p^2 + i\varepsilon} \left[g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right]. \quad (335)$$

7 相互作用场论 (散射振幅/截面的计算): 以 ϕ^4 模型, Yukawa 理论与 QED 等为例

7.1 QED 等基本相互作用, ϕ^4 模型, Yukawa 理论

在前文分析力学一章中我们已经明晰, 量子场论中, 我们系统地通过规范原理来引入相互作用; 如

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{scalar QED}} &= D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \\ &= \mathcal{L}_{\text{free}} + iq A^\mu \phi \partial_\mu \phi^\dagger - iq A_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + q^2 A^2 \phi^\dagger \phi \\ &= \mathcal{L}_{\text{free}} - A_\mu j_{(q)}^\mu + q^2 A^2 \phi^\dagger \phi,\end{aligned}\quad (336)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{spinor QED, total}} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - A_\mu j_{(q)}^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\end{aligned}\quad (337)$$

即分别是标量 QED 以及旋量 QED 的拉氏量。

除了 QED 或 QCD 等基本相互作用, 物理学中我们还经常用到其它的一些相互作用模型. 考虑到因果性与能量正定性, 最简单的, 我们有 ϕ^4 自相互作用模型等. 具体地, 标量场的 ϕ^4 自相互作用模型即

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4;\quad (338)$$

其中 $\mathcal{L}_{\text{int}} = -\mathcal{H}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4$. 在标准模型的电弱理论中, 希格斯场的自相互作用就由此模型描述. 另外, 在凝聚态物理的相关问题中, 我们也将遇到此模型.

核子之间的相互作用, 根本原因是夸克之间交换胶子的强相互作用, 即应由 QCD 描述. 但在低能时, 我们可以唯象地认为是核子间交换 π^0 介子的相互作用:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = i\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m'^2 \phi^2 - g\bar{\psi}\psi\phi,\quad (339)$$

上述理论称为旋量 Yukawa 理论. 标准模型中, 夸克或轻子与希格斯场耦合进而获得质量的相互作用, 亦由此模型描述. 当然, 我们亦可以有标量 Yukawa 理论:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \partial_\mu \psi^\dagger \partial^\mu \psi - m^2 \psi^\dagger \psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m'^2 \phi^2 - g\psi^\dagger \psi \phi.\quad (340)$$

在此进一步指出, 在量子场论中, 我们一般只考虑弱耦合, 这使我们能把相互作用当成微扰, 从而用级数展开的方式研究相互作用.

本小节中的场算符, 是以海森堡绘景下的场算符为例的. 例如此绘景下, 标量 ϕ^4 理论的场方程为 $(\partial^2 + m^2)\phi = -\frac{\lambda}{3!}\phi^3$. 在以后的理论中, 我们一般在相互作用表象中进行, 例如那时用到的 ϕ^4 理论相互作用其实就是 $\mathcal{L}_{\text{int}}^I = -\mathcal{H}_{\text{int}}^I = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4$. 此时场方程 (算符运动) 方程为 $(\partial^2 + m^2)\phi_I = 0$, 当然与自由场情形是具有相同的形式的.

7.2 相互作用场论的基本理论工具

7.2.1 三种绘景, 相互作用绘景下的时间演化算符, S 矩阵, 散射振幅; 关联函数, 维克定理

三种绘景

在弱耦合情况下, 我们一般把体系的相关量-稍后可见即时间演化算符, 散射算符或关联函数-按微扰相互作用进行级数展开. 薛定谔绘景下, 我们有 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_S = H U_S$, 从而 $U_S = e^{-iH(t-t')/\hbar}$; 这在有微扰相互作用的情况即 $H = H_0 + H'$ 时, 亦是成立的. 但是, 若我们用级数展开的方法来考察 H' , 式子 $U_S = e^{-iH(t-t')/\hbar}$ 却并不可以; 因为从后者进行的展开, 把 H_0 的作用也展开了. 要想实现我们用级数展开的方法来考察 H' 的这个目的, 需要用到相互作用绘景中的时间演化算符. 下面我们先介绍三种绘景.

我们有薛定谔绘景如下:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad \frac{\partial}{\partial t} F = 0; \quad (341)$$

注意薛定谔绘景 (以及以下诸绘景) 不仅对薛定谔方程适用, 对任意场的方程及力学量都是适用的. 海森堡绘景如下:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_H = 0, \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} F_H = [F_H, H]. \quad (342)$$

对于有相互作用的情况, $H = H_0 + H'$, 我们有相互作用绘景如下:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_I = H'_I |\psi(t)\rangle_I, \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} F_I = [F_I, H_0]. \quad (343)$$

海森堡绘景与相互作用绘景中算符满足的方程称为海森堡方程. 海森堡绘景与薛定谔绘景关系如下:

$$|\psi(t)\rangle_H = e^{iHt} |\psi(t)\rangle, \quad F_H = e^{iHt} F e^{-iHt}; \quad (344)$$

可见在海森堡绘景中我们有 $H_H = H$, $U_H = U_S$. 显然需要注意, 作为描述量子态随时演化的算符, U 算符在不同绘景之间的变换规律与一般算符是不同的. 相互作用绘景与薛定谔绘景关系如下:

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{iH_0 t} |\psi(t)\rangle, \quad F_I = e^{iH_0 t} F e^{-iH_0 t}; \quad (345)$$

也就是说在相互作用绘景下我们有 $H_{0I} = H_0$, $H'_I = e^{iH_0 t} H' e^{-iH_0 t}$. 另外, 我们还可以算出海森堡绘景与相互作用绘景下的算符, 有如下关系:

$$F_H = e^{iHt} e^{-iH_0 t} F_I e^{iH_0 t} e^{-iHt}. \quad (346)$$

相互作用绘景下有 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_I = H'_I U_I$, 再结合薛定谔绘景下 U 算符的方程以及两种绘景基矢之间的关系, 可得 $U_I = e^{iH_0 t} U_S e^{-iH_0 t_0} = e^{iH_0 t} e^{-iH(t-t_0)} e^{-iH_0 t_0}$. 从前文的相关地方我们已经知道, 上述关于绘景的理不仅在量子力学中, 在量子场论中亦是成立的; 所以下文的相关分析, 亦是如此.

相互作用绘景下的时间演化算符, S 矩阵, 散射振幅

尽管相互作用绘景下有 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_I = H'_I U_I$, 但此时 $H'_I = e^{iH_0 t} H' e^{-iH_0 t}$ 含时, 故我们不能像薛定谔绘景中拿出 U_S 那样, 直接拿出 $U_I = e^{-i \int_{t_0}^t dt' H'_I(t')/\hbar}$ 了; 虽然此式与我们接下来即将获得的正确结果很有联系. 我们这样做:

$$\begin{aligned}
 U_I &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H'(t_1) U_I(t_1, t_0) \\
 &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H'(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H'_I(t_2) + \cdots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T H'_I(t_1) H'_I(t_2) \cdots H'_I(t_n) \\
 &= T \exp \left[\frac{-i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H'_I(t') \right]; \tag{347}
 \end{aligned}$$

其中须注意到

$$\begin{aligned}
 &\int_{t_0}^t dt_1 dt_2 T H(t_1) H(t_2) \\
 &= \int_{t_0}^t dt_1 dt_2 \left[H(t_1) H(t_2) \theta(t_1 - t_2) + H(t_2) H(t_1) \theta(t_2 - t_1) \right] \\
 &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2) + \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H(t_2) H(t_1) \\
 &= 2! \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2). \tag{348}
 \end{aligned}$$

式 (347) 就是我们想要的相互作用绘景下的时间演化算符, 又称为戴逊级数.

我们定义

$$S := U_I(+\infty, -\infty) = T \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' H'_I(t') \right], \tag{349}$$

称为散射算符; 而

$$S_{fi} = {}_I \langle f | S | i \rangle_I \tag{350}$$

称为散射矩阵 (元). 稍后我们将看到, 作为动力学量的 S_{fi} , 将直接与可观测量即衰变宽度或散射截面等相联系; 我们这里提前展示出其具有下述一般形式:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(p_F - p_I) \mathcal{M}_{fi}; \tag{351}$$

其中洛伦兹不变的 \mathcal{M}_{fi} 又常被称为散射振幅或不变振幅等.

相互作用绘景中, 场量 ϕ_I 仍满足自由场论中的 ϕ 所满足的方程; 也就是说, 相互作用表象不仅可使我们正确而方便地对微扰做展开, 更使我们能充分利用自由理论中的物理量, 如自由场中的费曼传播子等. 相互作用绘景的这些优势, 正是我们在相互作用场论中广泛采用它的原因.

至此, 再结合更多的一点技术 (维克定理), 我们就足可以做量子场论中相互作用情况下散射矩阵元/振幅的计算了; 不过为了工具的完备性, 接下来我们继续来讲场论中另一个重要的量: 关联函数, 然后再介绍维克定理.

关联函数, 维克定理

对于一个一般的-即可有相互作用的-体系, 我们定义

$$G := \langle \Omega | T \phi_H(x) \phi_H(y) | \Omega \rangle \quad (352)$$

为其两点关联函数/格林函数. 由此可见, 自由理论的两点关联函数就是其传播子. 在采用绝热近似的情况下, 我们有 $|\Omega\rangle = U_I(0, -\infty)|0\rangle$, $U_I(\infty, 0)|\Omega\rangle = S|0\rangle := |0\rangle e^{i\alpha}$; 于是我们可以求出

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \phi_H(x) \phi_H(y) | \Omega \rangle &= \langle 0 | T [\phi_I(x) \phi_I(y) S] | 0 \rangle e^{-i\alpha} = \frac{\langle 0 | T [\phi_I(x) \phi_I(y) S] | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle} \\ &= \frac{\langle 0 | T \left\{ \phi_I(x) \phi_I(y) \exp \left[-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt' H_I'(t') \right] \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \exp \left[-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt' H_I'(t') \right] | 0 \rangle}; \end{aligned} \quad (353)$$

也就是说, 海森堡算符对有相互作用时的基态 (海森堡基态) 的编时积, 等于相互作用绘景下的算符对自由理论基态的平均值. 注意在相互作用绘景下, 上述过程中的 ϕ_I 满足的方程 (以及其传播), 即前文自由场论中的形式. 这是我们稍早已经知道的; 不致混淆时, 以后我们将略去脚标不表. 另, 对于多点情况, 上述式子当然亦中成立的.

既然相互作用体系的格林函数, 以及前面的散射矩阵, 都可归结于场算符对自由理论的基态平均, 那么找出后者的一些规律, 从而将其计算进行一下简化, 就是一件值得期待的事了. 事实上这样的便宜的确是存在的, 即维克定理. 下面, 以自由实标量场为例, 我们对其进行展示. 容易计算出

$$T\phi(x)\phi(y) =: \phi(x)\phi(y) : + \overline{D_F(x-y)} =: \phi(x)\phi(y) : + \overline{\phi(x)\phi(y)}. \quad (354)$$

其中 \overline{AB} 称为两个算符的收缩. 进一步, 我们有

$$T\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) =: \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) : + : \text{all possible contractions} :, \quad (355)$$

称为维克定理. 由此我们知, 只有完全收缩项, 其基态平均才不为零. 作为例子, 我们可以算出自由实标量场的四点关联函数如下:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 | 0 \rangle &= D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) \\ &\quad + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3) \\ &= \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 2 \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ 3 \quad 4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ 3 \quad 4 \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ 3 \quad 4 \end{array}; \end{aligned} \quad (356)$$

最后一步我们采用了图形表示, 即费曼图方法. 另外, 在具有应用维克定理里须要注意, 对于费米子算符, 场算符每交换一次要出来一个负号.

7.2.2 以 ϕ^4 理论的关联函数为例: 连通图, 全连通图; 有效散射图: 全联通+截断; 相互作用下的传播子: 1PI 图, 自能; LSZ 约化公式

现在,以实标量场的 ϕ^4 理论

$$H_I = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H} = \int d^3\mathbf{x} \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (357)$$

为例, 我们来看看有相互作用情况下的关联函数到底长什么样子, 并由之得到一些一般性的重要概念. 零级近似, 就是两点连一线的自由费曼传播子. 一级近似下, 可得其分子为

$$\begin{aligned}
& \langle \Omega | T \phi_H(x) \phi_H(y) | \Omega \rangle_{\text{numerator}}^{(1)} \\
&= \langle 0 | T \phi_{(I)}(x) \phi(y) (-i) \int dt \int d^3 z \frac{\lambda}{4!} \phi(z) \phi(z) \phi(z) \phi(z) | 0 \rangle \\
&= 3 \cdot \frac{-i\lambda}{4!} D_F(x-y) \int d^4 z D_F(z-z) D_F(z-z) \\
&\quad + 12 \cdot \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 z D_F(x-z) D_F(y-z) D_F(z-z) \\
&= 3 \left(\text{diagram 1} \right) + 12 \left(\text{diagram 2} \right); \tag{358}
\end{aligned}$$

上述过程最后我们把解析式画成了费曼图, 其费曼规则 (具体称为 ϕ^4 理论的位置空间的费曼规则), 是不言自明的.

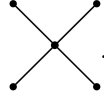
我们称所有点都连到外线的图为连通图; 有点未连到外线的图为非连通图; 闭合成圈而没有外线的图, 叫真空图. 以上图为例, 第一图即为一非联通图, 它由一条传播子与一个真空图构成; 上述第二图即为一连通图, 此处又叫蝌蚪图. 逐级展开分析不难看出, 关联函数分子上的非连通部分, 恰与分子上的真空图完全相消. 一事实上一般地, 真空图与非连通图对传播过程没有贡献. 一于是, 以上述两点关联函数为例, 即有

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \phi_H(x) \phi_H(y) | \Omega \rangle &:= \text{diagram with a line from } x \text{ to } y \text{ and a black dot on the line} = \text{diagram with a line from } x \text{ to } y + 12 \times \text{diagram with a line from } x \text{ to } y \text{ and a loop at } y + \dots \\ &= \text{all connected diagrams with two external points.} \end{aligned} \quad (359)$$

相似地, n 点格林函数就是具有 n 个外点的所有连通图; 注意需要考虑到对称系数. 当然, 对于本 ϕ^4 耦合, 奇数点格林函数是为零的.

另外, 尽管只要是连通图就对传播过程有贡献, 但是, 例如对于四格林函数, 形如 (356) 那样的连通图, 却是散射过程的零阶近似 (或哪怕不是零阶近似, 而只要在拓扑上是分离的), 即意味着粒子无作用通过, 因而对散射过程 (具体地是

散射振幅; 稍后我们将研究) 是没有贡献的. 因此, 我们再作定义, 称那些在拓扑上完全相连的图, 叫全连通图. 只有全连通图, 对散射过程才有贡献. 还有, 在多于二点格林函数的情况下, 在外线上有修正的图, 亦对过散射过程无贡献 (这我们亦将在稍后呈示): 我们将此事称作我们只考虑截断图. 言而总之, 对于散射过程 (的散射振幅), 只有全连通图与截断图才有贡献. 例如, ϕ^4 理论的四点格林函数, 其一阶近似中有贡献的项即

$$4! \cdot \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4z D_F(x_1 - z) D_F(x_2 - z) D_F(x_3 - z) D_F(x_4 - z) = \text{Diagram} \quad (360)$$


上述出来的对称因子 $4!$ 正如与理论中的常数 $1/4!$ 抵消, 其实这正是我们将后者作如是选择的原因所在.

最后, 应用路径积分方法可以方便地证明, n 点连通格林函数的分立部分, 等于能由较低阶全连通格林函数乘积形成的所有 n 点格林函数之和. 我们构造 $Z[J] = e^{iW[J]}$, 即亦 $iW[J] = \ln Z[J]$; 稍后将确证 $iW[J]$ 即全连通格林函数的生成泛函:

$$G_c(x_1, \dots, x_n) = \frac{i\delta^n W[J]}{i^n \delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (361)$$

例如, 以四点格林函数为例, 计算一下即有 $G_c = G(1234) - G(12)G(34) - G(13)G(24) - G(14)G(23)$.

由前段中关于外线上有修正的图的分析, 我们可体味到两点格林函数似乎有某种特殊性; 事实上, 我们下面即将看到, 在有相互作用情况下, 与自由理论中的情形相比, 两点格林函数之差别只不过是粒子 (的静质量) 多穿了一件衣裳而已 (这将引出自能的概念). 下面我们就来研究此事. 设切掉任何一个线都无法变成两部分的图, 叫单粒子不可约 (1PI) 图, 用 $\text{---}\bigcirc\text{---}$ 表示; 其中的空心圈代表的相互作用能称为自能, 用 $-i\Sigma$ 表示. 由此可知

$$\begin{aligned} G &= \text{Diagram with solid dot} = \text{Diagram with open circle} + \text{Diagram with open circle} + \dots \\ &= G_0 + G_0(-i\Sigma)G_0 + G_0(-i\Sigma)G_0(-i\Sigma)G_0 + \dots \\ &= G_0 - iG_0\Sigma G = G_0 - iG\Sigma G_0 \\ &= \frac{G_0}{1 + i\Sigma G_0} = (G_0^{-1} + i\Sigma)^{-1}. \end{aligned} \quad (362)$$

例如对于标量场, 我们有 $G_0 = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$, 故在 ϕ^4 相互作用情况下上式给出

$$G(p) = \frac{i}{p^2 - [m^2 + \Sigma(p)] + i\epsilon} := \frac{i}{p^2 - m_c^2 + i\epsilon}. \quad (363)$$

也就是说, $\Sigma(p)$ 体现了相互作用对粒子能量的修正; 这正是我们将其称为自能的原因. 具体地, 这是的自能, 可称为标量场在 ϕ^4 自耦合下的自能; 以后我们还将

研究电子在与光子耦合下, 即在 QED 中的自能. 另外, 前文的蝌蚪图, 可谓是标量场自耦合自能的一阶自能. 显然在自耦合下标量场只有一阶自能; 类比于以后将发现的电子可具有高阶自能.

本小节最后, 我们来研究 LSZ 约化公式. 仍以标量场为例, 在第一章中我们已得到, 我们有相对论不变的 $a_L^\dagger := \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger = -\int d^3\mathbf{x} e^{-ipx} i \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x)$ (注意其中 $e^{-ipx} = \langle x|p \rangle$ 即相对论不变的单粒子态); 于是我们可得

$$\begin{aligned} a_L^\dagger(+\infty) - a_L^\dagger(-\infty) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \partial_0 a_L^\dagger \\ &= -\int d^4x e^{-ipx} i(\partial^2 + m^2)\phi(x). \end{aligned} \quad (364)$$

我们知道, 散射矩阵可以表为 $\langle 0 | \cdots a_L(+\infty) \cdots a_L^\dagger(-\infty) \cdots | 0 \rangle$, 由此我们即可得到

$$\begin{aligned} \langle f | S | i \rangle &= \prod_{i,j=1}^{n,n'} \int dx_i dx'_j e^{-ip_i x_i} e^{ip'_j x'_j} i(\partial_i^2 + m) i(\partial_j^2 + m) \\ &\quad \cdot \langle \Omega | T \phi_{(I)}(x'_1) \cdots \phi(x'_{n'}) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) | \Omega \rangle; \end{aligned} \quad (365)$$

上述描述的显然是一个初末态各有 n, n' 个粒子的散射过程, 其散射矩阵与 $(n+n')$ 点格林函数之间的关系, 称为 LSZ 约化公式. 直观形象地, 对于一个相互作用过程的费曼图而言, 系在作用核上的, 若是线段传播子, 则图象就给出格林函数; 若是外线粒子, 就给出散射矩阵. 上式右边, 正意味着将系在作用核上的自由传播子, 换成粒子态. 事实上, 在量子场论的路径积分方法中, 上式就是计算散射矩阵的基本公式; 那时用泛函方法找 S 矩阵, 首先找到的就是这个式子. 此种推导方法, 我们就暂不叙述了.

7.2.3 ϕ^4 理论的散射矩阵及其费曼图

下面, 以 ϕ^4 自耦合为例, 我们来展示一下散射振幅的费曼图及其与格林函数图的区别, 顺便展示一下 LSZ 定理. 前文中, 我们已得到此耦合下的四点格林函数, 下面, 我们要计算出从初 (相对论不变) 态二粒子 $|i\rangle = |p_1 p_2\rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2}} a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle$ 到末二粒子 $|f\rangle = |p_3 p_4\rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{p}_3} E_{\mathbf{p}_4}} a_3^\dagger a_4^\dagger |0\rangle$ 的散射振幅. 其零阶近似即

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(0)} &= \langle p_3 p_4 | p_1 p_2 \rangle = \langle p_3 | p_1 \rangle \langle p_4 | p_2 \rangle + \langle p_3 | p_2 \rangle \langle p_4 | p_1 \rangle \\ &= (2\pi)^8 \delta^4(p_3 - p_1) \delta^4(p_4 - p_2) + (2\pi)^8 \delta^4(p_3 - p_2) \delta^4(p_4 - p_1) \\ &= \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right|. \end{aligned} \quad (366)$$

值得注意：格林函数费曼图中粒子线，表示粒子从位置空间某点到另一点的传播（当然顶点要附上对位置的四维积分）；散射振幅费曼图中的粒子线，表示动量之间的传播。本散射过程的一阶近似是

$$\begin{aligned} & -i\frac{\lambda}{4!}\langle p_3 p_4 | \int dx^4 T\phi^4(x) | p_1 p_2 \rangle \\ & = -i\frac{\lambda}{4!}\langle p_3 p_4 | \int dx^4 \left(: \phi\phi\phi\phi : + 6\bar{\phi}\phi : \phi\phi : + 3\bar{\phi}\phi\bar{\phi}\phi \right) | p_1 p_2 \rangle \end{aligned} \quad (367)$$

其中第三项是前文的两条传播线乘上真空气泡，即 $8 \times \left(\left| \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix} \right| + \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix} \right)$ ，粒子未发生碰撞，故对一阶项贡献为零。第二项为一条自由传播线乘上一个蝌蚪图，即 $\bigcirc \left| \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix} \right|$ ；此项（同拓扑项共有 $6 \times 4 = 24$ 个）中蝌蚪部分的值为

$$-i\lambda \int d^4x e^{ip_3x} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip_1x} = -i\lambda \delta^4(p_3 - p_1) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2}. \quad (368)$$

可见上述表达式中，顶点的动量守恒使其初末态相同。由此可见，这种类型的项对散射亦是没贡献的；前文的相关说明此处得证。在上述推导中，我们用到了

$$\phi|p\rangle = \phi^+|p\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}} a_{\mathbf{p}'} e^{-ip'x} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = e^{-ipx} |0\rangle. \quad (369)$$

最后，前述一阶近似的第一项给出

$$\begin{aligned} & 4! \cdot \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x e^{-i(p_1+p_2-p_3-p_4)x} = -i\lambda(2\pi)^4 \delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4) \\ & = \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ & \bullet \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}, \end{aligned} \quad (370)$$

此即 ϕ^4 理论中对散射振幅有贡献的一阶项。末了，因为最外端的自由粒子动量经过 δ 函数进入内线进而导致的无穷大，我们也很容易发现单条外线上有修正

的项，即 $\bigcirc \left| \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix} \right|$ 等，对散射振幅是无贡献的。前文已有提及，此处得证。

对比于前文四点关联函数式 (360)，具体地即

$$G(34, 12) = -i\lambda \int d^4z D_F(x_3 - z) D_F(x_4 - z) D_F(z - x_1) D_F(z - x_2), \quad (371)$$

可以见到， ϕ^4 理论中的四点格林函数，与其中的相应的四粒子散射振幅，恰以 LSZ 公式联系起来。推导中注意用到式 (196)。

ϕ^4 耦合下二粒子散射的一阶近似，至此分析完全。对比前文散射矩阵元的形式，我得拿出时过程的散射振幅为 $\mathcal{M} = -\lambda$ 。再由后文即将呈现的散射截面的

表达式, 我们可以得出此过程的分微截面为

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{\text{cm}}^2}, \quad (372)$$

故有总截面 $\sigma = \frac{\lambda^2}{32\pi E_{\text{cm}}}$. 实验上, 测出了此总散射截面, 即可得出本理论的耦合强度 λ .

本小节的知识中, 其基本结构与结论, 对任意相互作用形式都是成立的; 以后在不同的场及其相应耦合下, 我们还会继续看到具体形式. 最后提一下, 本节中, 我们都是先写出解析式, 再画出费曼图的. 以后, 我们将逐渐体会到一个过程的某阶近似 (例如说两粒子撞成两粒子的散射的二阶近似), 其费曼图将比解析式更具直观规律性. 那时, 一般地, 我们都将先画出费曼图, 再用相应的费曼规则写出其解析式. 这已成了现今场论计算中的主流手续之一.

7.2.4 衰变宽度, 散射截面

我们知到, 高能粒子实验中, 能为我们所直接观测的, 一般就是衰变宽度或散射截面等; 而理论上我们最关心的或最频繁计算的动力学量, 是散射振幅. 那么, 散射振幅与衰变宽度或散射截面是怎么联结起来的呢? 本节我们就来解决这个后顾之忧.

衰变宽度

衰变宽度 Γ (粒子寿命的倒数) 正比于一段时间 T 内的跃迁概率 P , 或即 $\Gamma \propto \frac{P}{T}$. 假设初态只有一个粒子, 而末态可以有多个粒子, 则从初态到末态的跃迁概率就是 $P = \frac{|S_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle\langle f|f\rangle}$. 而初末态的归一化为 $\langle i|i\rangle = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_I} \delta^3(0) := 2E_{\mathbf{p}_I} V$, $\langle f|f\rangle = \prod_f 2E_{\mathbf{p}_f} V$. 若我们再设初始粒子处于静止状态, 即 $E_{\mathbf{p}_I} = m$, 于是我们可得

$$P = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{2mV} (2\pi)^4 \delta^4(p_I - p_F) VT \prod_f \frac{1}{2E_{\mathbf{p}_f} V}; \quad (373)$$

其中我们已取 $(2\pi)^4 \delta^4(0) = VT$. 于是有

$$d\Gamma := \frac{P}{T} = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{2m} (2\pi)^4 \delta^4(p_I - p_F) \prod_f \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}_f}} := \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{2m} d\Pi, \quad (374)$$

$$\Gamma = \sum_f \int \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{2m} d\Pi; \quad (375)$$

其中

$$\int d\Pi = \int (2\pi)^4 \delta^4(p_I - p_F) \prod_f \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}_f}} \quad (376)$$

为相对论不变多体相空间.

散射截面

以上即衰变宽度与散射振幅之间的关系; 下面, 我们找出散射截面 σ 与散射振幅之间的关系. 为此, 最重要的是要找到碰撞概率 $(d\Gamma)_{\text{two initial states}}$ 与散射截面之间的关系.

设粒子在总面积为 A 的目标区域内平均而大量地射击. 该区域内有 N_T 个靶, 每个靶的有效面积—此即散射截面—为 σ , 那么, 单个入射粒子的 (被) 散射概率, 亦即发生一次碰撞事件的概率就是

$$\text{probability} = \frac{N_T \sigma}{A} = \frac{\text{events}}{N_B}; \quad (377)$$

其中 events 为碰撞事件数, N_B 为入射粒子总数. 由此我们可以计算出

$$\sigma = \frac{\text{events}}{N_B N_T} A = \frac{\text{events}}{(\rho v t A) N_T} A = \frac{\text{events}/(N_T t)}{\rho v} := \frac{\text{events}/(N_T t)}{j} \quad (378)$$

实验上, 控制好入射流 j 后, 侦测 $n_T := \text{events}/(N_T t)$ 即可定下散射截面. 在理论上, 则有

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{(d\Gamma)_{\text{two initial states}}}{j} = \frac{(d\Gamma)_{\text{two initial states}}}{\rho |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} \\ &= \frac{1}{4E_1 E_2 V} |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Pi \cdot \frac{V}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} \\ &= \frac{1}{4E_1 E_2} \frac{1}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Pi = \frac{1}{4|\mathbf{p}_1 E_2 - \mathbf{p}_2 E_1|} |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Pi \\ &= \frac{1}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Pi \end{aligned} \quad (379)$$

其中用到了 $\mathbf{p} = E\mathbf{v}$. 当求总积分时, 注意对极化或自旋初态平均末态求和, 以及避免重复计算.

下面, 对于末态有两个粒子的情况, 我们将上述一般结果作一化简. 设末态的两个粒子标记为 a, b , 采用质心坐标系, 我们有

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int \frac{d\Omega |\mathbf{p}_a|^2 d|\mathbf{p}_a|}{(2\pi)^3 4E_a E_b} (2\pi) \delta(E_{\text{cm}} - E_a - E_b) \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_a|^2}{16\pi^2 E_a E_b} \left(\frac{|\mathbf{p}_a|}{E_a} + \frac{|\mathbf{p}_a|}{E_b} \right)^{-1} = \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_a|}{16\pi^2 E_{\text{cm}}}, \end{aligned} \quad (380)$$

其中用到了 $\int dx \delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|}$; 于是可得

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{1}{4|\mathbf{p}_1 E_2 - \mathbf{p}_2 E_1|} \frac{|\mathbf{p}_a|}{16\pi^2 E_{\text{cm}}} |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (381)$$

若初末态 4 个粒子质量相同, 则我们还可进一步得到

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CM}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\text{cm}}^2}. \quad (382)$$

7.3 Yukawa 理论

7.3.1 以几个过程为例：散射振幅及其费曼图与费曼规则，树图（及其中性虚粒子），圈图（与光子自能）

一个介子到两个核子衰变： $\pi - NN$

为简洁而更具说明性起见，在本节及以后的各个例子中，我们都先不计算核子自旋进行运算，然后再进行一遍计入自旋的演示；即先考虑标量 Yukawa 理论，再考虑旋量 Yukawa 理论。

考虑一个介子到两个核子的衰变 $\pi - NN$ 。设此介子三维动量为 \mathbf{p} ，则其相对论不变的量子态即 $|p\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}|0\rangle$ ；此即初态 $|i\rangle$ 。两个出射核子动量分别为 $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$ ，于是末态即 $|f\rangle = \sqrt{4E_{\mathbf{p}'_1}E_{\mathbf{p}'_2}}b_{\mathbf{p}'_1}^{\dagger}c_{\mathbf{p}'_2}^{\dagger}|0\rangle$ 。于是，Yukawa 耦合下，此过程散射矩阵元一阶近似就是

$$\begin{aligned}\langle f|S|i\rangle^{(1)} &= -ig\langle f|T\int d^4x\psi^{\dagger}(x)\psi(x)\phi(x)|i\rangle \\ &= -ig(2\pi)^4\delta^4(p'_1 + p'_2 - p) \\ &= \text{---} \overset{p}{\text{---}} \begin{array}{c} \nearrow^{p'_1} \\ \searrow_{p'_2} \end{array} ; \end{aligned} \quad (383)$$

于是我们得到此过程的散射振幅是 $\mathcal{M} = -g$ 。上述过程中，我们仍是先进行解析计算，解后画出了过程的（动量空间的）费曼图；其规则（具体地，此处即 Yukawa 理论动量空间的费曼规则），亦是可想见的，例如顶点要附上四维动量守恒（包含能量守恒与三维动量守恒）因子等等。值得注意的是，外线上的箭头，并非粒子的运动方向，而是代表电荷的正反。一般地，顶点处亦是要满足电荷守恒的。下面我们把两出射粒子的自旋考虑进来，—这亦将使我们获得费米子的费曼图/费曼规则。不难计算出

$$\begin{aligned}\psi|p, s\rangle &= \psi^+|p, s\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}}a_{\mathbf{p}'}^{s'}u^{s'}(p')e^{-ip'x}\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}|0\rangle \\ &= u^s(p)e^{-ipx}|0\rangle, \end{aligned} \quad (384)$$

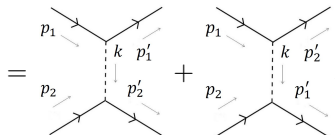
由此我们可得本过程有

$$\begin{aligned}\langle f|S|i\rangle^{(1)} &= -ig\bar{u}^s(p'_1)v^r(p'_2)(2\pi)^4\delta^4(p'_1 + p'_2 - p) \\ &= \text{---} \overset{p}{\text{---}} \begin{array}{c} \nearrow^{p'_1, s} \\ \searrow_{p'_2, r} \end{array} . \end{aligned} \quad (385)$$

从上述结果可以读出，须要分别再附上 $\bar{u}^{s'}(q_1)$ 与 $v^{r'}(q_2)$ ，这便是出线费米子的费曼规则。

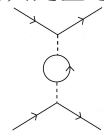
两个核子的散射: $NN - NN$

下面我们考虑两个核子的散射 $NN - NN$. 可以看出, 此过程的散射矩阵元一阶近似零, 最低是二阶的. 经过一番计算, 我们得

$$S_{fi}^{(2)} = i(-ig)^2 \left[\frac{1}{(p_1 - p'_1)^2 - m^2} + \frac{1}{(p_1 - p'_2)^2 - m^2} \right] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2)$$

(386)

上式中新引进的费曼规则是不难体会到的: 内线相应于一个传播子. 当然, 需要注意此传播子不满足质壳条件, 是离壳的; 这样的内线/传播子对应的是不可探测的虚过程.

上式所示的这种图形, 称为树图; 考虑更高阶微扰, 我们将得到带圈的图, 称为圈图. 上一节我们已说过, 散射问题中有意义的只是全连通图与截断图; 也就是

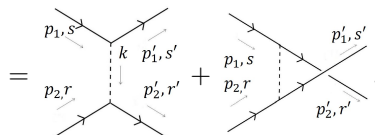
是说圈在外线上的图则不作考虑, 在内线上的, 如  才有贡献 (若内线是

光子, 则此内线上的圈修正代表真空极化/光子自能, 类比于前文电子的自能). 另外, 上述两个图是相加的, 即体系对于末态二粒子交换并不出来负号; 这正是玻色体系的特征 (当然这也就是我们注意到, 以后费米子的散射振幅计算中, 对末态二粒子交换要出来一个负号).

另外, 上式中第一图称为 t -channel; 第二图, 在费米子情况我们让出线交叉 (见下一图式), 称为 u -channel.

当然, 由费曼图, 我们亦可不必经过先读出散射矩阵元再拿到散射振幅, 而可以直接从图读出散射振幅 \mathcal{M} . 当然, 从图对应到散射振幅, 这就亦有相应的费曼规则; 读出之是非常容易的.

下面, 我们就来考虑计入自旋的情况, 并弃去动量守恒等部分, 直接拿出散射振幅. 此时可计算得

$$\mathcal{M}_{fi}^{(2)} = (-ig)^2 \left[\frac{\bar{u}^{s'}(p'_1) u^s(p_1) \bar{u}^{r'}(p'_2) u^r(p_2)}{(p_1 - p'_1)^2 - m^2} - \frac{\bar{u}^{r'}(p'_2) u^s(p_1) \bar{u}^{s'}(p'_1) u^r(p_2)}{(p_1 - p'_2)^2 - m^2} \right]$$

(387)

上述图-式之间的费曼规则, 亦是不言自明的; 例如末线交叉意指费米子须出来一个负号, 等等.

总之, 以上两例的计算, 我们使自己充分确信了, 费曼图与解析计算的确是等价的. 所以, 正像我们在前一节说过的, 以后我们一般不再进行散射矩阵/振幅的

由原始位置空间场算形式符到动量空间结果的计算, 而直接从正确画出的费曼图读出结果.

两个正反核子的散射: $N\bar{N} - N\bar{N}$

下面我们考虑核子-反核子的散射 $N\bar{N} - N\bar{N}$; 我们直接从图写出散射振幅的解析式:

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}^{(2)} &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \\
 &= i(-ig)^2 \left[\frac{1}{(p_1 - p'_1)^2 - m^2} + \frac{1}{(p_1 + p_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \right]. \quad (388)
 \end{aligned}$$

由此可见, 因为电荷的原因, 我们出现了一种新的图样, 即被称为 s -channel 的上述第二图. 在质心系中, 此图的分母可写出为 $4(M^2 + \mathbf{p}^2) - m^2$; 由此显然可知, s channel 中的中线粒子, 未必是总是离壳的, 也可以是在壳粒子; 在壳时散射振幅将出现一个共振峰值. 事实上, 例如 Z_μ^0 玻色子等, 我们就是这样发现的.

计入自旋后, 本散射二阶过程就为

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}^{(2)} &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \\
 &= i(-ig)^2 \left[\frac{\bar{u}^{s'}(p'_1) u^s(p_1) \bar{v}^{r'}(p'_2) v^r(p_2)}{(p_1 - p'_1)^2 - m^2} + \frac{\bar{v}^r(p_2) u^s(p_1) \bar{u}^{s'}(p'_1) v^{r'}(p'_2)}{(p_1 + p_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \right]. \quad (389)
 \end{aligned}$$

7.3.2 交叉对称性, $s/t/u$ -channel, Mandelstam 变量

第二式的获得, 可以看成是在第一式中作代换

$$p'_2 \rightarrow -p_2, \quad p_2 \rightarrow -p'_2 \quad (390)$$

的结果. 也就是说, 一端包含一个特定动量的粒子的过程的振幅, 等于另一端包含一个具有相反动量的反粒子的过程的振幅. 这, 称为交叉对称性.

上一小节中我们已见费曼图中 $s/t/u$ -channel 之分别. 对于这三个 channel, 我们分别记其常用动量组合为

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2)^2, \quad (391)$$

$$t = (p_1 - p'_1)^2 = (p_2 - p'_2)^2, \quad (392)$$

$$u = (p_1 - p'_2)^2 = (p_2 - p'_1)^2; \quad (393)$$

称为 Mandelstam 变量. 当然上述四个动量是守恒的, 即 $p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2$; 这也就是说上述三个 Mandelstam 变量是不独立的. 下面我们研究此事. 设 θ 是入射线与出射线的夹角; 而 E_{CM} 是质心系下二粒子总能 (四维动量守恒此时即归结于它的守恒), 这里为简明我们取二粒子质量相等, 即 $E_{\text{CM}} = 2E$; 于是, 在质心坐标系下, 我们就有 $p_1 = (E, 0, 0, \mathbf{p})$, $p_2 = (E, 0, 0, -\mathbf{p})$, $p'_1 = (E, 0, \mathbf{p} \sin \theta, \mathbf{p} \cos \theta)$, $p'_2 = (E, 0, -\mathbf{p} \sin \theta, -\mathbf{p} \cos \theta)$; 进一步可得 $s = 4E^2 = E_{\text{CM}}^2$, $t = -2\mathbf{p}^2(1 - \cos \theta)$, $u = -2\mathbf{p}^2(1 + \cos \theta)$ (由此可知 $\theta = 0$ 时 t 过程不存在振幅全归于 u 过程; $\theta = \pi$ 时 u 过程不存在, 振幅全归于 t 过程; 当然一般情况下, 振幅是这两个过程的和). 最终, 我们就得到 $s + t + u = 4E^2 - 4\mathbf{p}^2 = 4m^2$. 这是四个粒子质量都相等的情况; 当粒子质量不等时, 就是

$$s + t + u = \sum_i m_i^2 \quad (394)$$

7.3.3 Yukawa 势

在经典力学或量子力学的语言中, 二粒子间透过中间粒子的相互作用, 表现为二粒子间有所谓相互作用势; 这是在低能下的有效语言. 下面, 我们就来导出 Yukawa 耦合在低能下的有效势, 即 Yukawa 势. 我们以 $NN - NN$ 散射为例, 在质心坐标系下, 此过程的散射振幅 (387) 可以写为

$$i\mathcal{M}^{(2)} = +ig^2 \left[\frac{1}{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 + m^2} + \frac{1}{(\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2 + m^2} \right]; \quad (395)$$

前后两项分别描述二粒子从量子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 到 $|\mathbf{p}'\rangle$ 与 $|- \mathbf{p}'\rangle$ 的跃迁. 我们考虑第一项, 即二粒子从 $|\mathbf{p}\rangle$ 到 $|\mathbf{p}'\rangle$ 的过程. 在低能/量子力学语言中, 我们把其中一个粒子的存在看成一种势场 $U(\mathbf{r})$; 上述高能下的一般粒子散射振幅, 在低能近似后, 即成为另一个粒子在此势之中的散射振幅. 现在, 我们用量子力学语言直接算出对应于上述高能振幅的低能结果 (此时前文得到的散射矩阵元式仍是有效的): 精确到最低有效阶, 就有 $-i\langle \mathbf{p}' | U(\mathbf{r}) | \mathbf{p} \rangle = -i \int d^3\mathbf{r} U(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{r}}$; 命与式与上式中第一项相等, 就得到

$$\int d^3\mathbf{r} U(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{r}} = \frac{-(\lambda := g/2M)^2}{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 + m^2}; \quad (396)$$

从上式即可解出

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) &= -\lambda^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}}{\mathbf{p}^2 + m^2} \\ &= -\frac{\lambda^2}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{dp p^2}{p^2 + m^2} \frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{ipr} \\ &= -\frac{\lambda^2}{2\pi r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi i} \frac{p e^{ipr}}{p^2 + m^2} \\ &= -\frac{\lambda^2}{4\pi r} e^{-mr}. \end{aligned} \quad (397)$$

此即 Yukawa 耦合在低能下的 Yukawa 势. 上式中的负号表明等效 Yukawa 力 (核子之间通过介子的相互作用) 是吸引的. 另外, 上式中 m 是高能观点下两粒子所交换的中间粒子的质量; 可见中间粒子质量与经典力程大小呈反比例关系. 当然, 库仑力亦可由电磁耦合的低能近似得到; 这我们将在电动力学中呈现. 注意高能观点下电子交换的中间玻色子光子无质量, 这对应于电磁力是长程力这一事实.

7.4 量子电动力学: 电磁散射过程振幅的二阶 (树图) 近似

描述电子 (或一般地带电荷粒子) 与光子的相互作用的量子理论, 称为量子电动力学. 以电子与光子为例, 一般地, 我们可以有以下一些电磁散射过程:

- 康普顿散射/正电子康普顿散射 $e^- + \gamma = e^- + \gamma$, $e^+ + \gamma = e^+ + \gamma$;
- 电子对产生/湮灭 $\gamma + \gamma = e^- + e^+$, $e^- + e^+ = \gamma + \gamma$;
- 穆勒散射 $e^- + e^- = e^- + e^-$;
- 巴巴散射 $e^- + e^+ = e^- + e^+$;
- 正电子散射 $e^+ + e^+ = e^+ + e^+$;
- 韧致辐射 $e^- + N = e^- + N + \gamma$,

等等.

与前述 Yukawa 理论相似的, 我们可先解析计算出某个散射过程的 (如二阶) 散振振幅, 再通过赋予费曼规则而得到相应过程的图形化表示 (二阶时即树图); 然后, 更一般地, 我们可先画出费曼图, 再通过费曼规则而写下相应过程散射振幅的解析表达式. 这里, 我们不再赘述, 而直接给出量子电动力学的费曼规则. 首先, 我们已知某种粒子内线对应相应的传播子, 这在内线是光子时当然仍然适用; 第二, 外线规则我们也业已明析, 对于外线是光子的情形, 附上一个相应的极化矢量即可; 第三, 也是我们新遇到的, 即电磁作用顶点, 为 $-ie\gamma^\mu$.

由此, 我们就可由特定的树图, 写出相应电磁散射过程散射振幅的二阶近似结果了. 对于穆勒散射, 此即

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}^{(2)} &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \\
 &= -i(-ie)^2 \left[\frac{\bar{u}^{s'}(p')\gamma^\mu u^s(p)\bar{u}^{r'}(q')\gamma_\mu u^r(q)}{(p-p')^2} - \frac{\bar{u}^{r'}(q')\gamma^\mu u^s(p)\bar{u}^{s'}(p')\gamma_\mu u^r(q)}{(p-q')^2} \right].
 \end{aligned} \tag{398}$$

对于巴巴散射, 我们可得

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}^{(2)} &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \\
 &= -i(-ie)^2 \left[-\frac{\bar{u}^{s'}(p')\gamma^\mu u^s(p)\bar{v}^r(q)\gamma_\mu v^{r'}(q')}{(p-p')^2} + \frac{\bar{v}^r(q)\gamma^\mu u^s(p)\bar{u}^{s'}(p')\gamma_\mu v^{r'}(q')}{(p+q)^2} \right].
 \end{aligned} \tag{399}$$

对于正负电子对湮灭, 我们有

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}^{(2)} &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \\
 &= i(-ie)^2 \bar{v}^r(q) \left[\frac{\not{p} - \not{p}' + m}{(p-p')^2 - m^2} + \frac{\not{p} - \not{q}' + m}{(p-q')^2 - m^2} \right] u^s(p) \gamma_\nu \epsilon_1^\nu(p') \gamma_\mu \epsilon_2^\mu(q').
 \end{aligned} \tag{400}$$

对于康普顿散射, 我们有

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}^{(2)} &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \\
 &= i(-ie)^2 \bar{u}^{s'}(p') \left[\frac{\not{p} + \not{q} + m}{(p+q)^2 - m^2} + \frac{\not{p} - \not{q}' + m}{(p-q')^2 - m^2} \right] u^s(p) \gamma_\nu \epsilon_{in}^\nu(q) \gamma_\mu \epsilon_{out}^\mu(q').
 \end{aligned} \tag{401}$$

下面, 我们以为例, 来具体计算一下相应的散射截面.

8 圈图发散及 (单圈) 重整化: 以量子电动力学为例

对于电磁散射问题(或稍后的磁矩问题), 树图近似即能给出比较好的结果的. 可以想见, 近一步考虑高阶即圈图近似 (称为辐射修正), 将给出更好的结果. 然而写出解析表达式不难发现, 圈图是发散的. 解决这个困难, 便需要引入重整化这一理论. 本章我们就来一步步探讨之.

前一章中, 我们已见识过 ϕ^4 理论的自能; 后者的物理意义, 便是两点自由传播子或多点树图 (的内线传播子) 的 (单粒子不可约) 修正. 由彼处进行类比, 我们不难得知电子的二阶自能为

$$-i\Sigma^{(2)}(p) = \text{Diagram} = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\nu. \quad (402)$$

另外, 光子的二阶自能 (又可叫二阶真空极化) 为

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = \text{Diagram} = (-ie)^2 (-1) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma_\mu \frac{i}{\not{p} - m} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} \right]; \quad (403)$$

单粒子不可约顶角/正规顶角/完全顶角/顶角函数 (类比于电子或光子的自能) Γ_μ 的二阶修正 (有三个电磁顶角) 写为

$$\Lambda^{(2)}(p) = \text{Diagram} = -ie^2 \int \frac{d^4k'}{(4\pi)^4} \frac{1}{k'^2} \gamma_\nu \frac{1}{\not{p}' - \not{k}' - m} \gamma_\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k}' - m} \gamma^\nu. \quad (404)$$

显然, 上述三个结果, 都是发散的. 一般地, 量子场论中的高阶修正, 即圈图, 都面临这一问题. 重整化, 即系统地消除这些发散的一种手续.

重整化的第一步, 是把圈图结果中的发散分离出来, 此一过程称为正规化. 正规化的方法, 有截断正规化, 格点正规化以及维数正规化 (将积分推广到 d 维, 然后再令 $d \rightarrow 4$) 等. 这里, 我们采用后者. 在具体进行正规化计算之前, 我们需要准备一些关于电荷维数分析, 费曼参数化公式以及 Γ 函数等方面的知识. 下面我们先来完成这些预备工作.

首先, 量纲分析可知, 推广到 d 维以后, 对电荷我们有 $[q] = L^{d/2-2} = \Lambda^{2-d/2}$; 所以我们可令 $q = \mu^{2-d/2}e$, 其中 μ 称为质量参数. 其次, 我们有如下公式

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[ax + b(1-x)]^2}, \quad (405)$$

称为费曼参数化公式. 第三, 对于 γ 矩阵, 在 d 维时空仍有 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, 其它性质兹不赘列. 最后, 我们有如下 d 维闵氏空间的动量积分公式

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 - m^2)^\alpha} = \frac{(-1)^{\alpha} i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(\alpha - d/2)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(m^2)^{\alpha-d/2}}. \quad (406)$$

若再利用平移不变性 $\int d^d p F(p) = \int d^d p F(p+q)$, 以及再将前述结果对 q 进行求导, 我们还可分别得到下述第一式与后两式

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} = \frac{(-1)^{\alpha} i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(\alpha - d/2)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(q^2 + m^2)^{\alpha-d/2}}, \quad (407)$$

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^\mu}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} = \frac{(-1)^{\alpha-1} i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(\alpha - d/2)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(q^2 + m^2)^{\alpha-d/2}}, \quad (408)$$

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - m^2)^\alpha} = \frac{(-1)^{\alpha-1} i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{g^{\mu\nu} \Gamma(\alpha - 1 - d/2)}{2\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(m^2)^{\alpha-1-d/2}}. \quad (409)$$

另外,

旋量 QED 的完整拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (410)$$

8.1 Ward-Takahashi 恒等式, 光学定理

9 量子色动力学, 杨-Mills 理论

略一思考就可发现, 使核子凝结成核的相互作用, 或者强子 (包括重子, 介子) 之间的相互作用, 是一种不同于万有引力或电磁力的新的相互作用; 我们称为强相互作用; 是物质间的四种基本相互作用之一. 正如其名字显示的那样, 强相互作用是四种基本相互作用中最强的. 对比于电磁相互作用的结构常数 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx 137$, 强相互作用下可有 $\frac{g^2}{4\pi\hbar c} \approx 1 \sim 10$. 另外, 强相互作用是一种短程力 (但比弱力稍长), 其作用距离约为原子核中核子之间的距离. 最后, 强相互作用比其它三种力, 有更大的对称性, 即有更多的守恒律. 量子色动力学理论, 把强相互作用归结为由夸克之间交换胶子而产生. 本章即来研究之.

9.1 夸克: 六种味与三种荷, 色空间的 SU(3) 规范变换, 八种胶子, 杨-Mills 规范场拉氏密度

夸克有 6 味: u, d, s, c, t, b; 可用下标 $f = 1, \dots, 6$ 标记. 每味又分 3 色 (所以算上反粒子, 夸克共有 36 种): R, G, B; 可用下标 $n = 1, 2, 3$ 标记. 每味夸克的三个荷态, 都张成一个三维内部空间, 称为色空间, 可以表示为

$$\psi = \psi_f = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T. \quad (411)$$

注意夸克是自旋为 1/2 的费米子, 即每个色态 ψ_n 都是狄拉克旋量. 于是 (自由) 夸克的拉氏密度就可写为 $\mathcal{L}_q = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$; 其中 m 显然就成了矩阵, 称为质量矩阵. 注意夸克质量与色无关, 所以质量矩阵是常数倍的单位阵. 关于夸克有两个基本现象, 一是夸克的色禁闭, 另一是渐近自由.

在夸克色的三维复空间内的保持矢量长度不变的转动操作 U (是 3×3 的复矩阵, 有 18 个参数) 形成 SU(3) 群, 它是幺模 ($\det U = 1$) 幺正 ($U^\dagger U = 1$) 的. 由此, U 操作矩阵独立参数只有 8 个. 于是我们便可将 U 矩阵用八个独立的厄米矩阵—称为盖尔曼矩阵²⁷— λ^a 表示为

$$U = e^{i\theta_a \lambda^a / 2} := e^{i\theta_a T^a}, \quad a = 1, \dots, 8. \quad (413)$$

²⁷SU(3) 中盖尔曼矩阵的地位, 即类似于 SU(2) 情况下泡利矩阵的地位. 下面我们具体写出盖尔曼矩阵的形式

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \lambda_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (412)$$

盖尔曼矩阵有性质 $\text{tr}\lambda^a = 0$, $\text{tr}\lambda^a\lambda^b = 2\delta^{ab}$. $\text{SU}(3)$ 群的李代数是

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c; \quad (414)$$

其中结构常数 f_{abc} 对任意两个指标都是反对称的. 由雅可比恒等式 $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$, 可推出本群结构常数满足 $f_{ade}f_{bcd} + f_{bde}f_{cad} + f_{cde}f_{abd} = 0$. 本群结构常数不为零的分量有

$$f_{123} = 1, f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (415)$$

$$f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2}. \quad (416)$$

夸克场在色空是的规范变换为 $\psi \rightarrow \psi' = U\psi = e^{i\theta_a T^a} \psi$. 自由夸克场在色空间具有严格的整体规范不变性. 下面我们来规范 (把一个整体对称性扩大为定域对称性, 我们往往称之为规范这个对称性; 一个整体对称性只有是严格的, 才能被规范) 这个对称性. 方法是显然的, 即我们仍然作从一般偏微分到协变微商的变换: $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$; 并要求当 $D_\mu \rightarrow D'_\mu = \partial_\mu + iqA'_\mu$ 时,

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = UA_\mu U^\dagger + \frac{i}{q}(\partial_\mu U)U^\dagger = UA_\mu U^\dagger - \frac{i}{q}U\partial_\mu U^\dagger, \quad (417)$$

我们就可得 $D_\mu \psi \rightarrow D'_\mu \psi' = UD_\mu \psi = UD_\mu U^\dagger \psi'$, 或

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = UD_\mu U^\dagger. \quad (418)$$

也就是说, 这样, 我们就得到了一个定域规范不变的理论了: $\mathcal{L}_{q+qg} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu$.

$\text{SU}(3)$ 群生成元是内部空间的矩阵, 一般互不对易, 这样的群称为非阿贝尔群. 故我们称由 $\text{SU}(3)$ 的转动不变性而引入的场, 为非阿贝尔场, 或杨-Mills 规范场.

下面我们讨论 A_μ 的一般性质. 将前述 A_μ 的规范变换取共轭, 即有 $A_\mu^\dagger \rightarrow A_\mu'^\dagger = UA_\mu^\dagger U^\dagger - \frac{i}{q}U\partial_\mu U^\dagger$; 于是可得 $A_\mu'^\dagger - A'_\mu = U(A_\mu^\dagger - A_\mu)U^\dagger$. 也就是说, $A_\mu^\dagger - A_\mu = 0$ 规范不变. 这就意味着, 若我们在某规范下取定场 A_μ 是厄米的, 则它在任何规范下都是厄米的.

因为 $\text{tr}T^a = 0$, 所以可得 $\text{tr}A'_\mu = \text{tr}A_\mu$, 即规范场的迹是规范不变的. 于是我们可取定 $\text{tr}A_\mu = 0$, 即相当于取定

$$A_\mu = A_\mu^a T_a \quad (419)$$

此与夸克通过色耦合的 8 个 杨-Mills 规范场 A_μ^a , 即 8 个胶子. 描述夸克色与它们相互作用的理论, 即称为 QCD: 量子色动力学.

在无限小规范变换下, $U = e^{i\theta_a T^a} = 1 + i\theta_a T^a$, 于是我们有 $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + i\theta^a [T^a, A_\mu] - \frac{1}{q}\partial_\mu \theta_a \cdot T^a$; 进一步可得

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu'^a = A_\mu^a - f_{abc}\theta^b A_\mu^c - \frac{1}{q}\partial_\mu \theta^a := A_\mu^a - \frac{1}{q}D_\mu^{ab}\theta^b, \quad (420)$$

其中 $D_\mu^{ab} = \delta^{ab}\partial_\mu + gf_{abc}A_\mu^c$.

现在我们找出杨-Mills 规范场的拉氏密度. 在麦克斯韦场情况, 即 U(1) 规范场情形, 我们就可发现 $[D_\mu, D_\nu] = iqF_{\mu\nu}$; 在 杨-Mills 情形, 我们即把此即作为规范场 $F_{\mu\nu}$ 的定义:

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{iq}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + iq[A_\mu, A_\nu]. \quad (421)$$

我们已取 $\text{tr}A_\mu = 0$, 故亦有 $\text{tr}F_{\mu\nu} = 0$, 所以我们亦可将 $F_{\mu\nu}$ 表为 $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T_a$. 于是对此分量情况我们就可得 $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$.

我们考虑下述无限小规范变换

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\rightarrow F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^\dagger = F_{\mu\nu}^a U T_a U^\dagger = F_{\mu\nu}^a T_a + i\theta^b F_{\mu\nu}^a [T^b, T^a] \\ &= (F_{\mu\nu}^a - f^{abc}\theta^b F_{\mu\nu}^c) T_a, \end{aligned} \quad (422)$$

也就是说 $F_{\mu\nu}^a \rightarrow F'^a_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a - f^{abc}\theta^b F_{\mu\nu}^c$. 这表明, $F_{\mu\nu}$, 进而 $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, 是不具有规范不变性的; 同时亦可见具有规范不变性的是其迹, 即

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\text{tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}. \quad (423)$$

我们取上式为杨-Mills 规范场的拉氏密度.

9.2 杨-Mills 场的路径积分量子化, Faddeev-Popov 方法

所有可能的 A_μ , 包括物理的 (不能用规范变换相联系) 与由规范变换联系着的, 张成一个超空间; 物理的子空间作为此空间的超曲面存在. 所谓规范条件, 即把 A_μ 的取值限定在某超曲面上的方程:

$$G^a[A_\mu(x)] = 0. \quad (424)$$

由于不同规范条件给出的物理结果是等价的, 所以此超曲面可以有多种不同的选择, 彼此亦是物理等价的.

选定了超曲面后, 其上一点 (物理解), 通过规范变换就得到在此点上单穿过此曲面的一条曲线. 曲面上不同点的规范曲线互不相交. 总之, 物理超曲面通过规范变换构成高维简并空间, 即前述提到的超空间.

为了践行上述思想, Faddeev 与 Popov 提出的办法, 是在生规范场的成泛函中插入下列等式:

$$1 = \Delta[A_\mu] \int \mathcal{D}U \delta[G[A_\mu^U]]. \quad (425)$$

其中, A_μ^U 是由 A_μ 通过规范变换 U 得到的 A'_μ , 即由 U 衍生出的规范曲线上的其它某点; 而 $\delta[G[A_\mu^U]] = \prod_{a,x} \delta(G^a[A_\mu^U(x)])$ 是 δ 泛函. 上述 Faddeev-Popov 等式, 事实上即 $\Delta[A_\mu]$ 的定义. 因为泛函积分结果是一个行列式, 所以

我们又称 $\Delta[A_\mu]$ 为 Faddeev-Popov 行列式. 相继做两次规范变换不难发现, Faddeev-Popov 行列式是规范不变的, 即有

$$\Delta[A_\mu] = \Delta[A_\mu^U]. \quad (426)$$

现在我们写出引入 Faddeev-Popov 等式的生成泛函:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}U \Delta[A_\mu] \delta[G[A_\mu^U]] e^{iS} = \int \mathcal{D}A \Delta[A_\mu] \delta[G[A_\mu]] e^{iS}. \quad (427)$$

我们将规范条件写作

$$G^a[A_\mu(x)] = \Omega^a[A_\mu(x)] - \omega^a(x) = 0, \quad (428)$$

则可得生成泛函为

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A \Delta[A_\mu] e^{i(S - \Omega^2/2\xi)}. \quad (429)$$

其中 $-\Omega^2/2\xi$ 就是规范固定项. 例如若取 $\Omega^a[A_\mu(x)] = \partial^\mu A_\mu^a$, 就得到我们在麦克斯韦场中所取的一般规范.

为了能从生成泛函作具体运算, 我们还将 Faddeev-Popov 行列式改写成指数形式. 由于这样的要求, Faddeev-Popov 行列式必须被写为 格拉斯曼数的泛函积分:

$$\Delta[A_\mu] = \int \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta e^{-i\bar{\eta} M \eta}. \quad (430)$$

这相当于引入了一个与规范场耦合的又一种场 (消去多余自由度的代价是导致与鬼场的耦合); 但此场虽然引入了格拉斯曼变量, 却不是旋量场, 而是玻色场. 由于这种反常关系, 这种场并非物理的, 我们称之为 Faddeev-Popov 鬼场. 它只出现在圈中, 并不会成为外线. 总之, 杨-Mills 规范场完整的生成泛函就是

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A \Delta[A_\mu] e^{i(S - \Omega^2/2\xi - \bar{\eta} M \eta)}; \quad (431)$$

其中

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_A - \frac{1}{2\xi} \Omega^2 - \bar{\eta} M \eta, \quad (432)$$

包含的规范固定项与鬼项, 称为 Faddeev-Popov 拉氏密度.

9.3 BRST 对称性

在协变规范中, 含物质场的总 Faddeev-Popov 拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 - \bar{\eta}^a \partial^\mu D_\mu^{ab} \eta^b. \quad (433)$$

我们可以将鬼场诠释为亦由规范变换所引入的一个场, 即将变换参数表为

$$\theta^a = -g\epsilon\eta^a; \quad (434)$$

其中 ϵ 是格拉斯曼数. 于是规范场与夸克场的规范变换 (无穷小) 就是

$$\delta A_\mu^a = \epsilon D_\mu^{ab} \eta^b, \quad \delta\psi = -ig\epsilon\eta^a T^a \psi. \quad (435)$$

为了保持总拉氏密度在上述变换下保持不变, 鬼场还应有如下变换行为

$$\delta\eta^a = \frac{1}{2}g\epsilon f^{abc}\eta^b\eta^c, \quad \delta\bar{\eta}^a = -\frac{\epsilon}{\xi}\partial^\mu A_\mu^a. \quad (436)$$

上两式与前两式, 合称为 BRST 变换. 可以验证, 上述总拉氏密度, 在 BRST 变换下的确是不变的.

在 BRST 变换下的不变性, 又称为 BRST 对称性. 本小节拉氏密度的 BRST 对称性, 是一种变换参数为 ϵ 的整体对称性; 其中包含了物质场与规范场的定域不变性. 总之可见, BRST 对称性是定域规范对称性的一种拓展.

一般地, 我们可以把任意一个场的 BRST 变换表为 $\delta\phi = \epsilon Q\phi$; 其中 Q 是作用于场上的算符, 称为 BRST 算符. 可以求得一般地我们有

$$Q^2 = 0; \quad (437)$$

我们将此事称为 BRST 变换或算符是零幂的.

10 电弱统一: GWS 理论; 标准模型

10.1 电弱相互作用的拉氏密度: 以轻子为例; 初始轻子无质量; 弱同位旋, 弱超荷; 温伯格转动, 弱混合角; Gell-Mann-Nishijima 公式; 弱同位旋的带电流与中性流

诸如 β 衰变等原子核/亚原子粒子的放射性衰变, 其中必须有一种能改变粒子的味量子数的基本相互作用的参与. 我们称这种相互作用为弱相互作用. 弱作用是四种基本相互作用中作用距离最短的, 低能时近似成为四费米子的直接的定域相互作用, 中间玻色子有很大的质量. 另外, 弱作用必须要有带电的中间玻色子. 在基本粒子中, 弱相互作用影响所有费米子 (轻子, 夸克), 以及希格斯玻色子. 本节, 我们将以轻子为例. 我们知道, 6 个 (称为 6 种味; 算上反粒子则共有 12 个) 轻子共分三代, 其中电子 μ 子与 τ 子带电, 相应的中微子不带电, 且质量极小.

1956 年, 杨振宁与李政道指出弱作用过程中宇称 P 不守恒. 以后人们进一步认识到, 在弱作用过程中 (以及在任何时候), 中微子总是左旋的. 这为我们进一步构建弱作用的理论, 指明了方向: 因为质量项会造成左右旋的耦合, 所以上发现就意味着, 弱相互作用拉氏密度中轻子不能有质量项. 也就是说, 我们假设初始轻子是无质量的. (而轻子往往是有质量的; 质量如何获得? 这将由下一节的希格斯机制赋予.) 于是我们可将轻子的电弱拉氏密度写为

$$\mathcal{L}_{EW} = \sum_{e:=e,\mu,\tau} i(\bar{e}\gamma^\mu\partial_\mu e + \bar{\nu}_e\gamma^\mu\partial_\mu\nu_e); \quad (438)$$

其中我们已采取粒子物理中的习惯, 即将某种粒子的场就用彼种粒子的符号表示. 我们假设每代轻子的左旋分量, 构成一个二维内部空间—称为弱同位旋空间—的矢量, 记为

$$L_e := \begin{bmatrix} \nu_e \\ e_L \end{bmatrix}; \quad (439)$$

称为弱同位旋二重态. 显然, 弱同位旋空间具有 $SU(2)$ 群的对称性, 其转动操作/规范变换为 $e^{i\alpha^i T^i} = e^{i\alpha^i \sigma^i/2}$; 其中 σ^i 是二维复空间转动的生成元, 即泡利矩阵. 这就意味着, L 具有同位旋 $T = 1/2$, 即 $TL = \frac{1}{2}\sigma L$; 而考察同位旋的第三分量, 中微子与相应的荷电子分别具有 $T^3 = 1/2$ 与 $-1/2$. 另外, 我们定义 $R_e = e_R$ (事实上, 在有双重态与单态相作用时, 我们应取 $R_e = \begin{bmatrix} 0 \\ e_R \end{bmatrix}$), 并称其具有同位旋量值为 0, 命名为弱同位旋单态. 至此, 我们可将电弱拉氏密度进一步表为

$$\mathcal{L}_{EW} = i\bar{L}_e\gamma^\mu\partial_\mu L_e + i\bar{R}_e\gamma^\mu\partial_\mu R_e; \quad (440)$$

其中略去了求和符号, 有时我们也可将脚标 e 略去. 另注意此时 $\bar{L} = L^\dagger \begin{bmatrix} \gamma^0 & 0 \\ 0 & \gamma^0 \end{bmatrix}$; 也就是说, 在弱同位旋二重态这个由两个狄拉克旋量构成的空间中, 要么把 γ^μ 看成具有直接移动的功能, 要么把它看作 $\begin{bmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & \gamma^\mu \end{bmatrix}$.

下面我们继续对弱作用规范变换的研究. 除了上述提到的 $SU(2)$ 对称性, 弱作用拉氏量对 $SU(1)$ 规范变换 $e^{i\beta Y_W/2}$ 亦是不变的; 其中 Y_W 称为弱超荷算符, 它在二重态与单态上的本征值记为 $Y_W L = Y_L L$, $Y_W R = Y_R R$; $Y_{L/R}$ 的具体数值, 我们将在稍后确定. 最后, 显然可见同位旋空间对 T_W 是简并的, 即有 $[T^i, Y_W] = 0$; 于是我们可得电弱相互作用的两种规范变换可合写为

$$U = e^{i\beta Y_W/2 + i\alpha^i T^i}. \quad (441)$$

下面, 我们来规范电弱相互作用的两种规范对称性, 亦即进行引入规范场的工作. 当然, 这仍从写出协变微商开始:

$$D_\mu = \partial_\mu + igT^i W_\mu^i + i\frac{1}{2}g'Y_W B_\mu. \quad (442)$$

具体地, 协变微商作用在弱同位旋单态与二重态上分别为

$$D_\mu R_e = \left(\partial_\mu + i\frac{1}{2}g'Y_R B_\mu \right) R_e, \quad (443)$$

$$\begin{aligned} D_\mu L_e &= \left(\partial_\mu + ig\frac{1}{2}\sigma^i W_\mu^i + i\frac{1}{2}g'Y_L B_\mu \right) L_e \\ &= \partial_\mu L_e + \frac{i}{2} \begin{bmatrix} gW_\mu^3 + g'Y_L B_\mu & gW_\mu^1 - igW_\mu^2 \\ gW_\mu^1 + igW_\mu^2 & -gW_\mu^3 + g'Y_L B_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_e \\ e_L \end{bmatrix} \\ &:= \partial_\mu L_e + \frac{i}{2} \begin{bmatrix} gW_\mu^0 + g'Y_L B_\mu & \sqrt{2}gW_\mu^+ \\ \sqrt{2}gW_\mu^- & -gW_\mu^0 + g'Y_L B_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_e \\ e_L \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (444)$$

可以看出, 上式中

$$W_\mu^+ := \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - iW_\mu^2), \quad W_\mu^- := \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + iW_\mu^2) \quad (445)$$

是具有明确的物理意义的, 即为传递弱相互作用的两种 (带电的) 中间玻色子. 同时亦可看出, $W_\mu^0 := W_\mu^3$ 与 B_μ 因为同时与中微子与带电轻子耦合, 所以不可能被诠释为弱作用或电磁作用各自的规范场. 但动动脑子不难想出, 后者, 必当是 W_μ^0 与 B_μ 的叠加; 我们假设此叠加为一酉转动:

$$\begin{bmatrix} A_\mu \\ Z_\mu^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_\mu \\ W_\mu^0 \end{bmatrix}. \quad (446)$$

上式称为温伯格转动, 而 θ_W 称为弱混合角, 或温伯格角. 下面的事情, 就是要确定下此角. 不难看出, 在原式 (444) 中, 含 A_μ 又与中微子耦合的项是矩阵中左

上角一项; 于是用温伯格转动反解出

$$B_\mu = \cos \theta_W \cdot A_\mu - \sin \theta_W \cdot Z_\mu^0, \quad (447)$$

$$W_\mu^0 = \sin \theta_W \cdot A_\mu + \cos \theta_W \cdot Z_\mu^0, \quad (448)$$

就可算出此项是

$$gW_\mu^0 + g'Y_L B_\mu = (g \sin \theta_W + g'Y_L \cos \theta_W)A_\mu + (g \cos \theta_W - g'Y_L \sin \theta)Z_\mu^0. \quad (449)$$

当然, 为了把 A_μ 诠释为电磁相互作用的中间玻色子 (于是 Z_μ^0 就成了弱作用的第三种中间玻色子, 是不带电的), 我们必须要求它与中微子是没有耦合的, 即要求 $g \sin \theta_W + g'Y_L \cos \theta_W = 0$; 于是可得

$$\sin \theta_W = \frac{-g'Y_L}{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}}, \quad \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2 Y_L^2}}. \quad (450)$$

温伯格角的具体数值, 必须由实验得出; 最新测值约为 $\sin^2 \theta_W = 0.2223(21)$. 通过简单的叠加, 就得到了物理的规范场, 温伯格转动实至妙哉, 美哉!

现在, 我们来分离中前述电弱相互作用中的电磁部分; 此项即 (444) 中矩阵的右下角一项:

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu + ig' \frac{1}{2} Y_W \cos \theta_W A_\mu + iT^3 \sin \theta_W A_\mu \\ &= \partial_\mu + ig' \cos \theta_W \left(\frac{Y_W}{2} - Y_L T^3 \right) A_\mu. \end{aligned} \quad (451)$$

与我们已知的电磁作用的协变微商作比较, 我们可得 $g' \cos \theta_W := e$ 是基本电荷; 而圆括号中的一项即电荷算符:

$$Q = -Y_L T^3 + \frac{Y_W}{2}. \quad (452)$$

上式与强相互作用中的 Gell-Mann-Nishijima 公式具有相同的形式. 要求以上算符作用于单态与二重态给出正确的电荷量子数, 即 $QR = Y_R/2 = -1$, $QL =$

$$Q \begin{bmatrix} \nu_e \\ e_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-Y_L \frac{1}{2} + \frac{Y_L}{2}) \nu_e \\ (Y_L \frac{1}{2} + \frac{Y_L}{2}) e_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot \nu_e \\ 1 \cdot e_L \end{bmatrix}, \text{ 我们就可得出}$$

$$Y_L = -1, \quad Y_R = -2. \quad (453)$$

据此, 我们可将前述所有出现 Y_L , Y_R 的式子进行化简, 例如 $Q = T^3 + \frac{Y_W}{2}$, 或电荷

$$e = g' \cos \theta_W = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g \sin \theta_W. \quad (454)$$

至此, 我们可进一步将式 (444) 写为

$$D_\mu L_e = \partial_\mu L_e + \frac{i}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{g^2 + g'^2} Z_\mu^0 & \sqrt{2} g W_\mu^+ \\ \sqrt{2} g W_\mu^- & -2e A_\mu + \frac{g'^2 - g^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_e \\ e_L \end{bmatrix}. \quad (455)$$

写出具有定域规范不变, 即引入与规范场耦合的轻子拉氏密度, 就是简单不过的事了:

$$\mathcal{L}_{\text{free+int}} = i\bar{L}_e\gamma^\mu D_\mu L_e + i\bar{R}_e\gamma^\mu D_\mu R_e = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}}; \quad (456)$$

其中相互作用部分为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} = & -\frac{1}{2}(\nu_e^\dagger, e_L^\dagger) \begin{bmatrix} \gamma^0 & 0 \\ 0 & \gamma^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{g^2 + g'^2} \not{Z}^0 & \sqrt{2}gW^+ \\ \sqrt{2}gW^- & -2eA + \frac{g'^2 - g^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \not{Z}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_e \\ e_L \end{bmatrix} \\ & + \bar{R}_e \left(eA - \frac{g'^2 \not{Z}^0}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right) R_e = \mathcal{L}_{eA} + \mathcal{L}_{lW} + \mathcal{L}_{lZ}; \end{aligned} \quad (457)$$

最后的标记意味上述相互作用拉氏密度可分为电磁耦合项, 轻子- W 耦合项以及轻子- Z 耦合项; 下面我们分别写出. 电磁耦合项为

$$\mathcal{L}_{eA} = e\bar{e}_L\gamma^\mu A_\mu e_L + e\bar{e}_R\gamma^\mu A_\mu e_R = e \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{\psi}_l\gamma^\mu A_\mu \psi_l, \quad (458)$$

这完全就是我们在 QED 中的结论. 轻子与 W^\pm 耦合的项为

$$\mathcal{L}_{lW} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum (\bar{\nu}_e\gamma^\mu W_\mu^+ e_L + \bar{e}_L\gamma^\mu W_\mu^- \nu_e). \quad (459)$$

现在我们找出本场的守恒流, 顺便像以前在 QED 中所做的那样, 把上述拉氏密度耦合项表为流与规范场相乘的形式. 应用诺特定理的守恒流表达式 (139), 我们可求出本轻子场的守恒矢量流为

$$j^{\mu i} = \sum \bar{L}_e\gamma^\mu \sigma^i L_e. \quad (460)$$

若再命 $j^{\mu\pm} = j^{\mu 1} \pm ij^{\mu 2}$, $\sigma^\pm = (\sigma^1 \pm i\sigma^2)/2$, 则我们可得

$$j^{\mu\pm} = \sum 2\bar{L}_e\gamma^\mu \sigma^\pm L_e. \quad (461)$$

由此 \mathcal{L}_{lW} 就可进一步表为

$$\mathcal{L}_{lW} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} \sum (j^{\mu+} W_\mu^+ + j^{\mu-} W_\mu^-). \quad (462)$$

在弱作用研究的早期, 人们正是以先猜定上述带电弱流表达式来工作的. 下面我们写出 \mathcal{L}_{lZ^0} 项:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \left(\sqrt{g^2 + g'^2} \bar{\nu}_e\gamma^\mu \nu_e Z_\mu^0 + \frac{g'^2 - g^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e}_L\gamma^\mu e_L Z_\mu^0 + \frac{2g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e}_R\gamma^\mu e_R Z_\mu^0 \right) \\ = & -\frac{1}{2} \left(\sqrt{g^2 + g'^2} \bar{L}_e\gamma^\mu \sigma^3 L_e Z_\mu^0 + \frac{2g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{e}\gamma^\mu e Z_\mu^0 \right) \\ = & -\frac{1}{2} \frac{g}{\cos\theta_W} \sum (\bar{L}_e\gamma^\mu \sigma^3 L_e + 2\sin^2\theta_W \bar{e}\gamma^\mu e) Z_\mu^0; \end{aligned} \quad (463)$$

前述我们已预猜 Z_μ^0 是传递弱作用的不带电的玻色子, 这由上式可以得证: 上述表明 Z_μ^0 即能与带电轻子耦合又能与中微子耦合, 而中微子不带电, 即不接受电磁作用, 于是 Z_μ^0 只能是传递弱作用的中间玻色子. 另外, 在上述结果中

$$j^{\mu 0} := \bar{L}_e \gamma^\mu \sigma^3 L_e + 2 \sin^2 \theta_W \bar{e} \gamma^\mu e \quad (464)$$

即为轻子场与 Z_μ^0 中性玻色子耦合的中性弱流. 此中性流是由理论首先预言, 而后由实验证实的. 此一事情, 亦大大促使了人们对本电弱统一理论的接受.

前文已经提到过, 本节的理论, 我们假设了参与电弱作用的初始轻子与规范粒子都是无质量的. 不同于此假设, 事实上, 不仅电子等轻子, 就连弱作用的中间玻色子都是有质量的; 而且后者的质量还十分地大 (参与规范变换的是获得质量前的弱作用玻色子, 且是后者的叠加, 所以真实弱中间玻色子有质量与规范粒子必须无静质量这个看似矛盾, 就得以解开). 如何让它们获得质量, 我们即将在下一节中探讨.

10.2 整体规范对称性的自发破缺, 希格斯场, Goldstone 定理; 定域破缺, 希格斯机制: 规范场吃掉 Goldstone 玻色子获得质量; W^\pm , Z^0 以及轻子的质量的获得

复标量场 $\phi = \chi_1 + i\chi_2$ 的 ϕ^4 模型为

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 := \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - V(\phi, \phi^\dagger); \quad (465)$$

上式当然是具有整体规范 $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\gamma} \phi$ 不变性的. 场的基态/真空对应于势能的极小:

$$\frac{\partial}{\partial \phi^\dagger} V = m^2 \phi + 2\lambda \phi (\phi^\dagger \phi) = 0. \quad (466)$$

当 $m^2 > 0$, 上式给出的极小点为 $\phi = \phi^\dagger = 0$, 即真空在复平面坐标零点, 是惟一的. 而若 $m^2 < 0$, 复平面坐标零点反倒成了势能极大处, 不再是场的真空; 场的真空处满足

$$|\phi|^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 = -\frac{m^2}{2\lambda} := a^2, \quad (467)$$

即 $|\phi| = a$. 也就是说, 距复平面零点距离为 a 的圆线上的所有点, 都是场的真空; 场的真空此种状况下是无限简并的.

拉氏量对各个真空都是对称的; 但物理的真空, 只是诸多真空中的一个, 不再具有规范变换 (相位变换, 即复平面内的转动). 我们把这件事情, 称为场 ϕ 的 (真空的) 自发对称破缺.

另外, 式 (480) 亦表明, 场的真空期待值为 $|\langle 0 | \phi | 0 \rangle|^2 = a^2$. 这种真空期待期不为零的场, 我们称之为希格斯场.

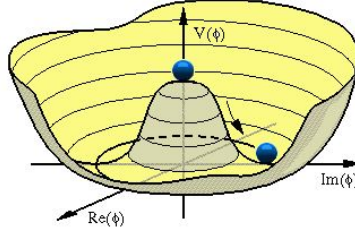


Figure 5: “墨西哥帽”势: 复标量场 ϕ^4 模型的自发对称破缺.

实验上测到的各种粒子, 都是场在真空基础上的激发; 于是我们上述场的基态 $\phi = a$ 分离出来, 即命

$$\phi = a + \frac{1}{\sqrt{2}}(h + i\rho). \quad (468)$$

也就是说, 此时 h, ρ 就是可以观测到的物理的场了. 将上述式子代入原始拉氏密度, 可得

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)^2 - \lambda v^2 h^2 - \lambda v h(h^2 + \rho^2) - \frac{\lambda}{4}(h^2 + \rho^2)^2; \quad (469)$$

其中 $v := \sqrt{2}a$. 上述推导中, 应用了式 (480), 并略去了常数项. 由上式显然可见, 场 h 具有质量

$$m_H = \sqrt{2\lambda}v; \quad (470)$$

希格斯场的这种粒子, 称为希格斯粒子. 另外, 还可以看出, 场 ρ 无质量. 一般地, 一个连续对称性的自发破缺, 会导致无质量场/粒子的存在, 这称为 Goldstone 定理; 相应的场/粒子就称为 Goldstone 场/粒子. 注意此处只是 Goldstone 定理的一例简单体现, 具体证明我们将在稍后给出.

虽然上述模型以 $m^2 < 0$ 为例得到了整体对称性的自发破缺, 但可以表明对于内部空间的矢量, 质量矩阵却必定是非负的. 现在设 ϕ 是某 N 维内部空间的列矢, 其拉氏密度一般地写为 $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - V(\phi)$; 势能在 $\phi = \phi_0$ 处有极小值, 即 $\left. \frac{\partial V}{\partial \phi_a} \right|_a = 0$. 那么, 考虑考在此真空附件的激发, 就有

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial_\mu \phi_a \partial \phi_b} \right|_{\phi=\phi_0} \delta \phi_a \delta \phi_b + O(\delta \phi^3) \quad (471)$$

$$:= V(\phi_0) + \frac{1}{2} m_{ab} \delta \phi_a \delta \phi_b + O(\delta \phi^3). \quad (472)$$

只要对真空产生了哪怕任何一点偏离, 则势能变化都是正值, 于是由上式可见必有 $m_{ab} \geq 0$. 现在, 我们来具体研究内部空间矢量场的 Goldstone 定理. 仍设 ϕ 是某 N 维内部空间的列矢, 则它就有规范变换 $\phi' = e^{i\theta_a T^a} \phi$. 现在, 我们在真空

处对此规范变换进行展开 (区别于之前的场对真空的左右偏离), 则有

$$V(\phi_0) = V(\phi'_0) = V(\phi_0) + \frac{1}{2}m_{ab}\delta\phi_a\delta\phi_b + \cdots; \quad (473)$$

于是可得 $m_{ab}\delta\phi_a\delta\phi_b = 0$. 这意味着, 若 $\delta\phi_a, \delta\phi_b$ 皆不为零, 则必有 $m_{ab} = 0$. 而 $\delta\phi_a$ 不为零, 意即两个不同的态皆为真空, 这说明真空发生简并, 对称性自发破缺. 从而我们确证, 对称性自发破缺, 必导致无质量粒子的存在. 此即 Goldstone 定理. 另外, 上述分析过程还表明, 质量矩阵为零的维数, 就是真空发生自发对称破缺的维度, 同时也就是 Goldstone 粒子的数目 N_G ; 而有质量的粒子, 即希格斯子的数目, 一般地即 $N - N_G$.

前文我们讨论的, 是整体规范对称性的自发破缺, 下面我们讨论定域规范对称性的自发破缺; 后者又或称为自发规范破缺. 先考虑阿贝尔规范场情况; 我们仍以复标量场为例. 引入规范场与 ϕ^4 自作用后的具有定域规范对称性的拉氏密度为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= D_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 - iq\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_\mu\phi A^\mu + q^2A^2\phi^\dagger\phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}; \end{aligned} \quad (474)$$

仍选择 $\phi = a + \frac{1}{\sqrt{2}}(h + i\rho)$, 则代入上式就可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)^2 - \lambda v^2 h^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}q^2 v^2 A^2 \\ &\quad - \lambda v h(h^2 + \rho^2) - \frac{\lambda}{4}(h^2 + \rho^2)^2 + qv\partial_\mu \rho A^\mu \\ &\quad + qh\overleftrightarrow{\partial}_\mu \rho A^\mu + q^2 v h A^2 + \frac{1}{2}q^2(h^2 + \rho^2)A^2. \end{aligned} \quad (475)$$

由上式可读出, h, ρ 的情况与整体规范情形是一样的; 而好消息是, 规范场获得了质量 qv . 上述式子第二行最后一项, 表明 Goldstone 玻色子与光子有耦合. 事实上, 同作为无质量以光速运动的粒子, Goldstone 玻色子与光此时是不可分辨的; 或者说形象地说, Goldstone 玻色子将会被光子吃掉. 数学上, 我们直接以令其为零的方式将其消去, 即:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \lambda v^2 h^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}q^2 v^2 A^2 \\ &\quad - \lambda v h^3 - \frac{\lambda}{4}h^4 + q^2 v h A^2 + \frac{1}{2}q^2 h^2 A^2. \end{aligned} \quad (476)$$

由此, 我们称在自发规范破缺情况下, 规范粒子通过吃掉 Goldstone 玻色子/与希格斯玻色子耦合, 进而获得质量. 我们这种使规范粒子获得质量的机制, 叫安德森-希格斯机制. 事实上, 使 Goldstone 玻色子消去, 相当于选取了特定的规范; 我们称上述所选的情况, 叫物理规范或么正规范. 另外一种消去 Goldstone 玻色子与规范场耦合项 $qv\partial_\mu \rho A^\mu$ 的做法, 称为 R_ξ 规范, 或称为 't Hooft 规范, 可重整化 ξ 规范, 其条件为

$$\Omega[A_\mu] = \partial_\mu A^\mu - \xi qv\rho; \quad (477)$$

因此可得

$$-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu - \xi q v \rho)^2 + q v \partial_\mu \rho A = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{2}\xi q^2 v^2 \rho^2 + q v \partial_\mu (\rho A). \quad (478)$$

上式最后一项是全散度项, 可以直接舍去. 此规范下, Goldstone 玻色子与规范场的耦合项消去了, 但前者仍在; 不过因为其质量 $\sqrt{\xi} q v$ 是非物理的, 所以最后可以消去. R_ξ 规范的长处在于高能时的计算以及可重整化的证明.

下面我们对分离真空说一说明, 以简化以后的运算. 以前述自发规范破缺为例, 计算一下不难确证, 消去 Goldstone 玻色子的么正规范, 相当于在一开始就选定

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h). \quad (479)$$

所有我们亦可以直接称上式为物理/么正规范.

现在, 我们来研究杨-Mills 规范场的情形. 我们考虑具有复二维内部空间 (即同位旋空间) 的复标量场 $\phi = (\phi^+, \phi^0)^T$. 当 $m^2 < 0$ 时, 此场真空条件是

$$|\phi|^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 + \chi_4^2 = -\frac{m^2}{2\lambda} = a^2; \quad (480)$$

上式自由参数有 3 个, 意味着本场的自发对称破缺出来的 Goldstone 玻色子有 3 个. 与前文相似, 选择

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ v + H \end{bmatrix} \quad (481)$$

就可让这三个 Goldstone 玻色子被弱作用的三个规范场吃掉. 于是可得 ϕ 的引入规范场与 ϕ^4 自作用后的具有定域规范对称性的拉氏密度及其代化为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} \\ &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - i \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi A^\mu + q^2 A^2 \phi^\dagger \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \frac{1}{2}g^2(v + h)^2 A^2 - \frac{\lambda}{4}(h^4 + 4vh^3 + 4v^2 h^2 - v^4) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^2 v^2 A^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \lambda v^2 h^2 \\ &\quad - \lambda v h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 + g^2 v h A^2 + \frac{1}{2}g^2 h^2 A^2. \end{aligned} \quad (482)$$

其中 $D_\mu = \partial_\mu + igT^i W_\mu^i := \partial_\mu + igA_\mu$. -为了先览大概, 目前我们尚未考虑 U(1) 部分; 我们将在稍后完整考虑. -上述结果第一行是规范粒子与希格斯子, 第二行前两项是希格斯子的自耦合, 后两是它与规范场的耦合. 不须多言, 规范场显然获得了质量. 下面我们考察三个 Goldstone 玻色子的带电情况. 我们假设场具有弱超荷 $Y_W \phi = Y_H \phi$, 则应用 Gell-Mann-Nishijima 关系, 可得

$$Q\phi = \left(T^3 + \frac{Y_W}{2}\right)\phi = \left(T^3 + \frac{Y_H}{2}\right)\phi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1 + Y_H)\phi^+ \\ (-1 + Y_H)\phi^0 \end{bmatrix} \quad (483)$$

真空不带电, 所以由上式可得 $Y_H = 1$; 进一步可得 ϕ^+ 有电荷 +1. 也就是说, 被弱作用中间玻色子吃掉的三个 Goldstone 玻色子, 有两个带正电, 一个不带电; 而剩下的最后一个粒子即希格斯玻色子, 是电中性的.

现在, 我们写出 $U(1) \otimes SU(2)$ 协变算符 $U = e^{i\beta Y_W/2 + i\alpha^i T^i}$ 作用在场 $\phi = (\phi^+, \phi^0)^T$ 上的完整形式:

$$\begin{aligned}
D_\mu \phi &= \partial_\mu \phi + \frac{i}{2} \begin{bmatrix} gW_\mu^0 + g'Y_H B_\mu & \sqrt{2}gW_\mu^+ \\ \sqrt{2}gW_\mu^- & -gW_\mu^0 + g'Y_H B_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{bmatrix} \\
&= \partial_\mu \phi + \frac{i}{2} \begin{bmatrix} gW_\mu^0 + g'B_\mu & \sqrt{2}gW_\mu^+ \\ \sqrt{2}gW_\mu^- & -gW_\mu^0 + g'B_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{bmatrix} \\
&= \partial_\mu \phi + \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 2eA_\mu - \frac{g'^2 - g^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu^0 & \sqrt{2}gW_\mu^+ \\ \sqrt{2}gW_\mu^- & -\sqrt{g^2 + g'^2} Z_\mu^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{bmatrix} \\
&:= \partial_\mu \phi + \frac{i}{2} \mathcal{D}_\mu \phi;
\end{aligned} \tag{484}$$

且有 $\mathcal{D}_\mu^\dagger = \mathcal{D}_\mu$. 于是我们可得

$$(D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + \text{Im}(\phi^\dagger \mathcal{D}_\mu \partial^\mu \phi) + \frac{1}{4} \phi^\dagger \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \phi. \tag{485}$$

将前文选定的真空/Goldstone 玻色子分离式, 即同位旋空间的物理规范代入上式, 就可得出场的互相耦合以及规范场质量项的出现; 例如第一项是 $\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi = \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2$ 即希格斯场的动能密度; 余者不表. 其中, 规范场质量项出现在上式最后一项的算符与 $(0, v/\sqrt{2})^T$ 的作用之中. 于是

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^\dagger \mathcal{D}^\mu \mathcal{D}_\mu \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2}gW^{+\mu} \\ -\sqrt{g^2 + g'^2} Z^{0\mu} \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} \sqrt{2}gW_\mu^+ \\ -\sqrt{g^2 + g'^2} Z_\mu^0 \end{bmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{4} g^2 v^2 W^{-\mu} W_\mu^+ + \frac{1}{8} (g^2 + g'^2) v^2 Z^{0\mu} Z_\mu^0.
\end{aligned} \tag{486}$$

于是我们就得

$$m_W = \frac{1}{2} g v, \quad m_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v = \frac{m_W}{\cos \theta_W}. \tag{487}$$

上述两个质量, 将由实验得出. 值得注意的是, 稍加计算不难发现, 在上述这样一个手续中, 光子没能产生质量项, 仍然保持静质量为零. 形象地可以说, 三个 Goldstone 玻色子分别分弱作用的三个规范粒子吃掉了; 光子没吃着, 所以没能获得质量. 总之, 该获得质量的获得了, 不该获得质量的没获得: 我们的理论的确是恰如其份的. 如此结果, 何其美哉!

本节最后, 我们来赋予轻子质量. 而途径, 仍是让它去吃 Goldstone 玻色子, 或即与希格斯场发生耦合. 假设轻子与希格斯场之间有汤川耦合, 则可写出

$$\mathcal{L}_{lH} = - \sum_{e,\mu,\tau} g_e (\bar{L}_e \phi R_e + \bar{R}_e \phi^\dagger L_e); \quad (488)$$

显然前后两项互为厄米共轭. 将物理规范代入上式, 就得

$$\mathcal{L}_{lH} = - \sum_{e,\mu,\tau} g_e \bar{e} e \phi^0 := - \sum_{e,\mu,\tau} \left(m_e \bar{e} e + \frac{m_e}{v} \bar{e} e H \right); \quad (489)$$

由此式亦可见, 中微子未被赋予质量, 也未与希格斯场有耦合. 而带电轻子获得了质量, 为

$$m_e = \frac{g_e v}{\sqrt{2}}. \quad (490)$$

10.3 夸克的弱作用, CKM 矩阵

与三代轻子 (ν_e, e) , (ν_μ, μ) , (ν_τ, τ) 类似地, 夸克也分为三代 (u, d) , (c, s) , (t, b) . 夸克构成的弱同位旋双重态与单态如下

$$L_u = \begin{bmatrix} u_L \\ d_L \end{bmatrix}, \quad L_c = \begin{bmatrix} c_L \\ s_L \end{bmatrix}, \quad L_t = \begin{bmatrix} t_L \\ b_L \end{bmatrix}; \quad (491)$$

$$R_u = u_R, \quad R_c = c_R, \quad R_t = t_R, \quad (492)$$

$$R_d = d_R, \quad R_s = s_R, \quad R_b = b_R. \quad (493)$$

另外, u, c, t 夸克具有电荷 $2/3$; d, s, b 夸克具有电荷 $-1/3$. 所以, 据 Gell-Mann-Nishijima 公式, 我们就知

$$QL_u = \left(T^3 + \frac{Y_W}{2} \right) \begin{bmatrix} u_L \\ d_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} + \frac{Y_W}{2} \right) u_L \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{Y_W}{2} \right) d_L \end{bmatrix}, \quad (494)$$

也就是说夸克弱同位旋二重态具有弱超荷 $Y_{uL} = \frac{1}{3}$. 相似地, $QR_u = \frac{Y_W}{2} R_u = \frac{2}{3}$, $QR_d = \frac{Y_W}{2} R_d = -\frac{1}{3}$, 即 u, c, t 单态具有弱超荷 $Y_{uR} = \frac{4}{3}$, 而 d, s, b 单态具有弱超荷 $Y_{dR} = -\frac{2}{3}$.

目前为止, 我们假设夸克是尚无质量的. 下面, 我们让夸克与希格斯场耦合, 以使之获得质量. 夸克与希格斯场的汤川耦合可写为

$$\mathcal{L}_{qH} = - \sum_{ud,cs,tb} (g_d \bar{L}_u \phi R_d + g_u \bar{L}_u \phi_C R_u + h.c.) \quad (495)$$

其中, $\phi_C = i\sigma^2 \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^0 \\ -\phi^- \end{bmatrix}$ 为 ϕ 的电荷共轭态 (运用 Gell-Mann-Nishijima 公式不难发现 ϕ_C 有弱超荷 -1). 容易发现, 在轻子情形, 之所以没有上述第二项, 是因为那样不满足电荷守恒. 下面, 我们选择物理规范, 以

让夸克吃掉 Goldstone 玻色子. 注意 ϕ 的物理规范仍如前文; 而 ϕ_C 的规范为 $\phi_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} v+H \\ 0 \end{bmatrix}$. 在物理规范下, 我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{qH} &= - \sum_{ud,cs,tb} (g_d \bar{d}_L \phi^0 d_R + g_u \bar{u}_L \phi^0 u_R + h.c.) \\ &= - \sum_q g_q \bar{q} q \phi^0 := - \sum_q \left(m_q \bar{q} q + \frac{m_q}{v} \bar{q} q H \right); \end{aligned} \quad (496)$$

上述结果第一项是夸克的质量项, 第二项是夸克与希格斯场的耦合. 由此见, 夸克获得了质量

$$m_q = \frac{g_q v}{\sqrt{2}}. \quad (497)$$

如同真正参与弱作用的, 是由 B_μ , W_μ^0 经温伯格转动叠加而成的 A_μ , Z_μ^0 一样, 夸克亦未必是以质量本征态, 而是以其叠加态的身份参与到弱相互作用中去的. 这意味着在弱作用过程中, 夸克可能会有味变 (具体地, 稍后我们将确证, 使夸克发生味变即产生混合的, 是其与 W_μ^\pm 带电玻色子的相互作用). 于是我们可令

$$\begin{bmatrix} u_{1L/R} \\ u_{2L/R} \\ u_{3L/R} \end{bmatrix} = U_{L/R} \begin{bmatrix} u_{L/R} \\ c_{L/R} \\ t_{L/R} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} d_{1L/R} \\ d_{2L/R} \\ d_{3L/R} \end{bmatrix} = D_{L/R} \begin{bmatrix} d_{L/R} \\ s_{L/R} \\ b_{L/R} \end{bmatrix}; \quad (498)$$

其中 U , D 是 3×3 的酉矩阵. 我们分别称 u_i , d_i 叫 u 类夸克与 d 类夸克. 与此同时, 由其构成的弱同位旋二重态与单态就是

$$L_i = \begin{bmatrix} u_{iL} \\ d_{iL} \end{bmatrix}, \quad R_{ui} = u_{iR}, \quad R_{di} = d_{iR}. \quad (499)$$

不难发现, 变换后的态与之前的具有同样的电荷, 弱超荷与弱同位旋. 可以直接看出

$$\mathcal{L}_q = \sum_q i \bar{q} \gamma^\mu \partial_\mu q = \sum_{ud,cs,tb} (i \bar{L}_u \gamma^\mu \partial_\mu L_u + i \bar{R}_u \gamma^\mu \partial_\mu R_u + i \bar{R}_d \gamma^\mu \partial_\mu R_d). \quad (500)$$

有了以上所命的类夸克, 我们又可进一步将上式表为

$$\mathcal{L}_q = \sum_i (i \bar{L}_i \gamma^\mu \partial_\mu L_i + i \bar{R}_{ui} \gamma^\mu \partial_\mu R_{ui} + i \bar{R}_{di} \gamma^\mu \partial_\mu R_{di}); \quad (501)$$

其中用到了 U , D 是酉矩阵这一性质. 能执行出这一步推演, 表明参与强相互作用的就是夸克的质量本征态, 强作用中夸克无味变. 事实上, 显然, 只要左右分量没有耦合, 则我们总能求出如 $\sum_i i \bar{R}_{ui} \gamma^\mu \partial_\mu R_{ui} = \sum_{ud,cs,tb} i \bar{R}_u \gamma^\mu \partial_\mu R_u$ 这般的结果; 也就是说夸克就总以质量本征态出现, 即夸克就无味变. 下述将研究的夸

克的电磁作用及夸克与 Z_μ^0 玻色子的作用, 就都属这种情况. 而若有耦合的话, 显然我们将出来一个矩阵, 此即 CKM (Cabibbo - Kobayashi - Maskawa, 卡比博-小林-益川) 矩阵; 这将在夸克与 W_μ^\pm 相互作用时出现. 下面, 我们就来分别研究.

将偏微分改成电弱作用的协变微商 $D_\mu = \partial_\mu + igT^i W_\mu^i + i\frac{1}{2}g'Y_W B_\mu$, 我们就得到了夸克参与电弱相互作用的模型:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{q+qWZ} &= i\bar{L}_i\gamma^\mu D_\mu L_i + i\bar{R}_{ui}\gamma^\mu D_\mu R_{ui} + i\bar{R}_{di}\gamma^\mu D_\mu R_{di} \\ &= \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_{qA} + \mathcal{L}_{qZ^0} + \mathcal{L}_{qW^\pm}.\end{aligned}\quad (502)$$

由一般式 (444) 结合夸克单态与二重态的弱超荷, 不难得到

$$\begin{aligned}D_\mu R_{ui} &= \left(\partial_\mu + i\frac{2}{3}g'B_\mu\right) R_{ui} \\ &= \left(\partial_\mu + i\frac{2}{3}g'(A_\mu \cos\theta_W - Z_\mu^0 \sin\theta_W)\right) R_{ui},\end{aligned}\quad (503)$$

$$\begin{aligned}D_\mu R_{di} &= \left(\partial_\mu - i\frac{1}{3}g'B_\mu\right) R_{di} \\ &= \left(\partial_\mu - i\frac{1}{3}g'(A_\mu \cos\theta_W - Z_\mu^0 \sin\theta_W)\right) R_{di},\end{aligned}\quad (504)$$

$$D_\mu L_i = \partial_\mu L_i + \frac{i}{2} \begin{bmatrix} gW_\mu^0 + \frac{1}{3}g'B_\mu & \sqrt{2}gW_\mu^+ \\ \sqrt{2}gW_\mu^- & -gW_\mu^0 + \frac{1}{3}g'B_\mu \end{bmatrix} L_i; \quad (505)$$

因为写不下了, 所以我们把上述最后一式中矩阵内对角项的温伯格转动解列在下面:

$$g \sin\theta_W A_\mu + gZ_\mu^0 \cos\theta_W + \frac{1}{3}g'A_\mu \cos\theta_W - \frac{1}{3}g'Z_\mu^0 \sin\theta_W, \quad (506)$$

$$-g \sin\theta_W A_\mu - gZ_\mu^0 \cos\theta_W + \frac{1}{3}g'A_\mu \cos\theta_W - \frac{1}{3}g'Z_\mu^0 \sin\theta_W. \quad (507)$$

现在, 我们就可直接拿出各相互作用项了. 如夸克的电磁相互作用项为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{qA} &= -\frac{1}{2}(\bar{u}_{iL}, \bar{d}_{iL}) \begin{bmatrix} eA_\mu + \frac{1}{3}eA_\mu & 0 \\ 0 & -eA_\mu + \frac{1}{3}eA_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{iL} \\ d_{iL} \end{bmatrix} \\ &\quad -\frac{2}{3}e\bar{u}_{iR}\gamma^\mu u_{iR}A_\mu + \frac{1}{3}e\bar{d}_{iR}\gamma^\mu d_{iR}A_\mu \\ &= -\frac{2}{3}e\bar{u}_{iL}\gamma^\mu u_{iL}A_\mu + \frac{1}{3}e\bar{d}_{iL}\gamma^\mu d_{iL}A_\mu - \frac{2}{3}e\bar{u}_{iR}\gamma^\mu u_{iR}A_\mu + \frac{1}{3}e\bar{d}_{iR}\gamma^\mu d_{iR}A_\mu \\ &= \sum_i \left(-\frac{2}{3}e\bar{u}_i\gamma^\mu u_i A_\mu + \frac{1}{3}e\bar{d}_i\gamma^\mu d_i A_\mu\right) \\ &= \sum_{ud,cs,tb} \left(-\frac{2}{3}e\bar{u}\gamma^\mu u A_\mu + \frac{1}{3}e\bar{d}\gamma^\mu d A_\mu\right) = \sum_q e\bar{q}\gamma^\mu Qq A_\mu.\end{aligned}\quad (508)$$

其中 Q 为夸克的电荷算符. 这正是 QED 中的一般形式. 下面考察夸克与 Z_μ^0 玻色子的耦合.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{qZ^0} &= \left(\frac{2}{3} \bar{u}_{iR} \gamma^\mu u_{iR} - \frac{1}{3} \bar{d}_{iR} \gamma^\mu d_{iR} \right) g' \sin \theta_W Z_\mu^0 \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} g \cos \theta_W - \frac{1}{6} g' \sin \theta_W \right) \bar{u}_{iL} \gamma^\mu u_{iL} Z_\mu^0 \\
&\quad - \left(-\frac{1}{2} g \cos \theta_W - \frac{1}{6} g' \sin \theta_W \right) \bar{d}_{iL} \gamma^\mu d_{iL} Z_\mu^0 \\
&= \bar{q}_R \gamma^\mu Q q_R g' \sin \theta_W Z_\mu^0 \\
&\quad - \frac{g}{\cos \theta_W} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) \bar{u}_L \gamma^\mu u_L Z_\mu^0 \\
&\quad - \frac{g}{\cos \theta_W} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \right) \bar{d}_L \gamma^\mu d_L Z_\mu^0 \\
&= -\frac{g}{\cos \theta_W} [\bar{q}_L \gamma^\mu (T^3 - Q \sin^2 \theta_W) q_L - \bar{q}_R \gamma^\mu Q \sin^2 \theta_W q_R] Z_\mu^0 \\
&= -\frac{g}{\cos \theta_W} [\bar{q}_L \gamma^\mu T^3 q_L - \bar{q} \gamma^\mu Q \sin^2 \theta_W q] Z_\mu^0 \quad (509)
\end{aligned}$$

此形式与轻子- Z_μ^0 的耦合式是相似的; 中括号中是夸克弱同位旋的中性流. 夸克与 W_μ^\pm 的耦合是很好拿出的:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{qW^\pm} &= -\frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{iL} \gamma^\mu d_{iL} W_\mu^+ + \bar{d}_{iL} \gamma^\mu u_{iL} W_\mu^-) \\
&= -\frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}_L \gamma^\mu V_{ud} d_L W_\mu^+ + \bar{d}_L \gamma^\mu V_{du}^* u_L W_\mu^-); \quad (510)
\end{aligned}$$

其中三维酉矩阵

$$V = U_L^\dagger D_L \quad (511)$$

称为 CKM 矩阵; 它描述夸克不同味间的混合, 是需要由实验来测定的. 其最新测值可见相关资料; 近似的, 它约为

$$V = \begin{bmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c & 0 \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (512)$$

其中 θ_c 称为 Cabibbo 角. 也就是说 CKM 矩阵可类比于一个三维空间的正当转动.

10.4 粒子物理的标准模型

总结起来, 描述电弱统一的 Glashow-Weinberg-Salam 理论的拉氏密度就是

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{GWS}} &= \mathcal{L}_{\text{gauge field}} + \mathcal{L}_{\text{lepton+G bosons}} + \mathcal{L}_{\text{quark+G Bosons}} \\
&\quad + \mathcal{L}_{\text{Higgs}+\phi^4} + \mathcal{L}_{\text{lepton+Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{quark+Higgs}} \\
&= -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^iW_i^{\mu\nu} \\
&\quad + (i\bar{L}_e\gamma^\mu D_\mu L_e + i\bar{R}_e\gamma^\mu D_\mu R_e) \\
&\quad + (i\bar{L}_i\gamma^\mu \partial_\mu L_i + i\bar{R}_{ui}\gamma^\mu \partial_\mu R_{ui} + i\bar{R}_{di}\gamma^\mu \partial_\mu R_{di}) \\
&\quad + D_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \\
&\quad - g_e(\bar{L}_e\phi R_e + \bar{R}_e\phi^\dagger L_e) \\
&\quad - (g_d\bar{L}_u\phi R_d + g_u\bar{L}_u\phi C R_u + h.c.); \tag{513}
\end{aligned}$$

而 $D_\mu = \partial_\mu + igT^iW_\mu^i + i\frac{1}{2}g'Y_W B_\mu$, 即电弱作用, 或曰 $\text{SU}(2)\otimes\text{U}(1)$ 对称性下的协变导数. 若再加上胶子场的拉氏量 $\mathcal{L}_{\text{gluon}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^aF_a^{\mu\nu}$, 并把 $\text{SU}(3)$ 下的协变导数加进来, 即

$$D_\mu = \partial_\mu + igT^iW_\mu^i + i\frac{1}{2}g'Y_W B_\mu + ig_3T^aA_a^\mu, \tag{514}$$

则我们就得到了同时描述强, 弱与电磁三种作用力的理论拉氏量. 上述总协变导数与总拉氏密度及其所蕴含的一系列思想原理与演算方案, 称为粒子物理的标准模型.