L I E T U V O S   J A U N Ų J Ų   M A T E M A T I K Ų   M O K Y K L A

8 tema. IŠVESTINĖS IR INTEGRALAI

(2004–2006)

Teorinę medžiagą parengė bei aštuntąją užduotį sudarė Vilniaus licėjaus mokytojas ekspertas Antanas Skūpas

Šios užduoties uždavinių sprendimui iš esmės pakanka medžiagos, išdėstytos matematikos vadovėliuose 12 klasei. Čia apsiribosime tik keliomis pastabomis ir pavyzdžiais.

1. Taikydami sudėtinės funkcijos diferencijavimo taisyklę, rasime funkcijos $g(x)=\arcsin x$ išvestinę. Kaip žinome, ši funkcija yra atvirkštinė funkcijai $f(x)=\sin x$, nagrinėjamai intervale $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Pati funkcija $g(x)=\arcsin x$ apibrėžta intervale [–1; 1], reikšmių sritis – intervalas $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Todėl intervale [–1; 1] teisinga tapatybė $\sin(\arcsin x)=x$.

Diferencijuodami šios lygybės abi puses, gauname $\cos(\arcsin x)\cdot(\arcsin x)'=1$.

Iš čia $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\cos(\arcsin x)}$. Lieka pertvarkyti gautosios trupmenos vardiklį:

$$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2}=\sqrt{1-x^2}.$$

Atkreipkime dėmesį, kad kosinusas arksinuso reikšmių srityje, t.y. intervale $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, yra teigiamas, todėl prieš šaknį rašomas ženklas „+“. Taigi,

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Visai panašiai gali būti išvedama ir bendra formulė atvirkštinės funkcijos išvestinei apskaičiuoti.

2. Kai kada patogu išvestinę naudoti nelygybėms įrodyti.

Teorema. Sakykime, funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra diferencijuojamos intervale $[a;+\infty)$. Jeigu $f(a)\ge g(a)$ ir su visais $x>a$ teisinga nelygybė $f'(x)>g'(x)$, tai $f(x)>g(x)$ su visais $x>a$.

Įrodymas. Sudarykime funkciją $h(x)=f(x)-g(x)$. Iš teoremos sąlygų matyti, kad $h(a)\ge 0$ ir $h'(x)=(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)>0$ su visais $x>a$. Taikome funkcijai $h(x)$ Lagranžo teoremą intervale $[a;x]$. Pagal Lagranžo teoremą turi būti toks taškas $c\in(a;x)$, kad būtų teisinga $h(x)-h(a)=h'(c)(x-a)$. Kadangi $h'(c)>0$, $x-c>0$, tai $h(x)>h(a)$ su visais $x>a$, arba $f(x)-g(x)>h(a)$. Tuo labiau su visais $x>a$ bus teisinga nelygybė $f(x)-g(x)>0$ arba $f(x)>g(x)$.

Analogiškai įrodoma ir teorema intervalui $(-\infty;a)$.

1 pavyzdys. Įrodysime, kad su visais $x>0$ teisinga nelygybė

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x).$$

Įrodymas. Pažymėkime $f(x)=\ln(1+x)$ ir $g(x)=x-\dfrac{x^2}{2}$.

Matome, kad

$$f(0)=g(0)=0.$$

$$f'(x)=(\ln(1+x))'=\frac{1}{1+x},$$

$$g'(x)=\left(x-\frac{x^2}{2}\right)'=1-x.$$

Liko įrodyti nelygybę

$$1-x<\frac{1}{1+x}.$$

Ją nesunkiai galime įrodyti, daugindami abi nelygybės puses iš teigiamo daugiklio $1+x$. Tačiau galima ir dar kartą pritaikyti teoremą: kai $x=0$, abi nelygybės pusės lygios 1. O išvestinėms teisinga akivaizdi nelygybė

$$-1<-\frac{1}{(1+x)^2}\ \text{ arba }\ 1>\frac{1}{(1+x)^2}.$$

3. Funkcijos išvestinė yra labai galingas instrumentas tiriant funkcijų savybes. Tačiau kai kada apskaičiuotos išvestinės labai sudėtingos. Tada patogiau naudoti kitus principus.

2 pavyzdys. Kokį didžiausią plotą $S(a)$ gali turėti figūra, apribota tiesėmis $x=a$, $x=a+\pi$ ir kreivėmis $y=\sin\dfrac{x}{2}$, $y=\cos x+2$?

Sprendimas. Nesunku įsitikinti, kad

$$2+\cos x\ge\sin\frac{x}{2},$$

o lygybė teisinga tiktai taškuose $\pi+4k\pi$, $k\in$ Z. Rasime tokios figūros plotą:

$$S(a)=\int_a^{a+\pi}\left(2+\cos x-\sin\frac{x}{2}\right)dx=$$

$$=\left(2x+\sin x+2\cos\frac{x}{2}\right)\Bigg|_a^{a+\pi}=$$

$$=2\pi-2\sin a-2\sin\frac{a}{2}-2\cos\frac{a}{2}.$$

Liko rasti funkcijos $S(a)$ didžiausią reikšmę. Tačiau, jei bandytume rasti ją standartiškai, naudodami funkcijos išvestinę, susidurtume su nemažais sunkumais. Todėl $S(a)$ pertvarkykime taip:

$$S(a) = 2\pi - 2\sin\alpha - 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{a}{2}\right) =$$

$$= 2\pi - 2\sin\alpha - 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{a}{2} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{a}{2}\right) =$$

$$= 2\pi - 2\sin\alpha - 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\pi + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) - 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\pi + 2\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) - 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= -4\sin^2\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi + 2 .$$

Pažymėkime

$$2\sin\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = t .$$

Kai kintamasis a kinta realiųjų skaičių aibėje R, tai t reikšmės užpildo intervalą $[-2; 2]$. Taigi belieka išsiaiškinti, kokią didžiausią reikšmę intervale $[-2; 2]$ įgyja kvadratinis trinaris

$$f(t) = -t^2 - \sqrt{2}\,t + 2\pi + 2 .$$

Naudodami išvestinę arba tiesiog parabolės viršūnės koordinačių formules, nesunkiai rasime, kad

$$\max_{[-2;\,2]} f(t) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\pi + 2{,}5 .$$

Vadinasi,

$$\max_{(-\infty;\,+\infty)} S(a) = \max_{[-2;\,2]} f(t) = 2\pi + 2{,}5 .$$

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Raskite $g'(1)$, jei $g(x) = x^5 f\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Čia $f(x)$ – diferencijuojama visoje realiųjų skaičių aibėje R funkcija, tenkinanti sąlygas $f(1) = 3$, $f'(1) = 2$.

2. Raskite lyginės funkcijos $f(x)$ grafiko liestinę taške $x_0 = 1$, jei $f(x)$ visoje realiųjų skaičių aibėje R diferencijuojama ir tenkina lygybę

$$f(2x^3 - x) - 3x^2 f(x^2 - 2x) =$$
$$= -x^6 - 12x^5 + 16x^4 - 7x^2 + 2 .$$

Taip pat raskite tokią funkciją $f(x)$.

3. Įrodykite, kad su visais $x \in \mathrm{R}$ teisinga nelygybė

$$\ln(1 + x) < e^x .$$

4. Duotos dvi funkcijos:

$$f(x) = \frac{3}{2}x \text{ ir } g(x) = 2x - \sqrt{1 + x^2} .$$

1. Įrodykite, kad abi funkcijos visoje realiųjų skaičių aibėje R yra didėjančios, o jų grafikai bendrų taškų neturi.
2. Pažymėkime M_1M_2 tiesės $y = a$ atkarpą, kurios galai yra funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikų taškai. Su kuria a reikšme tokia atkarpa trumpiausia? Koks mažiausias jos ilgis?

5. Statybose dažnai naudojami mediniai stačiakampio skerspjūvio balkiai. Tokio balkio atsparumas lenkimui proporcingas skerspjūvio pločio ir aukščio sandaugai. Turime d cm skersmens rąstą. Kokie turi būti pjaunamo balkio skerspjūvio matmenys, kad jis būtų stipriausias?

6. Apskaičiuokite integralą $\int_0^1 \arcsin x\, dx$. Nubraižykite kreivinę trapeciją, kurios plotą šis integralas išreiškia.

7. Plokštumoje xOy pavaizduokite kreivę, apibrėžtą lygtimi

$$|y - 3| = 2|x - 2| - x^2 + 4x - 1 .$$

Raskite figūros, apribotos šia kreive, plotą.

8. Tiesėmis $y = 1$, $y = 2$ ir parabolėmis $y = ax^2$, $y = \frac{1}{2}ax^2$ pusplokštumėje $x \ge 0$ apribotos figūros plotą pažymėkime $S(a)$. Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti $S(a)$, kai $a \ge 1$?

9. Per kreivės tašką nubrėžta tiesė, statmena liestinei, nubrėžtai per tą patį tašką, vadinama *kreivės normale*. Per parabolės $y = x^2$ tašką nubrėžta normalė $y = ax + b$. Kokį mažiausią plotą turi figūra, kurios taškai tenkina sąlygą $x^2 \le y \le ax + b$?

10. Taurelės vidinis paviršius – sukinys, gautas sukant parabolės $y = ax^2$, $0 \le x \le \sqrt{6}$, lanką apie ordinačių ašį. Taurelėje telpa 72 kubiniai vienetai skysčio. Kokiame lygyje nuo dugno bus skysčio paviršius, įpylus jo į taurelę 24 kubinius vienetus?

Aštuntosios užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki 2006 m. kovo 7 d. mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematikos metodikos katedra, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas www.mif.vu.lt/ljmm/