Perkelties algoritmas ir splainai

1 darbas

2009-02-05

Turinys

Uždavinio formulavimas I

1. Sudarykite perkelties metodo programą trijstrižainės lygčių sistemos atveju. Pateikite savo testinius uždavinius. Sulyginkite gautą rezultatą su tiksliu sprendiniu.

Testinio uždavinio pavyzdys:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Uždavinio formulavimas II

2. Sudarykite programą, randančią kubinio splaino koeficientus, kai duota funkcijos reikšmių lentelė. Tiesinių lygčių sistemos sprendimui panaudokite perkelties metodą. Išspręskite individualią užduotį.

- Raskite kubinį splainą, intervale (a,b) aproksimuojantį funkciją y=f(x) (reikšmių lentelės žingsnis (a,b)/10). Šiuo splainu apskaičiuokite funkcijos artinį taške x iš intervalo (a,b). Nubraižykite kubinio splaino grafiką ir palyginkite su y=f(x) grafiku.
- Raskite kubinį splainą, intervale (a,b) aproksimuojantį funkciją y=f(x) , kuri užduota reikšmių lentele. Šiuo splainu apskaičiuokite funkcijos artinį duotajame taške x. Pakartokite uždavinio sprendimą panaudojant specialias komandas vienoje iš matematinių sistemų (MATLAB, MAPLE ir t.t.). Rezultatus palyginkite grafiškai.

x_i	0	1	2	3	4	5
$y_i/209$	n_0	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5

$n_0n_1n_2n_3n_4n_5$ jūsų numeris grupės sąraše dvejetainėje sistemoje (6 skaitmenys)
pvz. $n = 20_{10} = 10100_2$, tuomet $n_0n_1n_2n_3n_4n_5 = 010100$
T.y.

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	0	209	0	209	0	0

Gynimui reikia turėti veikiančią programą ir mokėti atsakyti į klausimus.
Šį darbą reikia apginti iki 2009-03-12 d.
Ginantis vėliau bus mažinamas pažymys.
Varianto numeris sutampa su numeriu grupės sąraše.

Tiesinės lygčių sistemos

Lygčių sistema su pastoviais koeficientais

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots &\quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

a_{ij} ir b_i yra konstantos.
Lygčių sistemą patogu užrašyti

$$Ax = b \quad \text{arba} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Juostinės matricos

Juostinės matricos – išskyrus juostas prie pagrindinės įstrižaines visi kiti elementai yra nuliniai.

Trijstrižainė matrica– trys nenulinės įstrižainės.

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Trijstrižainės sistemos

Trijstrižainė matrica– trys nenulinės įstrižainės.

- Juostinių matricų atskiras atvejis
- Saugojama $3 \times n$ elementų vietoje $n \times n$.

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & a_i & b_i & c_i & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Perkelties metodas

$$\begin{array}{lllll}
b_1x_1 + & c_1x_2 & & & = d_1 \\
a_2x_1 + & b_2x_2 + & c_2x_3 & & = d_2 \\
\ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
& a_ix_{i-1} + & b_ix_i + & c_ix_{i+1} & = d_i \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
& & a_{n-1}x_{n-2} + & b_{n-1}x_{n-1} + \quad c_{n-1}x_n & = d_{n-1} \\
& & & a_nx_{n-1} + \quad b_nx_n & = d_n
\end{array}$$

$x_1 = -\dfrac{c_1}{b_1}x_2 + \dfrac{d_1}{b_1};$ **pažymėkime** $C_1 = -\dfrac{c_1}{b_1},\quad D_1 = \dfrac{d_1}{b_1};$

$x_2 = -\dfrac{c_2}{a_2C_1 + b_2}x_3 + \dfrac{d_2 - a_2D_1}{a_2C_1 + b_2};$ $C_2 = -\dfrac{c_2}{a_2C_1 + b_2},\quad D_2 = \dfrac{d_2 - a_2D_1}{a_2C_1 + b_2}$

$$C_k = -\frac{c_k}{a_kC_{k-1} + b_k},\quad k = 2,3,\ldots,n-1;$$

$$D_k = \frac{d_k - a_kD_{k-1}}{a_kC_{k-1} + b_k},\quad k = 2,3,\ldots,n.$$

$$x_n = D_n,$$

$$x_k = C_kx_{k+1} + D_k,\quad k = n-1,\ldots,2,1.$$

Perkelties metodo algoritmas

Thomas algorithm, tridiagonal matrix algorithm (angl.)
метод прогонки (rus.)

1. Tiesioginė eiga:

$$C_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \quad D_1 = \frac{d_1}{b_1};$$
$$C_k = -\frac{c_k}{a_k C_{k-1} + b_k}, \quad k = 2, 3 \ldots, n-1;$$
$$D_k = \frac{d_k - a_k D_{k-1}}{a_k C_{k-1} + b_k}, \quad k = 2, 3 \ldots, n.$$

2. Atbulinė eiga:

$$x_n = D_n;$$
$$x_k = C_k x_{k+1} + D_k, \quad k = n-1, n-2 \ldots, 1.$$

Perkelties metodo pakankama konvergavimo sąlyga

Pagrindinės įstrižainės vyravimo sąlyga

Jei

$$|b_i| \geqslant |a_i| + |c_i|, \quad i = 1, \cdots, n$$

ir bent su vienu i galioja griežta nelygybė, tai dalyba iš nulio ar labai mažo skaičiaus perkelties metodo eigoje negalima.

Pavyzdys

Perkelties metodu išspręsime sistemą $\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & & = & 1 \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ & -x_2 & +2x_3 & = & 1. \end{cases}$

Sprendimas:

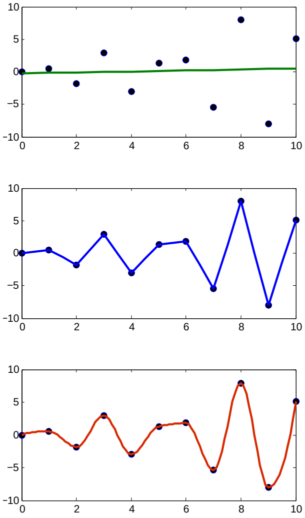
1. Tiesioginė eiga: $C_1 = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}, \quad D_1 = \frac{1}{2};$

$$C_2 = -\frac{-1}{-\frac{1}{2} + 2} = \frac{2}{3}, \quad D_2 = \frac{0 + \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3};$$

$$D_3 = \frac{1 + \frac{1}{3}}{-\frac{2}{3} + 2} = 1.$$

2. Atbulinė eiga:
$x_3 = 1, \quad x_2 = C_2 x_3 + D_2 = 1, \quad x_1 = C_1 x_2 + D_1 = 1.$

Duomenų aproksimavimas



Aproksimuojančios kreivės

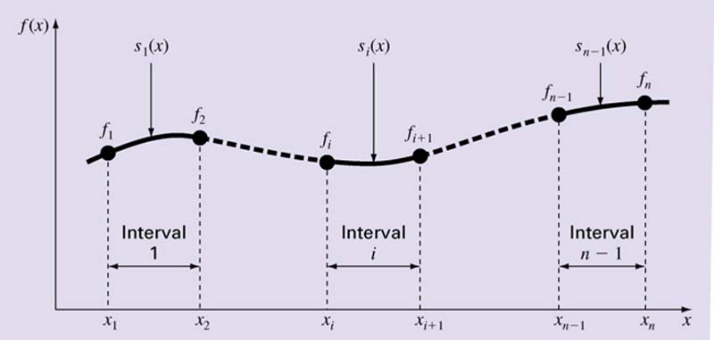
1. Regresija (mažiausių kvadratų metodas)
2. Tiesinis interpoliavimas
3. Interpoliavimas splainais

Splainų panaudojimo idėja:

Interpoliavimas splainais

- Nedidelio laipsnio daugianariai jungia duotuosius taškus.
- Funkcija glodi visame intervale (t.y. ir vidiniuose interpoliavimo mazguose).
- Nedidelio laipsnio daugianariai neleidžia atsirasti osciliacijoms.

Splainai



- N intervalų ir $N+1$ taškų.
- $S_i(x)$ neaukštos eilės daugianaris i-ajame intervale.

Splaino apibrėžimas

- Funkcija $y = f(x)$ apibrėžta reikšmių lentele $(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \cdots N$:

x_0	x_1	$\cdots$	x_N
y_0	y_1	$\cdots$	y_N

- Kiekviename daliniame intervale $[x_i, x_{i+1}]$ funkcija $y = f(x)$ aproksimuojama m-ojo laipsnio daugianarių

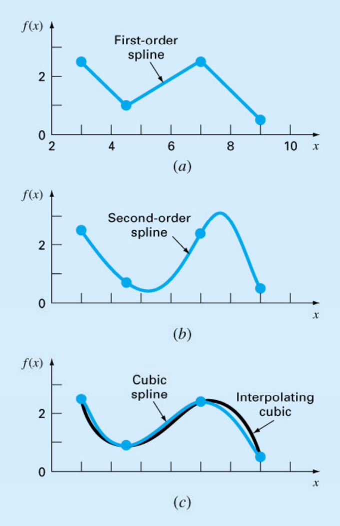
$$S_i^m(x) = a_{i0}x^m + a_{i1}x^{m-1} + \cdots + a_{im-1}x + a_{im}.$$

Splainas

Funkcija ir visos jos išvestinės iki $(m-1)$ eilės yra tolydžios kiekviename intervalo $[x_0, x_N]$ taške. Tokia interpoliacinė funkcija vadinama m-tosios eilės splainu.

Dažniausiai naudojami splainai

1. Tiesiniai splainai;
2. Kvadratiniai splainai;
3. Kubiniai splainai.



Kubiniai splainai

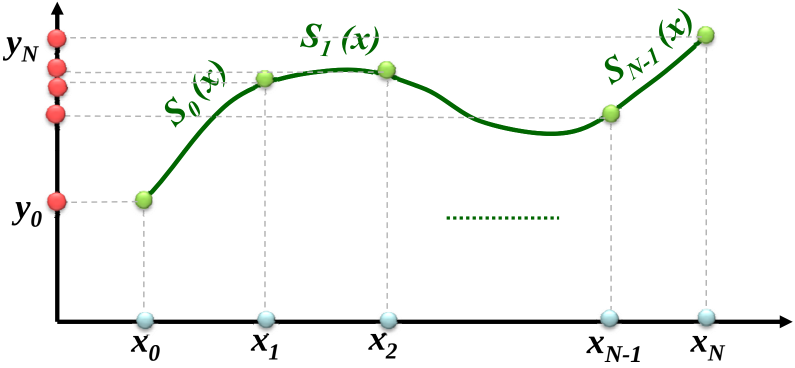
$$S_i^3(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \quad x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}.$$

$4N$ koeficientų $4N$ lygčių sistema.

- Vidiniuose mazguose tolydumas.
- Intervalo galai fiksuoti.
- Vidiniuose mazguose išvestinės tolydžios.
- Papildomos sąlygos antrosios eilės išvestinėms intervalo galuose.

Kubiniai splainai: $S_i^3(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$

Duoti taškai: $(x_0, y_0), \quad \ldots, \quad (x_N, y_N).$
Intervalai: $I_0 = [x_0, x_1], \quad \ldots, \quad I_{N-1} = [x_{N-1}, x_N].$



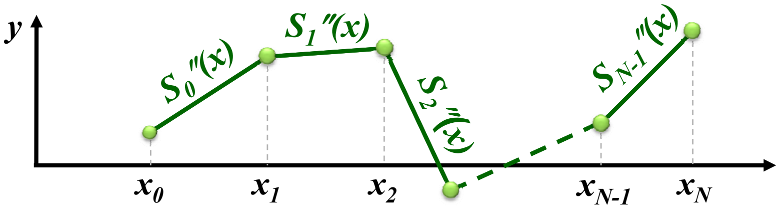
4N nežinomųjų koeficientų.

Kubiniai splainai

1. Interpoliavimo ir tolydumo sąlygos
   $2N$ lygčių:
$$S_i(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1$$
$$S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1.$$
2. Išvestinių tolydumo sąlygos
   $2(N-1)$ lygtis:
$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i), \qquad i = 1, \ldots, N-1$$
$$S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i), \qquad i = 1, \ldots, N-1.$$
3. Papildomos sąlygos (natūraliosios kraštinės sąlygos)
   2 lygtys
$$S''_0(x_0) = 0, \quad S''_{N-1}(x_N) = 0.$$

Kubiniai splainai: $S_i^3(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$

Duoti taškai:	(x_0, y_0),	$\ldots$,	(x_N, y_N).
Intervalai:	$I_0 = [x_0, x_1]$,	$\ldots$,	$I_{N-1} = [x_{N-1}, x_N]$.



$S_i(x)$ – gabalais kubinis daugianaris;
$S_i'(x)$ - gabalais kvadratinis daugianaris;
$S_i''(x)$) - gabalais tiesinis daugianaris.
Suvedama į N lygčių sistemą su N nežinomųjų.

Kubinis splainas

Pažymėkime $g_i = S_i''(x_i)$, $i = 1, \ldots, N-1$.

$$g_0 = S_0''(x_0) = 0, \quad g_N = S_{N-1}''(x_N) = 0, \quad h_i = x_{i+1} - x_i.$$

Tiesinis splainas:

$$S_i''(x_i) = g_i + (x - x_i)\frac{g_{i+1} - g_i}{h_i}.$$

Trijstrižainė lygčių sistema

$$h_{i-1}g_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)g_i + h_i g_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right),$$

$i = 1, \ldots, N-1$.

$g_0 = 0, \quad g_N = 0.$

Kubiniai splainai

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{N-2} & 2(h_{N-2}+h_{N-1}) & h_{N-1} \\ & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{N-1} \\ g_N \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 6\big(f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)\big) \\ 6\big(f(x_2,x_3)-f(x_1,x_2)\big) \\ \vdots \\ 6\big(f(x_{N-1},x_N)-f(x_{N-2},x_{N-1})\big) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lygčių sistema su trijstrižaine matrica

Kubinio splaino lygtis:

$$S_i^3(x) = y_i + e_i(x - x_i) + G_i(x - x_i)^2 + H_i(x - x_i)^3, \quad i = 0, 1, \ldots, N - 1.$$

$$\begin{aligned} e_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - g_{i+1}\frac{h_i}{6} - g_i\frac{h_i}{3}, \\ G_i &= \frac{g_i}{2}, \\ H_i &= \frac{g_{i+1} - g_i}{6h_i}. \end{aligned}$$

Kubinis splainas: 1 pavyzdys

Duoti taškai:

x_i	0	1	2	3
y_i	0	$0,5$	2	$1,5$

$S^{3''}(0) = S^{3''}(3) = 0$ (natūralusis splainas)

$$h_0 = x_1 - x_0 = 1 - 0 = 1 \qquad f(x_0, x_1) = \frac{y_1 - y_0}{h_0} = \frac{0,5 - 0}{1} = 0,5$$

$$h_1 = 2 - 1 = 1 \qquad f(x_1, x_2) = \frac{y_2 - y_1}{h_1} = \frac{2 - 0,5}{1} = 1,5$$

$$h_2 = 3 - 2 = 1 \qquad f(x_2, x_3) = \frac{y_3 - y_2}{h_2} = \frac{1,5 - 2}{1} = -0,5.$$

Kubinis splainas: 1 pavyzdys

Trijstrižainė lygčių sistema

$$h_{i-1}g_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)g_i + h_i g_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right),$$

$$i = 1, \dots, N-1.$$

$$g_0 = 0, \quad g_N = 0.$$

$$\mathbf{g_0 = 0, \quad g_3 = 0.}$$

$$h_i = 1, \quad i = 0, 1, 2.$$

$$\begin{array}{ll} i = 1: & g_0 + 4g_1 + g_2 = 6(1,5 - 0,5); \\ i = 2: & g_1 + 4g_2 + g_3 = 6(-0,5 - 1,5). \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 4g_1 + g_2 & = 6; \\ g_1 + 4g_2 & = -12. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{g_1 = 2,4;} \\ \mathbf{g_2 = -3,6}. \end{cases}$$

Kubinis splainas: 1 pavyzdys

$$S_i^3(x) = y_i + e_i(x - x_i) + G_i(x - x_i)^2 + H_i(x - x_i)^3, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

$$e_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - g_{i+1}\frac{h_i}{6} - g_i\frac{h_i}{3}, \quad G_i = \frac{g_i}{2}, \quad H_i = \frac{g_{i+1} - g_i}{6h_i}.$$

$\mathbf{g_0 = 0; \quad g_1 = 2,4; \quad g_2 = -3,6; \quad g_3 = 0.}$

Splaino koeficientai:

$i = 0$: $e_0 = 0,5 - 2,4/6 - 0 = 0,1; \quad G_0 = 0; \quad H_0 = 2,4/6 = 0,4.$

$\Rightarrow S_0^3(x) = 0,1x + 0,4x^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1;$

$i = 1$: $e_1 = 1,5 + 3,6/6 - 2,4/3 = 1,3; \quad G_1 = 1,2; \quad H_1 = -1.$

$\Rightarrow S_1^3(x) = 0,5 + 1,3(x-1) + 1,2(x-1)^2 - (x-1)^3, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2;$

$i = 2$: $e_2 = -0,5 + 1,2 = 0,7; \quad G_2 = -1,8; \quad H_2 = 0,6.$

$\Rightarrow S_2^3(x) = 2 + 0,7(x-2) - 1,8(x-2)^2 + 0,6(x-2)^3, \quad 2 \leqslant x \leqslant 3.$

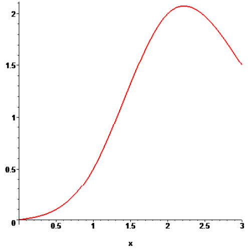
Kubinis splainas: 1 pavyzdys

$$S^3(x) = \begin{cases} 0,1x + 0,4x^3, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 0,5 + 1,3(x-1) + 1,2(x-1)^2 - (x-1)^3, & 1 \leqslant x \leqslant 2; \\ 2 + 0,7(x-2) - 1,8(x-2)^2 + 0,6(x-2)^3, & 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

```
> S:=spline([0,1,2,3],[0,0.5,2,1.5],x,cubic);
```

$$S := \begin{cases} 0.100000000000000004\,x + 0.400000000000000022\,x^3, & x < 1 \\ -0.8000000000 + 1.30000000000000004\,x + 1.19999999999999994\,(-1+x)^2 - 1.\,(-1+x)^3, & x < 2 \\ 0.600000000 + 0.699999999999999954\,x - 1.80000000000000004\,(-2+x)^2 + 0.599999999999999976\,(-2+x)^3, & \mathit{otherwise} \end{cases}$$

```
> plot(S,x=0..3,thickness=2);
```



Kubinis splainas: 2 pavyzdys

Duoti taškai:

x_i	0	2	5	6
y_i	4	-2	19	58

Raskite $f(4)$.

Tikslus sprendinys: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 4, \quad f(4) = 0.$

$S^{3''}(0) = S^{3''}(3) = 0$ (natūralusis splainas)

$$h_0 = 2 - 0 = 2 \qquad f(x_0, x_1) = \frac{y_1 - y_0}{h_0} = \frac{-2 - 4}{2} = -3$$

$$h_1 = 5 - 2 = 3 \qquad f(x_1, x_2) = \frac{y_2 - y_1}{h_1} = \frac{19 + 2}{3} = 7$$

$$h_2 = 6 - 5 = 1 \qquad f(x_2, x_3) = \frac{y_3 - y_2}{h_2} = \frac{58 - 19}{1} = 39.$$

Kubinis splainas: 2 pavyzdys

Trijstrižainė lygčių sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ h_0 & 2(h_1+h_0) & h_1 & \\ & h_1 & 2(h_2+h_1) & h_2 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6\left(\frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0}\right) \\ 6\left(\frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 10 & 3 & \\ & 3 & 8 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6(7-(-3)) \\ 6(39-7) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 192 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Naturaliosios kraštinės sąlygos: $\boldsymbol{g_0 = 0, \quad g_3 = 0.}$

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 192 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,35211 \\ 24,50704 \end{pmatrix}.$$

Kubinis splainas: 2 pavyzdys

$$S_i^3(x) = y_i + e_i(x - x_i) + G_i(x - x_i)^2 + H_i(x - x_i)^3, \quad i = 0, \dots, N - 1.$$

$$e_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - g_{i+1}\frac{h_i}{6} - g_i\frac{h_i}{3}, \quad G_i = \frac{g_i}{2}, \quad H_i = \frac{g_{i+1} - g_i}{6h_i}.$$

$$\mathbf{g_0 = 0; \quad g_1 = -1,35211; \quad g_2 = 24,50704; \quad g_3 = 0.}$$

Splaino koeficientai:

$i = 0$: $e_0 = 2,549296; \quad G_0 = 0; \quad H_0 = -0,112676.$

$\Rightarrow S_0^3(x) = 4 - 2,549296x - 0,112676x^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2;$

$i = 1$: $e_1 = -3,901408; \quad G_1 = -0,676056; \quad H_1 = 1,4366197.$

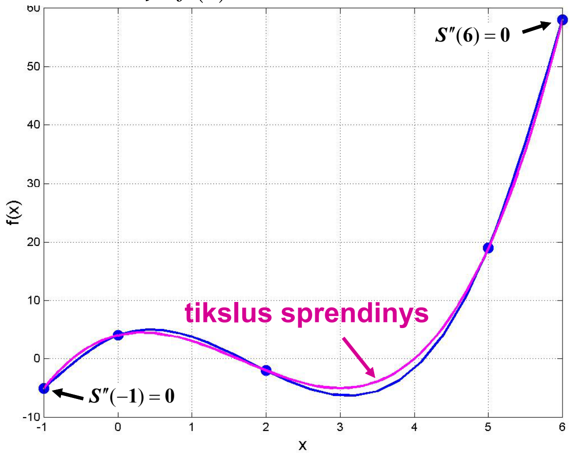
$\Rightarrow S_1^3(x) = -2 - 3,901408(x - 2) - 0,676056(x - 2)^2 + 1,4366197(x - 2$

$i = 2$: $e_2 = 30,830986; \quad G_2 = 12,253521; \quad H_2 = -4,0845070.$

$\Rightarrow S_2^3(x) = 19 + 30,830986(x - 5) + 12,253521(x - 5)^2 - 4,0845070(x -$

Kubinis splainas: 2 pavyzdys

Tiksli funkcija $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 4$



2 pavyzdys : rezultatų analizė

Tikslus sprendinys: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 4, f(4) = 0.$
Kubinis splainas $f(4) = S_2^3(4) = -1,0141.$

- Tikslus sprendinys yra kubinė funkcija.
- Kodėl kubinis splainas nesutampa su tiksliu sprendiniu?
- Dėl skirtingų kraštinių sąlygų!
- Bendruoju atveju $f''(x_0) \neq 0$ ir $f''(x_N) \neq 0$.

2 pavyzdys : rezultatų analizė

Tikslus sprendinys: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 4, f(4) = 0.$
Kubinis splainas $f(4) = S_2^3(4) = -1,0141.$

- Tikslus sprendinys yra kubinė funkcija.
- Kodėl kubinis splainas nesutampa su tiksliu sprendiniu?
- Dėl skirtingų kraštinių sąlygų!
- Bendruoju atveju $f''(x_0) \neq 0$ ir $f''(x_N) \neq 0$.