

## THÈSE

# CONTRIBUTION A L'ANALYSE DU RETOUR ELASTIQUE EN EMBOUTISSAGE

Présentée devant

**L’Institut National des Sciences Appliquées de Lyon**

pour obtenir

le **GRADE DE DOCTEUR**

Ecole doctorale :

**Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique**

Spécialité :

**MECANIQUE, GENIE MECANIQUE, GENIE CIVIL**

par

**Jérôme CARBONNIERE**

Ingénieur

Thèse soutenue le 6 mars 2009 devant la commission d'examen

Jury

M. René Billardon	Professeur	Président
M. Pierre-Yves Manach	Professeur	Rapporteur
Mme Elisabeth Massoni	Directrice de recherche	Rapporteur
M. Anis Kanji Nanji	Docteur	Examinateur
M. Michel Brunet	Professeur	Directeur de thèse
M. Francis Sabourin	Maître de conférence	Directeur de thèse
Mme Caroline Borot	Ingénieur	Examinateur
M. Benoît Lenne	Ingénieur	Invité



# Table des matières

<b>Chapitre 1 - Introduction générale .....</b>	11
<b>1.1 Introduction .....</b>	12
<b>1.2 Le procédé d'emboutissage .....</b>	12
1.2.1.    L'emboutissage au sein du processus de fabrication .....	12
1.2.2.    Les différentes technologies en emboutissage .....	13
<b>1.3 Le retour élastique .....</b>	14
<b>1.4 Les difficultés du procédé d'emboutissage .....</b>	15
<b>1.5 Problématique et objectifs de la thèse .....</b>	16
<b>Chapitre 2 - Caractérisation des tôles en traction.....</b>	19
<b>2.1. Introduction .....</b>	20
<b>2.2. Nuances étudiées.....</b>	20
<b>2.3. Caractérisation rhéologique des tôles en traction uniaxiale .....</b>	21
2.3.1.    Détermination des courbes d'écrouissage .....	21
2.3.2.    Mesure des coefficients de Lankford .....	23
2.3.3.    Mesure du module de Young .....	24
2.3.4.    Résultats des essais de traction.....	26
<b>2.4. Courbes Limites de Formage .....</b>	28
2.4.1.    Méthode d'obtention d'une Courbe Limite de Formage.....	29
2.4.2.    Principe expérimental.....	31
2.4.3.    Résultats des essais.....	32
<b>Chapitre 3 - Rhéologie des tôles sous sollicitations alternées .....</b>	35
<b>3.1. Introduction .....</b>	36
<b>3.2. Modélisation du comportement des tôles en pliage dépliage .....</b>	36
3.2.1.    Formalisme des lois en élastoplasticité .....	36
3.2.2.    Critères tridimensionnels de plasticité .....	37
3.2.3.    Lois d'écoulement .....	39
<b>3.3. Caractérisation des tôles en flexion alternée .....</b>	42
3.3.1.    Principe expérimental.....	42
3.3.2.    Résultats expérimentaux .....	43
3.3.3.    Ecrouissage isotrope.....	44
3.3.4.    Ecrouissage combiné.....	45
3.3.5.    Nouveau modèle d'écrouissage combiné .....	49
3.3.6.    Vérification éléments finis .....	51
<b>3.4. Autre méthode d'identification de la contribution cinématique de l'écrouissage.</b>	53
3.4.1.    Description de l'essai de cisaillement .....	53
3.4.2.    Identification des paramètres de Hill .....	53
3.4.3.    Identification des paramètres matériaux .....	54
3.4.4.    Vérification éléments finis .....	55
<b>3.5. Croisement des résultats des deux identifications .....</b>	56
3.5.1.    Simulation de l'essai de flexion avec les paramètres obtenus en cisaillement .	56
3.5.2.    Simulation de l'essai de cisaillement avec les paramètres obtenus en flexion .	57
<b>3.6. Conclusion.....</b>	57

<b>Chapitre 4 - Outils numériques.....</b>	61
<b>4.1. Introduction .....</b>	62
<b>4.2. Problème de référence .....</b>	62
<b>4.3. Principe des travaux virtuels.....</b>	63
4.3.1. Discrétisation spatiale de l'équation d'équilibre en dynamique .....	63
4.3.2. Discrétisation spatiale de l'équation d'équilibre en statique.....	64
<b>4.4. Schéma d'intégration temporelle .....</b>	65
4.4.1. Schéma explicite des différences finies centrées .....	65
4.4.2. Amortissement des oscillations numériques .....	67
<b>4.5. Intégration de la loi de comportement .....</b>	68
<b>4.6. Eléments finis triangulaires simplifiés .....</b>	72
4.6.1. Elément DKT12 .....	73
4.6.2. Elément S3 .....	80
<b>Chapitre 5 - Implémentation .....</b>	89
<b>5.1. Introduction .....</b>	90
<b>5.2. Architecture du code.....</b>	90
<b>5.3. Détails des routines dans le cas d'un schéma explicite .....</b>	92
5.3.1. Routine d'initialisation .....	92
5.3.2. Calcul des matrices gradient .....	93
5.3.3. Calcul des déformations .....	94
5.3.4. Calcul des contraintes.....	94
5.3.5. Calcul des efforts internes .....	94
5.3.6. Calcul du pas de temps critique.....	95
5.3.7. Assemblage des efforts internes .....	95
<b>5.4. Détails des routines dans le cas d'un schéma implicite .....</b>	96
5.4.1. Routine d'initialisation .....	96
5.4.2. Calcul des matrices gradient .....	98
5.4.3. Calcul des déformations .....	98
5.4.4. Calcul des contraintes.....	98
5.4.5. Calcul et assemblage des efforts internes.....	99
5.4.6. Calcul de la matrice de raideur.....	99
<b>5.5. Exemples de base.....</b>	100
5.5.1. Cas test « beamtest » en implicite .....	100
5.5.2. Cas test « traction » en explicite.....	102
<b>Chapitre 6 - Essais de mise en forme.....</b>	105
<b>6.1. Introduction .....</b>	106
<b>6.2. Essais sur des éprouvettes en U .....</b>	106
6.2.1. Mise en place.....	107
6.2.2. Résultats .....	108
<b>6.3. Pliage d'une tôle à travers des rouleaux .....</b>	115
6.3.1. Mise en place.....	116
6.3.2. Résultats .....	116

<b>Chapitre 7 - Simulations numériques .....</b>	119
<b>7.1. Introduction .....</b>	120
<b>7.2. Modélisation du procédé d'emboutissage par éléments finis .....</b>	120
7.2.1. Modélisation dans le code de l'INSA de Lyon .....	120
7.2.2. Modélisation dans PamStamp 2G V2005.0.4 .....	121
<b>7.3. Simulation de l'essai en U avec les codes de l'INSA de Lyon.....</b>	123
7.3.1. Influence du module de Young .....	124
7.3.2. Influence de l'écrouissage cinématique .....	125
7.3.3. Influence de l'élément.....	127
7.3.4. Influence du maillage .....	128
<b>7.4. Simulation de l'essai en U avec PamStamp 2G V2005.0.4 .....</b>	129
7.4.1. Influence de l'élément.....	129
7.4.2. Influence du maillage .....	130
7.4.3. Effort d'emboutissage .....	132
<b>7.5. Simulation de l'essai de pliage à travers des rouleaux dans les codes de l'INSA de Lyon .....</b>	133
7.5.1. Influence de l'élément finis sur le retour élastique .....	133
7.5.2. Effort de traction .....	134
<b>7.6. Simulation de l'essai de pliage à travers des rouleaux dans PamStamp 2G V2005.0.4 .....</b>	135
7.6.1. Calcul de référence.....	135
7.6.2. Prise en compte de l'amortissement.....	136
7.6.3. Influence de l'élément.....	137
<b>7.7. Conclusions .....</b>	138
 <b>Chapitre 8 - Simulations numériques sur pièces industrielles .....</b>	141
<b>8.1. Introduction .....</b>	142
<b>8.2. Modélisation des conditions aux limites pour le calcul du retour élastique .....</b>	142
<b>8.3. Bavolet semi-industriel .....</b>	143
8.3.1. Présentation générale.....	143
8.3.2. Résultats .....	145
<b>8.4. Bavolet .....</b>	147
8.4.1. Présentation générale.....	147
8.4.2. Déformations .....	148
8.4.3. Ecarts .....	151
<b>8.5. Renfort pied arrière .....</b>	152
8.5.1. Présentation générale.....	152
8.5.2. Faisabilité .....	153
8.5.3. Résultats de retour élastique sur l'opération d'emboutissage OP20 .....	155
8.5.4. Résultats de retour élastique sur l'opération de découpe OP30 .....	157
8.5.5. Résultats de retour élastique sur l'opération de calibrage OP40.....	158
<b>8.6. Conclusions .....</b>	159
 <b>Chapitre 9 - DKS16 : un nouvel élément coque pour l'emboutissage ? .....</b>	161
<b>9.1. Introduction .....</b>	162
<b>9.2. Elément DKS16 .....</b>	162
9.2.1. Caractéristiques .....	162
9.2.2. Membrane.....	163
9.2.3. Courbures .....	167

<b>Conclusion générale et perspectives .....</b>	<b>175</b>
<b>Annexe A - Compléments sur la caractérisation des matériaux .....</b>	<b>181</b>
<b>A.1 Calcul des coefficients de Hill avec un écrouissage combiné.....</b>	<b>182</b>
<b>A.2 Calcul d'un incrément de contrainte pour un écrouissage isotrope .....</b>	<b>186</b>
<b>A.3 Calcul d'un incrément de contrainte pour l'écrouissage combiné de Lemaitre et Chaboche.....</b>	<b>187</b>
<b>A.4 Calcul d'un incrément de contrainte pour le modèle d'écrouissage combiné enrichi à 4 paramètres .....</b>	<b>188</b>
<b>A.5 Limitations du critère de Hill48 .....</b>	<b>189</b>
<b>A.6 Evolution des contributions cinématiques .....</b>	<b>190</b>
<b>A.7 Procédures d'identification des paramètres <math>C_m</math>, <math>\gamma_m</math>, <math>C_s</math> et <math>\gamma_s</math> .....</b>	<b>190</b>
<b>Annexe B - Compléments sur les outils numériques .....</b>	<b>197</b>
<b>B.1 ....Stabilité du schéma des différences finies centrées en présence d'amortissement .....</b>	<b>198</b>
<b>B.2. Détail de la matrice masse de l'élément DKT12.....</b>	<b>200</b>
<b>B.3. Détail de la matrice <math>[C_c]</math> pour l'élément S3 .....</b>	<b>202</b>
<b>B.4. Raideur géométrique .....</b>	<b>203</b>
<b>Annexe C - Synthèse des simulations industrielles.....</b>	<b>205</b>

# Remerciements

Je remercie Alain Combescure de m'avoir accueilli au sein du LaMCoS pour ces trois années enrichissantes.

Je tiens à remercier Michel Brunet et Francis Sabourin, mes directeurs de thèse, pour leur soutien. La confiance, le temps qu'ils m'ont consacré et les nombreux échanges ont attisé ma motivation tout au long de ces trois ans.

Merci à Pierre-Yves Manach et Elisabeth Massoni de s'être acquitté de la tâche de rapporteur. Je remercie également René Billardon, Anis Kanji Nanji, Benoît Lenne, Caroline Borot, pour leur participation à mon jury.

Cette thèse a été effectuée dans le cadre d'une convention CIFRE avec la société PSA Peugeot Citroën. Je remercie l'équipe Mise en Forme pour son accueil, son aide et son suivi pendant ces trois années.

Je remercie Charles Hinsinger, qui a mis en place cette thèse chez PSA et qui m'a accompagné pendant les premiers mois. Merci à Benoît Lenne, qui lui a rapidement succédé et Anis Kanji Nanji qui m'ont toujours soutenu et conseillé dans ces travaux.

Merci à Gilbert, Michel, Daniel, Thierry, Quyet-Tien, Eric et Claire pour leur aide lors des essais et des mesures.

Merci à Manu pour la bonne ambiance.

Un grand merci à ceux qui ont relu ce manuscrit : Francis, Michel, Anis, Benoît, Caroline, Claire et Valérie.

Et enfin, merci, à tous ceux qui m'ont aidé à maintes reprises durant ces trois années de recherche, techniciens, enseignants, étudiants et secrétaires.



# Notations

$\{b\}$	Vecteur de la densité volumique d'efforts extérieurs
$\{f_d\}$	Vecteur de la densité surfacique d'efforts extérieurs
$\{u_d\}$	Vecteur du champ de déplacement imposé
$\{u\}$	Vecteur du champ de déplacements
$\{\dot{u}\}$	Vecteur du champ de vitesses
$\{\ddot{u}\}$	Vecteur du champ d'accélérations
$\{\delta u\}$	Vecteur du champ de déplacements virtuels
$\{u_q\}$	Vecteur du champ de déplacements nodaux
$[N]$	Matrice des fonctions de forme
$\{\sigma\}$	Tenseur des contraintes de Cauchy sous forme de vecteur
$\{\alpha\}$	Tenseur d'écrouissage cinématique sous forme de vecteur
$\{d\varepsilon^p\}$	Tenseur des déformations plastiques sous forme de vecteur
$\{d\varepsilon^e\}$	Tenseur des déformations élastiques sous forme de vecteur
$[B]$	Matrice gradient des fonctions de forme
$[M]$	Matrice de masse globale
$\{F_{ext}\}$	Vecteur des efforts extérieurs
$\{F_{int}\}$	Vecteur des efforts internes

$\sigma_{eq}$	Contrainte équivalente (au sens du critère de plasticité)
$\sigma_0$	Limite d'élasticité du matériau
$\sigma_c$	Contrainte limite d'écoulement
$\bar{\varepsilon}^p$	Déformation plastique équivalente
V	Volume dans la configuration courante
$V_0$	Volume dans la configuration initiale
E	Module de Young
$r_0, r_{45}, r_{90}$	Coefficients de Lankford
f, g, h, l, m, n	Coefficients de Hill
e	Epaisseur du matériau
$\rho$	Masse volumique
A	Aire de l'élément
$l_{min}$	Longueur caractéristique de l'élément
$\Delta t$	Pas de temps

Deux types de notations sont utilisés dans ce rapport. D'une part nous emploierons la notation tensorielle telle que :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{f}_d$$

Les méthodes approchées, telles que la méthode des éléments finis font appel au calcul matriciel. Par conséquent, la notation matricielle est également utilisée dans ce rapport. Les crochets (parenthèses) suivants sont réservés pour désigner :

- $\langle \rangle$  une matrice ligne
- $\{ \}$  une matrice colonne
- $[ ]$  une matrice carrée ou rectangulaire

La lettre  $^T$  accompagnant une matrice (en haut à gauche de son symbole) désigne la transposition de cette matrice. Le  $^{-1}$  placé en haut à droite du symbole d'une matrice carrée correspond à son inverse.

# Chapitre 1

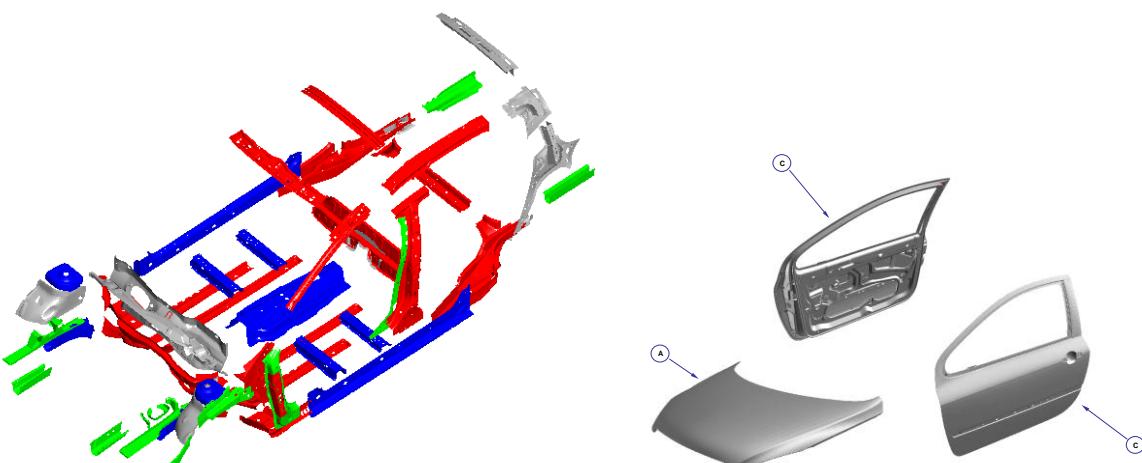
## Introduction générale

<b>1.1. Introduction .....</b>	12
<b>1.2. Le procédé d'emboutissage .....</b>	12
1.2.1.    L'emboutissage au sein du processus de fabrication .....	12
1.2.2.    Les différentes technologies en emboutissage .....	13
<b>1.3. Le retour élastique .....</b>	14
<b>1.4. Les difficultés du procédé d'emboutissage .....</b>	15
<b>1.5. Problématique et objectifs de la thèse .....</b>	16

## 1.1 Introduction

La réduction des coûts et des délais de conception ainsi que l'amélioration de la qualité sont des points majeurs de développement chez les constructeurs automobiles. Dans le domaine de la mise en forme des tôles minces, de nouveaux moyens de fabrication et de nouvelles nuances de tôles sont utilisés pour atteindre ces objectifs. Les accords mondiaux sur la réduction des gaz à effet de serre, incitent également les constructeurs à réduire la masse des véhicules. L'utilisation des aciers à haute limite d'élasticité (HLE) et des alliages d'aluminium s'inscrit directement dans cette démarche d'allègement (figure 1.1).

Dans un souci d'optimisation totale, les professionnels de l'emboutissage tentent de rationaliser un problème jusqu'ici tributaire du savoir faire des ouvriers qualifiés : la mise au point des outils de presse. Parmi les difficultés prépondérantes de la mise au point se trouve la prévision du retour élastique de la pièce en fin d'emboutissage. La mise au point des outillages démarre par l'usinage d'une géométrie choisie, puis l'outil est modifié en fonction des observations sur le terrain en matière de plis, casse, de qualité géométrique, .... Ce processus itératif est très long et très coûteux. L'apport de la simulation numérique avec une bonne prédiction de la géométrie des pièces embouties permettrait de raccourcir le délai de conception et de s'affranchir de la méthode d'essais/erreurs avant la mise en production des outils.



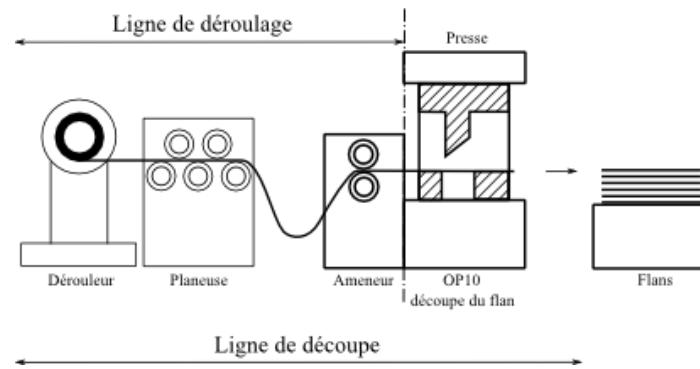
**Figure 1.1.** Types de matériaux classiquement utilisés dans un véhicule

## 1.2 Le procédé d'emboutissage

### 1.2.1. L'emboutissage au sein du processus de fabrication

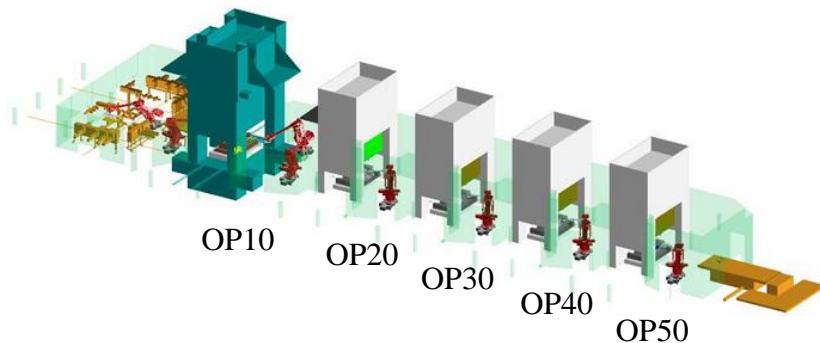
Avant l'étape d'emboutissage proprement dite, la tôle, stockée sous forme de bobines, passe dans une planeuse pour homogénéiser l'état de contraintes en vue de rapprocher d'un

état « vierge » de contraintes. Le flan est ensuite découpé aux dimensions désirées : c'est la première opération (OP10) du procédé d'emboutissage (figure 1.2).



**Figure 1.2.** Vue d'une ligne de découpe

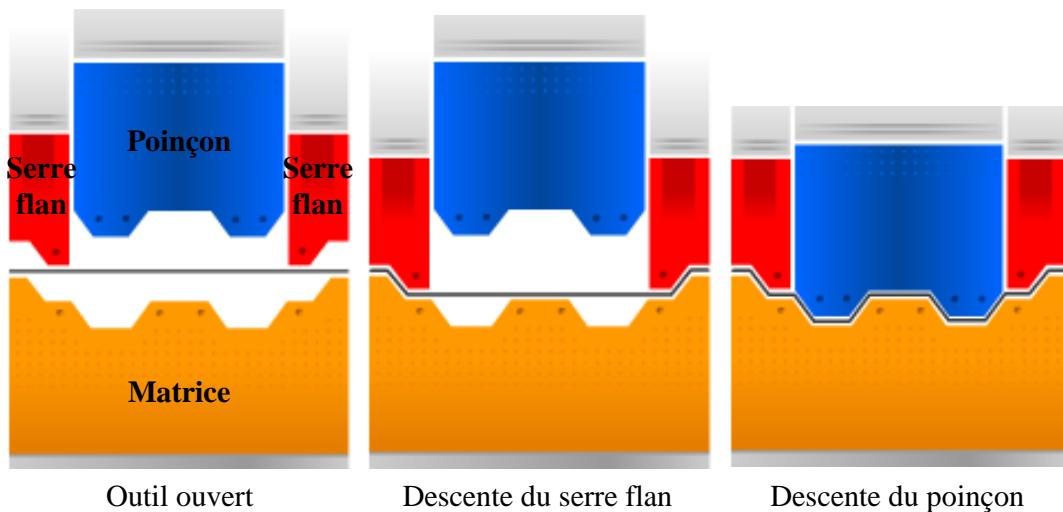
Une ligne d'emboutissage est composée d'un outil d'emboutissage principal (OP20) suivi des outils de reprise pour réaliser les opérations de finitions telles que les découpes, les poinçonnages, les calibrages ou les tombages de bord pour les pièces de peau. La gamme d'emboutissage idéale désirée par les constructeurs est constituée d'un outil d'emboutissage et de trois outils de reprise (figure 1.3).



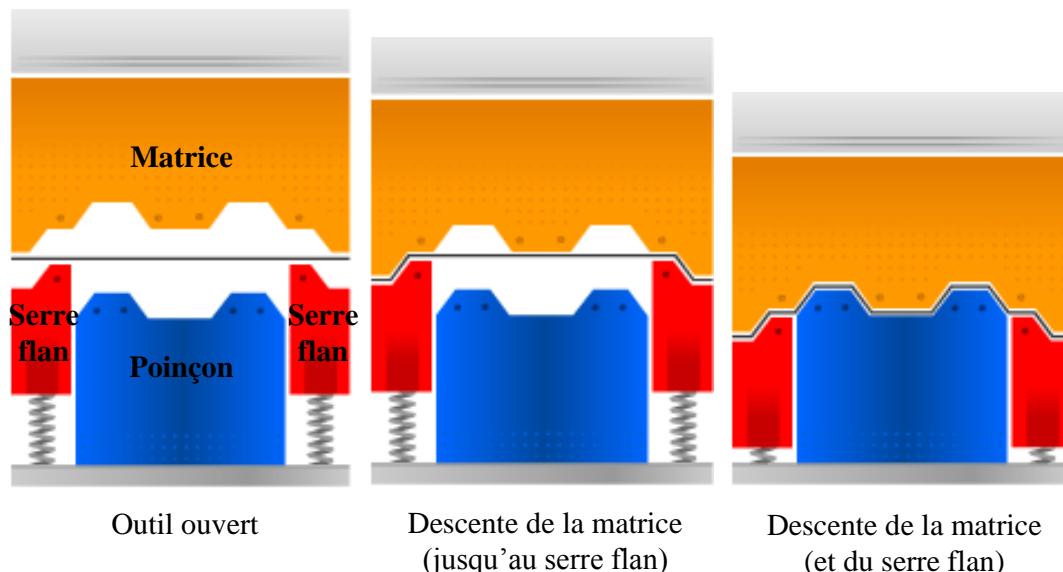
**Figure 1.3.** Vue d'une ligne d'emboutissage

## 1.2.2. Les différentes technologies en emboutissage

Deux technologies de presse sont utilisées en emboutissage : simple effet et double effet (figures 1.4 et 1.5). Les presses double effet sont utilisées pour l'opération d'emboutissage proprement dite alors que les presses simple effet sont davantage utilisées pour les opérations de reprise.



**Figure 1.4.** Fonctionnement d'une presse double effet



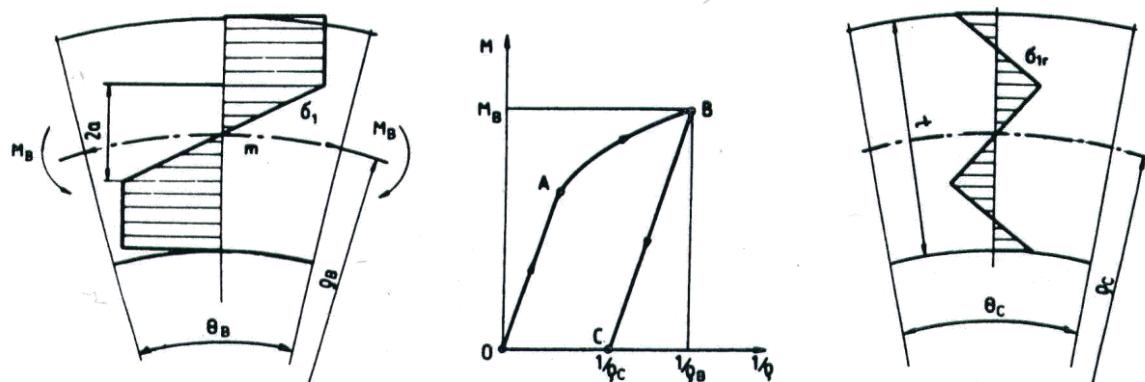
**Figure 1.5.** Fonctionnement d'une presse simple effet

### 1.3 Le retour élastique

Après extraction des outils, la pièce ne garde pas la géométrie désirée: c'est le phénomène de retour élastique.

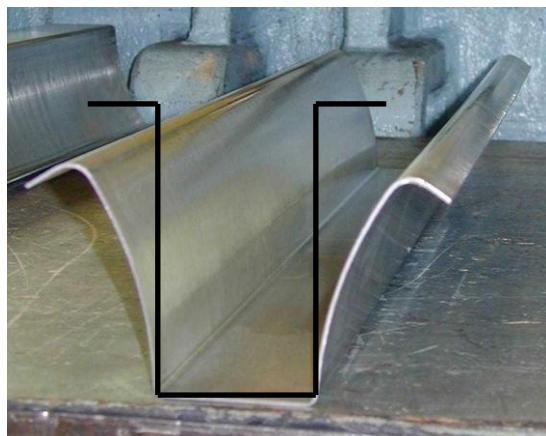
Des hétérogénéités de contraintes apparaissent dans la pièce (encore dans l'outil fermé) [1, 2] :

- dans l'épaisseur de la tôle après passage sur les rayons des outils ;
- entre des zones ayant subi des trajets de déformation différents sur la pièce.



**Figure 1.6.** Visualisation des contraintes dans l'épaisseur du matériau après flexion (à gauche) et retour élastique (à droite)

Lors de l'arrêt de la charge, ces contraintes se redistribuent pour obtenir un nouvel équilibre dans la pièce. La pièce « s'ouvre ». Ainsi, pour paramétriser le retour élastique, les grandeurs représentatives sont soit des variations angulaires, soit des rayons de courbure [3].



**Figure 1.7.** Exemple d'ouverture d'une pièce en U après retour élastique

## 1.4 Les difficultés du procédé d'emboutissage

Le tableau 1.1 présente les trois types de paramètres que l'on peut distinguer dans les procédés d'emboutissage :

- les premiers paramètres sont d'origine technologique (process) : ils sont en général complexes à modéliser précisément [4, 5]. Certains de ces paramètres sont difficiles à conserver constants comme les efforts de serrage, les différents jeux, qui peuvent changer entre deux montes de l'outil sur la presse. La vitesse d'emboutissage quant à elle varie peu, mais n'est pas celle que l'on peut utiliser dans les simulations numériques ;

- les seconds sont de types géométriques : les rayons de l'outil ainsi que l'ajout de jons de retenue ou redans (destinés à créer des efforts de membrane) ont une influence directe sur le niveau de déformation de la tôle et donc du retour élastique ;

- les derniers types de paramètres sont liés aux matériaux : l'utilisation de matières de plus en plus résistantes tout en diminuant l'épaisseur des tôles (c'est-à-dire en allégeant les pièces sans négliger leur résistance) est privilégiée. Ainsi aux aciers classiques, on préfère l'emploi d'alliages légers ou d'aciers HLE. Ces matériaux ont un comportement matériel qui dépend plus fortement des propriétés élastiques. Ils sont donc beaucoup plus difficiles à maîtriser en emboutissage.

Process	Outils	Matière
		
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Type de presse</li> <li>- Effort de serrage</li> <li>- Vitesse d'emboutissage</li> <li>- Température</li> <li>- ...</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Rayons d'entrée matrice</li> <li>- Rayon poinçon</li> <li>- Jons de retenue</li> <li>- Lubrification</li> <li>- Profondeur d'emboutissage</li> <li>- Fond de matrice</li> <li>- ...</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Limite d'élasticité</li> <li>- Module de Young</li> <li>- Ecrouissage</li> <li>- Anisotropie</li> <li>- ...</li> </ul>

**Tableau 1.1.** Paramètres influents sur le retour élastique

## 1.5 Problématique et objectifs de la thèse

L'objectif de PSA Peugeot Citroën Automobiles est de disposer d'une simulation numérique robuste de l'opération capable de prédire correctement la géométrie finale des pièces. Cet outil numérique est destiné par la suite à être utilisé avec un outil de compensation du retour élastique pour proposer une géométrie d'outil optimale. Les simulations numériques sont réalisées grâce au logiciel dynamique explicite PamStamp 2G V2005.0.4 de la société ESI Group.

Pour que le modèle de calcul soit apte à prédire correctement l'état des contraintes en fin d'emboutissage, deux ingrédients majeurs doivent être considérés : l'aspect modélisation numérique (éléments finis, modèles de jons, frottement, ...) et l'aspect matériel.

Dans une première partie, l'aspect matériel est décrit via le développement d'un modèle d'écrouissage combiné à 2 ou 4 paramètres cinématiques avec l'utilisation d'un critère de plasticité de Hill 48. Les paramètres d'anisotropie initiale intervenant dans le critère de plasticité de Hill 48 sont caractérisés via les essais de traction. Ces mêmes essais sont utilisés pour déterminer les paramètres de l'écrouissage isotrope de nos modèles. Les paramètres de l'écrouissage cinématique sont quant à eux définis via des essais de flexion alternée. Une comparaison des résultats de caractérisation entre des essais cycliques par flexion et par cisaillement est également faite.

Dans une seconde partie, nous nous sommes attachés à décrire l'aspect modélisation numérique uniquement sur l'étude des éléments finis coques S3 et DTK12 au sein du logiciel PamStamp 2G. Ces éléments finis ont la particularité de n'avoir aucun degrés de liberté en rotation aux nœuds sommets.

La validité des modèles (matériaux et éléments finis) développés est évaluée sur des cas académiques comme des pièces en U ou le passage à rouleau grâce à l'utilisation du code de calcul développé à l'INSA de Lyon puis grâce au logiciel PamStamp 2G V2005.0.4. Une validation de ces modèles est ensuite menée sur des pièces industrielles avec le logiciel PamStamp 2G.

L'objectif de notre travail a été d'améliorer les modèles de simulations d'emboutissage et de retour élastique pour assurer une bonne prédiction de la qualité géométrique avec la bonne maîtrise des essais accomplis en vue de tirer les conclusions les plus pertinentes quant à la fiabilité ou non des modèles de calculs développés.

# Bibliographie

- [1] H.L. Cao et C. Teodosiu, Finite element calculation of springback effects and residual stresses after 2-D deep drawing, Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Computational Plasticity, Ed by Owen, Hinton and Oñate, p. 959-972, 1989.
- [2] Y. Tozawa, Forming technology for raising accuracy of sheet formed products, J. of Materials Processing and Technology, Vol 22, p. 343-351, 1990.
- [3] E. Nakamachi, Guide to the benchmarks tests – Simulation and Experiment, Int. Conf. Proc. Numisheet'93, 1993.
- [4] S. Keeler, Springback revisited, Metal forming, p. 59-62, Juillet 2003.
- [5] T. de Souza, B.F. Rolfe, Accuracy and precision assessment of stochastic simulation tools for springback variation, Int. Conf. Proc. Numisheet'08, p. 539-544, 2008.

# Chapitre 2

## Caractérisation des tôles en traction

<b>2.1. Introduction .....</b>	20
<b>2.2. Nuances étudiées.....</b>	20
<b>2.3. Caractérisation rhéologique des tôles en traction uniaxiale .....</b>	21
2.3.1. Détermination des courbes d'écrouissage .....	21
2.3.2. Mesure des coefficients de Lankford .....	23
2.3.3. Mesure du module de Young .....	24
2.3.4. Résultats des essais de traction.....	26
<b>2.4. Courbes Limites de Formage .....</b>	28
2.4.1. Méthode d'obtention d'une Courbe Limite de Formage.....	29
2.4.2. Principe expérimental.....	31
2.4.3. Résultats des essais.....	32

## 2.1. Introduction

Plusieurs matériaux en acier et en alliage d'aluminium sont étudiés et utilisés en emboutissage des pièces de structures chez PSA Peugeot Citroën Automobiles. Ce chapitre décrit les essais expérimentaux de traction pour caractériser l'écrouissage et l'anisotropie initiale de la tôle. L'essai de flexion alternée vient compléter l'essai de traction afin de mettre en place un modèle d'écrouissage représentant au mieux le comportement réel du matériau.

Ce chapitre présente également les courbes limites de formage déterminées expérimentalement pour chacun des matériaux étudiés.

## 2.2. Nuances étudiées

Quatre nuances (deux aciers et deux alliages d'aluminium) sont caractérisées et utilisées pour les pièces de peau, de doublure ou de structure. Elles se présentent sous forme de tôles laminées à froid.

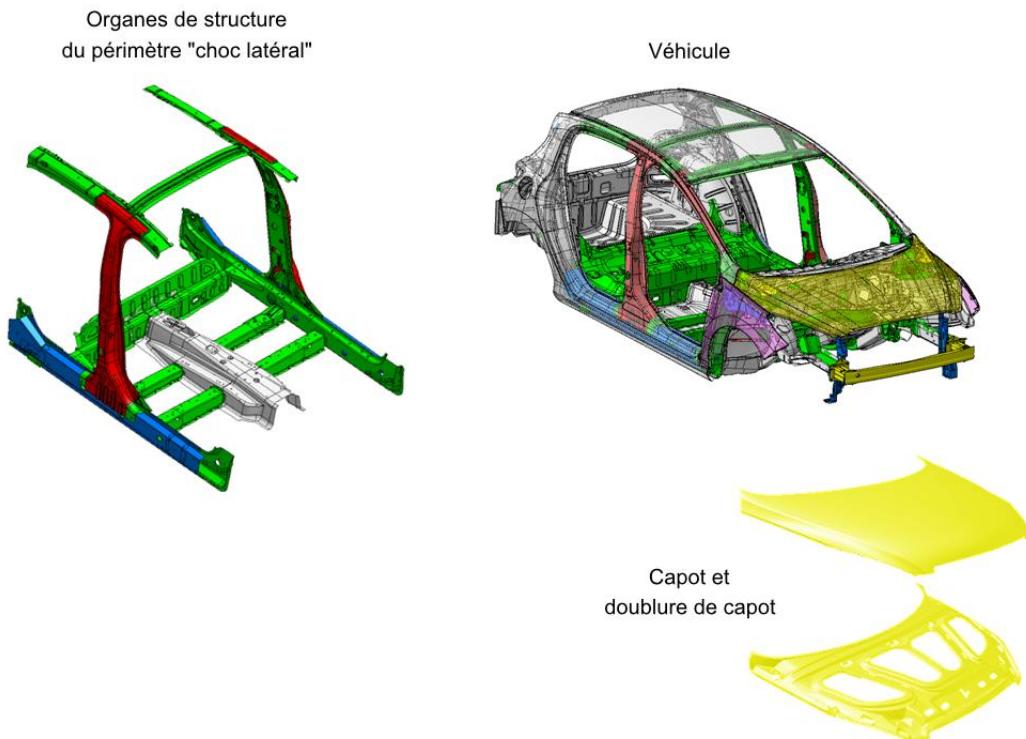
- **l'acier ES**, employé pour les doublures ;
- **l'acier TRIP 800** (TRansformed Induced Plasticity), utilisé essentiellement pour les renforts ;
- **l'alliage d'aluminium 5182 O** est surtout rencontré dans les doublures et les renforts ;
- **l'alliage d'aluminium 6016 DR130** que l'on trouve souvent dans les pièces de peaux.

Le tableau 2.1 présente les épaisseurs des tôles étudiées.

Nuances		Epaisseurs (mm)
<b>Aciers</b>	<b>ES</b>	$1 \pm 0,02$
	<b>TRIP 800</b>	$1,05 \pm 0,02$
<b>Alliages d'aluminium</b>	<b>5182 O</b>	$2,5 \pm 0,02$
	<b>6016 DR130</b>	$1 \pm 0,02$

**Tableau 2.1.** Epaisseurs des tôles étudiées

Sur la figure 2.1 est indiquée l'utilisation des différentes nuances de matériaux sur un véhicule. En gris les pièces en acier doux, en vert les pièces en acier HLE (Haute Limite d'Elasticité), en bleu les pièces en THLE (Très Haute Limite d'Elasticité) et en rouge celles en UHLE (Ultra Haute Limite d'Elasticité). Les alliages d'aluminium sont utilisés pour les ouvrants par exemple le capot et sa doublure.



**Figure 2.1.** Utilisation des différentes nuances de matériaux dans la caisse d'un véhicule

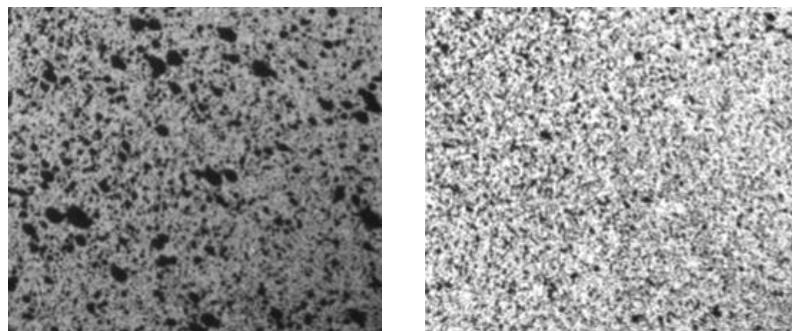
## 2.3. Caractérisation rhéologique des tôles en traction uniaxiale

### 2.3.1. Détermination des courbes d'écrouissement

Les essais de traction sont réalisés à température ambiante sur une machine de traction compression RSA250 SCHENCK avec un capteur de force PM250K (force nominale 250 kN) dont l'erreur relative de linéarité est de 0,02 %, ainsi qu'un capteur de déplacement dont la résolution est de 0,2 mm sur une course totale de 800 mm.

Les éprouvettes de traction utilisées sont découpées et usinées à partir de flans des nuances étudiées. Pour caractériser l'anisotropie initiale de la tôle, la déformation est imposée selon trois directions : direction de laminage ( $0^\circ$ ), direction transverse ( $90^\circ$ ) et direction à  $45^\circ$ . Pour chaque direction, trois essais sont réalisés pour vérifier la bonne reproductibilité des résultats. La vitesse du mors mobile est maintenue constante à 10 mm/min lorsque la limite d'élasticité du matériau est dépassée. Une vitesse plus faible de 2 mm/min est utilisée dans la partie élastique de l'essai.

Deux informations principales sont extraites des essais de traction : l'effort de traction directement mesuré par la cellule de force utilisée sur la machine de traction et les déformations mesurées selon différentes méthodes comme celle de la distorsion d'un marquage régulier imprimé sur la tôle ou celle de la corrélation qui utilise un motif aléatoire. Les motifs de marquage les plus courants sont des rangées de cercles ou de grilles. Ce système a été largement utilisé dans les laboratoires ou dans l'industrie. La méthode de corrélation utilisant un motif aléatoire est généralement obtenue par pulvérisation d'une couche de peinture blanche puis d'un mouchetis noir.



**Figure 2.2.** Exemples de motifs aléatoires

L'exploitation des essais de traction est réalisée avec cette dernière technique. Le logiciel de corrélation utilisé et développé au LaMCoS est le logiciel ICASOFT, basé sur une méthode de corrélation en niveau de gris [1]. L'acquisition des images est réalisée grâce à une caméra CCD équipée d'un objectif télécentrique. Cet objectif a une focale fixe et possède une grande profondeur de champ, ce qui permet d'avoir des images nettes de surfaces courbes à une distance faible de la caméra. Ainsi les photos des tôles après déformations seront nettes même si une seule partie de la photo est à distance constante de l'objectif. La mesure des déformations par corrélation permet d'obtenir la courbe de traction jusqu'à la rupture de l'éprouvette. De nombreux résultats peuvent être extraits des mesures par corrélation d'images : le déplacement dans chaque direction principale, la norme de ces déplacements et diverses déformations telles que :

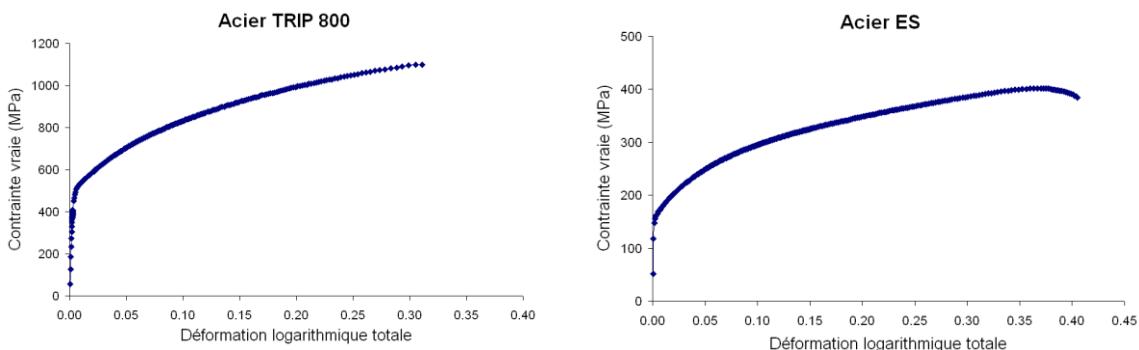
- la déformation majeure de Hencky ;
- la déformation mineure de Hencky définie dans le repère principal ;
- les déformations de Green-Lagrange définies dans le repère général.

La courbe rationnelle de traction liant la contrainte rationnelle (ou vraie)  $\sigma_{rat}$  à la déformation rationnelle  $\varepsilon_{rat}$  est directement déduite de la mesure de l'effort de traction et des déformations données par ICASOFT. La contrainte rationnelle est calculée de la manière suivante :

$$\sigma_{rat} = \frac{F}{S} = \frac{F}{S_0} \cdot \exp(\varepsilon_{rat}) \quad (2.1)$$

où  $S_0$  est l'aire de la section initiale de l'éprouvette et  $S$  est l'aire de la section "vraie" de l'éprouvette au cours de l'essai.

Les courbes d'écrouissage de chaque matériau étudié sont données sur la figure 2.3.



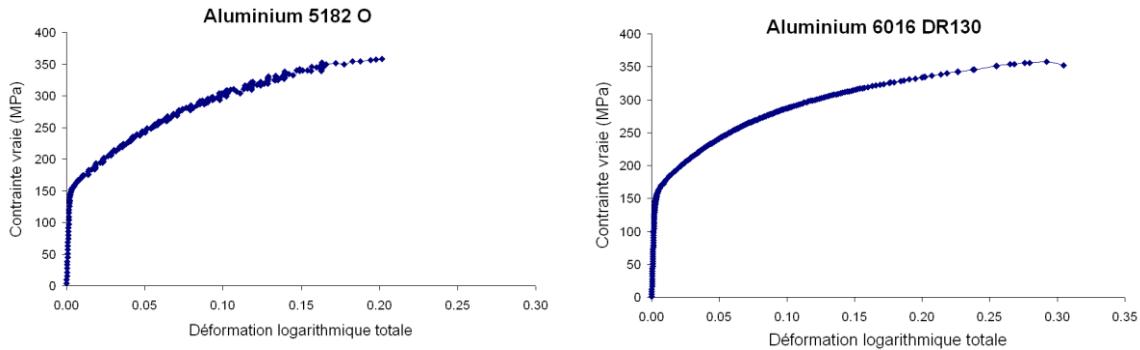


Figure 2.3. Courbes d'écrouissage des quatre nuances étudiées

### 2.3.2. Mesure des coefficients de Lankford

Le comportement des tôles laminées varie souvent en fonction de la direction de sollicitation en raison de l'orientation préférentielle des grains imposée par le laminage. Dans ces conditions, elles sont dites anisotropes. Par ailleurs, cette anisotropie se caractérise généralement par trois plans de symétries dont les intersections définissent les trois axes d'orthotropie ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) définis sur la figure 2.4. L'orthotropie est une anisotropie particulière des tôles. La mesure des déformations pendant l'essai de traction permet également de mesurer les coefficients de Lankford qui rendent compte de cette anisotropie initiale de la tôle.

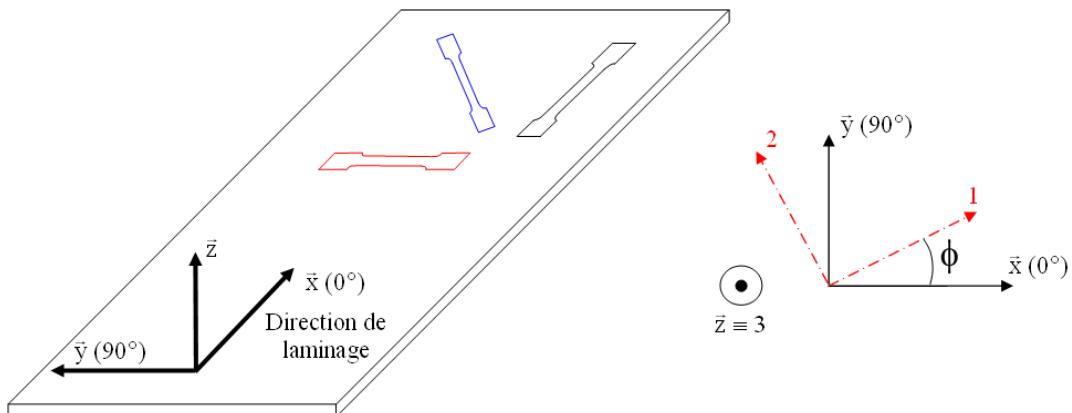


Figure 2.4. Orientation des éprouvettes de traction

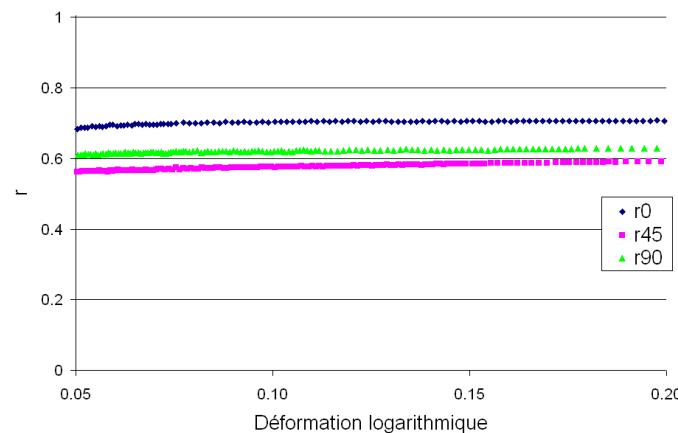
L'idée de base pour caractériser cette anisotropie est de réaliser des essais de traction dans plusieurs directions. On introduit classiquement le coefficient de Lankford  $r_\phi$  en fonction de l'orientation de découpage de l'éprouvette de traction notée  $\phi$  et défini par rapport à la direction de laminage (figure 2.4). En pratique, il est courant d'identifier les coefficients de Lankford  $r_0$ ,  $r_{45}$ ,  $r_{90}$  pour les trois orientations particulières  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$  par rapport à la direction de laminage. Le coefficient de Lankford est le rapport entre la déformation latérale  $\epsilon_{22}$  et la déformation dans l'épaisseur  $\epsilon_{33}$  d'une éprouvette en traction uniaxiale :

$$r_\phi = \frac{d\epsilon_{\phi+90}}{d\epsilon_{33}} \quad (2.2)$$

$d\varepsilon_{33}$  est calculée grâce à l'hypothèse d'incompressibilité plastique du matériau :

$$d\varepsilon_{11} + d\varepsilon_{22} + d\varepsilon_{33} = 0 \quad (2.3)$$

Les coefficients de Lankford sont généralement inférieurs à 1 pour les alliages d'aluminium et supérieurs à 1 pour les aciers, ce qui traduit une moins bonne formabilité des tôles en aluminium. Ces coefficients (n'étant pas constants) sont moyennés pour une déformation plastique comprise entre 5% et 20% (figure 2.5).



**Figure 2.5.** Variation des coefficients de Lankford pour l'aluminium 6016 DR130

### 2.3.3. Mesure du module de Young

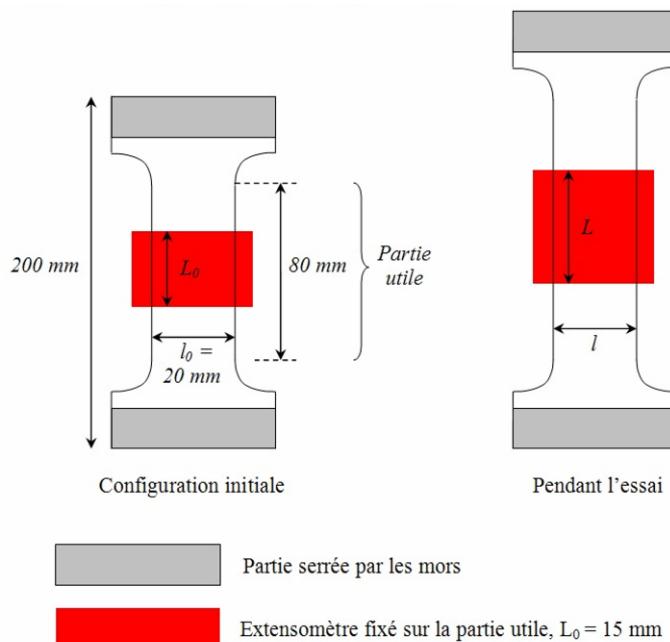
La corrélation d'images 2D montre ses limites pour la mesure du module de Young et du coefficient de Poisson. Un extensomètre est donc fixé sur la partie utile de l'éprouvette et permet de mesurer l'allongement ( $L - L_0$ ) de celle-ci au cours de l'essai (voir figure 2.6). La longueur initiale de l'extensomètre est de 10 mm. L'effort de traction  $F$  et l'allongement ( $L - L_0$ ) permettent de calculer la contrainte conventionnelle  $\sigma_{\text{conv}}$  et la déformation conventionnelle  $\varepsilon_{\text{conv}}$ .

$$\varepsilon_{\text{conv}} = \frac{L - L_0}{L_0} \quad \text{et} \quad \sigma_{\text{conv}} = \frac{F}{S_0} \quad (2.4)$$

où  $S_0$  est la section initiale de l'éprouvette. De la courbe conventionnelle est déduite (en supposant l'incompressibilité plastique du matériau) la courbe d'écrouissage rationnelle :

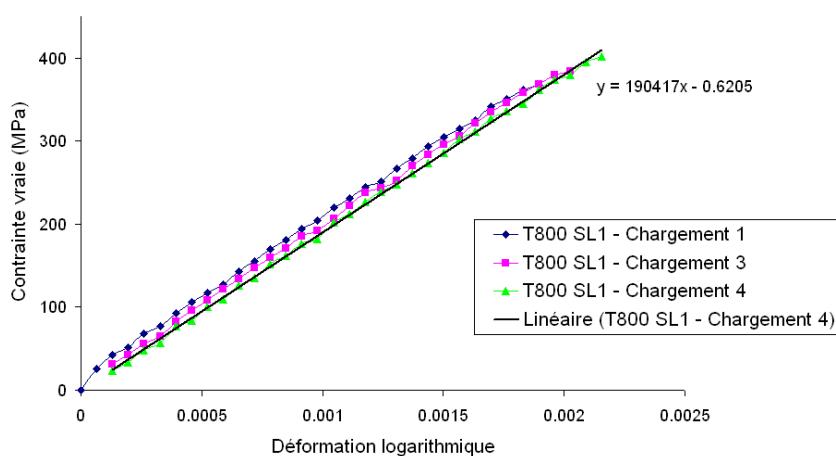
$$\varepsilon_{\text{rat}} = \ln(1 + \varepsilon_{\text{conv}}) \quad \text{et} \quad \sigma_{\text{rat}} = \sigma_{\text{conv}} \cdot (1 + \varepsilon_{\text{conv}}) \quad (2.5)$$

La mesure du module de Young est réalisée avant l'apparition de la plasticité. Des auteurs [2] ont montré que le module de Young diminue quand la déformation plastique augmente.

**Figure 2.6.** Géométrie des éprouvettes de traction

L'essai se déroule en deux parties :

1. La première partie consiste à réaliser un cycle sur l'éprouvette : il s'agit d'un chargement en traction puis, l'effort est relâché avant d'avoir atteint la limite élastique. Cette opération, réalisée trois fois, permet de s'affranchir des jeux présents dans les mors de la machine et des défauts d'alignement de l'éprouvette.
2. La deuxième partie concerne l'essai de traction classique. Le module de Young est alors mesuré durant le quatrième chargement (figure 2.7).

**Figure 2.7.** Mesure du module de Young sur l'acier TRIP 800 dans la direction de laminage

La corrélation d'images 3D, non disponible au moment de la réalisation des essais, permet maintenant d'obtenir des valeurs beaucoup plus précises pour le module de Young et le coefficient de Poisson.

### 2.3.4. Résultats des essais de traction

Les tableaux 2.2 et 2.3 résument les propriétés mécaniques déduites des essais de traction.

Nuances	$i$ ( $^{\circ}$ )	$\sigma_0$ (MPa)	$E$ (GPa)	$\nu$	$r_i$
ES	0°	160 ± 5	200000	0.32	1,48 ± 0,03
	45°	176 ± 5	190000	0.34	1,36 ± 0,03
	90°	175 ± 5	200000	0.34	1,96 ± 0,03
TRIP 800	0°	494 ± 5	190000	0.32	0,89 ± 0,03
	45°	535 ± 5	200000	0.29	0,88 ± 0,03
	90°	531 ± 5	195000	0.27	1,12 ± 0,03

**Tableau 2.2.** Propriétés mécaniques des tôles en acier

Nuances	$i$ ( $^{\circ}$ )	$\sigma_0$ (MPa)	$E$ (GPa)	$\nu$	$r_i$
5182 O	0°	159 ± 5	69000	0.32	0,66 ± 0,03
	45°	151 ± 5	68000	0.32	0,82 ± 0,03
	90°	154 ± 5	73000	0.33	0,69 ± 0,03
6016 DR130	0°	154 ± 5	70000	0.31	0,71 ± 0,03
	45°	153 ± 5	68000	0.29	0,57 ± 0,03
	90°	155 ± 5	65000	0.31	0,61 ± 0,03

**Tableau 2.3.** Propriétés mécaniques des tôles en alliage d'aluminium

En vue de modéliser le comportement des matériaux, la partie plastique de la courbe rationnelle de traction est identifiée sur la base des lois d'écrouissage classiques, de type élastoplastiques. Trois lois sont utilisées dans un premier temps :

- la loi de Ludwick de type puissance

$$\sigma = \sigma_0 + K \cdot (\bar{\varepsilon}^p)^n$$

- la loi de Voce introduisant une saturation de l'écrouissage

$$\sigma = \sigma_0 + Q \cdot (1 - \exp(-b \cdot \bar{\varepsilon}^p))$$

- la loi de Hocket-Sherby

$$\sigma = Q - (Q - \sigma_0) \cdot \exp(-b \cdot (\bar{\varepsilon}^p)^n)$$

Une optimisation par la méthode des moindres carrés permet d'identifier les paramètres de ces lois. Le tableau 2.4 indique les coefficients identifiés des lois d'écrouissage élastoplastiques isotropes pouvant être utilisés dans les codes de simulation numérique. Les coefficients d'écrouissage sont globalement plus élevés pour les alliages d'aluminium que pour les aciers.

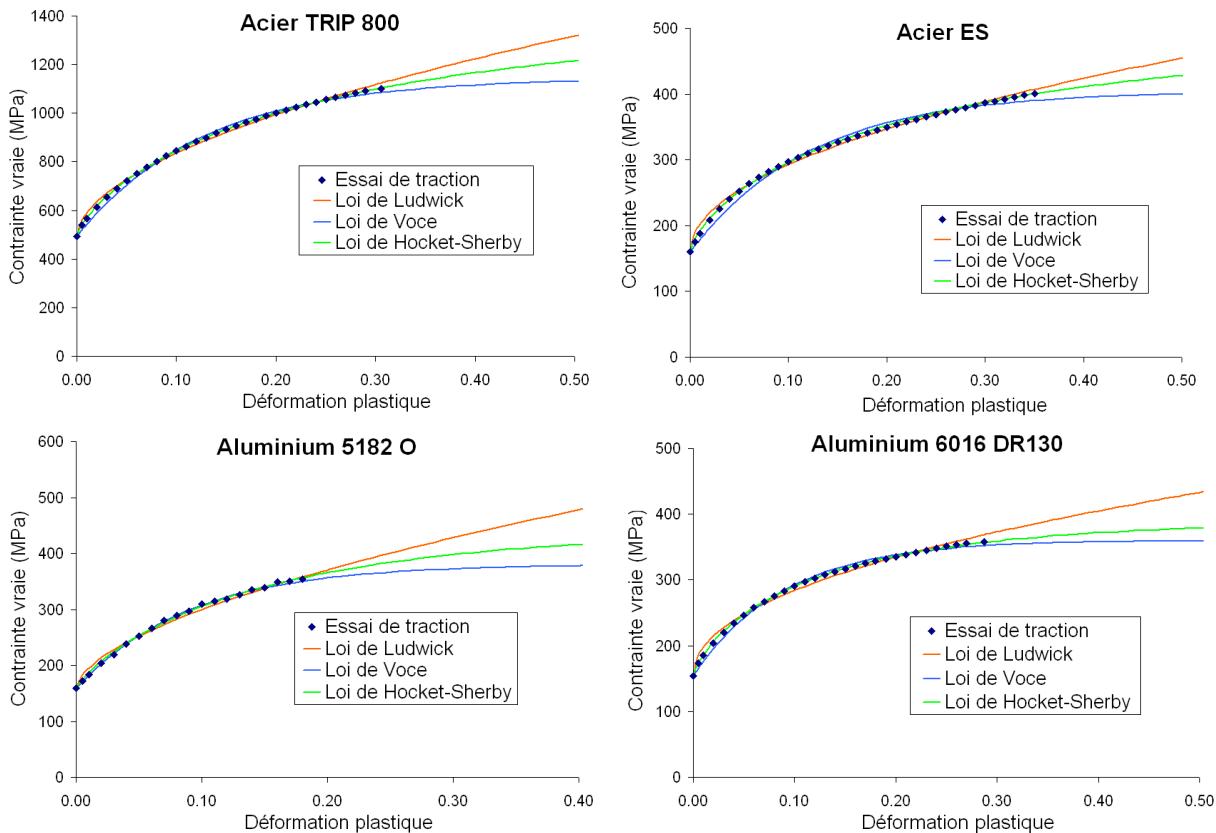


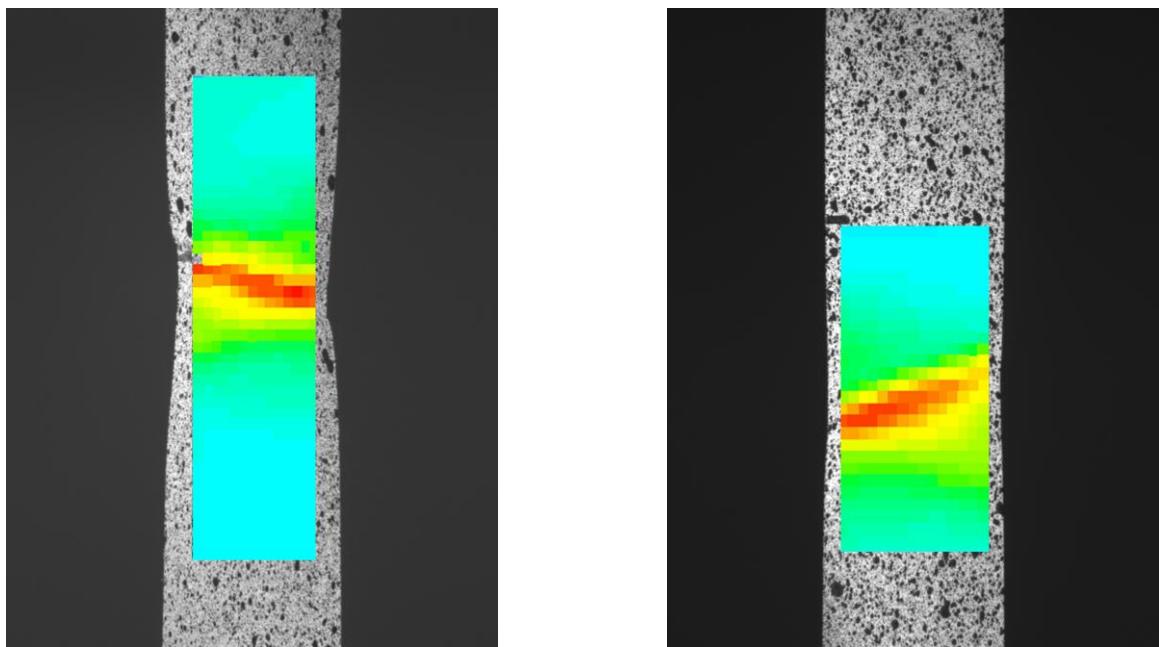
Figure 2.8. Lissage des courbes de traction

Nuances	Loi de Ludwick		Loi de Voce		Loi de Hocket-Sherby		
	K (MPa)	n	Q (MPa)	b	Q (MPa)	b	n
<b>ES</b>	415,5	0,495	244,3	8,18	490,6	2,73	0,709
<b>TRIP 800</b>	1204	0,547	649,5	7,87	1378,7	2,84	0,749
<b>5182 O</b>	548	0,591	221,3	11,09	444,3	5,03	0,845
<b>6016 DR130</b>	387	0,474	205,9	11,17	390,7	5,12	0,776

Tableau 2.4. Paramètres identifiés pour un écrouissage isotrope

La figure 2.9 montre la répartition des déformations dans les éprouvettes juste avant rupture. Elle illustre en particulier la grande ductilité de l'acier ES qui se traduit par une striction diffuse beaucoup plus marquée que pour l'acier TRIP 800 et les alliages d'aluminium 5182 O et 6016 DR130. La striction est alors très réduite et les déformations se localisent rapidement jusqu'à atteindre la rupture pour ces trois matériaux. On note au passage l'apparition de bandes de striction à 45° par rapport à la direction de traction.

L'effet discontinu observé sur la courbe de l'aluminium 5182 O est dû à un phénomène de vieillissement dynamique caractéristique des alliages d'aluminium de la série 5000. En effet, sous certaines conditions de température et de vitesse de déformation, ce phénomène résulte de l'interaction entre les dislocations mobiles et les atomes interstitiels ou substitutionnels, ici les atomes de magnésium. Dans une partie du domaine, il apparaît donc sur la courbe de traction des discontinuités qui portent le nom de Portevin-Le Chatelier (PLC) et qui résultent de la propagation de bandes de déformation plastique localisée [3].



**Figure 2.9.** Images d'éprouvettes juste avant rupture montrant les zones de marquage calculées par ICASOFT grâce à la corrélation 2D : acier ES (à gauche) aluminium 6016 DR130 (à droite)

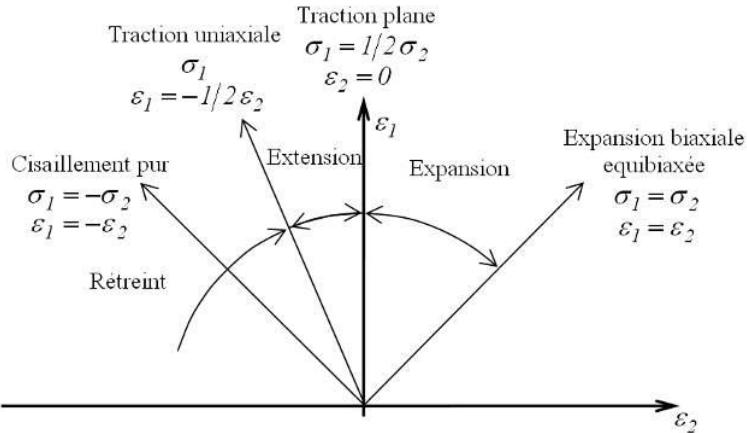
## 2.4. Courbes Limites de Formage

Les Courbes Limites de Formage (CLF) sont utilisées par les emboutisseurs pour caractériser l'aptitude des tôles minces à l'emboutissage. Ces courbes sont tracées dans le repère ( $\varepsilon_2, \varepsilon_1$ ) des directions principales de déformations,  $\varepsilon_1$  étant par convention la plus grande de ces deux déformations. Elles donnent les déformations maximales qu'une tôle peut subir avant l'apparition d'une striction localisée ou la rupture brutale, suivant le type de matériau. Une CLF divise le plan des déformations principales en deux, délimitant ainsi une zone de sécurité.

Utilisées dans un code de calcul, ces courbes permettent d'évaluer les risques de rupture d'une pièce en observant la position des points obtenus par le calcul par rapport à la CLF. De la même manière, ces courbes favorisent l'identification des zones du flan qui ne sont pas suffisamment tendues et qui favorisent l'apparition de plis.

Les premières CLF ont été tracées à la rupture. On considère désormais que des strictions localisées ne peuvent pas être tolérées sur des pièces mécaniques, pour des raisons mécaniques (résistance moindre de la zone présentant une striction) ou pour des raisons esthétiques (pièces de peaux dans l'industrie automobile).

Les CLF sont obtenues expérimentalement à partir des éprouvettes de largeurs différentes en vue de décrire tous les modes de déformations. Le repère ( $\varepsilon_2, \varepsilon_1$ ) dans lequel sont reportés les points expérimentaux est défini comme suit (figure 2.10) :

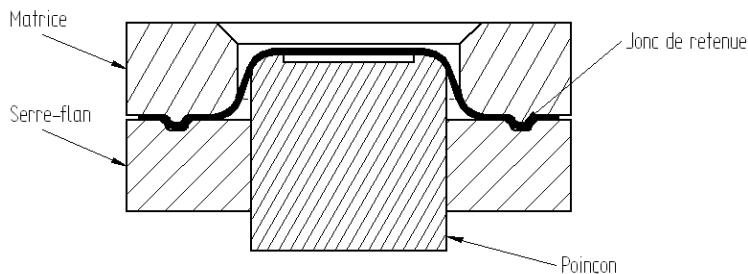


**Figure 2.8.** Différents modes de déformations d'une pièce emboutie

## 2.4.1. Méthode d'obtention d'une Courbe Limite de Formage

### 2.4.1.1. Les différentes méthodes

L'outil d'emboutissage se compose généralement de trois éléments principaux : le poinçon et la matrice qui délimitent respectivement les contours intérieur et extérieur de la pièce, et le serre-flan. Ce dernier presse la tôle contre la matrice, évite la formation de plis et contrôle l'écoulement de la matière le long du poinçon (figure 2.11) :



**Figure 2.9.** Schéma d'emboutissage avec jonc de retenue

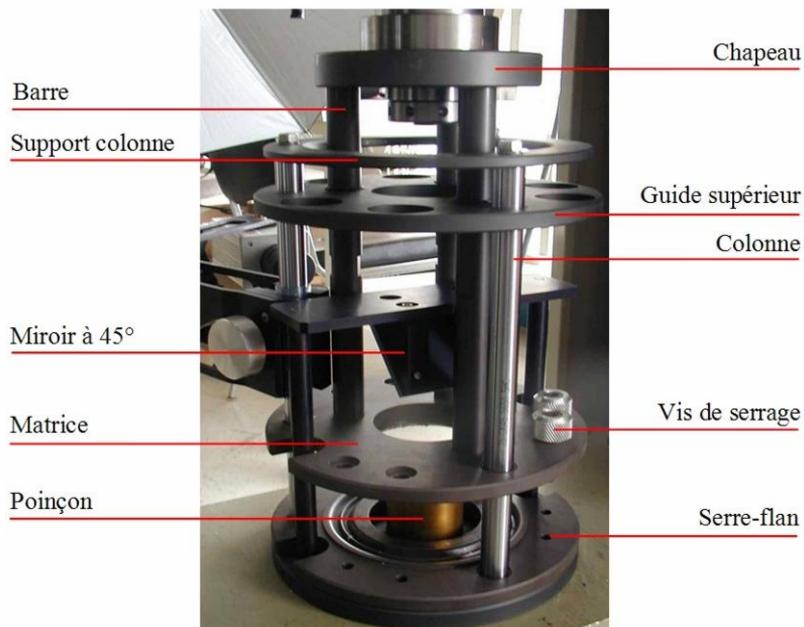
Deux principaux types d'essais expérimentaux peuvent être utilisés pour déterminer une CLF :

1. L'essai Marcinia [4] : l'emboutissage est réalisé avec un poinçon cylindrique à fond plat évidé et un contre-flan qui concentre les contraintes au centre de la plaque. Le poinçon de 75 mm de diamètre est recouvert de feuilles de téflon pour réduire le frottement tôle/outils. La zone centrale où apparaît normalement la striction est plane, ce qui permet une exploitation avec un logiciel de calcul des déformations 2D.
2. L'essai Nakazima [5] : l'emboutissage est réalisé avec un poinçon hémisphérique de 75 mm de diamètre. Le poinçon est enduit de graisse pour permettre une bonne répartition des efforts sur le flan. Les éprouvettes déformées épousent les contours du poinçon. La zone d'exploitation des mesures est donc très réduite car non plane.

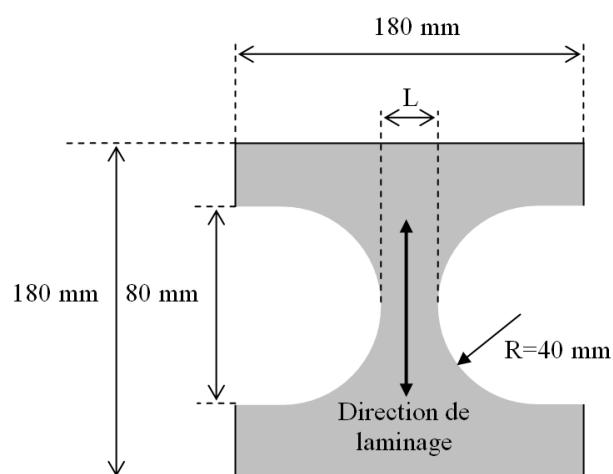
Le matériel utilisé pour réaliser ces essais est composé d'un module d'emboutissage détaillé sur la figure 2.12. Ce module est adapté sur la machine de traction compression Schenck RSA250.

#### 2.4.1.2. Préparation des éprouvettes

La largeur des éprouvettes varie de 20 mm à 180 mm afin de décrire différents modes de déformation. Il faut une dizaine de largeurs différentes L (voir figure 2.13) pour couvrir convenablement tout le plan des déformations ( $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_1$ ). La forme des éprouvettes est généralement rectangulaire. Les éprouvettes sont recouvertes dans notre cas d'un motif aléatoire obtenu par pulvérisation d'une couche de peinture blanche et d'un mouchetis noir pour mesurer les déformations par corrélation d'images.



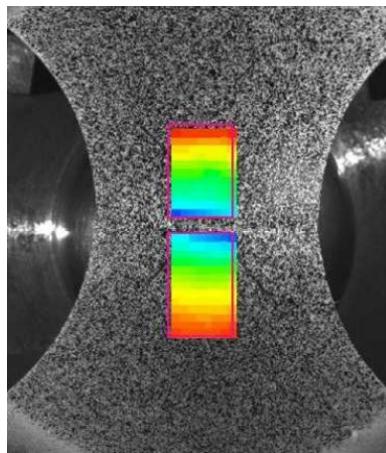
**Figure 2.10.** Module d'emboutissage



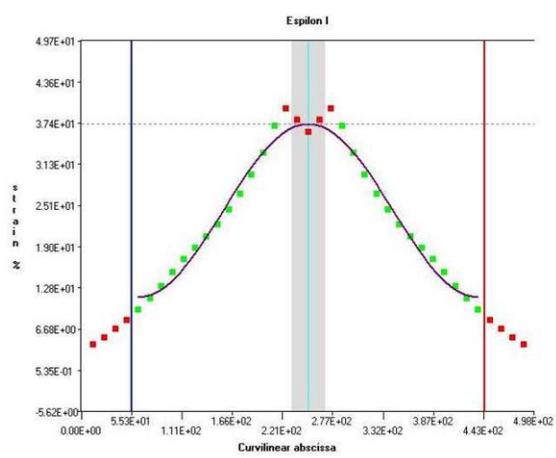
**Figure 2.13.** Dimensions des flans pour la détermination des CLF

### 2.4.2. Principe expérimental

Les essais réalisés sont de type Nakazima (poinçon hémisphérique). Etant donné que la zone où se produit la striction n'est pas parfaitement plane, ni normale à l'axe optique de la caméra – contrairement au cas du poinçon à fond plat – la prise directe d'image (pendant l'essai) n'est dans ce cas là pas possible. Pour permettre la mesure du champ de déformation, les prises de vue sont réalisées avec une caméra avant et après essai. Comme pour les essais de traction, la caméra est équipée d'un objectif télécentrique [6]. Lors de la photographie du flan avant emboutissage, la caméra est mise en place, objectif vers le bas, et ne doit plus être changée de position. La distance focale, où sont placés les flans à photographier, est matérialisée à l'aide d'un laser, dont le faisceau horizontal vient tangenter le flan. Pour la prise de vue finale, il faut placer la striction au centre de l'image et faire tangenter le laser, au mieux perpendiculairement à la striction, ceci afin que la zone de striction soit la plus « plane » et parallèle possible au plan image de la caméra.



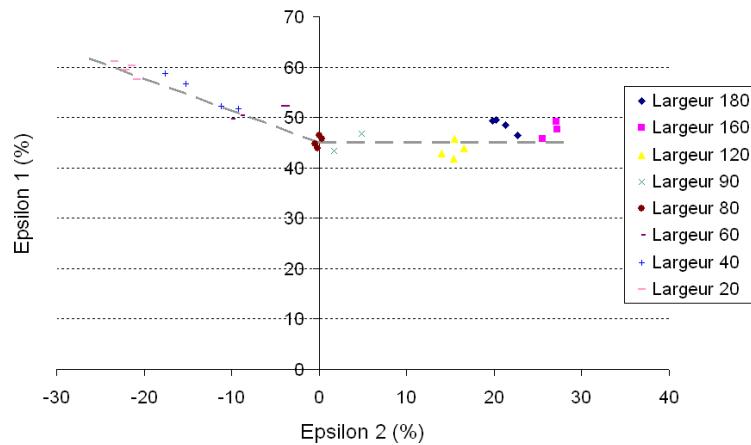
**Figure 2.14.** Zone exploitée pour la mesure des déformations



**Figure 2.15.** Interpolation sinusoïdale au voisinage de la rupture

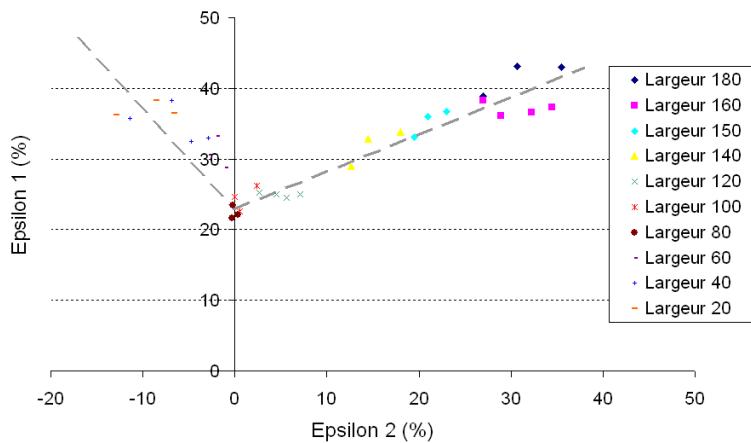
La zone autour de la striction est donc supposée plane, à la même distance que la photo initiale. Cette zone (figure 2.14) peut donc être exploitée normalement par ICASOFT, comme pour un flan déformé avec un poinçon à fond plat. Les essais étant réalisés jusqu'à rupture du flan, le logiciel de corrélation utilise une interpolation sinusoïdale de part et d'autre de la rupture pour déterminer le couple de valeur ( $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_1$ ) correspondant à l'apparition de la striction (figure 2.15).

### 2.4.3. Résultats des essais

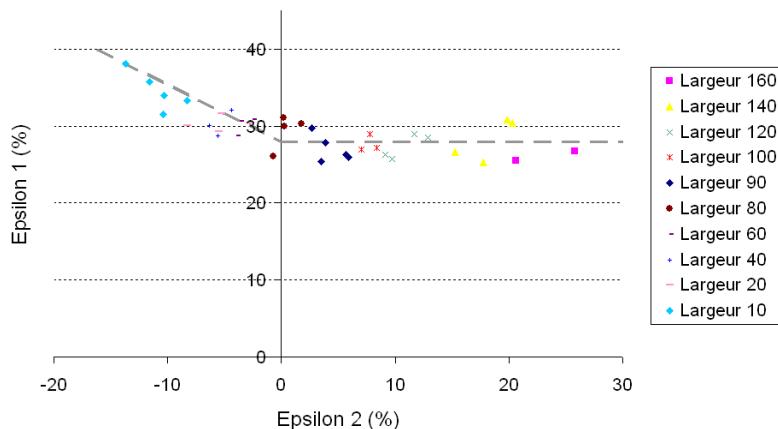


**Figure 2.16. CLF Acier ES**

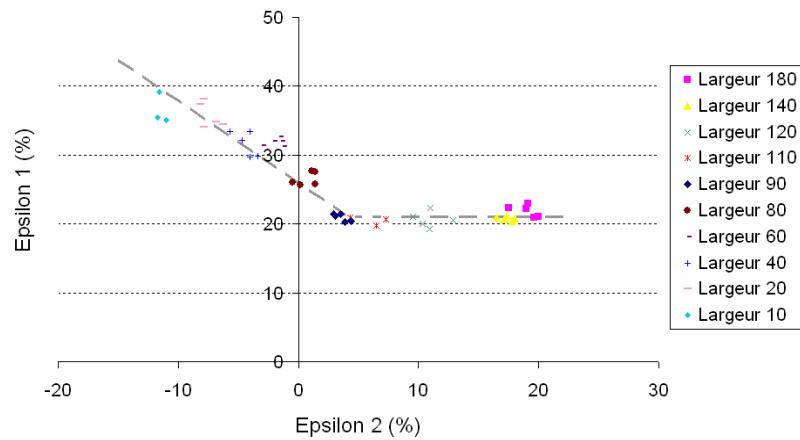
En position relative, les courbes de l'acier TRIP 800, de l'aluminium 5182 O et de l'aluminium 6016 DR130 se situent à peu près au même niveau. Celle correspondant à l'acier ES se situe bien au-dessus des autres, ce qui traduit une meilleure emboutissabilité.



**Figure 2.17. CLF Acier TRIP 800**



**Figure 2.18. CLF aluminium 5182 O**

**Figure 2.19.** CLF aluminium 6016 DR130**Figure 2.20.** Flans après emboutissage

# Bibliographie

- [1] P. Clerc, Mesure de champs de déplacements et de déformations par stéréovision et corrélation d'images numériques, Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2001.
- [2] F. Morestin, Contribution à l'étude du retour élastique lors de la mise en forme des produits plats, Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1993.
- [3] M. Abbadi et al., On the characteristics of Portevin-Le Chatelier bands in aluminium alloy 5182 under stress-controlled and strain-controlled tensile testing, Mater. Sci. Eng., A337, p. 194-201, 2002.
- [4] Z. Marciniak et K. Kuczynski, Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal, International Journal of Mechanical Sciences, p 609–620, 1967.
- [5] K. Nakazima, T. Kikuma, K. Hasuka, Study on the formability of steel sheets, Yamata Technical Report, Vol. 264, p. 141–154, 1968.
- [6] S. Touchal-Mguil, Une technique de corrélation directe d'images numériques : application à la détermination de courbes limites de formage et proposition d'un critère de striction, Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1997.

# Chapitre 3

## Rhéologie des tôles sous sollicitations alternées

<b>3.1. Introduction .....</b>	36
<b>3.2. Modélisation du comportement des tôles en pliage dépliage .....</b>	36
3.2.1. Formalisme des lois en élastoplasticité .....	36
3.2.2. Critères tridimensionnels de plasticité .....	37
3.2.3. Lois d'écoulement .....	39
<b>3.3. Caractérisation des tôles en flexion alternée .....</b>	41
3.3.1. Principe expérimental.....	42
3.3.2. Résultats expérimentaux .....	43
3.3.3. Ecrouissage isotrope.....	44
3.3.4. Ecrouissage combiné.....	45
3.3.5. Nouveau modèle d'écrouissage combiné .....	49
3.3.6. Vérification éléments finis .....	51
<b>3.4. Autre méthode d'identification de la contribution cinématique de l'écrouissage</b> .....	53
3.4.1. Description de l'essai de cisaillement .....	53
3.4.2. Identification des paramètres de Hill.....	53
3.4.3. Identification des paramètres matériaux.....	54
3.4.4. Vérification éléments finis .....	55
<b>3.5. Croisement des résultats des deux identifications .....</b>	56
3.5.1. Simulation de l'essai de flexion avec les paramètres obtenus en cisaillement	56
3.5.2. Simulation de l'essai de cisaillement avec les paramètres obtenus en flexion	57
<b>3.6. Conclusion.....</b>	57

### 3.1. Introduction

L'objet de ce chapitre est de montrer les limites de la caractérisation par la traction uniaxiale à décrire correctement le comportement des tôles en emboutissage. La flexion alternée étant un des modes de déformation en emboutissage, la surface extérieure de la tôle se retrouve en extension alors que la surface intérieure est en compression puis, lors d'un dépliage, ces sollicitations s'inversent. Il s'avère ainsi nécessaire de tenir compte de l'effet Bauschinger intervenant lors de telles sollicitations de la tôle, effet non pris en compte par les lois d'écrouissage isotrope communément utilisées dans la simulation d'emboutissage. Dans notre travail, nous avons donc souhaité modéliser la rhéologie de la tôle par des modèles d'écrouissage combiné isotrope/cinématique qui seront appliqués aux aciers et aux alliages d'aluminium. Les paramètres matériau des modèles d'écrouissage combiné sont identifiés sur la base d'essais de flexion alternée conçus et mis au point au LaMCoS. L'apport réel de ces modèles dans la simulation de l'emboutissage est discuté ultérieurement.

### 3.2. Modélisation du comportement des tôles en pliage dépliage

#### 3.2.1. Formalisme des lois en élastoplasticité

Dans le cadre général de la plasticité, il existe à un instant  $t$  donné une surface convexe définie dans l'espace des contraintes à partir de laquelle l'écoulement plastique se produit. Pour des états de contraintes contenus à l'intérieur de cette surface, le comportement est entièrement élastique. Cette surface est appelée surface de charge ou surface d'écoulement. Son équation peut s'écrire de manière générale en supposant le comportement indépendant de la température par :

$$f = \sigma_{eq}(\{\sigma\}, \{\alpha\}) - \sigma_c(\bar{\epsilon}^p) \quad (3.1)$$

$$\text{avec } \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \text{ et } \{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} \text{ pour ce qui nous intéresse ici}$$

où respectivement  $\sigma_{eq}$  est la contrainte équivalente gouvernée par le tenseur des contraintes  $\{\sigma\}$  et  $\{\alpha\}$  le tenseur cinématique tandis que  $\sigma_c$  est la contrainte limite d'écoulement plastique dépendante de la déformation plastique équivalente. L'expression de la contrainte équivalente est fonction du critère de plasticité choisi (voir le paragraphe suivant).

Le principe de la plasticité consiste à dire que le point représentatif de l'état des contraintes reste sur la surface seuil au cours de l'écoulement plastique. L'écoulement plastique du matériau est régi par la condition de consistance pour laquelle la différentielle  $df$  est nulle. La condition  $df < 0$  correspond à une décharge élastique à partir d'un état plastique initial.

*En résumé :*

$f < 0$	$\Rightarrow$	Comportement élastique
$f = 0$ et $df = 0$	$\Rightarrow$	Ecoulement plastique
$f = 0$ et $df < 0$	$\Rightarrow$	Décharge élastique

Enfin, dans le cadre de la plasticité associée, la surface de charge est confondue à une surface équivalente. La condition de normalité dans l'hypothèse d'un écoulement plastique associé s'écrit donc :

$$\{d\varepsilon^p\} = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \quad (3.2)$$

Le gradient  $\frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}}$  sera par la suite noté  $\{a\}$  pour plus de lisibilité.

### 3.2.2. Critères tridimensionnels de plasticité

Les critères de plasticité définissent la forme prise par la surface de charge dans l'espace des contraintes. Ils déterminent l'expression de la contrainte équivalente  $\sigma_{eq}$  définie par l'équation (2.1). On distingue les critères isotropes et les critères anisotropes dont les formulations ne cessent d'être enrichies.

#### 3.2.2.1. Critère isotrope de Von Mises (1913)

Le critère de Von Mises proposé en 1913 est le critère isotrope le plus utilisé en mise en forme des matériaux métalliques.

$$\begin{aligned} f &= \sigma_{eq} = J_2 = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot S_{ij} \cdot S_{ij}} \\ \sigma_{eq} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2) \right]} \end{aligned} \quad (3.3)$$

#### 3.2.2.2. Critère anisotrope quadratique de Hill (1948)

Comme décrit au paragraphe 2.3, le comportement des tôles en flexion est bien souvent anisotrope en raison de l'orientation préférentielle de la direction cristallographique des grains dans le sens de laminage. Le critère proposé par Hill en 1948 [1] suppose l'orthotropie de la tôle qui n'est qu'un cas particulier de l'anisotropie. Le critère quadratique s'exprime alors en fonction du tenseur des contraintes, exprimé dans le repère d'orthotropie :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{f \cdot (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + g \cdot (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + h \cdot (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2l \cdot \sigma_{yz}^2 + 2m \cdot \sigma_{xz}^2 + 2n \cdot \sigma_{xy}^2} \quad (3.4)$$

où  $f, g, h, l, m, n$  sont les paramètres caractéristiques de l'anisotropie et de la forme de la surface de charge. Le détail des calculs de ces coefficients en fonction des coefficients d'anisotropie  $r_0, r_{45}, r_{90}$  est présenté en annexe A.

Sous l'hypothèse des contraintes planes dans le plan de la tôle, acceptable pour la mise en forme des produits plats, l'expression 3.4 devient :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{(g+h)\sigma_{xx}^2 + (f+h)\sigma_{yy}^2 - 2h\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 2n\sigma_{xy}^2} \quad (3.5)$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$\sigma_{eq}^2 = \langle \sigma \rangle [H] \{ \sigma \} = \langle \sigma_{xx} \mid \sigma_{yy} \mid \sigma_{xy} \rangle \cdot \begin{bmatrix} g+h & -h & \\ -h & f+h & \\ & & 2.n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

### 3.2.2.3. Critère non quadratique de Barlat et Lian (1989)

Ce modèle permet de généraliser le critère quadratique de Hill (1948) et les critères non quadratiques de Hosford [2]. En supposant les contraintes planes dans le plan de la tôle, on l'applique ici à un écrouissage général donné par la relation. L'expression de la contrainte équivalente prend dans ce cas la forme suivante :

$$2.\sigma_{eq}^m = A_B |K_1 + K_2|^m + A_B |K_1 - K_2|^m + (2 - A_B)|2.K_2|^m \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} K_1 = \frac{\sigma_x + H_B \cdot \sigma_y}{2} \\ K_2 = \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - H_B \cdot \sigma_y}{2} \right)^2 + (P_B \cdot \sigma_{xy})^2} \end{cases} \quad (3.8)$$

Les paramètres matériels de ce critère sont  $A_B$ ,  $H_B$ ,  $P_B$  et  $m$ . Pour ce critère, les constantes  $A_B$ ,  $H_B$  sont données en termes de coefficients d'anisotropie plane  $r_0$  et  $r_{90}$ , comme précisé dans [3] :

$$A_B = 2 - 2 \cdot \sqrt{\frac{r_0 \cdot r_{90}}{(1 + r_0)(1 + r_{90})}} \quad (3.9)$$

$$H_B = \sqrt{\frac{r_0 \cdot r_{90}}{(1 + r_0)(1 + r_{90})}}$$

La condition  $A_B > 0$  est nécessaire pour assurer la convexité du critère. Une fois les paramètres  $A_B$  et  $H_B$  déterminés, le paramètre  $P_B$  est calculé par la relation suivante :

$$P_B = \frac{\sigma_u}{\tau_c} \left( \frac{2}{2.A_B + 2^m(2 - A_B)} \right)^{1/m} \quad (3.10)$$

où  $\sigma_u$  est la contrainte seuil en traction uniaxiale et  $\tau_c$  est la contrainte seuil de cisaillement pure parallèle aux axes d'orthotropie ( $\sigma_x = \sigma_y = 0$  et  $\sigma_{xy} = \tau_c$ ). En pratique,  $P_B$  varie

du fait que le rapport  $\frac{\sigma_u}{\tau_c}$  n'est pas une fonction constante de la déformation équivalente.

Ceci a pour effet de modifier la forme de la surface de charge. Par ailleurs, les auteurs préconisent d'utiliser la valeur 8 de l'exposant  $m$  pour les matériaux à structure cristallographique cubique faces centrées (fcf) et la valeur 2 pour des structures cubiques centrées (cc).

### 3.2.2.4. Critère de Banabic et al (2000)

Banabic et ses co-auteurs ont présenté différentes versions de leur critère de plasticité dans plusieurs publications [4, 5, 6]. Leur critère est une extension du modèle de Barlat et Lian et s'écrit sous la forme générale suivante :

$$2.\sigma_{eq}^m = A_B |\Gamma + \Psi|^m + A_B |\Gamma - \Psi|^m + (2 - A_B) |2.\Lambda|^m \quad (3.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma = \frac{\gamma_1 \cdot \sigma_x + \gamma_2 \cdot \sigma_y}{2} \\ \Psi = \sqrt{\left(\frac{\psi_1 \cdot \sigma_x - \psi_2 \cdot \sigma_y}{2}\right)^2 + (\psi_3 \cdot \sigma_{xy})^2} \\ \Lambda = \sqrt{\left(\frac{\lambda_1 \cdot \sigma_x - \lambda_2 \cdot \sigma_y}{2}\right)^2 + (\lambda_3 \cdot \sigma_{xy})^2} \end{array} \right. \quad (3.12)$$

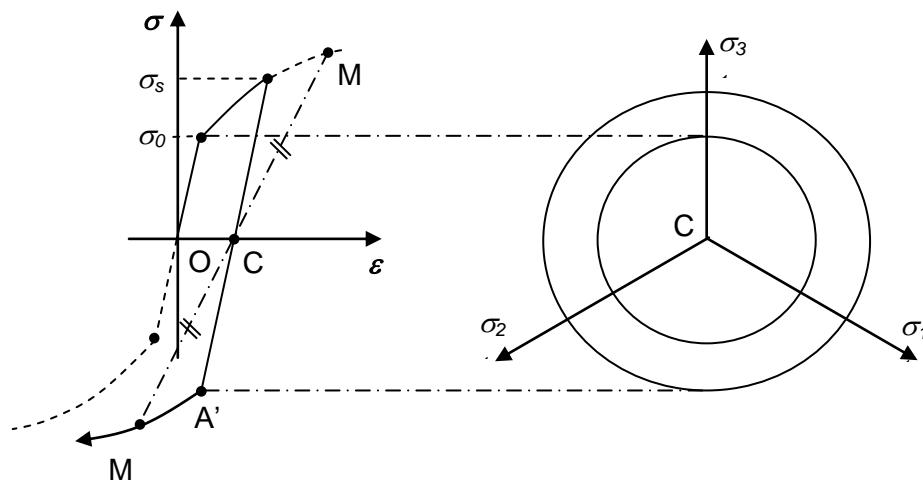
Les paramètres  $\gamma_1, \gamma_2, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sont identifiables à partir des limites élastiques en traction uniaxiale selon diverses directions, des coefficients d'anisotropie  $r_0, r_{45}, r_{90}$ , et des limites élastiques en traction biaxiale. Les auteurs montrent à l'aide des relations (3.11) et (3.12) que  $A_B$  doit être tel que  $0 < A_B < 1$  pour que la surface de charge dans l'espace des contraintes respecte la propriété de convexité. Mattiasson et Sigvant [7] ont montré que ce critère donne une très bonne localisation de l'ensemble des points de la surface de charge. Ils ont notamment mis en évidence que ce critère est approprié pour la mise en forme des tôles minces et particulièrement pour la prédiction de la striction. Toutefois, un grand nombre d'essais doit être réalisé pour identifier tous les paramètres de ce modèle, restant difficile à utiliser d'un point de vue industriel.

### 3.2.3. Lois d'écoulement

#### 3.2.3.1. Lois d'écrouissage isotrope

Bien que la plupart des matériaux présente une forte anisotropie d'écrouissage, ce modèle est très utilisé à cause de sa simplicité et de sa bonne représentativité dans le cas du chargement radial, c'est à dire lorsque le vecteur représentatif des contraintes dans l'espace des contraintes garde une direction constante.

L'évolution de la surface de charge au cours du temps se traduit géométriquement par une dilatation isotrope de la surface d'écoulement initiale dans l'espace des contraintes. Cette dilatation est directement générée par la limite d'écoulement  $\sigma_0$ , et la déformation plastique équivalente cumulée. Cette loi s'obtient classiquement à partir d'essais de traction vus précédemment ou d'autres essais pour identifier le comportement en grandes déformations comme le cisaillement, la torsion, les essais d'expansion équibiaxiale... L'évolution de la surface d'écoulement peut être ainsi assimilée à une homothétie de la surface de charge initiale dans l'espace des contraintes. La taille de la surface est directement pilotée par la contrainte d'écoulement plastique qui correspond initialement à la limite d'élasticité. La figure 3.1 ci-après montre une représentation de l'évolution de la surface de charge dans le repère des contraintes principales dans le cas d'un écoulement isotrope. L'évolution des contraintes et des déformations correspondantes est aussi décrite pour le cas simple d'une traction suivie d'une compression uniaxiale.

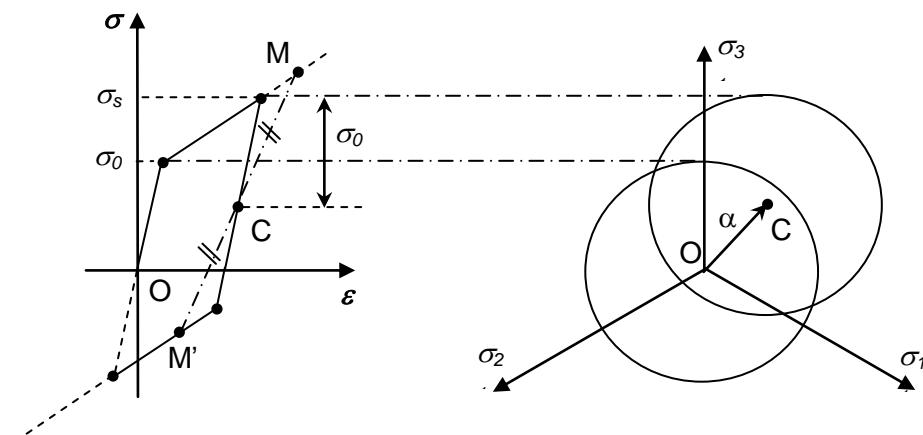


**Figure 3.1.** Représentation de l'écrouissage isotrope en traction/compression uniaxiale et dans l'espace des contraintes principales

Si l'écrouissage isotrope décrit bien le durcissement du matériau au cours d'une déformation monotone, il ne tient pas compte de l'effet Bauschinger des tôles qui se manifeste par un abaissement de la contrainte d'écoulement plastique lorsqu'un matériau initialement en traction (respectivement compression) est soumis à de la compression (respectivement traction).

### 3.2.3.2. Lois d'écrouissage cinématique

L'équation générale de la surface de charge relative au critère d'écoulement cinématique fait intervenir le tenseur d'écrouissage cinématique  $\{\alpha\}$ . La contrainte limite d'écoulement reste constante et égale à la limite d'élasticité  $\sigma_0$ . Autrement dit, cette condition empêche la dilatation de la surface de charge assimilée à un corps rigide dont le centre se déplace dans l'espace des contraintes (figure 3.2). Il est donc nécessaire de connaître la loi d'évolution du tenseur d'écrouissage cinématique pilotant le déplacement du centre de la surface de charge au cours du temps. Pour cela, différents modèles d'écrouissage cinématique existent dans la littérature dont les deux principaux sont le modèle linéaire de Prager et le modèle non linéaire de Lemaître et Chaboche.



**Figure 3.2.** Représentation de l'écrouissage cinématique linéaire en traction/compression uniaxiale et dans l'espace des contraintes principales

### a. Modèle d'écrouissage cinématique linéaire de Prager

Prager [8] a proposé la loi d'évolution linéaire introduisant un coefficient de proportionnalité  $C$  entre le tenseur d'écrouissage cinématique  $\{\alpha\}$  et le tenseur des déformations plastique :

$$\{d\alpha\} = C \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_c} [\mathbf{H}] \{\sigma - \alpha\} \quad (3.13)$$

$[\mathbf{H}]$  représentant l'anisotropie initiale du matériau et étant définie par la relation 3.6.

L'évolution de la contrainte en fonction de la déformation est nécessairement linéaire. La linéarité entre la contrainte de traction et la déformation n'est pas représentative du comportement réel du matériau compte tenu des courbes d'écrouissage rationnelles présentées sur la figure 2.2 du chapitre 2 pour les nuances étudiées. Le modèle cinématique de Prager constitue cependant le modèle de base pour la formulation de l'écrouissage cinématique où le coefficient  $C$  peut être identifié uniquement à partir d'essais de traction.

### b. Modèle d'écrouissage cinématique linéaire de Ziegler

Ziegler [9] a proposé une modification de la loi de Prager comme suit :

$$\{d\alpha\} = C \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_c} \cdot \{\sigma - \alpha\} \quad (3.14)$$

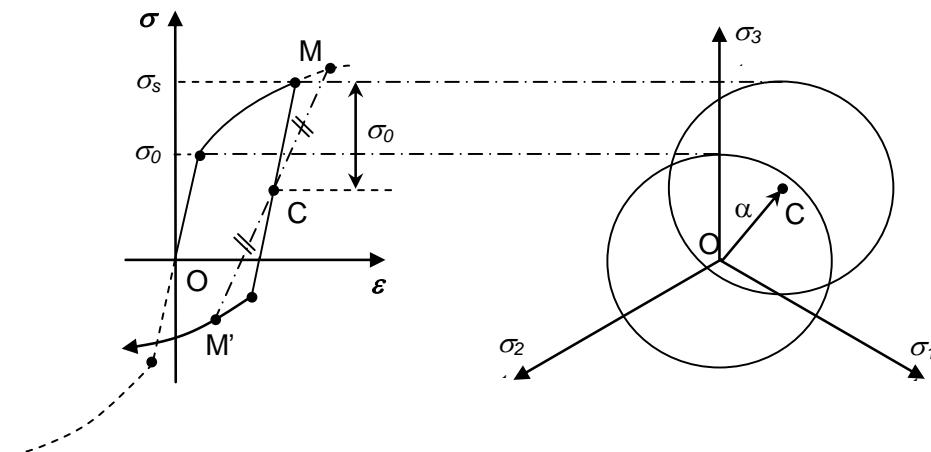
### c. Modèle d'écrouissage cinématique non linéaire de Lemaitre et Chaboche

Ce modèle a été introduit par Armstrong et Frederick [10], puis développé par Chaboche [11]. L'inconvénient de la linéarité des lois de Prager et Ziegler est levé par un terme de rappel qui introduit un effet mémoire évanescence du trajet de déformation :

$$\text{Chaboche-Prager} \quad \{d\alpha\} = C \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_c} \cdot [\mathbf{H}] \{\sigma - \alpha\} - \gamma \cdot \{\alpha\} d\bar{\varepsilon}^p$$

$$\text{Chaboche-Ziegler} \quad \{d\alpha\} = C \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_c} \cdot \{\sigma - \alpha\} - \gamma \cdot \{\alpha\} d\bar{\varepsilon}^p$$

où  $\gamma$  introduit le caractère non linéaire de la loi et  $C$  et le coefficient déjà présents dans les lois de Prager et Ziegler.



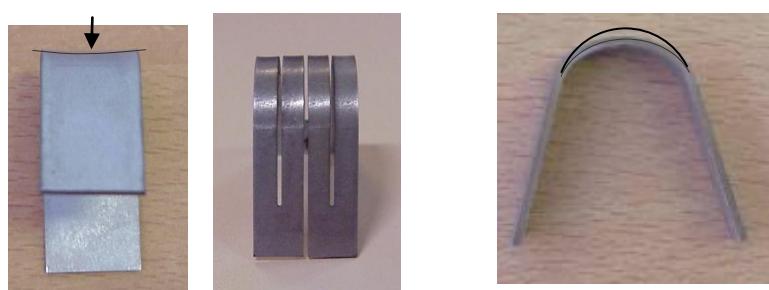
**Figure 3.3.** Représentation de l'écrouissage cinématique non linéaire isotrope en traction/compression uniaxiale et dans l'espace des contraintes principales

### 3.3. Caractérisation des tôles en flexion alternée

L'essai de traction seul permet d'identifier uniquement une loi d'écrouissage isotrope, insuffisante pour tenir compte de l'effet Baushinger dans le comportement du matériau. Des essais de type traction-compression peuvent être réalisés pour déterminer la composante cinématique d'une loi d'écrouissage combiné isotrope/cinématique. Cependant, de tels essais sont difficiles à réaliser en raison d'un risque de flambage des tôles minces. Pour cela, un essai de flexion, décrit au paragraphe suivant, a été retenu par le laboratoire LaMCoS pour caractériser les lois matériaux en plasticité cyclique.

#### 3.3.1. Principe expérimental

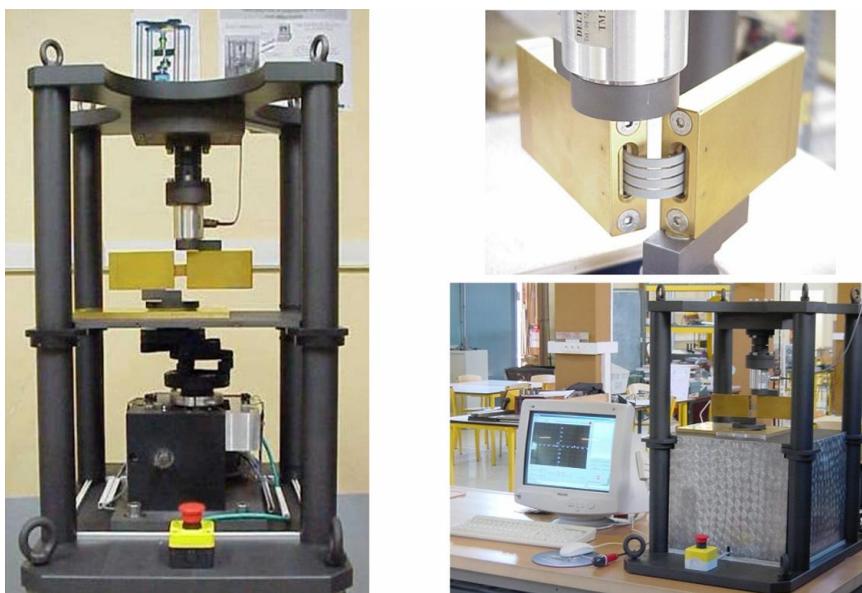
Les éprouvettes de flexion sont des bandes de tôles de 80 mm de long par 20 mm de large. Trois rainures d'environ 1 mm de large sont réalisées sur les éprouvettes afin d'éviter le phénomène classique connu sous la désignation d'anticlastic curvature. Le mors fixe de la machine est équipé d'un capteur de couple tandis que le mors mobile est entraîné par un moteur électrique par l'intermédiaire d'un joint de Oldham pour imposer un couple pur à l'éprouvette (figure 3.5).



**Figure 3.4.** Phénomène d'anticlastic curvature sur une éprouvette large

Les directions de déformation choisies sont successivement la direction de laminage, la direction à 45° et la direction transverse. Trois essais sont réalisés pour chaque direction afin de s'assurer de leur reproductibilité.

La machine d'essai plie l'éprouvette jusqu'à un angle donné (jusqu'à 165° au maximum) avec une vitesse constante de 100°/min, puis la déplie et la plie dans l'autre sens. La tôle subit donc un cycle de flexion alternée.

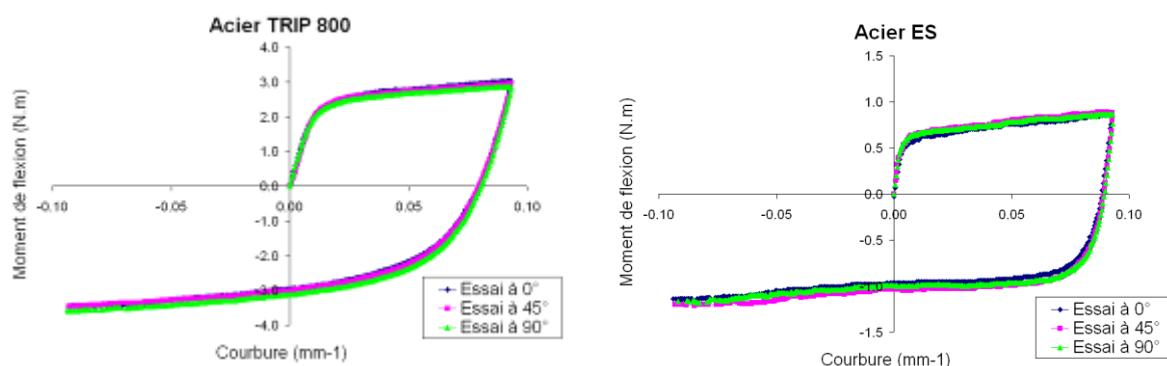


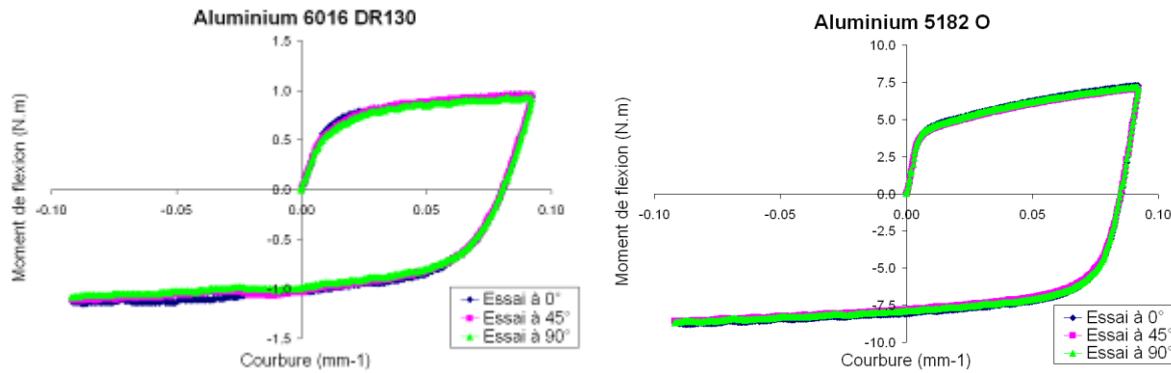
**Figure 3.5.** Machine de flexion

### 3.3.2. Résultats expérimentaux

Les essais sont réalisés sur les nuances présentées au tableau 2.1. Les courbes expérimentales donnant le moment de flexion appliqué sur le mors fixe en fonction de la courbure de l'éprouvette sont représentées sur la figure 3.6. Ces courbes sont tracées pour différents sens de sollicitations de la tôle (dans le sens de laminage  $0^\circ$ , dans le sens à  $45^\circ$  et dans le sens travers à  $90^\circ$ ). Elles illustrent la faible influence du sens de sollicitation sur le niveau des efforts appliqués pendant les phases de pliage et de dépliage. Les mêmes résultats ont été observés par Lange [12].

Les déformations maximales atteintes sur la surface en extension de la tôle sont de l'ordre de 0.05 après un déplacement maximal  $\theta$  de  $165^\circ$  pour les tôles de 1 mm et de l'ordre de 0.12 à 0.13 pour les tôles de 2.5 mm.





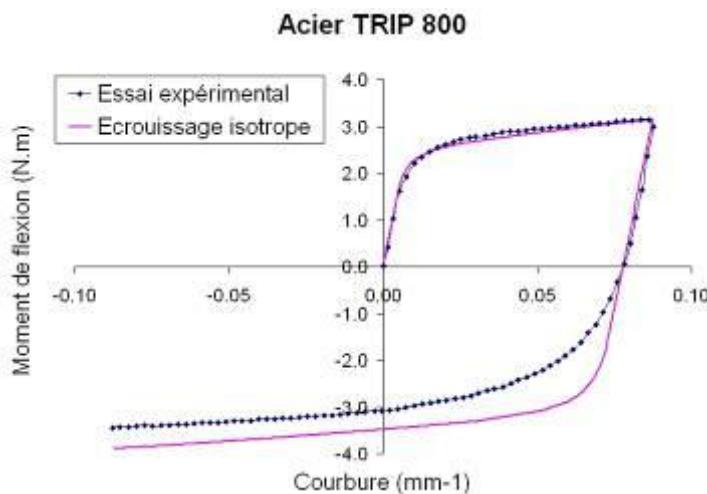
**Figure 3.6.** Moment en fonction de la courbure de l'éprouvette pour les quatre nuances étudiées

Bien que d'apparence très rigide, cet appareil présente une "souplesse" qui ne peut être négligée. Nous tenons compte de la raideur de la machine de flexion en modifiant, pour un moment donné, la courbure correspondante.

La méthode utilisée est la suivante : l'essai de traction et les données générales (largeur de l'éprouvette, épaisseur, ...) servent pour simuler numériquement le premier pliage. Que l'écrouissage soit isotrope ou combiné (isotrope + cinématique non linéaire), le premier pliage doit donner les mêmes résultats en termes de moment de flexion en fonction de la courbure. En utilisant la zone élastique du dépliage et en la comparant à la zone similaire définie par les données de l'essai de flexion, on peut estimer la "raideur" et corriger les données initiales.

### 3.3.3. Ecrouissage isotrope

A partir de l'essai de traction et connaissant les dimensions de l'éprouvette de flexion, on peut calculer et tracer le moment de flexion théorique en fonction de la courbure en considérant l'écrouissage comme isotrope. On obtient alors une courbe qui suit correctement les points expérimentaux pendant le pliage puis peut s'en détacher nettement pendant le dépliage ; l'introduction d'une composante cinématique dans le modèle d'écrouissage est alors nécessaire.



**Figure 3.7.** Comparaison entre l'essai expérimental et la courbe obtenue avec un écrouissage isotrope sur l'acier TRIP 800

Le calcul d'un incrément de contrainte à partir d'un incrément de déformation totale est détaillé dans l'annexe A.

### 3.3.4. Ecrouissage combiné

La formulation de l'écrouissage combinée choisie est dérivée de celle de Chaboche-Ziegler qui permet un découplage des coefficients d'anisotropie et des composantes de l'écrouissage cinématique (annexe A.1). Cette formulation associe à la fois les propriétés d'un écrouissage isotrope et celles d'un écrouissage cinématique non linéaire présenté par Lemaître et Chaboche :

$$\{d\alpha\} = C_m \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_c} \{\sigma - \alpha\} - \gamma_m \{\alpha\} d\bar{\varepsilon}^p \quad (3.15)$$

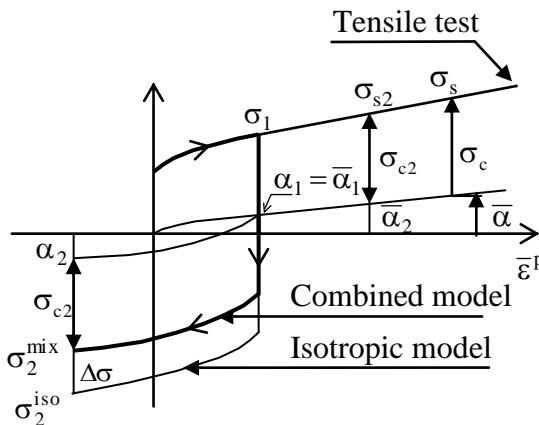
$$\sigma_c = \sigma_0 + Q(1 - \exp(-b\bar{\varepsilon}^p)) \quad (3.16)$$

Les paramètres  $C$  et  $\gamma$  précédemment rencontrés seront dorénavant notés  $C_m$  et  $\gamma_m$ .

Comme pour l'écrouissage isotrope, le calcul d'un incrément de contrainte est détaillé dans l'annexe A.

#### 3.3.4.1. Calcul des coefficients

A partir du dépliage considéré comme isotrope et de la courbe expérimentale, le premier calcul de  $C_m$  et  $\gamma_m$  est fondé sur la différence  $\Delta\sigma$  entre la courbe expérimentale et la courbe du dépliage isotrope.



**Figure 3.8.** Courbes de traction-compression pour un écrouissage isotrope et combiné

Durant la traction on a (avec les notations de la figure 3.8) :

$$d\alpha = (C_m - \gamma_m \cdot \alpha) d\bar{\varepsilon}^p \text{ et au point 1 : } \alpha_1 = \bar{\alpha}_1 = \frac{C_m}{\gamma_m} (1 - \exp(-\gamma_m \cdot \bar{\varepsilon}_1^p)) \quad (3.17)$$

Puis pendant la compression :

$$d\alpha = (-C_m - \gamma_m \cdot \alpha) d\bar{\varepsilon}^p \text{ et au point 2 : } \alpha_2 = -\frac{C_m}{\gamma_m} + \left( \alpha_1 + \frac{C_m}{\gamma_m} \right) \exp(-\gamma_m (\bar{\varepsilon}_2^p - \bar{\varepsilon}_1^p)) \quad (3.18)$$

De plus, on peut écrire :

$$\sigma_2^{\text{mix}} = \alpha_2 - \sigma_{c2}, \quad \sigma_{c2} = \sigma_{s2} - \bar{\alpha}_2 \text{ et } \sigma_2^{\text{iso}} = -\sigma_{s2} \quad (3.19)$$

$\bar{\alpha}_2$  est atteint en traction donc il se calcule comme  $\bar{\alpha}_1$  :

$$\bar{\alpha}_2 = \frac{C_m}{\gamma_m} \left( 1 - \exp(-\gamma_m \cdot \bar{\epsilon}_2^p) \right) \quad (3.20)$$

On a alors :

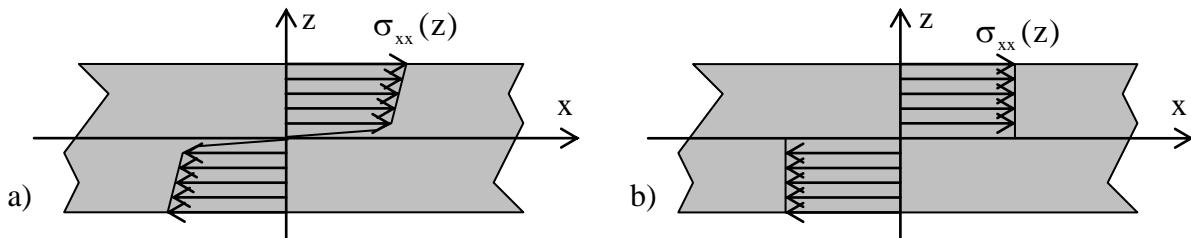
$$\begin{aligned} \sigma_2^{\text{mix}} - \sigma_2^{\text{iso}} &= \alpha_2 + \bar{\alpha}_2 = -\frac{C_m}{\gamma_m} + \left( \alpha_1 + \frac{C_m}{\gamma_m} \right) \exp(-\gamma_m (\bar{\epsilon}_2^p - \bar{\epsilon}_1^p)) + \frac{C_m}{\gamma_m} \left( 1 - \exp(-\gamma_m \cdot \bar{\epsilon}_2^p) \right) \\ &= \frac{\exp(-\gamma_m \bar{\epsilon}_2^p)}{\exp(-\gamma_m \bar{\epsilon}_1^p)} \left[ \alpha_1 + \frac{C_m}{\gamma_m} \left( 1 - \exp(-\gamma_m \bar{\epsilon}_1^p) \right) \right] = 2 \cdot \alpha_1 \cdot \exp(-\gamma_m (\bar{\epsilon}_2^p - \bar{\epsilon}_1^p)) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\text{d'où } \ln(\Delta\sigma) = -\gamma_m (\bar{\epsilon}_2^p - \bar{\epsilon}_1^p) + \ln(2 \cdot \alpha_1) \quad (3.22)$$

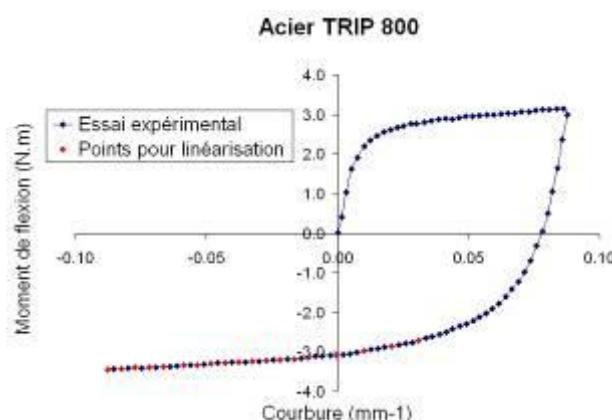
$$\text{avec } \Delta\sigma = \sigma^{\text{mix}} - \sigma^{\text{iso}} \quad (3.23)$$

L'essai expérimental de flexion ne donnant pas  $\sigma$  mais le moment  $M$ , l'état de contrainte dans la section de l'éprouvette est approximé par une contrainte constante sur chaque demi-épaisseur ( $e$ ) et on relie donc  $\sigma$  à  $M$  par :

$$\sigma = \frac{4 \cdot M}{b \cdot e^2} \Rightarrow \sigma^{\text{mix}} = \frac{4 \cdot M^{\text{exp}}}{b \cdot e^2} \text{ et } \sigma^{\text{iso}} = \frac{4 \cdot M^{\text{iso}}}{b \cdot e^2} \quad (3.24)$$



**Figure 3.9.** a) Répartition réelle des contraintes dans l'épaisseur lorsque l'éprouvette est fortement plastifiée. b) Approximation de l'état de contraintes pour un premier calcul.



**Figure 3.10.** Position des points choisis pour le premier calcul de  $C_m$  en  $\gamma_m$

La valeur correspondante de  $\bar{\varepsilon}^p$  est recherchée sur la courbe de traction : la répartition réelle est peu différente du modèle adopté (figure 3.9) sauf pour les fibres centrales mais celles-ci interviennent peu dans la valeur du moment de flexion.

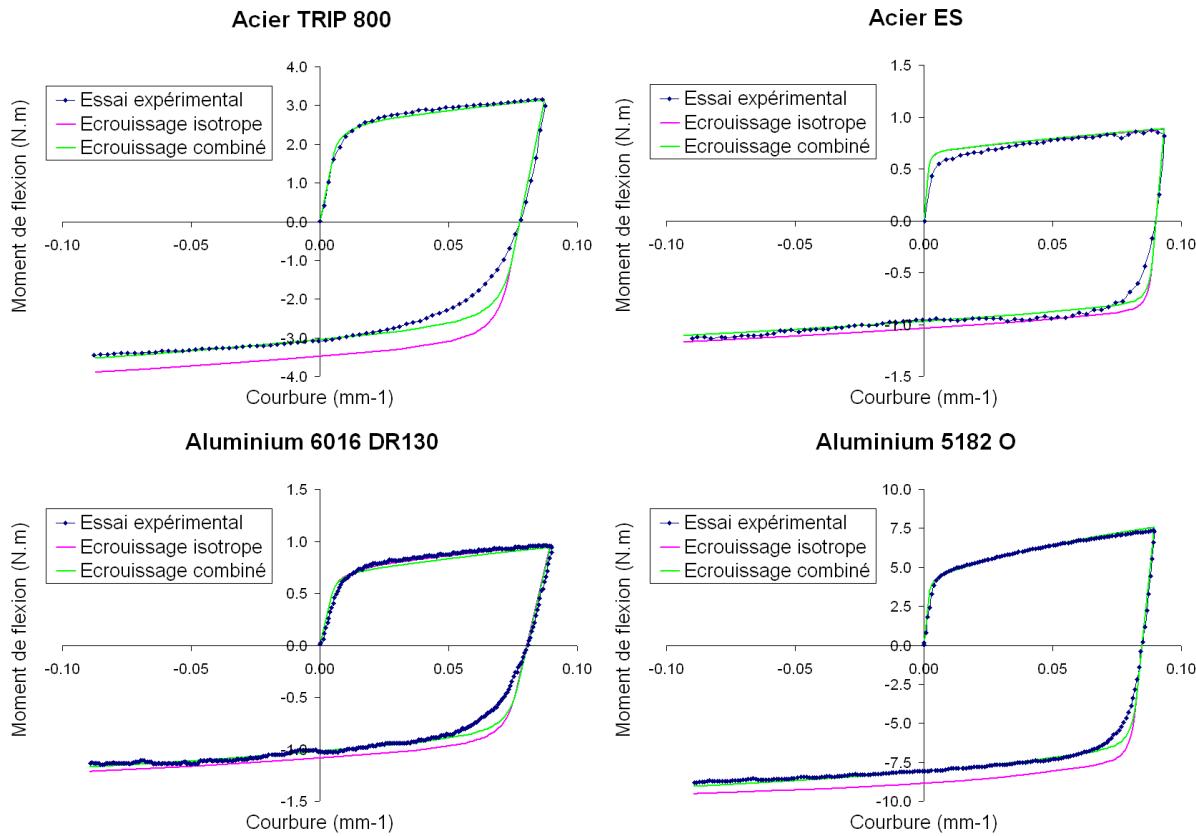
Une régression linéaire de 3.22 dans la zone du dépliage où l'éprouvette est entièrement plastifiée (voir figure 3.10) donne  $\gamma_m$  et  $\alpha_1$  puis  $C_m = \frac{\gamma_m \cdot \alpha_1}{1 - \exp(-\gamma_m \cdot \bar{\varepsilon}_1^p)}$ . Un premier couple de valeurs  $C_m$  et  $\gamma_m$  est maintenant connu.

Le calcul de  $C_m$  et  $\gamma_m$  suppose une contrainte moyenne  $\sigma = 4M/(b \cdot e^2)$ . On a vu qu'à condition que l'éprouvette soit en grande majorité plastifiée, cette approximation n'est pas excessive. Cependant, on doit aussi se rapporter à un  $\bar{\varepsilon}^p$  unique, correspondant, dans l'essai de traction au  $\sigma$  considéré. Or la répartition de  $\bar{\varepsilon}^p$  dans l'épaisseur est loin d'être constante. C'est pourquoi, la méthode précédente est appliquée ensuite à chaque point d'intégration dans l'épaisseur et le couple de valeurs ( $C_m$ ,  $\gamma_m$ ) donnant la meilleure "précision" par rapport aux valeurs expérimentales est retenue.

En détails, l'algorithme est le suivant :

1. on part des premières valeurs trouvées de  $C_m$  et  $\gamma_m$  notées  $C_m^0$  et  $\gamma_m^0$
2. le pliage et le dépliage sont simulés avec cet écrouissage combiné et l'écrouissage isotrope
3. pour un point d'intégration 'i' dans l'épaisseur, on a donc les courbes  $\sigma^{iso}(\bar{\varepsilon}^p)$  et  $\sigma^{mix}(\bar{\varepsilon}^p)$
4. la différence de ces deux courbes pour le même  $\varepsilon^p$  donne les valeurs  $C_m$  et  $\gamma_m$  notées  $C_m^i$  et  $\gamma_m^i$
5. une précision  $p_i$  est calculée par la relation :  $|(M_{mix} - M_{exp})| / |M_{exp}|$  pour des points sélectionnés sur la courbe  $M_{exp}(\kappa)$  dans la zone de dépliage
6. puis, en prenant successivement chaque point d'intégration, le couple  $C_m^i$  et  $\gamma_m^i$  donnant la meilleure précision est retenu

Ces valeurs permettent de tracer la courbe  $M(\kappa)$  en considérant un écrouissage combiné à 2 paramètres ( $C_m$  et  $\gamma_m$ ) afin de la comparer avec la courbe expérimentale de moment. On constate sur la figure 3.11 que les résultats obtenus avec un écrouissage combiné décrivent bien la courbe expérimentale en fin de dépliage mais sont insuffisants dans la zone du dépliage où l'éprouvette n'est pas entièrement plastifiée.



**Figure 3.11.** Comparaison expérience/modèle en flexion alternée

Les tableaux 3.1 à 3.4 donnent les paramètres identifiés pour cette loi d'écrouissage mixte.

<b>f</b>	<b>g</b>	<b>n</b>	<b><math>\sigma_0</math> (MPa)</b>	<b>Q (Mpa)</b>	<b>b</b>
0.30	0.40	1.32	160.0	164.7	10.5

<b>C<sub>m</sub> (MPa)</b>	<b><math>\gamma_m</math></b>
343.7	3.24

**Tableau 3.1.** Paramètres identifiés pour l'acier ES

<b>f</b>	<b>g</b>	<b>n</b>	<b><math>\sigma_0</math> (MPa)</b>	<b>Q (Mpa)</b>	<b>b</b>
0.42	0.53	1.31	494.0	288.1	11.6

<b>C<sub>m</sub> (MPa)</b>	<b><math>\gamma_m</math></b>
1953.7	4.73

**Tableau 3.2.** Paramètres identifiés pour l'acier TRIP 800

<b>f</b>	<b>g</b>	<b>n</b>	<b><math>\sigma_0</math> (MPa)</b>	<b>Q (Mpa)</b>	<b>b</b>
0.58	0.60	1.56	159.0	171.3	12.9

<b>C<sub>m</sub> (MPa)</b>	<b><math>\gamma_m</math></b>
258.7	1.78

**Tableau 3.3.** Paramètres identifiés pour l'aluminium 5182 O

<b>f</b>	<b>g</b>	<b>n</b>	<b><math>\sigma_0</math> (MPa)</b>	<b>Q (Mpa)</b>	<b>b</b>
0.68	0.58	1.35	154.0	153.0	14.0

<b>C<sub>m</sub> (MPa)</b>	<b><math>\gamma_m</math></b>
318.1	5.13

**Tableau 3.4.** Paramètres identifiés pour l'aluminium 6016 DR130

### 3.3.5. Nouveau modèle d'écrouissage combiné

Les modifications proposées ont pour objectif de mieux approcher la courbe de flexion pendant le dépliage lorsque l'éprouvette n'est pas entièrement plastifiée. Deux nouveaux paramètres  $C_s$  et  $\gamma_s$  sont alors définis pour créer une nouvelle composante cinématique de la surface de charge [13]. L'évolution des translations du centre de la surface de charge dans l'espace des contraintes peut donc être considérée comme la somme de deux translations  $\alpha_m$  et  $\alpha_s$  et les relations 3.22 et 3.23 deviennent :

$$\{d\alpha\} = \{d\alpha_m\} + \{d\alpha_s\}$$

$$\{d\alpha_m\} = C_m \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_c} \{\sigma - \alpha_m - \alpha_s\} - \gamma_m \{\alpha_m\} d\bar{\varepsilon}^p$$

$$\{d\alpha_s\} = C_s \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_c} \{\sigma - \alpha_m - \alpha_s\} - \gamma_s \{\alpha_s\} d\bar{\varepsilon}^p$$

$$\sigma_c = \sigma_0 + Q(1 - \exp(-b\bar{\varepsilon}^p)) - \frac{C_s}{\gamma_s}(1 - \exp(-\gamma_s \bar{\varepsilon}^p)) \quad (3.25)$$

Il est important de noter que les paramètres  $Q$ ,  $b$ ,  $C_m$  et  $\gamma_m$  ne sont pas modifiés par l'ajout des deux paramètres  $C_s$  et  $\gamma_s$ . Cela nous permet d'utiliser les paramètres  $C_m$  et  $\gamma_m$  dans un modèle classique de Lemaître et Chaboche sans aucun changement.

#### 3.3.5.1. Calcul des nouveaux paramètres $C_s$ et $\gamma_s$ :

Après la simulation du pliage et dépliage en considérant l'écrouissage comme isotrope  $M^{iso}(\kappa)$ , la courbure à partir de laquelle l'éprouvette est entièrement plastifiée  $\kappa_p$  est relevée.

Deux groupes de points sont alors constitués :

- G1 contenant les points du dépliage de la courbe de flexion expérimentale ayant une abscisse comprise entre  $\kappa_{min} \leq \kappa \leq \kappa_p$ . Ces points sont lissés par une droite d'équation  $M^{mix}(\kappa) = a\kappa + b$

- G2 contenant les points du dépliage de la courbe de flexion expérimentale ayant une abscisse comprise entre  $0 \leq \kappa \leq \kappa_p$ . Ces points sont lissés par une droite d'équation  $M^{sup}(\kappa) = a' \cdot \kappa + b'$

L'intersection des deux droites  $M^{mix}(\kappa)$  et  $M^{sup}(\kappa)$  est notée  $\kappa_i$ .

$$\kappa_i = -\frac{b - b'}{a - a'}$$

Comme pour le calcul des paramètres  $C_m$  et  $\gamma_m$ , on approxime l'état de contrainte dans la section de l'éprouvette par une contrainte constante sur chaque demi-épaisseur ( $e$ ) et on relie donc  $\sigma$  à  $M$  par les mêmes expressions que 3.24.

$$\sigma^{iso} = \frac{4 \cdot M^{iso}}{b \cdot e^2}; \sigma^{mix} = \frac{4 \cdot M^{mix}}{b \cdot e^2}; \sigma^{sup} = \frac{4 \cdot M^{sup}}{b \cdot e^2}$$

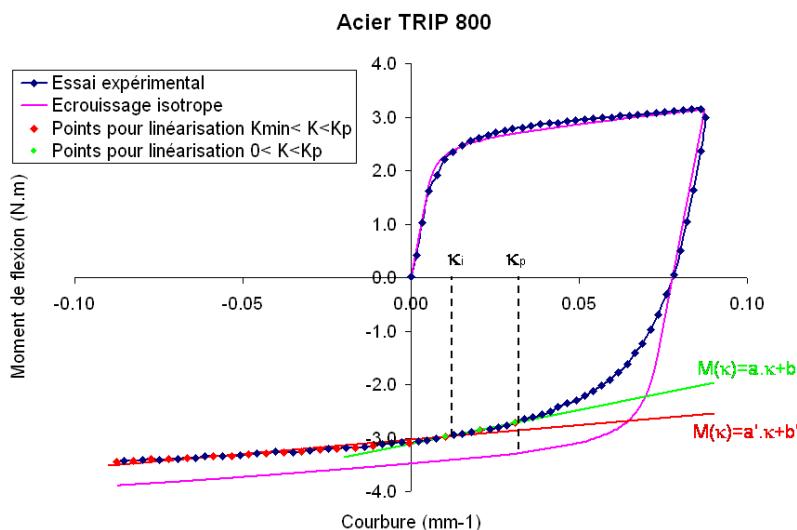
$$\begin{aligned} \sigma_2^{mix} - \sigma_2^{iso} &= (\alpha_{2m} + \bar{\alpha}_{2m}) + (\alpha_{2s} + \bar{\alpha}_{2s}) = 2 \cdot \alpha_{1m} \cdot \exp(-\gamma_m \cdot (\bar{\varepsilon}_2^p - \bar{\varepsilon}_1^p)) + 2 \cdot \alpha_{1s} \cdot \exp(-\gamma_s \cdot (\bar{\varepsilon}_2^p - \bar{\varepsilon}_1^p)) \\ \sigma_2^{mix} - \sigma_2^{iso} - 2 \cdot (\sigma_2^{mix} - \sigma_2^{sup}) &= 2 \cdot \alpha_{1s} \cdot \exp(-\gamma_s \cdot (\bar{\varepsilon}_2^p - \bar{\varepsilon}_1^p)) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \ln(\Delta\sigma) = -\gamma_s (\bar{\varepsilon}_2^p - \bar{\varepsilon}_1^p) + \ln(2 \cdot \alpha_{1s}) \quad (3.26)$$

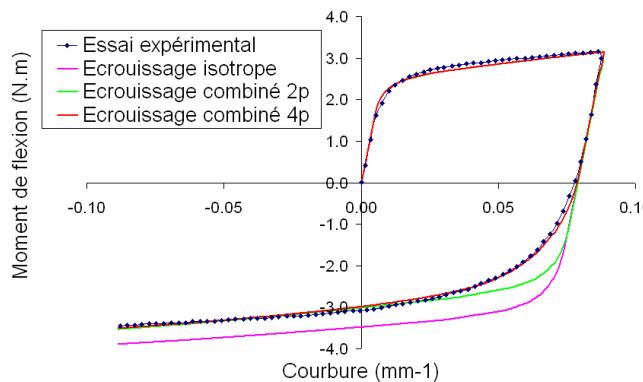
$$\text{avec } \Delta\sigma = \sigma_2^{mix} - \sigma_2^{iso} - 2 \cdot (\sigma_2^{mix} - \sigma_2^{sup})$$

Comme pour les paramètres  $C_m$  et  $\gamma_m$ , une régression linéaire de 3.26 dans la zone  $\kappa_i \leq \kappa \leq \kappa_p$  du dépliage (voir figure 3.12) donne  $\gamma_s$  et  $\alpha_{1s}$  puis  $C_s = \frac{\gamma_s \cdot \alpha_{1s}}{1 - \exp(-\gamma_s \cdot \bar{\varepsilon}_1^p)}$ .

Une routine d'optimisation est ensuite utilisée à partir des premières valeurs de  $C_s$  et  $\gamma_s$  pour trouver la valeur finale des deux paramètres. Cette optimisation (Annexe A.7) est basée sur le principe de la dichotomie.



**Figure 3.12.** Sélection des points pour le calcul des nouveaux paramètres



**Figure 3.13.** Résultats de l'identification sur l'acier TRIP 800

$C_m$ (MPa)	$\gamma_m$	$C_s$ (MPa)	$\gamma_s$
343.7	3.24	47027.0	755.2

**Tableau 3.5.** Paramètres cinématiques du nouveau modèle pour l'acier ES

$C_m$ (MPa)	$\gamma_m$	$C_s$ (MPa)	$\gamma_s$
1953.7	4.73	40766.0	224.8

**Tableau 3.6.** Paramètres cinématiques du nouveau modèle pour l'aluminium TRIP 800

$C_m$ (MPa)	$\gamma_m$	$C_s$ (MPa)	$\gamma_s$
258.7	1.78	11630.0	235.6

**Tableau 3.7.** Paramètres cinématiques du nouveau modèle pour l'acier 5182 O

$C_m$ (MPa)	$\gamma_m$	$C_s$ (MPa)	$\gamma_s$
318.1	5.13	12651.0	270.8

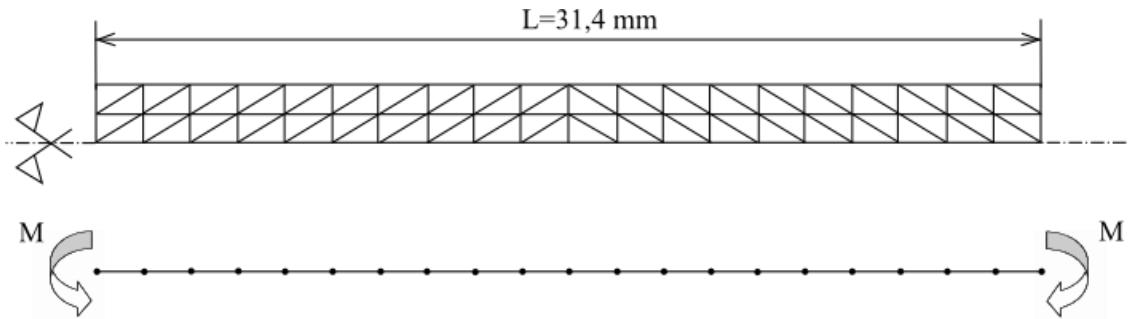
**Tableau 3.8.** Paramètres cinématiques du nouveau modèle pour l'aluminium 6016 DR130

### 3.3.6. Vérification éléments finis

#### 3.3.6.1. *Mise en données*

Les paramètres trouvés précédemment sont utilisés pour une vérification ultérieure par éléments finis.

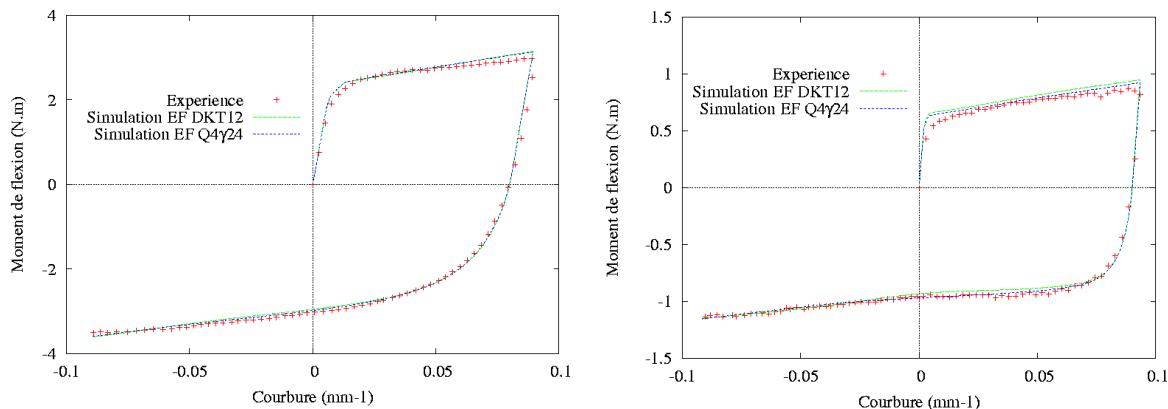
L'éprouvette étant constituée de quatre lamelles, une seule est à modéliser dans la simulation. Différents maillages sont alors générés à base de triangles (figure 3.14) ou de quadrangles. Trois types d'éléments finis coques sont utilisés pour ces vérifications : l'élément triangulaire à déformation constante DKT12 à 6 noeuds, le triangle à trois noeuds DKT18 (3 points d'intégration dans le plan) et enfin le quadrangle Q4γ24 à champ de cisaillement transversal assumé (quatre points d'intégration dans le plan) [14, 15]. Dans tous les cas, seule la demi largeur est modélisée avec des conditions de symétrie par rapport au plan médian. Le nombre de points d'intégration dans l'épaisseur est pris égal à 9.



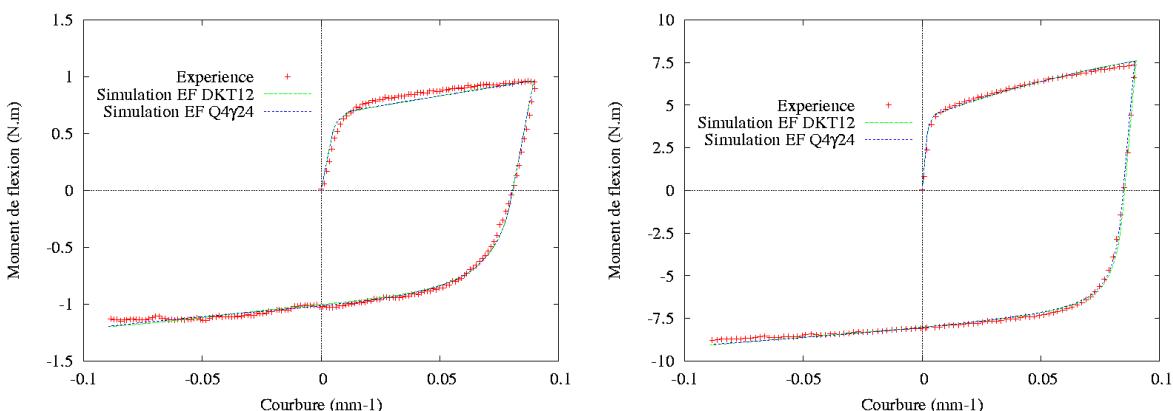
**Figure 3.14.** Maillage utilisé pour la simulation de l'essai de flexion

### 3.3.6.2. Résultats

D'une manière générale, les résultats obtenus avec les trois éléments sont équivalents. Les simulations réalisées avec les éléments DKT12 et Q4γ24 pour les quatre matériaux utilisés sont données sur les figures 3.15 et 3.16.



**Figure 3.15.** Vérification par éléments finis de l'identification en flexion pour l'acier TRIP 800 (à gauche) et l'acier ES (à droite)



**Figure 3.16.** Vérification par éléments finis de l'identification en flexion pour l'aluminium 6016 (à gauche) et l'aluminium 5182 (à droite)

### 3.4. Autre méthode d'identification de la contribution cinématique de l'écrouissage

L'objectif de cette étude, menée en partenariat avec le LIMATB de l'Université de Bretagne-Sud, est de comparer la contribution cinématique de l'écrouissage quand elle est identifiée en flexion alternée ou en cisaillement cyclique pour l'alliage d'aluminium 6016 DR130 et l'acier TRIP 800 [16].

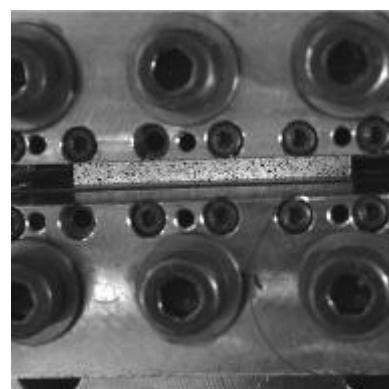
#### 3.4.1. Description de l'essai de cisaillement

Les essais de cisaillement sont réalisés sur des éprouvettes rectangulaires de dimensions  $17 \times 50 \text{ mm}^2$  découpées à la cisaille ou usinées directement dans la tôle. Suivant l'épaisseur de la tôle étudiée, la largeur utile est adaptée pour éviter l'apparition du phénomène de flambement pour des épaisseurs fines. Dans le cas des matériaux étudiés ici, la largeur utile sera prise égale à 4 mm (figure 3.17). Ces dimensions permettent d'obtenir un état de contrainte et de déformation homogène [17, 18]. L'éprouvette est maintenue par deux mors, équipés chacun de trois vis serrées avec une clé dynamométrique (figure 3.18).

La déformation maximale est limitée par la rupture de l'éprouvette sous les mors. L'état de déformation n'est pas complètement homogène notamment à cause des effets de bords. Le paramètre  $\gamma$  est calculé au centre de l'éprouvette, à partir des composantes du tenseur de déformation de Green-Lagrange,  $\gamma = 2\epsilon_{12}$ .



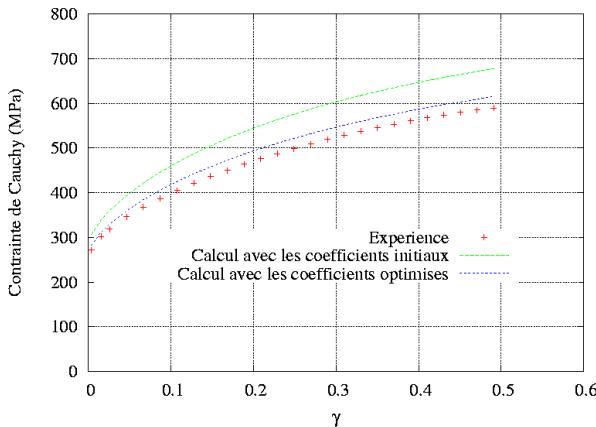
**Figure 3.17.** Eprouvette de cisaillement



**Figure 3.18.** Eprouvette de cisaillement serrée sous les mors

#### 3.4.2. Identification des paramètres de Hill

Les paramètres de Hill,  $f$ ,  $g$ ,  $h$  et  $n$  sont généralement directement calculés à partir des coefficients d'anisotropie initiaux. Lorsque cette technique est utilisée, l'essai de cisaillement monotone est généralement mal simulé comme on peut le voir sur la figure 3.19.



**Figure 3.19.** Simulation de l'essai de cisaillement monotone sur l'acier TRIP 800

Le critère de Hill 48 est le plus utilisé pour décrire l'anisotropie des tôles, car on considère qu'il décrit correctement le comportement réel en conservant une simplicité d'utilisation et d'identification. Cependant nous constatons qu'une bonne représentation des états de contraintes et de déformations en traction uniaxiale et en cisaillement simple devient délicate. Si l'accent est mis sur le niveau de contrainte des essais, les coefficients d'anisotropie ne sont pas retrouvés et réciproquement. Cette faiblesse du critère de Hill 48, bien connue déjà en ne considérant que les essais de traction a conduit à l'écriture de nombreux critères de plasticité, l'idée étant d'augmenter le nombre de paramètres pour mieux décrire à la fois le niveau de contrainte et les coefficients d'anisotropie. Quand on prend en compte le cisaillement, la tendance est de privilégier le niveau de contrainte, car il est difficile de bien décrire les courbes des essais monotones grâce aux coefficients d'anisotropie.

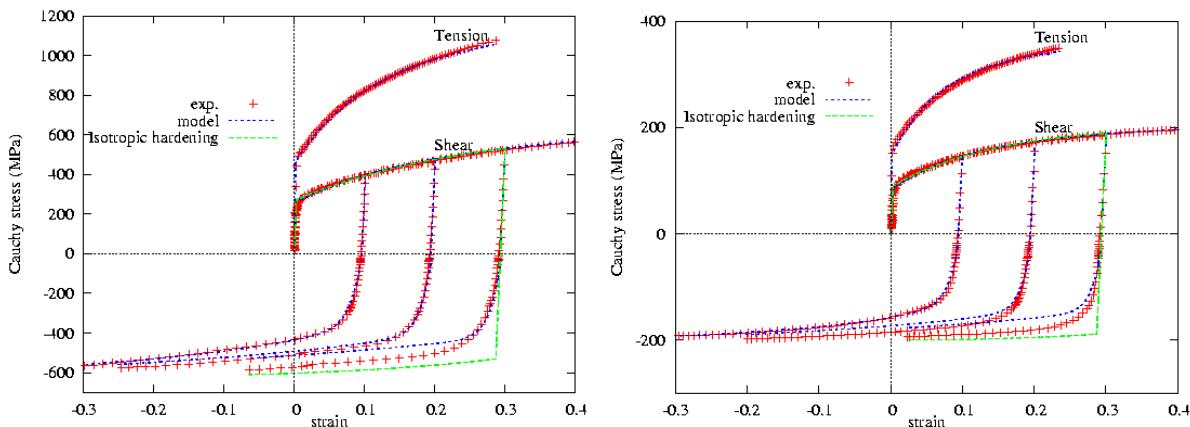
Une optimisation des paramètres de Hill est donc réalisée pour mieux décrire le niveau de contrainte, tout en fixant des bornes aux coefficients d'anisotropie. Cela nous permet par exemple de tracer la courbe obtenue avec les paramètres optimisés sur la figure 3.19.

### 3.4.3. Identification des paramètres matériau

L'identification des paramètres, à partir des essais de cisaillement, est réalisée avec le logiciel SiDoLo [19]. La recherche d'un jeu optimum de paramètres est basée sur la minimisation d'une fonctionnelle qui mesure l'écart entre les données expérimentales et les données simulées. Cette minimisation se ramène à la résolution d'un problème d'optimisation non linéaire ; le logiciel SiDoLo utilise un algorithme hybride qui combine trois techniques : méthodes du gradient, de Newton-Raphson et de Levenberg-Marquardt.

La base d'essais est classiquement composée, dans ce travail, de trois essais de traction ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$  de la direction de laminage), d'un essai de cisaillement monotone à  $0^\circ$  et des essais de cisaillement alterné pour différentes valeurs de déformation à l'inversion ( $\gamma=0.1$  ;  $\gamma=0.2$  et  $\gamma=0.3$ ).

Les lois matériau utilisés sont celles proposées au paragraphe 3.3.5 et définissant la partie cinématique de l'écrouissage par 4 paramètres  $C_m$ ,  $\gamma_m$ ,  $C_s$  et  $\gamma_s$ .



**Figure 3.20.** Résultats de l'identification pour l'acier TRIP 800 (à gauche) et sur l'alliage d'aluminium 6016 (à droite)

L'identification réalisée avec l'essai de cisaillement cyclique correspond à une déformation maximale de 0,1. La contribution cinématique est surestimée lorsque les essais cycliques à  $\gamma = 0,2$  et  $\gamma = 0,3$  sont simulés avec les paramètres identifiés pour  $\gamma = 0,1$ .

<b>f</b>	<b>g</b>	<b>n</b>	<b><math>\sigma_0</math> (MPa)</b>	<b>Q (Mpa)</b>	<b>b</b>
0.21	0.225	0.79	466.6	444.4	11.2

<b><math>C_m</math> (MPa)</b>	<b><math>\gamma_m</math></b>	<b><math>C_s</math> (MPa)</b>	<b><math>\gamma_s</math></b>
663.6	0.9	40497.1	136.1

**Tableau 3.9.** Paramètres identifiés pour l'acier TRIP 800. Identification avec les essais de traction et l'essai de cisaillement cyclique à  $\gamma = 0,1$

<b>f</b>	<b>g</b>	<b>n</b>	<b><math>\sigma_0</math> (MPa)</b>	<b>Q (Mpa)</b>	<b>b</b>
0.31	0.29	0.76	150.0	147.8	16.9

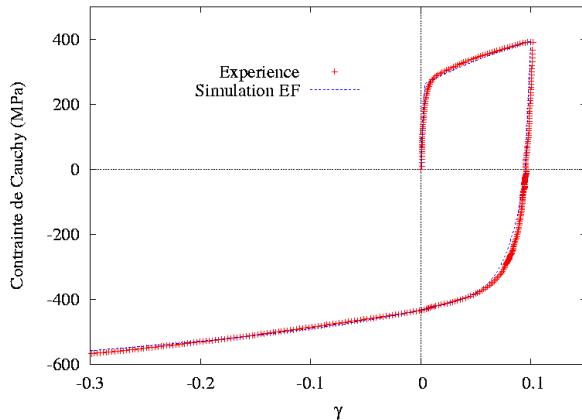
<b><math>C_m</math> (MPa)</b>	<b><math>\gamma_m</math></b>	<b><math>C_s</math> (MPa)</b>	<b><math>\gamma_s</math></b>
289.8	3.15	13000.0	145.8

**Tableau 3.10.** Paramètres identifiés pour l'aluminium 6016. Identification avec les essais de traction et l'essai de cisaillement cyclique à  $\gamma = 0,1$

#### 3.4.4. Vérification éléments finis

L'élément coque Q4γ24 est utilisé pour vérifier l'identification. Le maillage est composé de 35 éléments dans la longueur et de 4 éléments dans la largeur de l'éprouvette. Un bord long de l'éprouvette est bloqué en translation et en rotation et une translation est imposée sur l'autre bord long.

Les résultats expérimentaux sont bien retrouvés lorsqu'on réalise la simulation de l'essai de cisaillement avec les paramètres identifiés auparavant (figure 3.21).

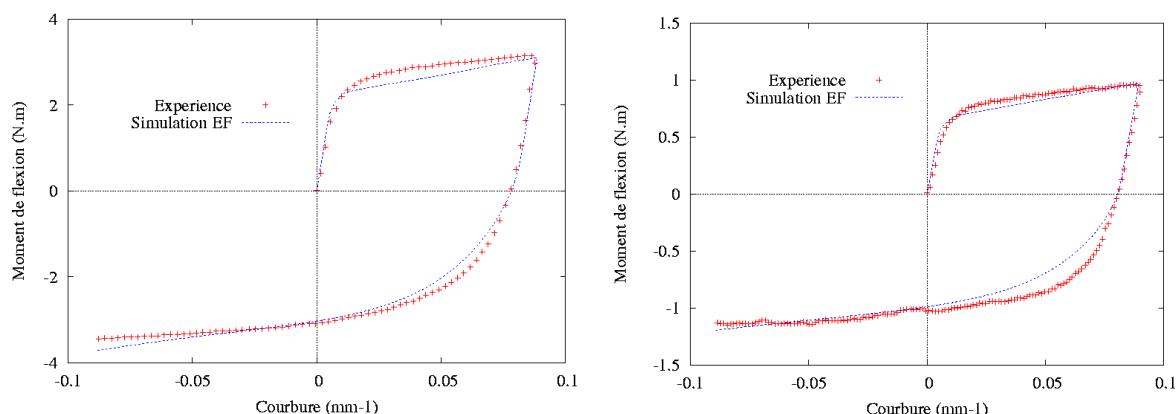


**Figure 3.21.** Vérification par éléments finis de l'identification en cisaillement pour l'acier TRIP 800

### 3.5. Croisement des résultats des deux identifications

#### 3.5.1. Simulation de l'essai de flexion avec les paramètres obtenus en cisaillement

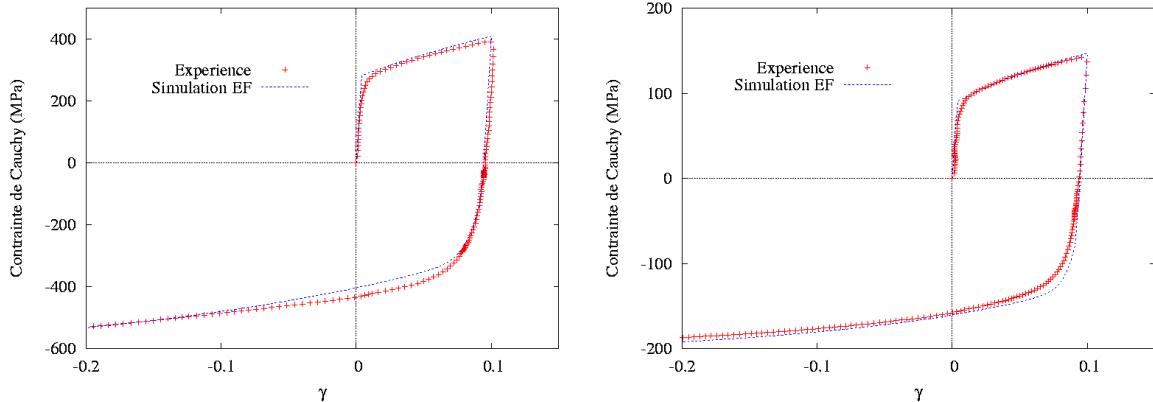
Afin de comparer les deux méthodes d'identification, les essais de flexion ont été simulés avec les paramètres identifiés grâce aux essais de cisaillement et vice versa. La figure 3.22 montre une corrélation acceptable de la simulation de l'essai de flexion sur la courbe expérimentale issue des essais de cisaillement. Des différences apparaissent toutefois au début du dépliage lorsque l'éprouvette n'est pas encore complètement plastifiée.



**Figure 3.22.** Comparaison expérimentale numérique de l'essai de flexion sur l'acier TRIP 800 (à gauche) et sur l'alliage d'aluminium 6016 (à droite). Les paramètres matériaux ont été identifiés à partir des essais de cisaillement

### 3.5.2. Simulation de l'essai de cisaillement avec les paramètres obtenus en flexion

Une conclusion similaire à celle du paragraphe précédent peut être énoncée sur la simulation de l'essai de cisaillement à partir des paramètres identifiés en flexion (figure 3.23). Les différences que l'on constate se produisent lorsque l'éprouvette n'est pas entièrement plastifiée au début de l'inversion du chargement. La composante cinématique  $\alpha_s$  (visible au début de l'inversion du chargement) identifiée en cisaillement semble plus importante que celle identifiée en flexion.



**Figure 3.23.** Comparaison expérimentale numérique de l'essai de cisaillement sur l'acier TRIP 800 (à gauche) et sur l'alliage d'aluminium 6016 (à droite). Les paramètres matériau ont été identifiés à partir des essais de flexion

## 3.6. Conclusion

Les essais monotones ne sont pas suffisants pour décrire les sollicitations mises en jeu pendant le processus d'emboutissage. Nous avons donc étudié le modèle d'écrouissage de Lemaitre et Chaboche que nous avons identifié à partir d'essais de flexion alternée. Ces essais ont montré la limitation de ce modèle mixte puisqu'il ne fournit pas une représentation totalement satisfaisante du comportement élastoplastique en début de dépliement. Ce modèle a alors été enrichi en introduisant plusieurs variables cinématiques, chacune étant une contribution du tenseur cinématique :

$$\{\alpha\} = \{\alpha_m\} + \{\alpha_s\}$$

où chaque contribution  $\alpha_m$  et  $\alpha_s$  est gouvernée par une équation de la forme :

$$\begin{aligned}\{d\alpha_m\} &= C_m \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_c} \{\sigma - \alpha_m - \alpha_s\} - \gamma_m \{\alpha_m\} d\bar{\varepsilon}^p \\ \{d\alpha_s\} &= C_s \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_c} \{\sigma - \alpha_m - \alpha_s\} - \gamma_s \{\alpha_s\} d\bar{\varepsilon}^p\end{aligned}$$

et l'introduction de coefficients supplémentaires  $C_s$ ,  $\gamma_s$  permettent d'affiner la modélisation dans le domaine du début de plastification en dépliement.

Ce chapitre présente également une autre méthode d'identification de l'écrouissage combiné à partir d'un essai de cisaillement cyclique. En collaboration avec l'Université de Bretagne-Sud, des comparaisons entre les résultats obtenus avec ces deux méthodes ont été réalisées et montrent une assez bonne corrélation malgré quelques différences au début de l'inversion du chargement.

# Bibliographie

- [1] R. Hill, The mathematical theory of plasticity, Oxford University Press, p. 287-294, 1951.
- [2] W.F. Hosford, A generalized isotropic yield criterion, J. Appl. Mech., ASME, 39, p. 607-609, 1972.
- [3] F. Barlat, J. Lian, Plastic behaviour and strechability of sheet metals. Part 1 : A yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions, Int. J. of Plast., 5, p. 51-66, 1989.
- [4] D. Banabic et al., Non-quadratic yield criterion for orthotropic sheet metals under plane-stress conditions, Int. J. Mech. Sci., 45, p. 797-811, 2003.
- [5] L. Paraianu et al., An improvement of the BBC2000 yield criterion, Proceedings of ESAFORM, 2003.
- [6] D. Banabic et al., An improved analytical description of orthotropy in metallic sheets, Int. J. of Plast., 21, p. 493-512, 2005.
- [7] K. Mattiasson, M. Sigvant, On the choice of yield criterion for industrial sheet forming simulations, Proceedings of the 24th IDDRG Congress, Besançon, 2005.
- [8] W. Prager, Recent developments in the mathematical theory of plasticity, J. Appl. Phys., 20, p235, 1949.
- [9] H. Ziegler, A modification of Prager's rule, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich
- [10] P.J. Armstrong, C.O. Frederick, A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect, CEGB report RE/B/N731, 1966.
- [11] J.L. Chaboche, Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity, Int. J. of Plast., 5, p. 247-302, 1989.
- [12] C. Lange, Etude physique et modélisation numérique du procédé de sertissage de pieces de carrosserie, Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris, CEMEF, Sophia-Antipolis, 2005.
- [13] J. Carbonnierre, F. Sabourin, L. Phan, A. Kanji Nanji, B. Lenne, G. Philip, Enhanced formulation of a combined hardening for stamping and springback simulation, Proceedings of the 9<sup>th</sup> COMPLAS Congress, Barcelone, p. 108-111, 2007.
- [14] J.L. Batoz, G. Dhatt, Modélisation des structures par éléments finis - Vol. 1 Solides élastiques - Vol. 2 Poutres et plaques, Hermès, 1992.
- [15] K.J. Bathe, E.N. Dvorkin, A four-node plate bending element based on mindlin-reissner plate theory and a mixed interpolation, International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 21, p 367-383, 1985.

- [16] J. Carbonniere, S. Thuillier, F. Sabourin, M. Brunet, P.Y. Manach, Comparison of the work hardening of metallic sheets in bending-unbending and simple shear, International Journal of Mechanical Sciences, Accepted, ref n°IJMS-08-182R1.
- [17] P.Y. Manach, Analyse par simulations numériques des non-homogénéités au cours d'essais mécaniques, Master's thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1989.
- [18] S. Bouvier, H. Haddadi, P. Levée et C. Teodosiu, Simple shear tests : experimental techniques and characterization of the plastic anisotropy of rolled sheet at large strains, Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 172, p96-103, 2006.
- [19] G. Cailletaux et P. Pilvin, Identification and inverse problems related to material behaviour, International Seminar on Inverse Problems, Clamart, France, p79-86, 1994.



# Chapitre 4

## Outils numériques

<b>4.1. Introduction</b> .....	62
<b>4.2. Problème de référence</b> .....	62
<b>4.3. Principe des travaux virtuels</b> .....	63
4.3.1.    Discrétisation spatiale de l'équation d'équilibre en dynamique .....	63
4.3.2.    Discrétisation spatiale de l'équation d'équilibre en statique .....	64
<b>4.4. Schéma d'intégration temporelle</b> .....	65
4.4.1.    Schéma explicite des différences finies centrées .....	65
4.4.2.    Amortissement des oscillations numériques .....	67
<b>4.5. Intégration de la loi de comportement</b> .....	68
<b>4.6. Eléments finis triangulaires simplifiés</b> .....	72
4.6.1.    Elément DKT12 .....	73
4.6.2.    Elément S3 .....	80

## 4.1. Introduction

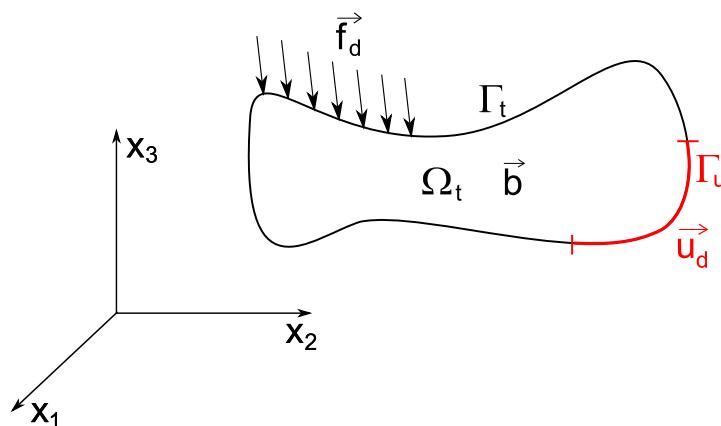
La compréhension d'un phénomène physique ou l'analyse du comportement d'une structure soumise à des sollicitations passe par une modélisation de la réalité. La résolution analytique des équations qui en résultent reste limitée à des problèmes simples ou académiques. Pour des problèmes plus complexes (du point de vue de leur géométrie, du chargement, des conditions aux limites) tel que l'emboutissage, la méthode des éléments finis est l'approche universellement utilisée dans les laboratoires de recherche et dans les industries.

Dans cette optique, l'objectif premier de ce chapitre est de présenter les hypothèses relatives à son utilisation avec une présentation du passage de la formulation forte (équation vraie écrite dans le domaine du continu) à la formulation faible (équation approchée écrite dans le domaine discrétilisé). Ensuite, les méthodes de résolution des équations matricielles non linéaires formées et les schémas usuels de résolution temporelle seront décrits. Enfin, notre travail de thèse s'inscrivant dans la problématique de prédiction de retour élastique, une description de la modélisation matériau avec le schéma d'intégration utilisée et de deux éléments finis (S3 et DKT12) est proposée.

## 4.2. Problème de référence

La mécanique des milieux continus établit l'ensemble des relations nécessaire pour décrire le comportement d'une structure. Les équations du système sont écrites pour un problème de référence. Celui-ci représente une structure dont la matière occupe, à l'instant  $t$ , un domaine  $\Omega_t$  de frontière  $\Gamma$ . Le système est soumis à :

- une densité volumique d'effort  $\vec{b}$  sur le domaine  $\Omega_t$ ,
- une densité surfacique d'effort  $\vec{f}_d$  sur la partie  $\Gamma_t$  de la frontière  $\Gamma$ ,
- un déplacement  $\vec{u}_d$  sur la partie  $\Gamma_u$  complémentaire de  $\Gamma_t$  telle que  $\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma$ .



**Figure 4.1.** Modélisation du problème de référence

Les théorèmes généraux de la mécanique des milieux continus conduisent aux équations d'équilibre locales. Soit un point M appartenant au domaine, et repéré par les

coordonnées  $(x,t)$  dans la configuration courante et  $(X,t)$  dans la configuration initiale. Si on se place dans la configuration courante, l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{b} = \rho \vec{u} \quad (4.1)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}$  est le tenseur des contraintes de Cauchy et  $\vec{u}$  l'accélération du point matériel M considéré.

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} &= \vec{f}_d && \text{sur } \Gamma_t \\ \vec{u}(x, t) &= \vec{u}_d(x, t) && \text{sur } \Gamma_u \end{aligned}$$

Avec les conditions initiales :

$$\vec{u}(x, t=0) = \vec{u}_0(x) \text{ et } \vec{u}(x, t=0) = \vec{u}_0(x)$$

Les vecteurs comme  $\vec{f}_d$ , ainsi que les tenseurs  $\underline{\underline{\sigma}}$  ou  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ , seront respectivement notés sous la forme matricielle  $\{f_d\}$ ,  $\{\sigma\}$  et  $\{\varepsilon\}$  dans la suite du mémoire.

### 4.3. Principe des travaux virtuels

Soit  $\{\delta u\}$  une variation arbitraire du vecteur déplacement. En multipliant les deux membres de l'équation 4.1 par  $\langle \delta u \rangle$  (avec  $\langle \delta u \rangle^T = \{\delta u\}$ ) et en intégrant sur le volume  $V$  puis en appliquant le théorème de la divergence, on obtient le principe des travaux virtuels :

$$-\int_V \langle \delta \varepsilon \rangle \{\sigma\} dV + \int_V \langle \delta u \rangle \{b\} dV + \int_{S_t} \langle \delta u \rangle \{f_d\} dS_t = \int_V \rho \langle \delta u \rangle \{\ddot{u}\} dV \quad (4.2)$$

L'expression 4.2 est formulée dans la configuration déformée  $V$ . Si la déformation du solide est suffisamment petite, cette expression peut être utilisée en prenant  $V$  comme étant pratiquement le même que dans la configuration initiale  $V_0$  (libre de contraintes). Cependant, avec de grands déplacements et/ou de grandes déformations,  $V$  peut être très différent de  $V_0$  et  $V$  devient alors une des inconnues du problème. Il faut transformer ces expressions dans une configuration de référence  $V_R$  qui peut ou non coïncider avec la configuration initiale  $V_0$  : c'est le point de départ des formulations dites lagrangiennes.

#### 4.3.1. Discréétisation spatiale de l'équation d'équilibre en dynamique

La discréétisation spatiale de l'équation 4.2 est réalisée à l'aide de la méthode des éléments finis formulée en déplacement. En tout point  $p$  du système, les déplacements (réels ou virtuels) sont interpolés par l'expression 4.3 à partir des déplacements (réels ou virtuels) nodaux  $\{u_q\}$  et des fonctions de forme  $[N]$  :

$$\{u_p\} = [N] \{u_q\} \quad \{\delta u_p\} = [N] \{\delta u_q\} \quad (4.3)$$

Suivant le type de méthode d'intégration temporelle choisi, l'équation d'équilibre n'est pas développée sous la même forme. Dans le cas d'une méthode explicite, l'équation d'équilibre sera résolue à l'instant  $t_n$  et permet de calculer les déplacements à l'instant  $t_{n+1}$ . Dans le cas d'un schéma implicite, l'équation d'équilibre est écrit à l'instant  $t_{n+1}$  et nécessite donc l'inversion d'une matrice pour déterminer les déplacements à l'incrément suivant.

On définit les déformations virtuelles par la relation 4.4 en introduisant la matrice gradient des fonctions de forme  $[B]$  :

$$\{\delta \varepsilon\} = [B]\{\delta u_q\} \quad (4.4)$$

Grâce aux relations 4.3 et 4.4, le principe des travaux virtuels à l'instant  $t$  s'écrit :

$$-\sum_{nel} \int_{V_e}^T [B]\{\sigma\} dV_e + \sum_{nel} \int_{V_e}^T [N]\{b\} dV_e + \sum_{nel} \int_{V_e}^T [N]\{f_d\} dS_e = \sum_{nel} \int_{V_e} \rho^T [N][N]\{\ddot{u}_q\} dV_e \quad (4.5)$$

où  $\sum_{nel}$  symbolise le passage des intégrales aux sommes discrètes sur l'ensemble du maillage.

Dans la suite du mémoire, l'expression 4.5 prend la forme :

$$[M]\{\ddot{u}^n\} + \{F_{int}\} = \{F_{ext}\} \quad (4.6)$$

avec

$$\begin{aligned} \{F_{int}\} &= \sum_{nel} \int_{V_e} [B]\{\sigma\} dV_e \\ \{F_{ext}\} &= \sum_{nel} \int_{V_e}^T [N]\{b\} dV_e + \sum_{nel} \int_{V_e}^T [N]\{f_d\} dS_e \\ [M] &= \sum_{nel} \int_{V_e} \rho^T [N][N] dV_e \end{aligned} \quad (4.7)$$

### 4.3.2. Discréétisation spatiale de l'équation d'équilibre en statique

Dans le cas où les effets dynamiques ne sont pas pris en compte dans la modélisation, l'expression 4.1 devient :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{b} = \vec{0}$$

La discréétisation de cette expression sur l'intervalle  $\Delta t$  devient :

$$\sum_{nel} \int_{V_e}^T [B]\{\Delta\sigma\} dV_e = \sum_{nel} \int_{V_e}^T [N]\{\Delta b\} dV_e + \sum_{nel} \int_{S_e}^T [N]\{\Delta f_d\} dS_e \quad (4.8)$$

Le tenseur des contraintes  $\{\Delta\sigma\}$  est relié au tenseur des déformations totales  $\{\Delta\varepsilon\}$  par l'intermédiaire de la matrice de comportement  $[D_{ep}]$  :

$$\{\Delta\sigma\} = [D_{ep}]\{\Delta\varepsilon\} = [D_{ep}][B]\{\Delta u\}$$

L'équation 4.8 prend la forme :

$$\sum_{\text{nel}} \int_{V_e}^T [B][D_{ep}][B] \{\Delta u\} dV_e = \sum_{\text{nel}} \int_{V_e}^T [N]\{\Delta b\} dV_e + \sum_{\text{nel}} \int_{S_e}^T [N]\{\Delta f_d\} dS_e \quad (4.9)$$

que l'on exprime sous la forme

$$[K]\{\Delta u\} = \{\Delta F_{ext}\} \quad (4.10)$$

avec

$$\begin{aligned} [K] &= \sum_{\text{nel}} \int_{V_e}^T [B][D_{ep}][B] dV_e \\ \{\Delta F_{ext}\} &= \sum_{\text{nel}} \int_{V_e}^T [N]\{\Delta b\} dV_e + \sum_{\text{nel}} \int_{S_e}^T [N]\{\Delta f_d\} dS_e \end{aligned} \quad (4.11)$$

## 4.4. Schéma d'intégration temporelle

La simulation de l'emboutissage est un problème fortement non-linéaire où interviennent les grands déplacements, les grandes déformations et le contact avec frottement. La phase de mise en forme, regroupant ces trois types de non linéarités, est modélisée dans notre étude en dynamique explicite. Par contre, la phase de retour élastique est modélisée en utilisant un schéma implicite avec une décrémentation proportionnelle des efforts de contact sans véritable gestion du contact entre les outils et le flan.

Deux approches sont classiquement utilisées pour résoudre les équations de la dynamique : la superposition modale et l'intégration temporelle directe. La superposition modale est efficace si les modes fondamentaux de la structure sont dominants. Dans le cas contraire, cette méthode est remplacée par une méthode d'intégration temporelle directe. Il est nécessaire de contrôler les paramètres de ces schémas pour maîtriser la précision, la stabilité et l'amortissement numérique de la réponse. L'intégration directe est une méthode générale qui traite l'ensemble du contenu fréquentiel de la sollicitation imposée à la structure mais reste très coûteuse en temps de calcul. Parmi les méthodes de résolution numérique directe, on peut citer les schémas de la famille de Newmark et les HHT (Hilbert, Hughes et Taylor) [1, 2, 3, 4, 5].

### 4.4.1. Schéma explicite des différences finies centrées

Ce schéma permet de calculer un vecteur inconnu à chaque instant  $t_n$ . Cette inconnue est pour nous le déplacement  $u^n$ . L'algorithme explicite des différences finies centrées exprime les vitesses et les accélérations à l'instant  $t_n$  en fonction des déplacements :

$$[M]\{\ddot{u}^n\} + \{F_{int}^n\} = \{F_{ext}^n\} \quad (4.12)$$

Les expressions des vitesses et des accélération sont données par :

$$\{\dot{u}^n\} = \frac{\{u^{n+1}\} - \{u^{n-1}\}}{2\Delta t} \quad (4.13)$$

$$\{\ddot{u}^n\} = \frac{\{u^{n+1}\} - 2\{u^n\} + \{u^{n-1}\}}{2\Delta t^2} \quad (4.14)$$

En remplaçant les vitesses et les accélérations par leurs expressions on peut ensuite isoler les déplacements à l'instant  $t_{n+1}$  :

$$\frac{1}{\Delta t^2} [M] \{u^{n+1}\} = \frac{2}{\Delta t^2} [M] \{u^n\} - \frac{1}{\Delta t^2} [M] \{u^{n-1}\} + \{F_{ext}^n\} - \{F_{int}^n\} \quad (4.15)$$

Pour un nœud libre dans la direction  $i$ , la relation 4.15 permet de calculer  $u_{(i)}^{n+1}$ . Pour un nœud à déplacement imposé dans cette direction,  $u_{(i)}^{n+1}$  est connu et 4.15 peut donner la composante de l'effort de liaison en fin de calcul.

Ce schéma explicite est conditionnellement stable et du second ordre. Le pas de temps  $\Delta t$  ne doit pas dépasser le pas de temps critique  $\Delta t_{crit}$ . Les pas de temps choisis sont petits mais le calcul de l'état d'équilibre à chaque instant  $t_n$  est peu coûteux en temps. L'équilibre du système à un instant donné dépend uniquement de l'instant précédent. Il ne découle pas de l'inversion d'une matrice car la matrice de masse  $[M]$  est choisie diagonale.

Le pas de temps critique  $\Delta t_{crit}$  est estimé grâce à la plus grande valeur propre du système. En pratique, la plus grande valeur propre n'est pas calculée. Dans le cas des éléments coques, on utilise couramment la relation 4.16 :

$$\Delta t_{crit} = \frac{l_{min}}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}} \quad (4.16)$$

où respectivement  $E$  est le module de Young du matériau,  $\rho$  est sa masse volumique et  $l_{min}$  est une longueur caractéristique des éléments de la structure. Dans le cas des éléments coques triangulaires on choisit fréquemment la plus petite des hauteurs, et pour les quadrangles, le plus petit côté (ou encore une relation entre longueurs des diagonales et surface du quadrilatère) comme longueur caractéristique.

Plusieurs techniques existent pour diagonaliser la matrice de masse. Pour une matrice  $[M]$  consistante de dimension  $n$ , la méthode la plus simple consiste à faire la somme des termes de chaque ligne et ainsi obtenir une matrice diagonalisée  $[M^{diag}]$  :

$$M_{ij}^{diag} = \begin{cases} \sum_{k=1}^n M_{ik} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (4.17)$$

Hughes [4] a proposé une méthode plus générale. Pour les déplacements  $u, v, w$  d'un nœud d'un élément coque comportant  $n$  nœuds, les termes diagonaux de la matrice  $M$ , pour cet élément, s'obtiennent en plusieurs étapes :

$$\begin{aligned} [M] &= \int_{V_e} \rho \langle N \rangle \{N\} dv \\ m^u &= \text{trace}[M] \\ m^e &= \int_{V_e} \rho dv \\ M_{ij}^{\text{diag}} &= \begin{cases} \frac{m^e}{m^u} M_{ij} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \end{aligned} \quad (4.18)$$

On obtient ainsi les termes diagonaux d'une matrice telle que l'énergie cinétique  $E_{\text{cin}}^u$  associée aux seuls déplacements nodaux  $\{u_q\}$  est de la forme :

$$E_{\text{cin}}^u = \frac{1}{2} \langle \dot{u}_q \rangle [M] \{ \dot{u}_q \} \quad (4.19)$$

Pour les éléments coques présentés par la suite, les fonctions d'interpolation sont les fonctions d'aire pour  $u$  et  $v$ . Ces mêmes fonctions sont alors choisies pour  $w$  et chaque terme de la matrice masse diagonale vaut donc  $m/3$  où  $m = \rho A e$  avec  $A$  l'aire de l'élément et  $e$  son épaisseur. Pour l'élément DKT12 comportant des rotations dans les directions des côtés, une "inertie" est calculée pour ces degrés de liberté en rotation (annexe B.2)

#### 4.4.2. Amortissement des oscillations numériques

L'introduction d'une matrice d'amortissement  $[C]$ , dont l'écriture la plus classique est celle de Rayleigh, permet d'amortir les oscillations hautes fréquences lors d'un calcul numérique. La formulation communément admise en numérique de cette matrice est une combinaison linéaire des matrices de masse et de raideur comme suit :

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (4.20)$$

que l'on introduit ensuite dans l'équation d'équilibre 4.12 pour obtenir l'expression suivante :

$$[M]\{\ddot{u}^n\} + [C]\{\dot{u}^n\} + \{F_{\text{int}}^n\} = \{F_{\text{ext}}^n\} \quad (4.21)$$

Le produit de la matrice  $[C]$  avec la vitesse  $\{\dot{u}_n\}$  introduit des forces d'amortissement visqueux. La contribution de la masse dans l'expression de l'amortissement, dont le poids est donné par le coefficient  $\alpha$ , peut s'interpréter comme une viscosité du milieu dans lequel évolue le modèle.

La contribution de la raideur, est quant à elle, l'image d'un amortissement du matériau lui-même. Dans le cas d'un comportement non linéaire, la matrice de raideur n'est pas explicitement construite et le concept d'amortissement exprimé ci-dessus doit être repensé. La contribution de la raideur dans l'amortissement peut s'interpréter comme un amortissement matériau de type visqueux créant une contrainte supplémentaire

proportionnelle au taux de déformation total. La contrainte supplémentaire s'écrit alors classiquement sous la forme :

$$\{\sigma_{\text{damp}}\} = \beta[D_{\text{el}}]\{\dot{\varepsilon}\} \quad (4.22)$$

où  $\{\dot{\varepsilon}\}$  est le taux de déformation et  $[D_{\text{el}}]$  est la raideur élastique non amortie.

L'amortissement proportionnel à la masse est quant à lui beaucoup plus facile à interpréter puisqu'il apparaît directement dans le calcul des déplacements au pas suivant. La relation 3.21 prend alors la forme suivante :

$$\left( \frac{1}{\Delta t^2} [M] + \frac{\alpha}{2\Delta t} [M] \right) \{u^{n+1}\} = \frac{2}{\Delta t^2} [M] \{u^n\} - \left( \frac{1}{\Delta t^2} [M] - \frac{\alpha}{2\Delta t} [M] \right) \{u^{n-1}\} + \{F_{\text{ext}}^n\} - \{F_{\text{int}}^n\}$$

en posant

$$[C] = \alpha[M]$$

Au lieu de gérer directement le paramètre  $\alpha$ , l'amortissement peut être imposé par le produit adimensionnel  $\alpha\Delta t$ . Les valeurs usuelles de ce produit sont comprises entre 0,01 et 0,0001.

## 4.5. Intégration de la loi de comportement

Deux phases distinctes doivent être considérées pour l'introduction d'une loi de comportement au sein d'un code éléments finis : la résolution du système non linéaire de l'équation d'équilibre globale et la détermination de l'état de contraintes local du matériau. Cette dernière étape constitue une procédure indépendante de l'algorithme d'intégration temporelle et peut être commune à des codes dynamiques explicites et implicite.

Le critère de plasticité exprimé au chapitre 3.1 s'écrit sous la forme :

$$f = \sigma_{\text{eq}}(\{\sigma\}, \{\alpha\}) - \sigma_c(\bar{\varepsilon}^p) \leq 0$$

où  $f = 0$  définit la frontière de la surface de charge dans l'espace des contraintes.

Après un incrément de chargement ou une itération d'équilibre  $n$  correspondant à un accroissement  $\{\Delta U_q\}$ , nous avons pour un point particulier de l'élément considéré  $\{\Delta \varepsilon\} = [B]\{\Delta U_q\}$ . Connaissant l'état de contraintes plastiquement admissible  $\{\sigma^{(n-1)}\}$  à l'incrément  $(n-1)$ , l'intégration du comportement consiste à trouver  $\{\sigma^{(n)}\}$  compatible avec l'incrément de déformation totale  $\{\Delta \varepsilon\}$  tel que  $f(\{\sigma^{(n)}\}) \leq 0$ .

Il est également nécessaire de distinguer  $\{\Delta \varepsilon^e\}$  et  $\{\Delta \varepsilon^p\}$  ( $\{\Delta \varepsilon\} = \{\Delta \varepsilon^e\} + \{\Delta \varepsilon^p\}$ ) ne serait-ce que pour calculer la variation d'épaisseur  $\Delta e$  en état plan de contraintes.

La méthode d'intégration de la loi de comportement décrite ici est une méthode explicite de prédiction élastique avec correction radiale. On suppose dans un premier temps que la variation de déformation totale  $\{\Delta \varepsilon\}$  est entièrement élastique. La variation du tenseur des contraintes est alors estimée à partir de la loi de Hooke et ajoutée au tenseur des

contraintes de l'incrément précédent. La comparaison de la valeur équivalente caractéristique de cet état de contrainte  $\sigma_{eq}$  avec le seuil d'écoulement  $\sigma_c$  du matériau permet de vérifier la validité à l'incrément n (tableau 4.1) :

- si  $\sigma_{eq} \leq \sigma_c$ , le point reste ou retourne dans le domaine élastique ;
  - si initialement  $\sigma_{eq} > \sigma_c$ , le point a plastifié et il faut estimer la partie plastique du tenseur des déformations.
- 

1- Prédiction élastique :

$$\begin{aligned}\{\Delta\sigma_{(pe)}^{(n)}\} &= [D]\{\Delta\varepsilon^{(n)}\} \\ \{\sigma_{(pe)}^{(n)}\} &= \{\sigma^{(n-1)}\} + \{\Delta\sigma_{(pe)}^{(n)}\}\end{aligned}$$

2- Calcul de la contrainte seuil :

$$\sigma_c^{(n-1)} = g(\varepsilon^{p(n-1)})$$

3- Calcul de la contrainte équivalente avec l'état prédit élastiquement :

$$\sigma_{eq(pe)}^{(n)} = f(\{\sigma_{(pe)}^{(n)}\})$$

4- Test de plasticité :

$$\text{SI } \sigma_{eq(pe)}^{(n)} < \sigma_c^{(n-1)}$$

**ALORS** (*on est dans le domaine élastique*)

Réaffectations des grandeurs :

$$\{\sigma^{(n)}\} = \{\sigma_{(pe)}^{(n)}\}$$

**SINON** (*on est dans le domaine plastique*)

Boucle de sous-incrémantation éventuelle

---

**Tableau 4.1.** Algorithme de prédiction élastique

Après l'incrément n, l'état de contraintes est issu de la prédiction élastique (pe) :

$$\{\sigma_{(pe)}^{(n)}\} = \{\sigma^{(n-1)}\} + \{\Delta\sigma_{(pe)}^{(n)}\} \quad (4.23)$$

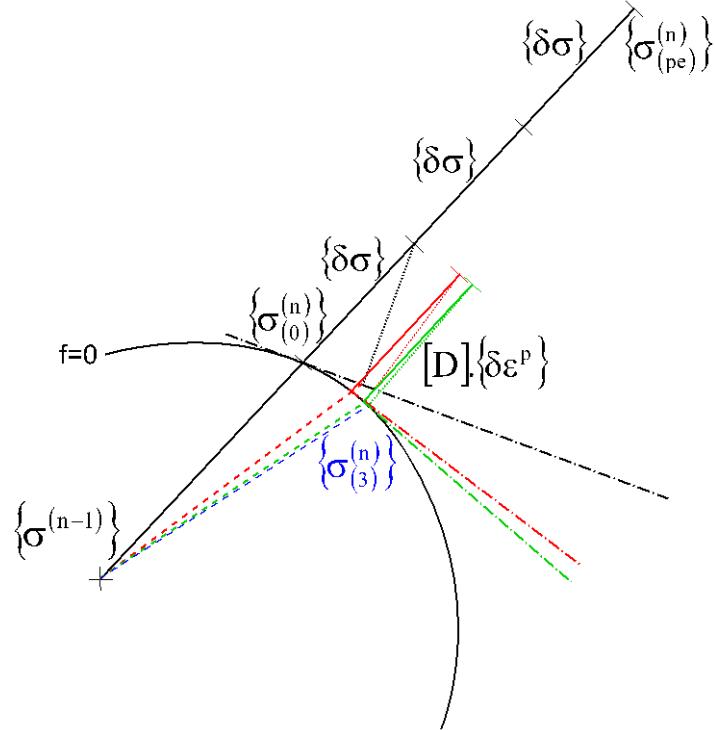
Ce dernier état de contraintes n'est pas plastiquement admissible, une correction est donc nécessaire. Pour remédier à cela, la solution consiste à découper l'excédent de contrainte en utilisant une procédure de sous-incrémantation (voir figure 4.2 où, pour des facilités d'ordre graphique, l'évolution de la surface ( $f = 0$ ) n'est pas représentée).

L'algorithme de sous-incrémantation est présenté sur la figure 4.2. Plusieurs critères ont été suggérés pour définir le nombre de sous-incréments m. Nyssen [8] a estimé l'erreur occasionnée sur un pas d'incrémantation unique. Owen [9] a limité le chargement maximum autorisé par la surface de charge issue de la surestimation élastique à 12.5% de la contrainte équivalente d'écrouissage. Nous avons considéré ce dernier critère dans notre travail :

$$\frac{\sigma_{eq(pe)}^{(n)} - \sigma_c^{(n-1)}}{m} \leq \frac{12,5}{100} \sigma_c^{(n-1)} \quad (4.24)$$

On prendra alors

$$m = \left\lfloor 8 \cdot \frac{\sigma_{eq(pe)}^{(n)} - \sigma_c^{(n-1)}}{\sigma_c^{(n-1)}} \right\rfloor + 1 \quad (4.25)$$



**Figure 4.2.** Découpage de la correction radiale

Le terme correctif radial R de la transition élasto-plastique est défini par :

$$R = \frac{\sigma_{eq(pe)}^{(n)} - \sigma_c^{(n-1)}}{\sigma_{eq(pe)}^{(n)} - \sigma_{eq}^{(n-1)}} \quad (4.26)$$

L'état de contraintes  $\sigma_{(m=0)}^{(n)}$  (non admissible plastiquement) avant la sous-incrémentation est obtenu grâce à la relation

$$\{\sigma_{(m=0)}^{(n)}\} = \{\sigma_{(pe)}^{(n)}\} - m \cdot \{\delta\sigma\} \quad (4.27)$$

On ajoute ensuite  $\{\delta\sigma\}$  et on retranche  $[D]\{\delta\epsilon^p\}$  :

$$\{\sigma_{(m)}^{(n)}\} = \{\sigma_{(m-1)}^{(n)}\} + \{\delta\sigma\} - [D]\{\delta\epsilon^p\} \quad (4.28)$$

avec

$$\{\delta\sigma\} = \frac{R}{m} (\{\sigma_{(pe)}^{(n)}\} - \{\sigma_{(n-1)}^{(n)}\}) \quad (4.29)$$

Les états de contraintes intermédiaires sont ramenés à chaque sous-incrément sur la surface de charge par simple proportionnalité :

$$\{\sigma_{(m)}^{(n)}\} = \{\sigma_{(m)}^{(n)}\} \cdot \frac{\sigma_c^{(n)}}{\sigma_{eq}^{(n)}} \quad (4.30)$$

1- Calcul du nombre de sous-incréments :

$$m = \left\lfloor 8 \cdot \frac{\sigma_{eq(pe)}^{(n)} - \sigma_c^{(n-1)}}{\sigma_c^{(n-1)}} \right\rfloor + 1$$

2- Test de l'état du point considéré :

**SI** le point considéré était déjà plastique :

**ALORS**

$$R = 1$$

**SINON**

$$R = \frac{\sigma_{eq(pe)}^{(n)} - \sigma_c^{(n-1)}}{\sigma_{eq(pe)}^{(n)} - \sigma_{eq}^{(n-1)}}$$

3- Calcul du sous-incrément de contraintes :

$$\{\delta\sigma\} = \frac{R}{m} (\{\sigma_{(pe)}^{(n)}\} - \{\sigma_{(pe)}^{(n-1)}\})$$

4- Initialisations :

$$\{\sigma_{(m=0)}^{(n)}\} = \{\sigma_{(pe)}^{(n)}\} - m \cdot \{\delta\sigma\}$$

5- Boucle sur le nombre de sous-incréments :

**POUR** i=1 à m

$$\{\delta\varepsilon^p\} = d\lambda \cdot \{a\}$$

(Les expressions de  $d\lambda$  et  $\{a\}$  sont données au chapitre 3.3)

$$\{\sigma_{(m)}^{(n)}\} = \{\sigma_{(m-1)}^{(n)}\} + \{\delta\sigma\} - [D] \{\delta\varepsilon^p\}$$

6- Actualisation de l'épaisseur :

$$\delta\varepsilon_{zz}^p = -(\delta\varepsilon_{xx}^p + \delta\varepsilon_{yy}^p)$$

$$\delta\varepsilon_{zz}^e = -\frac{v}{1-v} (\delta\varepsilon_{xx}^e + \delta\varepsilon_{yy}^e)$$

$$\Delta\varepsilon_{zz} = \Delta\varepsilon_{zz} + (\delta\varepsilon_{zz}^e + \delta\varepsilon_{zz}^p)$$

7- Dernière correction de l'état de contraintes

$$\{\sigma_{(m)}^{(n)}\} = \{\sigma_{(m)}^{(n)}\} \cdot \frac{\sigma_c^{(n)}}{\sigma_{eq}^{(n)}}$$

8- Actualisation des contraintes et déformations

**Tableau 4.2.** Algorithme de sous-incrémantation

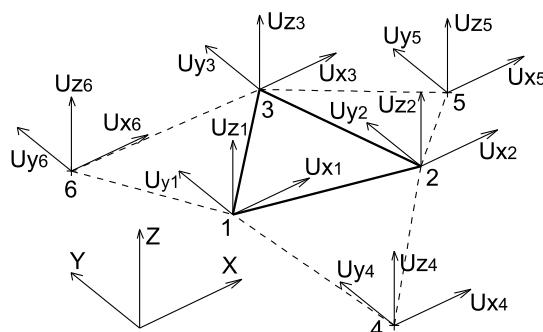
## 4.6. Eléments finis triangulaires simplifiés

Dans la première moitié des années 1990, étaient publiés les premiers articles relatifs aux éléments de coque "RF" (Rotation-Free) sans degrés de liberté en rotation [10, 11, 12, 13, 14]. Justifiés initialement par le gain de temps de calcul, il s'est avéré à la fin des années 90 et début des années 2000 que ces éléments se révélaient moins sensibles à la densité du maillage que les éléments de coque classiques à six ddl : 3 translations et 3 rotations [15, 16]. Des études plus générales [17, 18] ont aussi montré qu'une partie de la formulation de ces éléments "RF" se retrouvait dans l'élément de Morley [19] et dans le triangle à six noeuds "DKT12" formulé par Batoz [20, 21].

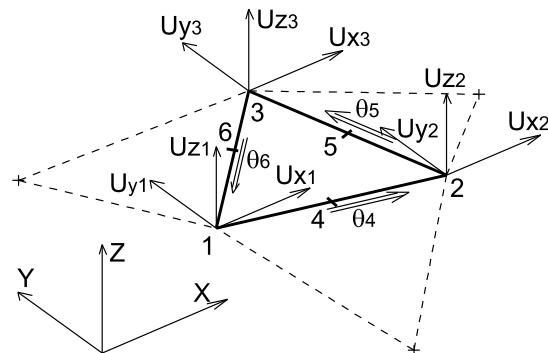
Au congrès NumiSheet'93, paraissait un benchmark resté célèbre depuis : le retour élastique d'une simple forme en "U" obtenue par emboutissage d'une tôle d'acier ou d'un alliage d'aluminium sous différents efforts serre flan. Les résultats – principalement le rayon résiduel du "mur" après retour élastique – présentaient beaucoup de dispersion. Entre autre, il est noté l'influence du maillage relativement à la valeur du rayon d'entrée de la matrice.

L'élément S3 (Rotation-Free) est un élément à 3 noeuds à 3 degrés de liberté par noeud. La flexion est pris en compte par l'intermédiaire des composantes de translation des noeuds des triangles voisins, si ces derniers existent. Cet élément peut donc s'apparenter à un élément à six noeuds bien que les noeuds 4, 5 et 6 ne soient pas situés sur ses côtés [22] (figure 4.3). Les deux éléments cités précédemment ont en commun de n'avoir qu'un seul point d'intégration dans le plan (impératif pour contenir le temps de calcul des simulations de mise en forme), d'être réservés aux coques minces (pas de déformation de cisaillement transversal) et de ne faire intervenir les noeuds des éléments voisins que pour la flexion. On trouve dans [23] une utilisation de ces noeuds voisins pour les effets de membrane.

Le triangle DKT12 (Discrete Kirchhoff Triangle) se distingue des éléments de coque à six degrés de liberté par noeud par le fait que les noeuds sommets sont affectés de trois composantes de translation tandis que les noeuds situés aux milieux des côtés sont dotés d'une rotation dans la direction du côté (figure 4.4).



**Figure 4.3.** Élément S3



**Figure 4.4.** Élément DKT12

### 4.6.1. Elément DKT12

Il s'agit d'un triangle à 6 noeuds à bords droits. Les trois noeuds aux sommets (1, 2, 3) sont dotés de trois composantes de translation notées  $U_X$ ,  $U_Y$ ,  $U_Z$  dans le repère global de la structure et  $u$ ,  $v$ ,  $w$  dans le repère local de l'élément où  $u$  et  $v$  sont dans le plan moyen de l'élément et  $w$  normal à ce plan. Les trois noeuds aux milieux des côtés (4, 5, 6) sont dotés d'une composante de rotation dans la direction du côté considéré :  $\theta_{t4}$ ,  $\theta_{t5}$  et  $\theta_{t6}$ .

#### 4.6.1.1. Définition du repère local

L'axe  $\vec{x}$  du repère local est porté par le coté 1-2 de l'élément. La normale au repère local  $(\vec{x}, \vec{y})$  en question est définie par :

$$\vec{z} = \frac{\vec{r}_{12} \wedge \vec{r}_{13}}{\|\vec{r}_{12} \wedge \vec{r}_{13}\|} = \begin{Bmatrix} zX \\ zY \\ zZ \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

$zX$ ,  $zY$  et  $zZ$  représentent respectivement la projection de l'axe local  $\vec{z}$  sur les axes  $\vec{X}$ ,  $\vec{Y}$  et  $\vec{Z}$  du repère global de la structure.

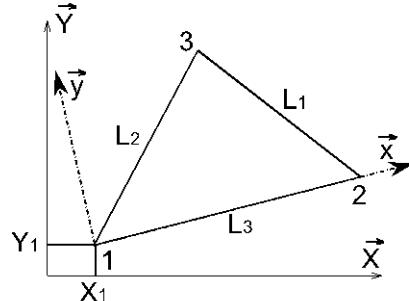


Figure 4.5. Définition du repère local

Les déplacements locaux  $u_i$ ,  $v_i$  et  $w_i$  sont reliés par la matrice de passage  $[P]$  aux déplacements globaux  $U_{xi}$ ,  $U_{yi}$  et  $U_{zi}$  :

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} = [P] \{U_e\} = \begin{bmatrix} xX & xY & xZ \\ yX & yY & yZ \\ zX & zY & zZ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{xi} \\ U_{yi} \\ U_{zi} \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

$xX$ ,  $xY$  et  $xZ$  représentant respectivement la projection de l'axe  $\vec{x}$  sur l'axe  $\vec{X}$ , sur l'axe  $\vec{Y}$  et sur l'axe  $\vec{Z}$ , sont définis par :

$$xX = \frac{X_2 - X_1}{L_3} ; \quad xY = \frac{Y_2 - Y_1}{L_3} ; \quad xZ = \frac{Z_2 - Z_1}{L_3} \quad (4.33)$$

$yX$ ,  $yY$  et  $yZ$  sont calculés grâce au produit vectoriel  $\vec{z} \wedge \vec{x}$ .

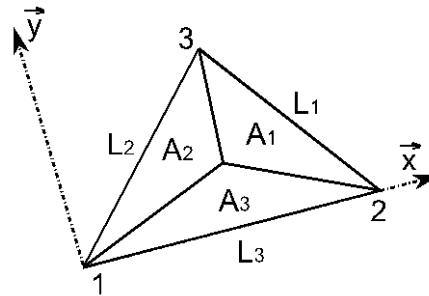
#### 4.6.1.2. Effets de membrane

La formulation des effets de membrane est identique pour les deux éléments S3 et DKT12. Les fonctions d'interpolations utilisées pour la formulation en membrane sont :

$$\begin{aligned} u &= \frac{A_1}{A} u_1 + \frac{A_2}{A} u_2 + \frac{A_3}{A} u_3 \\ v &= \frac{A_1}{A} v_1 + \frac{A_2}{A} v_2 + \frac{A_3}{A} v_3 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Les rapports  $\frac{A_1}{A}$ ,  $\frac{A_2}{A}$  et  $\frac{A_3}{A}$  sont appelés fonctions d'aire d'un triangle et sont définies par les relations :

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{A} &= \frac{1}{2A} (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 + x_3 \cdot y - x \cdot y_3 + x \cdot y_2 - x_2 \cdot y) \\ \frac{A_2}{A} &= \frac{1}{2A} (x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 + x_1 \cdot y - x \cdot y_1 + x \cdot y_3 - x_3 \cdot y) \\ \frac{A_3}{A} &= \frac{1}{2A} (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y - x \cdot y_2 + x \cdot y_1 - x_1 \cdot y) \end{aligned} \quad (4.35)$$



**Figure 4.6.** Aires et longueurs des cotés

Les déformations sont reliées aux déplacements locaux par l'intermédiaire de la matrice  $[\bar{B}_m]$  :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u, x \\ v, x \\ u, y - v, x \end{Bmatrix} = [\bar{B}_m] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & | & y_{31} & | & y_{12} & | \\ \hline x_{32} & | & x_{13} & | & x_{21} & | \\ y_{23} & | & x_{13} & | & y_{31} & | & x_{21} & | & y_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

avec

$$x_{ij} = x_i - x_j$$

$$y_{ij} = y_i - y_j$$

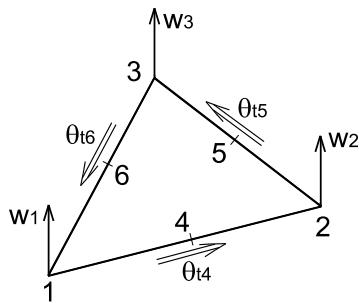
En projetant les déplacements locaux dans la base globale, une matrice  $[B_m]$  reliant les déplacements globaux aux déformations peut être définie :

$$\begin{Bmatrix} U_{X1} \\ U_{Y1} \\ U_{Z1} \\ \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [B_m] \begin{Bmatrix} U_{X1} \\ U_{Y1} \\ U_{Z1} \\ U_{X2} \\ U_{Y2} \\ U_{Z2} \\ U_{X3} \\ U_{Y3} \\ U_{Z3} \end{Bmatrix} = [\bar{B}_m] \cdot \begin{Bmatrix} xX & xY & xZ & & & & & & \\ yX & yY & yZ & & & & & & \\ & & & xX & xY & xZ & & & \\ & & & yX & yY & yZ & & & \\ & & & & & & xX & xY & xZ \\ & & & & & & yX & yY & yZ \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_{X1} \\ U_{Y1} \\ U_{Z1} \\ U_{X2} \\ U_{Y2} \\ U_{Z2} \\ U_{X3} \\ U_{Y3} \\ U_{Z3} \end{Bmatrix}. \quad (4.37)$$

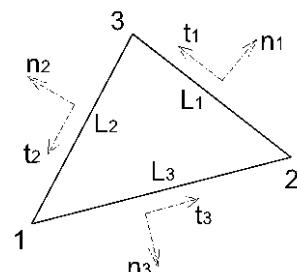
#### 4.6.1.3. Effets de flexion

Les effets de flexion font intervenir les translations  $w_1, w_2, w_3$  et les rotations  $\theta_{t4}, \theta_{t5}$  et  $\theta_{t6}$ . L'élément est alors appelé "DKT6" (Discrete Kirchhoff Triangle). La composition des triangles CST et DKT6 donne l'élément à déformation constante DKT12. Les interpolations utilisées pour la flexion sont :

$$\begin{aligned} \theta_x &= \left(1 - \frac{2A_3}{A}\right)\theta_{x4} + \left(1 - \frac{2A_1}{A}\right)\theta_{x5} + \left(1 - \frac{2A_2}{A}\right)\theta_{x6} \\ \theta_y &= \left(1 - \frac{2A_3}{A}\right)\theta_{y4} + \left(1 - \frac{2A_1}{A}\right)\theta_{y5} + \left(1 - \frac{2A_2}{A}\right)\theta_{y6} \end{aligned} \quad (4.38)$$



**Figure 4.7.** Degrés de liberté utilisés pour la flexion



**Figure 4.8.** Notations utilisées

Les rapports  $\frac{A_1}{A}, \frac{A_2}{A}$  et  $\frac{A_3}{A}$  sont définis par les relations (4.35) où  $\theta_{x4}, \theta_{y4}, \theta_{x5}, \theta_{y5}, \theta_{x6}$  et  $\theta_{y6}$  ne sont pas uniquement les projections de  $\theta_{t4}, \theta_{t5}$  et  $\theta_{t6}$  sur les axes  $x$  et  $y$  du repère local dans le plan mais imposent aussi les relations de Kirchhoff :  $\theta_n = w, t$  aux nœuds 4, 5, 6 de sorte que :

$$\theta_{n4} = \frac{w_2 - w_1}{L_3}; \theta_{n5} = \frac{w_3 - w_2}{L_1}; \theta_{n6} = \frac{w_1 - w_3}{L_2} \quad (4.39)$$

On extrait l'expression des courbures grâce aux équations 4.38 et 4.39 :

$$\{\kappa\} = \begin{pmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_y, x \\ -\theta_x, y \\ \theta_y, y - \theta_x, x \end{pmatrix} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} & | & y_{21} & | & y_{32} & | & x_{13} \\ \hline x_{21} & | & & | & x_{32} & | & \\ \hline y_{12} & | & x_{12} & | & y_{23} & | & x_{23} \\ \hline & | & & | & x_{13} & | & \\ \hline & | & y_{31} & | & x_{31} & | & \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \\ \theta_{x5} \\ \theta_{y5} \\ \theta_{x6} \\ \theta_{y6} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

avec

$$x_{ij} = x_i - x_j$$

$$y_{ij} = y_i - y_j$$

En remplaçant les composantes  $\theta_{xm}$ ,  $\theta_{ym}$  ( $m=4,5,6$ ) en fonction de  $\theta_{tm}$ ,  $\theta_{nm}$  puis  $\theta_{nm}$  en fonction des translations normales  $w_i$  ( $i=1,2,3$ ), on obtient la matrice  $\bar{B}_b$  reliant les courbures aux « déplacements locaux » des nœuds de l'élément. On peut par exemple exprimer  $\theta_{x4}$  et  $\theta_{y4}$  :

$$\vec{\theta}_4 = \theta_{x4} \cdot \vec{x} + \theta_{y4} \cdot \vec{y} = \theta_{n4} \cdot \vec{n}_3 + \theta_{t4} \cdot \vec{t}_3$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{n}_3 &= c_3 \cdot \vec{x} + s_3 \cdot \vec{y} \quad \text{où } c_3 = \frac{y_{21}}{L_3} = \frac{y_2 - y_1}{L_3} \text{ et } s_3 = -\frac{x_{21}}{L_3} = \frac{x_2 - x_1}{L_3} \\ \vec{t}_3 &= -s_3 \cdot \vec{x} + c_3 \cdot \vec{y} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Grâce à la relation 4.39 et la relation précédente, les angles  $\theta_{x4}$  et  $\theta_{y4}$  deviennent

$$\begin{aligned} \vec{\theta}_4 &= \theta_{x4} \cdot \vec{x} + \theta_{y4} \cdot \vec{y} = \frac{w_2 - w_1}{L_3} \cdot (c_3 \cdot \vec{x} + s_3 \cdot \vec{y}) + \theta_{t4} \cdot (-s_3 \cdot \vec{x} + c_3 \cdot \vec{y}) \\ \theta_{x4} &= \frac{w_2 - w_1}{L_3} \cdot c_3 - \theta_{t4} \cdot s_3 \\ \theta_{y4} &= \frac{w_2 - w_1}{L_3} \cdot s_3 + \theta_{t4} \cdot c_3 \end{aligned} \quad (4.42)$$

De la même manière, les angles  $\theta_{x5}$ ,  $\theta_{y5}$ ,  $\theta_{x6}$  et  $\theta_{y6}$  sont définis par :

$$\theta_{x5} = \frac{w_3 - w_2}{L_1} \cdot c_1 - \theta_{t5} \cdot s_1$$

$$\theta_{y5} = \frac{w_3 - w_2}{L_1} \cdot S_1 + \theta_{t5} \cdot c_1$$

$$\theta_{x6} = \frac{w_1 - w_3}{L_2} \cdot c_2 - \theta_{t6} \cdot s_2$$

$$\theta_{y6} = \frac{w_1 - w_3}{L_2} \cdot s_2 + \theta_{t6} \cdot c_2$$

L'expression 4.40 peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{B}_b] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_1 \\ w_2 \\ \theta_{t4} \\ \theta_{t5} \\ \theta_{t6} \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

Une matrice  $[B_b]$  reliant les déplacements globaux aux déformations peut également être définie :

$$\begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{B}_b] \cdot \begin{Bmatrix} zX & zY & zZ & & & & & & & & & \\ & & & zX & zY & zZ & & & & & & \\ & & & & & & zX & zY & zZ & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_{x1} \\ U_{y1} \\ U_{z1} \\ U_{x2} \\ U_{y2} \\ U_{z2} \\ U_{x3} \\ U_{y3} \\ U_{z3} \\ \theta_{t4} \\ \theta_{t5} \\ \theta_{t6} \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

avec

#### 4.6.1.4. Autre écriture des effets de flexion

Afin de mettre en évidence la caractéristique commune avec l'élément S3, il est nécessaire de formuler différemment les courbures en faisant apparaître clairement le mouvement de corps rigide du triangle défini par les translations normales.

L'expression 4.43 s'écrit alors sous la forme :

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} = [B_\theta] \begin{Bmatrix} \theta_{t4} \\ \theta_{t5} \\ \theta_{t6} \end{Bmatrix} + [B_w] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \{\kappa_\theta\} + \{\kappa_w\}$$

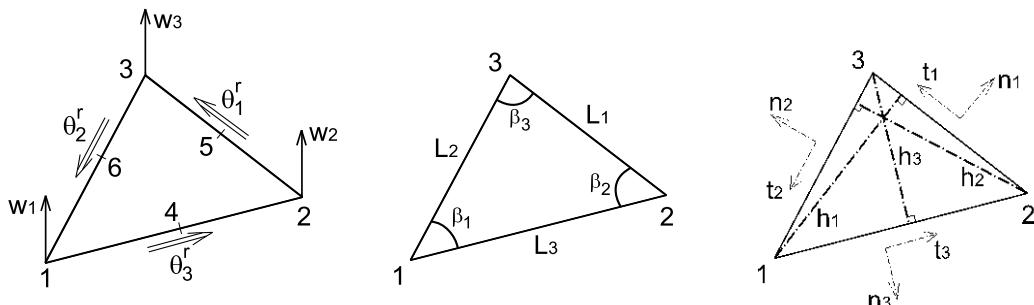
avec

$$[\kappa_\theta] = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} c_3^2 L_3 & c_1^2 L_1 & c_2^2 L_2 \\ s_3^2 L_3 & s_1^2 L_1 & s_2^2 L_2 \\ 2c_3 s_3 L_3 & 2c_1 s_1 L_1 & 2c_2 s_2 L_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{t4} \\ \theta_{t5} \\ \theta_{t6} \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

$$[\kappa_w] = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} c_2 s_2 - c_3 s_3 & c_3 s_3 - c_1 s_1 & c_1 s_1 - c_2 s_2 \\ c_3 s_3 - c_2 s_2 & c_1 s_1 - c_3 s_3 & c_2 s_2 - c_1 s_1 \\ 2(c_3^2 - c_2^2) & 2(c_1^2 - c_3^2) & 2(c_2^2 - c_1^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \quad (4.47)$$

On peut réécrire la relation 4.46 sous la forme :

$$[\kappa_\theta] = \begin{bmatrix} c_3^2 & c_1^2 & c_2^2 \\ s_3^2 & s_1^2 L_1 & s_2^2 \\ 2c_3 s_3 & 2c_1 s_1 & 2c_2 s_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2\theta_{t4}/h_3 \\ 2\theta_{t5}/h_1 \\ 2\theta_{t6}/h_2 \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$



**Figure 4.9.** Notation des caractéristiques du triangle

Les angles de rotation de solides rigide du triangle (1,2,3)  $\theta_1^r, \theta_2^r, \theta_3^r$ , respectivement autour du côté 2-3, du côté 3-1 et du côté 1-2, sont facilement calculables à partir des déplacements  $w_1, w_2$  et  $w_3$  et des caractéristiques géométriques du triangle.

L'interpolation du déplacement  $w$  est de la même forme que  $u$  et  $v$  :

$$w = \frac{A_1}{A} w_1 + \frac{A_2}{A} w_2 + \frac{A_3}{A} w_3$$

Les expressions de  $\frac{A_1}{A}$ ,  $\frac{A_2}{A}$  et  $\frac{A_3}{A}$  sont données par les relations 4.35.

$$\begin{aligned}\theta_1^r &= -(w, n_1) = -c_1(w, x) - s_1(w, y) = \frac{w_1}{h_1} - \frac{w_2}{h_2} \cos\beta_3 - \frac{w_3}{h_3} \cos\beta_2 \\ \theta_2^r &= -(w, n_2) = \frac{w_2}{h_2} - \frac{w_3}{h_3} \cos\beta_1 - \frac{w_1}{h_1} \cos\beta_3 \\ \theta_3^r &= -(w, n_3) = \frac{w_3}{h_3} - \frac{w_1}{h_1} \cos\beta_2 - \frac{w_2}{h_2} \cos\beta_1\end{aligned}\quad (4.49)$$

$$[\kappa_w] = \left[ \begin{array}{c|c|c} c_3^2 & c_1^2 & c_2^2 \\ \hline s_3^2 & s_1^2 & s_2^2 \\ \hline 2.c_3.s_3 & 2.c_1.s_1 & 2.c_2.s_2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} -2\theta_3^r/h_3 \\ -2\theta_1^r/h_1 \\ -2\theta_2^r/h_2 \end{array} \right] \quad (4.50)$$

Pour chacun des côtés du triangle, un angle de flexion peut être défini comme étant la différence entre le degré de liberté et la rotation de corps de rigide de l'élément autour de ce côté. Ainsi, les angles de flexion  $\theta_1^b, \theta_2^b, \theta_3^b$  sont donnés par :

$$\theta_1^b = \theta_{t5} - \theta_1^r; \theta_2^b = \theta_{t6} - \theta_2^r; \theta_3^b = \theta_{t4} - \theta_3^r$$

En additionnant les relations 4.48 et 4.50 on arrive à :

$$\{\kappa\} = \left[ \begin{array}{c} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2.\kappa_{xy} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c} c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ \hline s_1^2 & s_2^2 & s_3^2 \\ \hline 2.c_1.s_1 & 2.c_2.s_2 & 2.c_3.s_3 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} 2\theta_1^b/h_1 \\ 2\theta_2^b/h_2 \\ 2\theta_3^b/h_3 \end{array} \right] \quad (4.51)$$

On voit alors apparaître les courbures  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ , prises dans les directions normales  $n_1, n_2, n_3$  à chacun des côtés du triangle.

$$\kappa_1 = \frac{2\theta_1^b}{h_1}; \kappa_2 = \frac{2\theta_2^b}{h_2}; \kappa_3 = \frac{2\theta_3^b}{h_3}$$

L'état de courbures dans l'élément peut alors être vu comme la superposition des courbures  $\kappa_1, \kappa_2$  et  $\kappa_3$ .

## 4.6.2. Elément S3

L'originalité de l'élément S3 est le calcul des courbures avec les déplacements  $w_4, w_5, w_6$  des noeuds des triangles voisins. L'élément est géométriquement un triangle à trois noeuds mais les noeuds 4, 5 et 6 des éléments voisins, s'ils existent, sont utilisés pour formuler la flexion dans l'élément (1,2,3) grâce aux six translations :  $w_1, w_2, w_3$  et  $w_4, w_5, w_6$ .

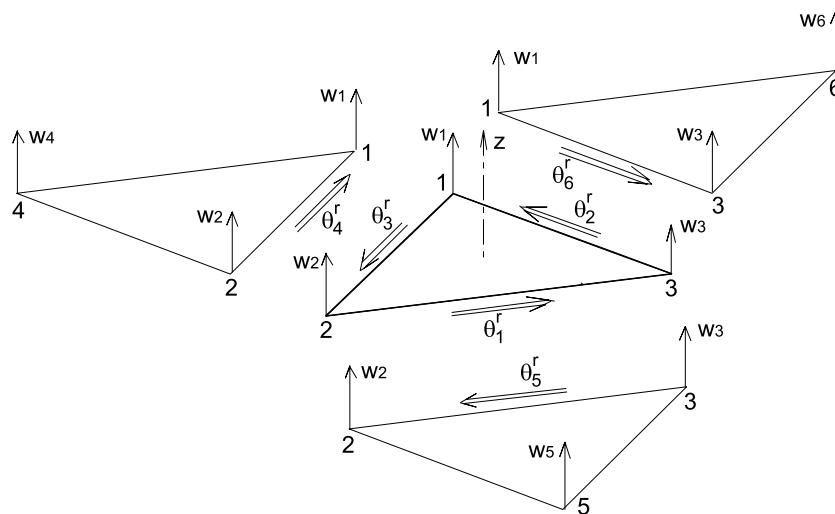
Toutefois, en chaque noeud de la structure, il n'y a que trois degrés de liberté : trois translations dans le repère global, ce qui diminue considérablement le nombre total de degrés de liberté. En première approximation ce nombre est divisé par deux par rapport au cas d'une structure discrétisée avec des éléments DKT12. Le second avantage est qu'il n'y a pas à distinguer les noeuds "sommets" à trois degrés de liberté en translation et les noeuds "milieux" à un seul degré de liberté en rotation dans une direction particulière, ce qui simplifie notablement la programmation surtout en cas de remaillage.

Les effets de membrane sont identiques à ceux de l'élément DKT12 et donc du triangle CST (Constant Strain Triangle).

### 4.6.2.1. Effets de flexion dans le cas des plaques

Bien qu'il n'y ait pas de noeud au milieu des côtés comme pour l'élément DKT12, l'idée principale est la même : le calcul de trois courbures  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  dans des directions normales à chacun des trois côtés.

Les noeuds 4, 5 et 6 des éléments voisins permettent de calculer les angles de flexion  $\theta_1^b, \theta_2^b, \theta_3^b$  à partir des angles de rotation de solide rigide  $\theta_1^r, \theta_2^r, \theta_3^r, \theta_4^r, \theta_5^r, \theta_6^r$  (figure 4.10)



**Figure 4.10.** Rotations de solide rigide

Les angles de rotations de solide rigide  $\theta_1^r, \theta_2^r, \theta_3^r$  sont calculés comme pour l'élément DKT12 avec les relations 4.49.

En procédant de façon analogue que pour  $\theta_1^r, \theta_2^r, \theta_3^r$ , on obtient finalement les relations entre  $\theta_4^r, \theta_5^r, \theta_6^r$  et  $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$  :

$$\begin{aligned}\theta_4^r &= \frac{w_4}{h_4} - \frac{w_1}{q_1} \cos \gamma_2 - \frac{w_2}{q_2} \cos \gamma_1 \\ \theta_5^r &= \frac{w_5}{h_5} - \frac{w_2}{r_2} \cos \psi_3 - \frac{w_3}{r_3} \cos \psi_2 \\ \theta_6^r &= \frac{w_6}{h_6} - \frac{w_3}{p_3} \cos \varphi_1 - \frac{w_1}{p_1} \cos \varphi_3\end{aligned}\quad (4.52)$$

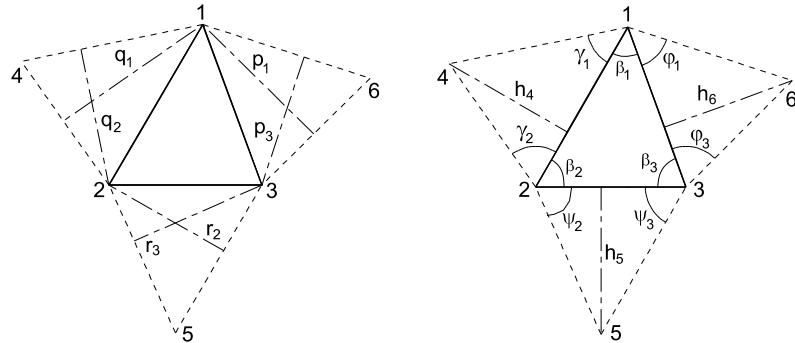


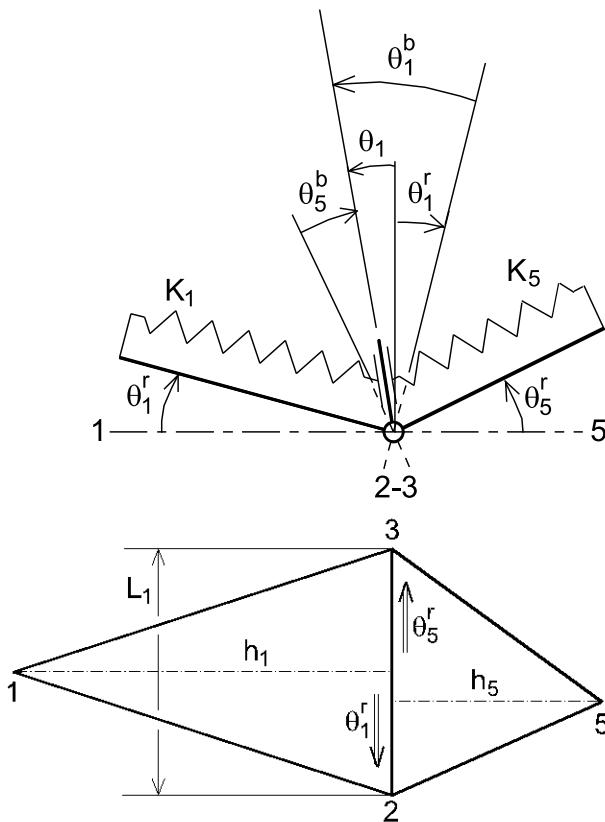
Figure 4.11. Géométrie des triangles voisins

Sous forme matricielle, les expressions 4.52 deviennent :

$$\left\{\begin{array}{l} \theta_1^r \\ \theta_2^r \\ \theta_3^r \\ \theta_4^r \\ \theta_5^r \\ \theta_6^r \end{array}\right\} = [C_w] \{W\} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & -\frac{\cos \beta_3}{h_2} & -\frac{\cos \beta_2}{h_3} & & & \\ \hline \frac{1}{h_1} & & & & & \\ \hline -\frac{\cos \beta_3}{h_1} & \frac{1}{h_3} & -\frac{\cos \beta_1}{h_3} & & & \\ \hline \frac{\cos \beta_2}{h_1} & -\frac{\cos \beta_1}{h_2} & \frac{1}{h_3} & & & \\ \hline -\frac{\cos \gamma_2}{q_1} & -\frac{\cos \gamma_1}{q_2} & & \frac{1}{h_4} & & \\ \hline q_1 & q_2 & & & \frac{1}{h_5} & \\ \hline & -\frac{\cos \psi_3}{r_2} & -\frac{\cos \psi_2}{r_3} & & & \frac{1}{h_6} \\ \hline -\frac{\cos \varphi_3}{p_1} & -\frac{\cos \varphi_1}{p_3} & & & & \end{array}\right] \cdot \left\{\begin{array}{l} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{array}\right\} \quad (4.53)$$

Considérons un triangle voisin (3,2,5) partageant la frontière 2-3 de l'élément (1,2,3) étudié (figure 4.12). Pour trouver cet angle  $\theta_1^b$  après rotation des angles  $\theta_1^r$  pour l'élément étudié et  $\theta_5^r$  pour l'élément voisin, une analogie avec une poutre à inertie variable est effectuée. En appui en 2 et 3, le déplacement  $w_1$  est imposé en 1 et le déplacement  $w_5$  est imposé en 5.

Le tracé définit les angles de flexion  $\theta_1^b$  et  $\theta_5^b$  dont la somme est égale à  $\theta_1^r + \theta_5^r$ .



**Figure 4.12.** Géométrie des triangles voisins

En considérant que seulement deux éléments peuvent partager le même côté, on a les relations suivantes :

$$\theta_5^b = \theta_5 - \theta_5^r \quad (4.54)$$

$$\theta_1 = -\theta_5 \quad (4.55)$$

L'équilibre de l'interface impose :

$$K_1 \theta_1^b = K_5 \theta_5^b \quad (4.56)$$

En remplaçant  $\theta_5^b$  par son expression 4.54, on obtient finalement  $\theta_1^b$  :

$$\theta_1^b = \frac{-K_5(\theta_1^r + \theta_5^r)}{K_5 + K_1} \quad (4.57)$$

Le calcul du rapport  $K_1/K_5$  dans le cas de matériaux différents pour ces deux éléments voisins (ou un même matériau mais des états différents) ou dans le cas d'épaisseurs différentes est développé dans la référence [17]. Le cas où plus de deux éléments partageant une même frontière y est aussi détaillé.

Cet élément prend tout son sens quand on peut admettre que l'état du matériau varie peu d'un élément à l'autre et qu'il en va de même de l'épaisseur. C'est, par exemple, le cas de simulations de mises en forme de tôles par emboutissage. Moyennant ces deux hypothèses, le rapport  $K_1/K_5$  est alors égal au rapport des hauteurs :  $h_5/h_1$ .

$$\frac{K_1}{K_5} = \frac{h_5}{h_1} \quad (4.58)$$

L'expression 4.57 devient alors :

$$\theta_1^b = \frac{-h_1 \cdot (\theta_1^r + \theta_5^r)}{h_1 + h_5} \quad (4.59)$$

La même démarche est appliquée pour déterminer  $\theta_2^b$  et  $\theta_3^b$ .

L'expression de la courbure de l'élément suivant la direction  $\vec{n}_1$  devient alors :

$$\kappa_1 = -2 \frac{\theta_1^b}{h_1}$$

$$\begin{Bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{h_1 + h_5} & & & -\frac{2}{h_1 + h_5} & & \theta_1^r \\ & -\frac{2}{h_2 + h_6} & & & -\frac{2}{h_2 + h_6} & \theta_2^r \\ & & -\frac{2}{h_3 + h_4} & -\frac{2}{h_3 + h_4} & & \theta_3^r \\ & & & & & \theta_4^r \\ & & & & & \theta_5^r \\ & & & & & \theta_6^r \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Grâce à la relation 4.53, on peut alors écrire la relation précédente sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{Bmatrix} = [H] \{ \theta^r \} = [H][C_w] \{ W \} \quad (4.61)$$

Avec les relations relatives à  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$ ,  $\vec{n}_3$  on peut alors obtenir la courbure  $\kappa_{xx}$  qui est la superposition des trois courbures  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  et  $\kappa_3$  « suivant » l'axe  $\vec{x}$ . Les courbures  $\kappa_{yy}$  et  $2\kappa_{xy}$  sont obtenues de manière analogue.

$$\begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ s_1^2 & s_2^2 & s_3^2 \\ 2.c_1.s_1 & 2.c_2.s_2 & 2.c_3.s_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{Bmatrix} \quad (4.62)$$

Les relations 4.61 et 4.62 permettent de définir une matrice gradient, reliant les courbures aux déplacements  $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5$  et  $w_6$ , comme étant le produit matriciel  $[R][H][C_w]$ .

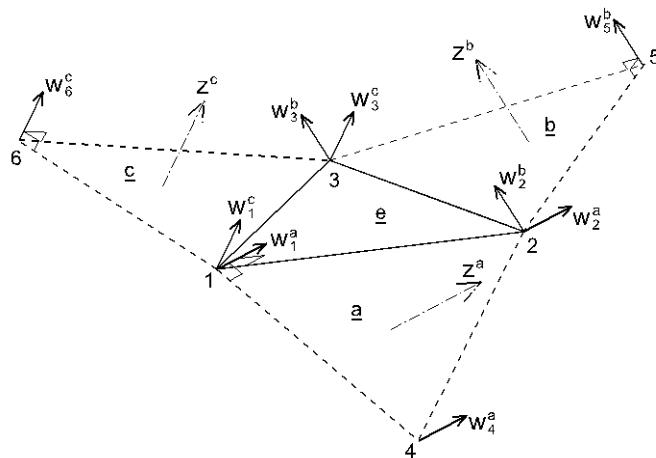
$$\begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} = [R][H][C_w] \{ W \} \quad (4.63)$$

#### 4.6.2.2. Effets de flexion dans le cas des coques

La présentation précédente correspond à une formulation « plaque » mais il est aisé d'en déduire une formulation « coque » quand les éléments voisins ne sont pas coplanaires avec l'élément (1,2,3) étudié.

Une fois les angles de rotation de solide rigide calculés, la méthode reste la même. La seule modification vient donc de ces angles (donnés par la relation 4.53) qui fait intervenir les composantes des déplacements dans la base globale :  $U_{Xi}, U_{Yi}, U_{Zi}$ , pour i allant de 1 à 6.

Les exposants e, a, b, c sont respectivement utilisés pour repérer les éléments (1,2,3), (1,4,2), (2,5,3), (3,6,1). Les projections de la normale à l'élément e (1,4,2) dans le repère global sont notées  $Z_X^e, Z_Y^e, Z_Z^e$ . De même, les projections des normales aux éléments a, b, c sont respectivement notées  $Z_X^a, Z_Y^a, Z_Z^a ; Z_X^b, Z_Y^b, Z_Z^b$  et  $Z_X^c, Z_Y^c, Z_Z^c$ .



**Figure 4.13.** Définition des déplacements et des normales des éléments voisins

En utilisant ces notations, les rotations de solide rigide s'écrivent:

$$\begin{aligned}
 \theta_1^r &= \frac{1}{h_1} w_1^e - \frac{\cos \beta_3}{h_2} w_2^e - \frac{\cos \beta_2}{h_3} w_3^e \\
 \theta_2^r &= \frac{1}{h_2} w_2^e - \frac{\cos \beta_1}{h_3} w_3^e - \frac{\cos \beta_3}{h_1} w_1^e \\
 \theta_3^r &= \frac{1}{h_3} w_3^e - \frac{\cos \beta_2}{h_1} w_1^e - \frac{\cos \beta_1}{h_2} w_2^e \\
 \theta_4^r &= \frac{1}{h_4} w_4^a - \frac{\cos \gamma_2}{q_1} w_1^a - \frac{\cos \gamma_1}{q_2} w_2^a \\
 \theta_5^r &= \frac{1}{h_5} w_5^b - \frac{\cos \psi_3}{r_2} w_2^b - \frac{\cos \psi_2}{r_3} w_3^b \\
 \theta_6^r &= \frac{1}{h_6} w_6^c - \frac{\cos \phi_1}{p_3} w_3^c - \frac{\cos \phi_3}{p_1} w_1^c
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

où :  $w_1^e = Z_X^e \cdot U_{X1} + Z_Y^e \cdot U_{Y1} + Z_Z^e \cdot U_{Z1}$  ; idem pour indices 2 et 3 au lieu de 1

où :  $w_4^a = Z_X^a \cdot U_{X4} + Z_Y^a \cdot U_{Y4} + Z_Z^a \cdot U_{Z4}$  ; idem pour indices 1 et 2 au lieu de 4

$$\begin{bmatrix} \theta_1^r \\ \theta_2^r \\ \theta_3^r \\ \theta_4^r \\ \theta_5^r \\ \theta_6^r \end{bmatrix} = [C_c] \begin{bmatrix} \{U_1\} \\ \{U_2\} \\ \{U_3\} \\ \{U_4\} \\ \{U_5\} \\ \{U_6\} \end{bmatrix} \text{ avec } \{U_i\} = \begin{bmatrix} U_{Xi} \\ U_{Yi} \\ U_{Zi} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Les relations 4.60, 4.62 et 4.65 permettent de définir une matrice gradient  $[B^b]$ , reliant les courbures aux déplacements globaux  $U_{Xi}, U_{Yi}, U_{Zi}$ , pour i allant de 1 à 6, comme étant le produit matriciel  $[R][H][C_c]$  (l'expression de la matrice  $[C_c]$  est entièrement donnée dans l'annexe B.3).

$$\begin{bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} = [R][H][C_c]\{U_e\} = [B^b]\{U_e\}$$

# Bibliographie

- [1] M. Gérardin et D. Rixen, Théorie des vibrations - Applications à la dynamique des structures, Paris : Masson Editions, 1983.
- [2] T. Belytschko, W.K. Liu et B. Moran, Non-linear finite elements for continua and structures, Chichester, Wiley, 650p, 2000.
- [3] K. Schweizerhof et J.O. Hallquist, Explicit integration schemes and contact formulation for thin sheet metal forming, Proceedings of FE Simulation of 3-D sheet metal forming processes in automotive industry, Zurich, VDI n\_894, p405-440, 1991.
- [4] T.J.R. Hughes, The finite element method – Linear static and dynamic finite element analysis, Englewood-Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 803p, 1987.
- [5] H.M. Hilber, T.J.R. Hughes et R.L. Taylor, Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol 5, p282-292, 1977.
- [6] J. Chung et J. Lee, A new family of explicit time integration methods for linear and non-linear structural dynamics, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 37, p3961-3976, 1994.
- [7] B. Tchamwa, Contribution à l'étude des méthodes d'intégration directe explicites en dynamique non linéaire des structures, Master's thesis, Ecole Centrale de Nantes, Nantes, 1997.
- [8] C. Nyssen, An efficient and accurate iterative method, allowing large incremental steps to solve elasto-plastic problems, Computer and structures, vol 13, p63-71, 1981.
- [9] D.R.J. Owen et E. Hinton, Finite elements in plasticity : theory and practice, Swansea U.K., Pineridge Press, 594p, 1980.
- [10] M. Brunet et F. Sabourin, Explicit dynamic analysis with a simplified three-node triangular element, Proceedings of the International Conference FEMCAD CRASH'93, A.B. Sabir (ed), p15-20, 1993.
- [11] E. Oñate et M. Cervera, Derivation of thin plate bending elements with one degree of freedom per node. A simple three-node triangle, Engineering Computations, vol 10, p543-561, 1993.
- [12] M. Brunet et F. Sabourin, A Simplified Triangular Shell Element with a Necking Criterion for 3-D Sheet Forming Analysis, Journal of Materials Processing Technology , vol 50, p238-251, 1995.
- [13] F. Sabourin et M. Brunet, Analysis of plates and Shells with a simplified 3-node triangular element, International Journal of Thin-Walled Structures, vol 21, p238-251, 1995.

- [14] H. Laurent et G. Rio, Formulation of a thin shell finite element with  $C_0$  and convected material frame notion, Computational Mechanics, vol 27, p218-232, 2001.
- [15] F. Sabourin, M. Brunet et M. Vives, 3D Springback Analysis with a Simplified Three-node Triangular Element, Proceedings of the International Conference NUMISHEET'99, J.C. Gelin, P. Picard (ed), Université de Franche-Comté, Besançon, France, p229-238, 1999.
- [16] F. Sabourin et M. Vives, Eléments Finis Triangulaires pour la Simulation Numérique de l'Emboutissage, Revue Européenne des Eléments Finis, Hermes, vol 10, p7-53, 2001.
- [17] E. Oñate et F. Zarate, Rotation-free triangular plate and shell elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 47, p557-603, 2000.
- [18] F. Sabourin et M. Brunet, Detailed formulation of the rotation-free triangular shell element 'S3' for general purpose shell analysis, Engineering Computations, Vol 23, p469-502, 2006.
- [19] L.S.D. Morley, The constant plate-bending element, Journal of Strain Analysis, vol 6, p20-24, 1971.
- [20] J.L. Batoz et G. Dhatt, Modélisation des structures par éléments finis - Poutres et Plaques - II, Hermes, Paris, 482p, 1990.
- [21] J.L. Batoz, Y.Q. Guo et H. Shakourzadeh, Analyse non linéaire de coques minces élastoplastiques avec l'élément DKT12, Revue européenne des éléments finis, vol 7, p223-239, 1998.
- [22] F. Sabourin, M. Fayet et M. Vives, Theory of Screws incorporated in a New Finite Element, Journal of Mechanical Engineering Science, proceeding of ImechE, part K, vol 215, p61-73, 2001.
- [23] F.G. Flores et E. Oñate, Improvements in the membrane behaviour of the three-node rotation-free BST shell triangle using an assumed strain approach, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 194, p907-932, 2005.



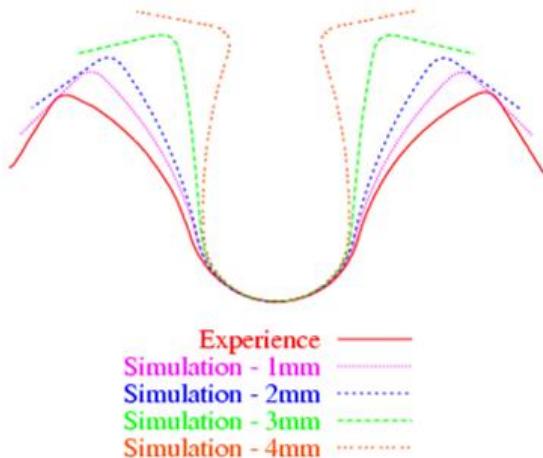
# Chapitre 5

## Implémentation

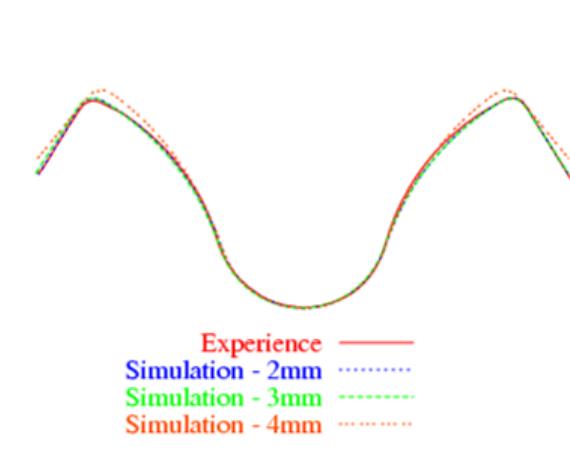
<b>5.1. Introduction.....</b>	90
<b>5.2. Architecture du code .....</b>	90
<b>5.3. Détails des routines dans le cas d'un schéma explicite.....</b>	92
5.3.1. Routine d'initialisation .....	92
5.3.2. Calcul des matrices gradient .....	93
5.3.3. Calcul des déformations.....	94
5.3.4. Calcul des contraintes .....	94
5.3.5. Calcul des efforts internes.....	94
5.3.6. Calcul du pas de temps critique .....	95
5.3.7. Assemblage des efforts internes .....	95
<b>5.4. Détails des routines dans le cas d'un schéma implicite .....</b>	96
5.4.1. Routine d'initialisation .....	96
5.4.2. Calcul des matrices gradient .....	98
5.4.3. Calcul des déformations.....	98
5.4.4. Calcul des contraintes .....	98
5.4.5. Calcul et assemblage des efforts internes .....	99
5.4.6. Calcul de la matrice de raideur .....	99
<b>5.5. Exemples de base .....</b>	100
5.5.1. Cas test « beamtest » en implicite.....	100
5.5.2. Cas test « traction » en explicite .....	102

## 5.1. Introduction

La justification de l'utilisation d'un nouvel élément fini apparaît clairement à travers des cas tests académiques tel que la prédiction du retour élastique sur un essai en «U». Ce cas simple met bien en évidence les effets de chacun des paramètres de la mise en données. Des maillages avec une discrétisation du contour tous les 1, 2, 3 et 4 mm – pour un rayon d'entrée matrice de 4 mm – montrent l'intérêt de l'utilisation des éléments S3 et DKT12 en mise en forme.



**Figure 5.1.** Elément Belytschko-Tsai quadrangulaire



**Figure 5.2.** Elément triangulaire S3

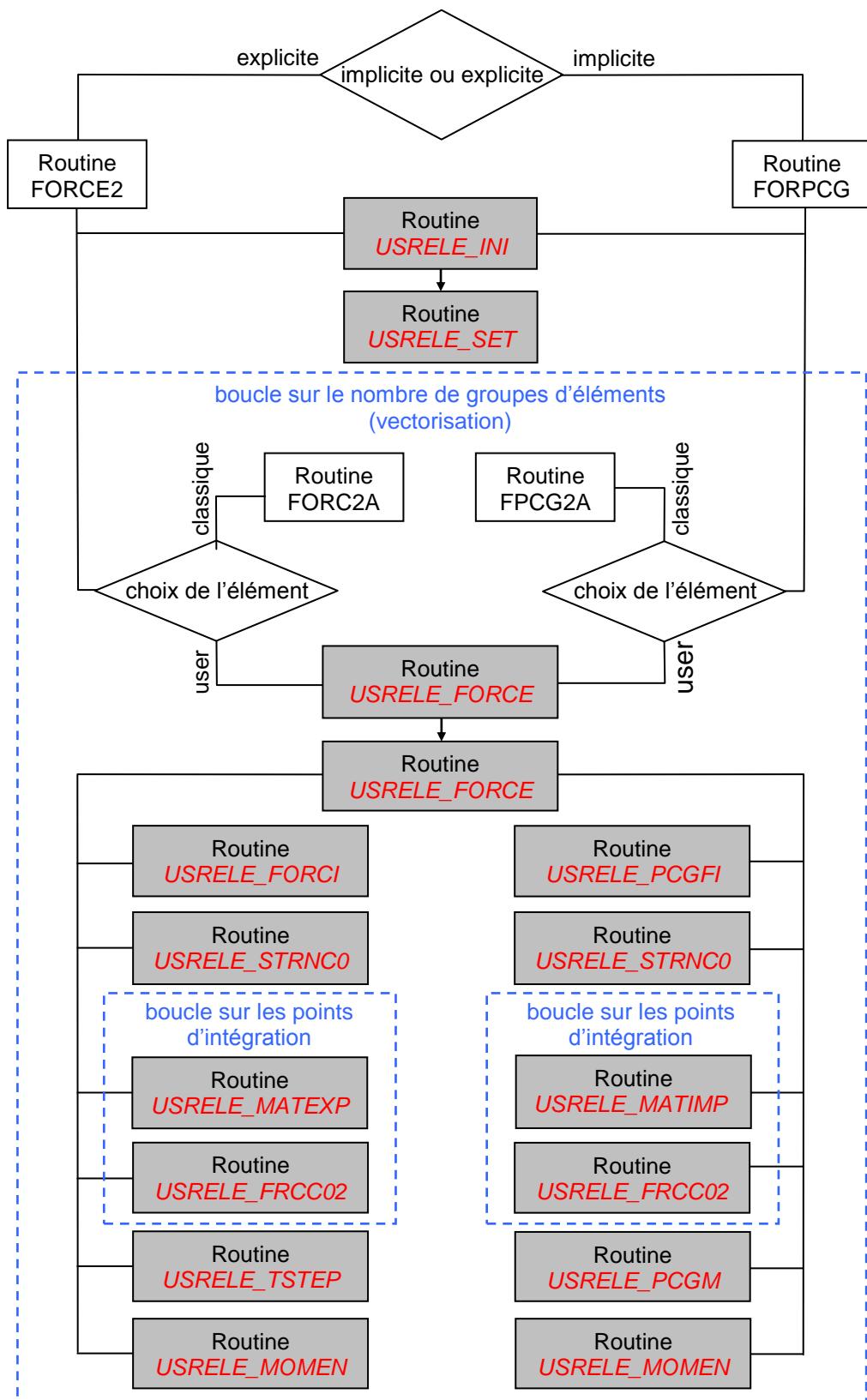
Ce chapitre a pour but de présenter la méthode utilisée pour intégrer les éléments finis S3 et DKT12 dans le code de calcul PamStamp 2G V2005.0.4.

## 5.2. Architecture du code

L'implémentation des deux éléments S3 et DKT12, présentés au chapitre 4, a été réalisée dans le code industriel PamStamp 2G V2005.0.4 via la création et la validation d'une routine utilisateur User Defined Element (UDE) avec l'éditeur ESI group. Cette routine permet à l'utilisateur de programmer un élément de type coque à 3 ou 4 noeuds avec 24 degrés de liberté (ddl) au maximum. L'organisation du code avec le user element est décrite sur la figure 5.3 (les routines en gris sont celles contenues dans le user element).

Cette routine utilisateur peut être séparée en deux grandes parties :

- une partie constituée des routines USRELE\_INI et USRELE\_SET qui sont créées spécifiquement pour l'initialisation du user element et sont appelées deux fois en début de calcul pour tous les éléments finis de la structure ;
- une seconde partie constituée des routines USRELE\_FORCE et USRELE\_SLV pour réaliser le calcul de toutes les variables élémentaires (déformations, efforts internes, ...).



**Figure 5.3.** Organisation du User Defined Element (implicite et explicite)

### 5.3. Détails des routines dans le cas d'un schéma explicite

Les variables à définir dans le UDE et à renvoyer vers le solveur :

<b>ICONEC</b>	Table de connectivité
<b>FINT(*)</b>	Efforts internes assemblés
<b>STRS(*)</b>	Etat de contraintes et déformations mis à jour à chaque pas
<b>DTSC(*)</b>	Pas de temps critique de chaque élément
<b>DT2</b>	Pas de temps critique pour le pas suivant

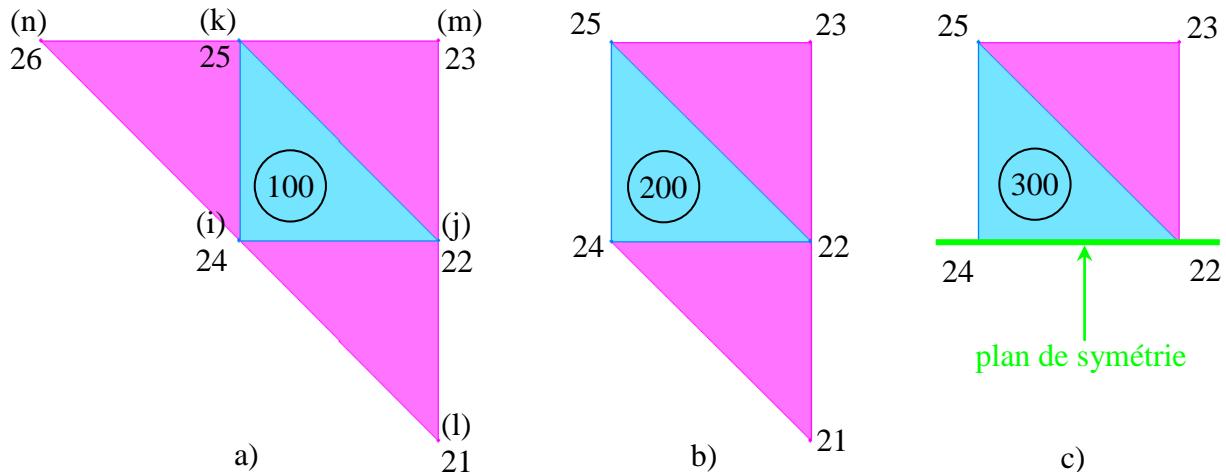
#### 5.3.1. Routine d'initialisation

Si l'utilisateur souhaite utiliser un tableau qu'il doit mettre à jour à chaque pas, il est nécessaire de le créer dans la routine USRELE\_INI.

Pour l'élément S3, la routine USRELE\_SET est utilisée pour balayer le maillage et rechercher les nœuds voisins de l'élément étudié. Cette information sera stockée dans la table de connectivité de l'élément ICONEC : nous avons donc finalement une table de connectivité à six nœuds par élément, les trois nœuds sommets et les trois nœuds des éléments voisins s'ils existent. Une fois les bords libres détectés, un traitement spécial est réalisé pour savoir si un des côtés de l'élément est réellement un bord libre ou bien contenu dans un plan de symétrie.

S'il y a un plan de symétrie sur un côté (i-j) alors il n'existe pas de nœud 1 et on affecte le numéro du nœud j au nœud 1 dans la table de connectivité. De la même manière si le côté (i-j) est un bord libre alors le numéro du nœud i est affecté au nœud 1 de l'élément étudié.

Pour déterminer si un côté appartient à un plan de symétrie, les conditions aux limites de chaque nœud sont étudiées. Les conditions aux limites étant stockées sous forme d'un nombre entier, elles sont décodées dans la sous-routine DECODE\_ICODE puis stockées dans le tableau LNOEUD. Le côté (i-j) est considéré comme appartenant à un plan de symétrie si les deux nœuds i et j ont deux de leurs rotations (dans le repère global) qui sont bloquées.



**Figure 5.4.** Quelques exemples de maillage

Les tables de connectivité des éléments 100, 200 et 300 de la figure 5.4 sont données dans le tableau 5.1 :

	i	j	k	l	m	n
100	24	22	25	21	23	26
200	24	22	25	21	23	25
300	24	22	25	22	23	25

**Tableau 5.1.** Exemples de connectivités

### 5.3.2. Calcul des matrices gradient

La sous-routine USRELE\_FORCI permet le calcul les matrices gradient  $[B_m]$  pour les effets de membrane et  $[B_b]$  pour les effets de flexion ainsi que l'aire de l'élément. Les expressions des matrices  $[B_m]$  et  $[B_b]$  sont données au paragraphe 4.6.

Si un des côtés (i-j), (j-k) ou (k-i) ne constitue pas une frontière commune avec un autre élément, la rotation suivant ce côté peut être libre ou non. Deux possibilités doivent alors être prise en compte pour la construction de  $[B_b]$  :

- Elément ayant un bord libre en rotation :

Par exemple, si l'élément (k,j,m) n'existe pas et si le côté (j-k) est « libre » on a  $\epsilon_{nl} = 0$  et donc  $\theta_1^b = 0$  ce qui impose :  $\theta_1^r = -\theta_5^r$ .

La 5<sup>ème</sup> ligne la matrice  $[C_c]$  devient égale à l'opposé de la première ligne de  $[C_c]$ .

- Elément ayant un bord bloqué en rotation :

Dans le cas de l'élément S3, une rotation imposée ne peut être qu'égale à zéro.

Par exemple, si l'élément (k,j,m) n'existe pas et si la rotation suivant le côté (j-k) est imposée égale à zéro (pour une symétrie, pas exemple), l'angle  $\theta_1$  est nul et donc  $\theta_1^b = -\theta_1^r$  (relation 4.54), ce qui implique :  $\theta_1^r = \theta_5^r$ .

La 5<sup>ème</sup> ligne de la matrice  $[C_c]$  devient égale à la première ligne de  $[C_c]$ .

Les 4<sup>ème</sup>, 5<sup>ème</sup> ou 6<sup>ème</sup> lignes de la matrice  $[C_c]$  prennent alors des formes différentes suivant que les côtés (i-j), (j-k) ou (k-i) sont une frontière avec un autre élément, ou un bord bloqué ou non en rotation.

Ainsi, de manière inhabituelle, c'est la matrice  $[B_b]$  - dépendant de  $[C_c]$  - qui rend compte de ces trois possibilités. Ce qui n'est évidemment pas le cas de l'élément DKT12 où la matrice  $[B_b]$  garde la même forme que l'on impose ou non  $\theta_4^b = 0$ ,  $\theta_5^b = 0$  ou  $\theta_6^b = 0$ .

Pour finir, les incrément de déplacements sont également calculés puis passés à la routine USRELE\_STRNC0 pour le calcul des déformations.

### 5.3.3. Calcul des déformations

La routine USRELE\_STRNC0 permet de calculer les incrément de déformations  $\{\delta\epsilon_m\}$  dus aux effets de membrane et les incrément de courbure  $\{\delta\kappa\}$  dus aux effets de flexion :

$$\begin{aligned}\{\delta\epsilon_m\} &= [B_m]^T \{dU\} \\ \{\delta\kappa\} &= [B_b]^T \{dU\}\end{aligned}$$

La boucle sur le nombre de point d'intégration dans l'épaisseur débute alors pour permettre le calcul des incrément de déformation totale en fonction de la position du point d'intégration dans l'épaisseur z :

$$\{\delta\epsilon\} = \{\delta\epsilon_m\} + z\{\delta\kappa\}$$

### 5.3.4. Calcul des contraintes

L'état de contraintes plastiquement admissible à partir des incrément de déformations est calculé dans la routine USRELE\_MATEXP. L'algorithme explicite de prédiction élastique suivi d'une correction radiale a été présenté au paragraphe 4.5.

A la sortie de cette routine les états de contraintes et de déformations sont stockés dans le tableau STRS.

### 5.3.5. Calcul des efforts internes

Le tableau des efforts internes FORCE, se présente sous la forme d'une matrice colonne contenant les trois composantes d'efforts de chacun des six nœuds de l'élément (soit 18 composantes).

Les efforts internes sont composés d'une partie due aux effets de membrane et d'une partie due aux effets de flexion :

$$\begin{aligned}\{F_{int}\} &= \iint_{(18x1)} [B_m]^T \{N\} dA + \iint_{(18x3)} [B_b]^T \{M\} dA \\ \{N\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad ; \quad \{M\} = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz\end{aligned}$$

L'intégration dans l'épaisseur est réalisée grâce à la méthode de Gauss ou Lobatto (points sur les peaux inférieure et supérieure). La programmation est détaillée dans le tableau 5.2.

---

```

C      * Loop on elements
DO N1=1,LLT
C-----+
C          PINT    = weight of integration point !
C          PIZI    = produit position*poids du pi !
C          W1(LLT) = half thickness !
C          W2(LLT) = half thickness square !
C-----+
C          TRM   = PIZI*W2(N1)
C          WGM   = PINT*W1(N1)
C          * Sm = normal force for each element
C          Sm(N1,1) = Sm(N1,1)+WGM*STRESS(N1,1)
C          Sm(N1,2) = Sm(N1,2)+WGM*STRESS(N1,2)
C          Sm(N1,3) = Sm(N1,3)+WGM*STRESS(N1,3)
C          * Sb = moment for each element
C          Sb(N1,1) = Sb(N1,1)+TRM*STRESS(N1,1)
C          Sb(N1,2) = Sb(N1,2)+TRM*STRESS(N1,2)
C          Sb(N1,3) = Sb(N1,3)+TRM*STRESS(N1,3)
ENDDO

```

---

**Tableau 5.2.** Intégration dans l'épaisseur des contraintes

### 5.3.6. Calcul du pas de temps critique

Le calcul du pas de temps critique est calculé dans la routine USRELE\_TSTEP. La méthode utilisée pour le calcul est décrite au paragraphe 4.4.1 :

$$\Delta t_{\text{crit}} = \frac{l_{\min}}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$

Le plus petit pas de temps critique doit être fourni au solveur dans la variable DT2 mais il est également nécessaire de remplir le tableau DTSC contenant le pas de temps critique de chacun des éléments.

### 5.3.7. Assemblage des efforts internes

Le UDE doit renvoyer les efforts internes assemblés dans le tableau FINT. Pour chacun des nœuds de la structure, le tableau FORCE est donc utilisé dans la routine USRELE\_MOMEN pour faire la somme des contributions de chaque élément.

Le tableau FINT contient les efforts exercés sur tous les nœuds de la structure sous la forme d'une matrice colonne. La difficulté réside dans le fait de trouver la position dans FINT du nœud considéré. Pour trouver cette position, il suffit de connaître le numéro du nœud.

---

```

C      * Loop on elements
DO I=1,LLT
C          * ICONECL(I,1) = numéro du noeud 1 de l'élément étudié I
C          * J permet de se situer dans le tableau FINT dans lequel les
efforts internes de tous les noeuds se suivent
          * Les moments FINT(J+3), FINT(J+4), FINT(J+5) sont laissés nuls
          J = (ICONECL(I,1)-1)*6 + 1
          FINT(J)    = FINT(J)    - FORCE(I,1)
          FINT(J+1)  = FINT(J+1)  - FORCE(I,2)
          FINT(J+2)  = FINT(J+2)  - FORCE(I,3)
C
          J = (ICONECL(I,2)-1)*6 + 1
          ...
C
          J = (ICONECL(I,3)-1)*6 + 1
          ...
ENDDO

```

---

**Tableau 5.3.** Assemblage des efforts internes

## 5.4. Détails des routines dans le cas d'un schéma implicite

Les variables à définir dans le UDE et à renvoyer vers le solveur :

<b>ICONEC</b>	Table de connectivité
<b>LMSH(*)</b>	Table de localisation (pour assemblage de la matrice de raideur)
<b>FINT(*)</b>	Etat de contraintes et déformations mis à jour à chaque pas
<b>STRS(*)</b>	Pas de temps critique de chaque élément
<b>STSH(*)</b>	Matrice de raideur pour chaque élément (non assemblée)

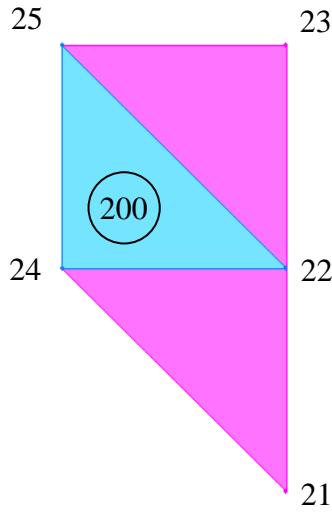
### 5.4.1. Routine d'initialisation

La routine d'initialisation utilisée en implicite est identique à celle utilisée en explicite et permet le remplissage d'un tableau supplémentaire LMSH(\*). Cette sous-routine est appelée deux fois :

- une fois au cycle 0 pour créer la nouvelle table de connectivité ICONEC ;
- une fois au cycle 1 pour remplir le tableau LMSH(\*) indispensable pour réaliser l'assemblage de la matrice de raideur.

Le tableau LMSH permet de faire correspondre les ddl locaux (24 au maximum) de chaque élément aux ddl globaux de la structure affectés par le solveur.

Pour l'élément S3, les degrés de liberté en rotation des noeuds sont bloqués dans une sous-routine USRELE\_BC. On peut donc considérer que chaque noeud du maillage n'a que 3 ddl. Le remplissage du tableau LMSH se fait directement grâce à la table de connectivité qui vient d'être complétée et à la numérotation de chacun des degrés de liberté de la structure réalisée par le solveur.



N° du noeud	ddl	N° du ddl (donné par le solveur)
21	Tx	51
	Ty	52
	Tz	53
22	Tx	54
	Ty	55
	Tz	56
23	Tx	57
	Ty	58
	Tz	59
24	Tx	60
	Ty	61
	Tz	62
25	Tx	63
	Ty	64
	Tz	65

**Figure 5.5.** Exemple de maillage et de numérotation du solveur

Le tableau LMSH de l'élément 200 (connectivité donnée dans le tableau 5.1) prend donc la forme donnée dans le tableau 5.4. On utilise la variable NIEL pour se positionner dans le tableau :

$$\text{NIEL} = 24 * (\text{ISTSH}(I) - 1)$$

24 étant le nombre maxi de ddl pour un élément, I l'élément étudié et ISTSH(I) le numéro de cet élément.

LMSH(NIEL+1)	60
LMSH(NIEL +2)	61
LMSH(NIEL +3)	62
LMSH(NIEL +4)	54
LMSH(NIEL +5)	55
LMSH(NIEL +6)	56
LMSH(NIEL +7)	63
LMSH(NIEL +8)	64
LMSH(NIEL +9)	65
LMSH(NIEL +10)	51
LMSH(NIEL +11)	52
LMSH(NIEL +12)	53

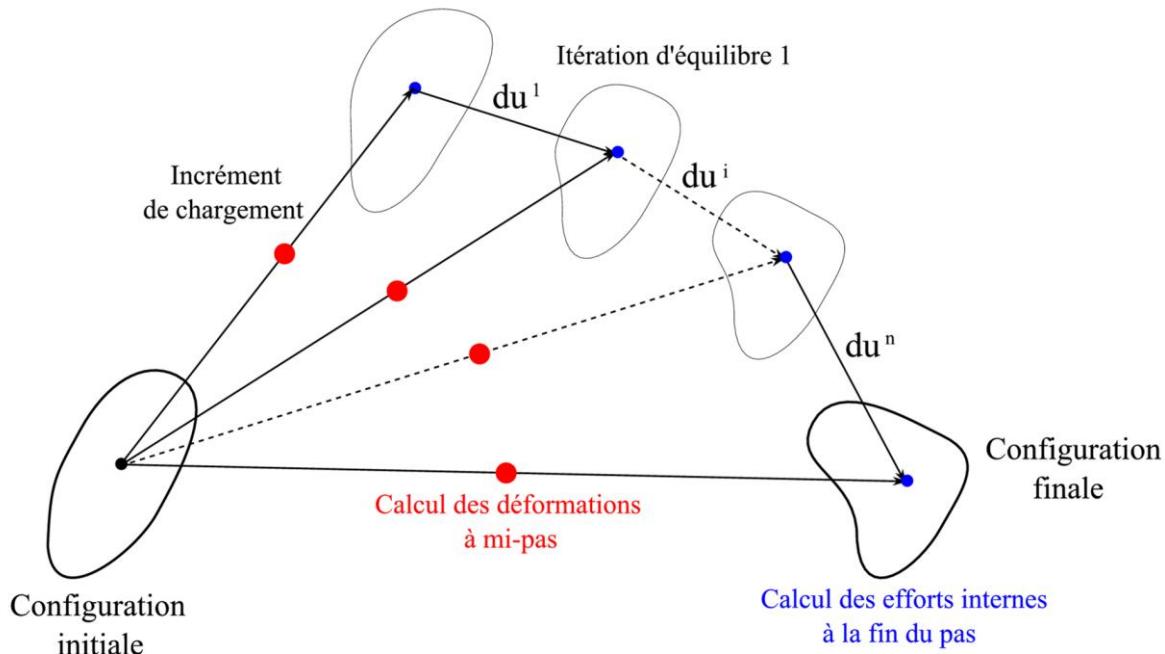
LMSH(NIEL +13)	57
LMSH(NIEL +14)	58
LMSH(NIEL +15)	59
LMSH(NIEL +16)	63
LMSH(NIEL +17)	64
LMSH(NIEL +18)	65
LMSH(NIEL +19)	0
LMSH(NIEL +20)	0
LMSH(NIEL +21)	0
LMSH(NIEL +22)	0
LMSH(NIEL +23)	0
LMSH(NIEL +24)	0

**Tableau 5.4.** Remplissage du tableau LMSH

### 5.4.2. Calcul des matrices gradient

La routine USRELE\_PCGFI implicite est très similaire à la routine USRELE\_FORCI. Deux matrices  $[B_m]$  et  $[B_b]$  sont calculées à l'instant  $t_{n+1}$  pour le calcul des efforts internes puis deux matrices  $[B_m]$  et  $[B_b]$  sont calculées à l'instant  $t_{n+1/2}$  pour le calcul des déformations (figure 5.6).

La matrice  $[B_g]$  est également calculée pour la prise en compte des non linéarités géométriques.



**Figure 5.6.** Détail du maillage et de la numérotation

### 5.4.3. Calcul des déformations

Les incrément de déformations sont calculés avec la même routine qu'en explicite USRELE\_STRNCO en lui passant comme argument les matrices gradient calculées à mi-pas. En effet, c'est dans cette configuration que l'on se rapproche le plus de la notion de déformation logarithmique [1].

### 5.4.4. Calcul des contraintes

Une des grosses différences avec le schéma explicite se trouve ici, puisque dans le schéma implicite le comportement du matériau est purement élastique. Le nouvel état de contraintes est calculé dans la routine USRELE\_MATIMPL et est stocké dans le tableau STRS.

### 5.4.5. Calcul et assemblage des efforts internes

La méthode pour le calcul des efforts internes et leur assemblage est identique à celle utilisée en implicite. Les routines USRELE\_FRCC2 et USRELE\_MOMEN sont communes.

### 5.4.6. Calcul de la matrice de raideur

La particularité du schéma implicite est de devoir construire la matrice de raideur  $[K]$ . L'expression du principe des travaux virtuels conduit à l'expression de  $[K]$  (paragraphe 4.3.2).

Le UDE renvoie une matrice de raideur STSH pour chaque élément  $[K^{el}]$ . A cause de la symétrie de  $[K]$ , seule la moitié inférieure est définie. L'assemblage est réalisé par le solveur avec l'aide du tableau LMSH défini dans la routine d'initialisation.

La matrice de raideur élémentaire est construite en additionnant les termes de membrane, de flexion, de couplage membrane-flexion et la matrice de raideur géométrique :

$$[K^{el}] = [K_m^{el}] + [K_b^{el}] + [K_{mb}^{el}] + [K_{bm}^{el}] + [K_g^{el}] \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} [K_m^{el}] &= \int_{Ve}^T [B_m] [D^{ep}] [B_m] dV = \int_{Se}^T [B_m] \left( \int_{-e/2}^{e/2} [D^{ep}] dz \right) [B_m] dS = A^T [B_m] [D_m^{el}] [B_m] \\ [K_b^{el}] &= \int_{Ve}^T [B_b] [D^{ep}] [B_b] dV = A^T [B_b] [D_b^{el}] [B_b] \\ [K_{mb}^{el}] &= \int_{Ve}^T [B_m] [D^{ep}] [B_b] dV = A^T [B_m] [D_{mb}^{el}] [B_b] \\ [K_{bm}^{el}] &= \int_{Ve}^T [B_b] [D^{ep}] [B_m] dV = A^T [B_b] [D_{bm}^{el}] [B_m] \end{aligned} \quad (5.2)$$

avec  $A$  l'aire de l'élément,  $e$  son épaisseur et les matrices de comportement suivantes :

$$[D_m^{el}] = \int_{-e/2}^{e/2} [D^{ep}] dz; \quad [D_{mb}^{el}] = \int_{-e/2}^{e/2} [D^{ep}] z dz = [D_{bm}^{el}]; \quad [D_b^{el}] = \int_{-e/2}^{e/2} [D^{ep}] z^2 dz \quad (5.3)$$

La construction de la matrice de raideur géométrique est réalisée en négligeant la partie flexion [2]. Seules les translations aux noeuds sont utilisées pour calculer  $[K_g^{el}]$ . Le travail virtuel correspondant est de la forme :

$$\begin{aligned} \langle \hat{U}_g^{el} \rangle [K_g^{el}] \{U_g^{el}\} &= \int_{Ve} \langle \hat{u}, x \mid \hat{u}, y \rangle \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u, x \\ u, y \end{Bmatrix} dV + \int_{Ve} \langle \hat{v}, x \mid \hat{v}, y \rangle \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v, x \\ v, y \end{Bmatrix} dV \\ &+ \int_{Ve} \langle \hat{w}, x \mid \hat{w}, y \rangle \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w, x \\ w, y \end{Bmatrix} dV \end{aligned} \quad (5.4)$$

On peut écrire  $[K_g^{el}]$  comme la somme de trois contributions :

$$[K_g^{el}] = [K_u^{el}] + [K_v^{el}] + [K_w^{el}] \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_u^{el}] &= \mathbf{A}^T [\mathbf{B}_u] [\mathbf{N}^{el}] [\mathbf{B}_u] \\ [\mathbf{K}_v^{el}] &= \mathbf{A}^T [\mathbf{B}_v] [\mathbf{N}^{el}] [\mathbf{B}_v] \\ [\mathbf{K}_w^{el}] &= \mathbf{A}^T [\mathbf{B}_w] [\mathbf{N}^{el}] [\mathbf{B}_w] \end{aligned} \quad (5.6)$$

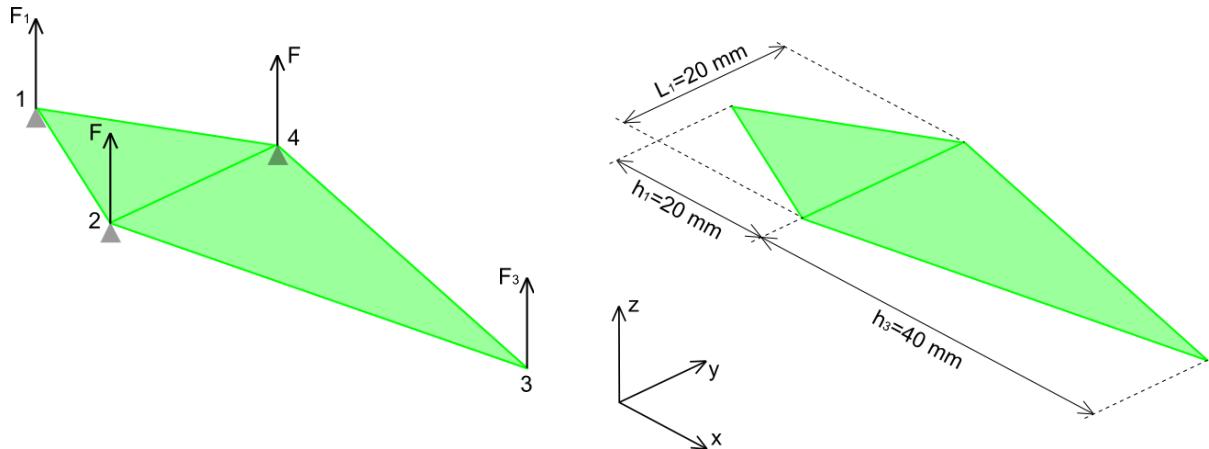
$$\{\mathbf{N}^{el}\} = \int_{-e/2}^{e/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz ; \quad [\mathbf{N}^{el}] = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{xx} & \mathbf{N}_{xy} \\ \mathbf{N}_{xy} & \mathbf{N}_{yy} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Les matrices  $[\mathbf{B}_u]$ ,  $[\mathbf{B}_v]$  et  $[\mathbf{B}_w]$  sont explicitée dans l'annexe B.4 (les notations utilisées sont celles du paragraphe 4.6).

## 5.5. Exemples de base

### 5.5.1. Cas test « beamtest » en implicite

Pour vérifier l'implémentation des éléments, nous avons choisi un cas test en flexion dont la solution analytique est connue. Ce cas test est composé de deux éléments. Un des deux éléments est en appui sur trois points 1, 2 et 4 et un effort  $F_3 = 0,02$  N est appliqué sur le dernier nœud.



**Figure 5.7.** Géométrie du cas test

Module de Young (MPa)	64000
Limite d'élasticité (MPa)	0.333333
Epaisseur (mm)	0.2

**Tableau 5.5.** Paramètres matériau

L'expression de la courbure de la poutre suivant l'axe x peut être défini grâce à la relation 4.60 :

$$\kappa = -\frac{2}{h_1 + h_3} (\theta_1^r + \theta_3^r) \quad (5.8)$$

En exprimant  $F_1$  et  $F_3$  en fonction de  $F$ ,  $h_1$  et  $h_3$ , et en considérant la variation de largeur, la courbure, constante dans toute la poutre est définie par [3] [4] :

$$\kappa = -\frac{12}{Ee^3} \cdot F \cdot \frac{h_3}{L_1} \cdot \frac{h_1}{h_1 + h_3} \quad (5.9)$$

$E$  étant le module de Young et  $e$  l'épaisseur.

En isolant  $F$  et en tenant compte d'un facteur  $(1-v^2)$  dû à la formulation plaque en état plan de contraintes, on a :

$$F = -\frac{Ee^3}{12(1-v^2)} \cdot \frac{L_1}{h_1 \cdot h_3} \cdot (h_1 + h_3) \cdot \kappa \quad (5.10)$$

En remplaçant  $\kappa$  par son expression 5.8 :

$$F = \frac{Ee^3}{12(1-v^2)} \cdot \frac{2L_1}{h_1 \cdot h_3} (\theta_1^r + \theta_3^r) \quad (5.11)$$

Etant donné que le triangle (1,2,4) est fixe, on peut écrire :

$$\theta_1^r = 0$$

La rotation du triangle (4,2,3) autour du côté (4-2) est donnée par :

$$\theta_3^r = \frac{w_3}{h_3}$$

En remplaçant  $\theta_1^r$  et  $\theta_3^r$  par leurs expressions dans 5.10 et en isolant  $w_3$ , on a :

$$w_3 = \frac{12F(1-v^2)h_1h_3}{2Ee^3L_1} h_3$$

Une fois  $w$  connu, on peut déterminer la courbure

$$\kappa = -\frac{2}{h_1 + h_3} \cdot \frac{w_3}{h_3}$$

puis la déformation et la contrainte :

$$\epsilon_{xx} = z \cdot \kappa$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-v^2} \cdot \epsilon_{xx} = \frac{E}{1-v^2} \cdot z \cdot \kappa$$

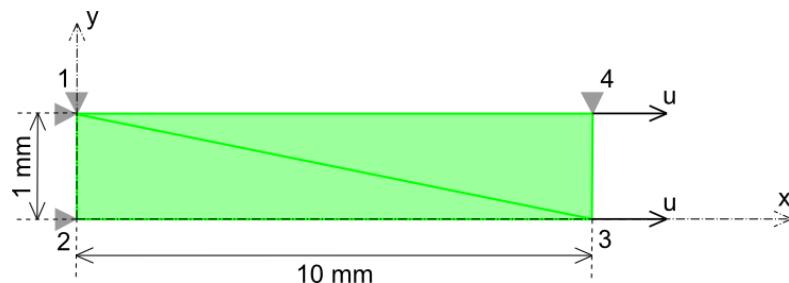
	Flèche au nœud 3	Contrainte $\sigma_{xx}$	Contrainte $\sigma_{yy}$
<b>Théorie</b>	<b>1</b>	<b>-6.0</b>	<b>-2.0</b>
S3	1.0	-6.0	-2.0
DKT12	1.24	-6.0	0.375

**Tableau 5.6.** Résultats en implicite

### 5.5.2. Cas test « traction » en explicite

L'implémentation de l'élément et/ou de la loi matériaux peut être valider en simulant par exemple l'essai de flexion alternée, dont nous pouvons connaître le résultat expérimental, mais nous ne sommes pas capables de simuler cet essai dans PamStamp 2G. En effet, l'élément S3 ne peut pas, de par sa nature, simuler cet essai et les rotations de l'élément DKT12 sont situées au niveau des nœuds intermédiaires « fictifs » sur lesquels nous ne pouvons pas agir (à l'exception de les bloquer).

Il s'agit donc ici de simuler un essai de traction/compression (Figure 5.8) que l'on peut aisément vérifier à partir des paramètres matériaux précédemment identifiés (chapitre 3).

**Figure 5.8.** Définition de la géométrie du cas test

Un lissage de type Voce est utilisé pour la partie isotrope de l'écrouissage. Les paramètres matériaux utilisés sont ceux de l'acier TRIP800 et sont rappelés ici :

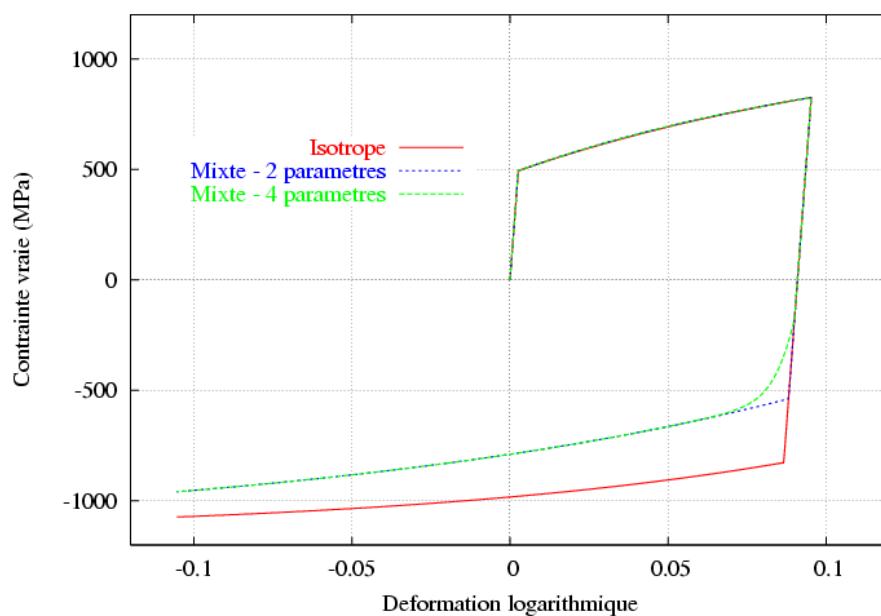
Epaisseur	0.2
Module de Young (MPa)	190000
Limite d'élasticité (MPa)	494
Coefficient de Poisson	0.32
Coefficient d'anisotropie $r_0$	0.89
$r_{45}$	0.88
$r_{90}$	1.12

**Tableau 5.7.** Paramètres matériaux et coefficients d'anisotropie

Ecrouissage isotrope	Ecrouissage combiné (2 paramètres cinématiques)	Ecrouissage combiné enrichi (4 paramètres cinématiques)	
$Q_{iso}$ (MPa)	649.	$Q_{mixte}$ (MPa)	288.1
$b_{iso}$	7.8	$b_{mixte}$	11.6
		$C_p$ (MPa)	1953.7
		$\gamma_p$	4.725
		$C_s$ (MPa)	40766
		$\gamma_s$	224.8

**Tableau 5.8.** Paramètres pour la définition de l'écrouissage

Les trois types d'écrouissage présentés au chapitre 3 sont représentés sur la figure 5.9. On voit comme sur l'essai de flexion l'influence de la composante cinématique notamment des paramètres  $C_s$  et  $g_s$  lorsque le matériau commence à plastifier pendant la compression.

**Figure 5.9.** Vérification de l'effet de l'écrouissage

# Bibliographie

- [1] M. Brunet, Modélisation numérique des grandes déformations élastoplastiques avec contact et frottement – Application à des problèmes spécifiques de la mise en forme des métaux, Thèse de doctorat d'état, INSA de Lyon, 202p, 1987.
- [2] F.G. Flores et E. Oñate, Improvements in the membrane behaviour of the three-node rotation-free BST shell triangle using an assumed strain approach. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, p907-932, 2005.
- [3] S. Timoshenko, Résistance des matériaux, Dunod, vol 1, Paris, 420p, 1970.
- [4] F. Sabourin et M. Vives, Eléments Finis Triangulaires pour la Simulation Numérique de l'Emboutissage, Revue Européenne des Eléments Finis, Hermes, vol 10, p7-53, 2001.

# Chapitre 6

## Essais de mise en forme

<b>6.1. Introduction.....</b>	106
<b>6.2. Essais sur des éprouvettes en U .....</b>	106
6.2.1.    Mise en place .....	107
6.2.2.    Résultats.....	108
<b>6.3. Pliage d'une tôle à travers des rouleaux .....</b>	115
6.3.1.    Mise en place .....	116
6.3.2.    Résultats.....	116

## 6.1. Introduction

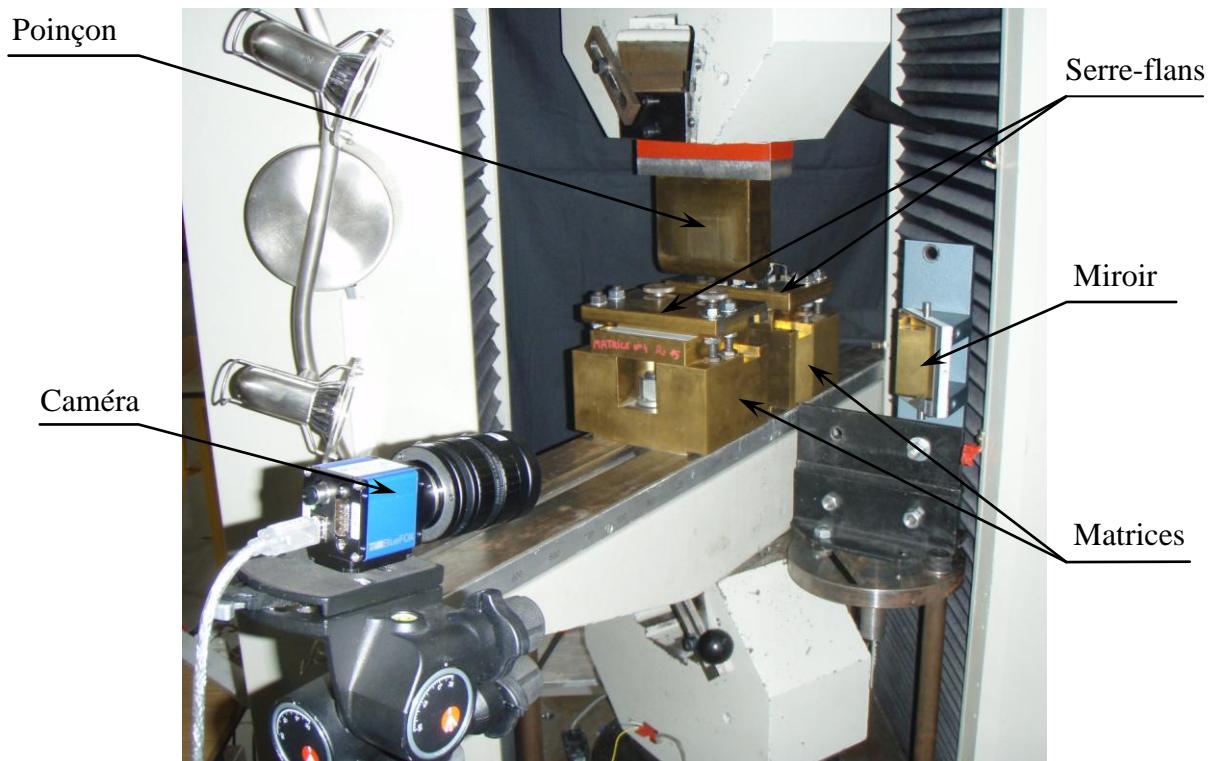
L'objet de ce chapitre est de présenter les résultats des essais expérimentaux d'emboutissage académiques effectués au moyen de montages de laboratoire conçus au LaMCoS. Une ou plusieurs grandeurs caractéristiques sont ensuite utilisées pour quantifier le retour élastique. Ces essais nous permettent également de suivre l'évolution de la géométrie des pièces au cours de l'opération de mise en forme et de mesurer l'effort d'emboutissage.

Ces essais sont choisis comme premier cas de validation car l'utilisateur contrôle un grand nombre de paramètres ou peut, le cas échéant, rendre l'essai indépendant de ceux non maîtrisés.

D'autres essais réalisés chez PSA Peugeot Citroën sur différentes pièces industrielles viendront enrichir la base expérimentale.

## 6.2. Essais sur des éprouvettes en U

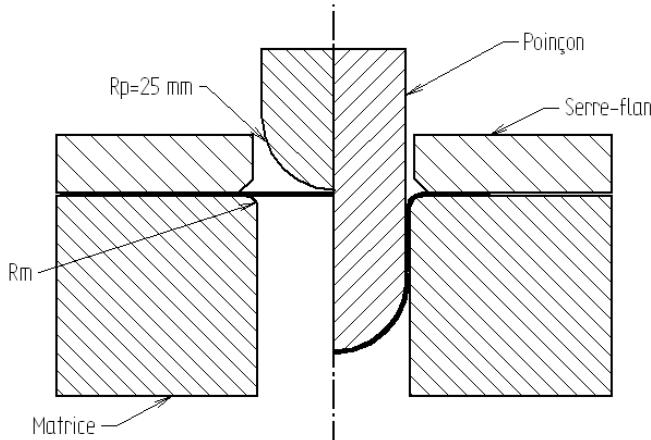
Un montage expérimental de laboratoire, illustré sur la figure 6.1, a été conçu et réalisé durant la thèse de Fabrice Morestin [1].



**Figure 6.1.** Montage de l'outillage sur la machine de traction

L'outil d'emboutissage est monté sur une machine de traction compression. L'outil se compose :

- d'un poinçon, solidaire de la traverse supérieure de la machine de traction ;
- de deux blocs matrices droite et gauche qui peuvent se déplacer sur le plateau du banc de flexion afin d'autoriser un jeu poinçon matrice variable. Ils sont bloqués sur le plateau à l'aide d'une vis trapézoïdale et d'un écrou ;
- de quatre plateaux matrices appairés supportant des rayons d'entrée matrice de 2, 4, 10 et 15 mm. Ces plateaux sont interchangeables. Ils sont calés contre une butée du bloc matrice ;
- de deux serre flan positionnés par des cales de surépaisseur et bloqués géométriquement par des écrous inférieurs et supérieurs. La longueur des serre flan est telle qu'elle permet un recouvrement total de tous les rayons d'entrée matrice.
- d'une barrette de serrage sur un des serre flans, qui peut être abaissée et bloquer le flan contre la matrice.
- d'un capteur d'avallement monté sur l'autre serre flan.



**Figure 6.2.** Géométrie de l'outil d'emboutissage

Les principales caractéristiques de cet essai sont :

- le rayon d'entrée matrice  $R_m$  (figure 6.2) est variable ; les rayons à notre disposition sont les suivants : 2, 4, 10 et 15 mm ;
- les emboutis réalisés sont symétriques et issus des quatre nuances de tôle déjà étudiées (tableau 2.1) ;
- les serre flans sont plans et uniquement bloqués géométriquement. Ils n'exercent pas de pression sur la tôle.

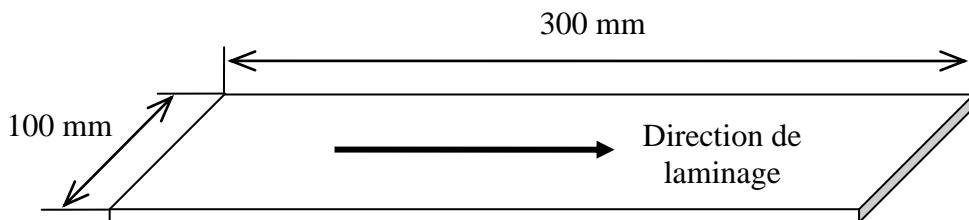
### 6.2.1. Mise en place

Les flans sont découpés aux dimensions 300 mm par 100mm et sont nettoyés à l'alcool. Les dimensions utiles (épaisseur, longueur, largeur) sont remesurées avant l'essai.

La première opération à réaliser est le réglage du jeu sur épaisseur (j/e) : le poinçon est descendu entre les deux matrices mobiles mises en contact contre le poinçon. Dans cette configuration, le poinçon est bloqué en rotation et fixé à la traverse supérieure de la machine de traction. Les deux blocs matrices sont ensuite écartés pour laisser place à des cales de surépaisseur disposées entre le poinçon et les matrices. Ces cales permettent d'obtenir le jeu

poinçon/matrice désiré. Les matrices sont ensuite plaquées contre ces cales et bloquées dans cette position. On termine cette opération en enlevant les cales de surépaisseur.

Le flan est ensuite inséré entre le serre flan et le plateau matrice. Le serre flan repose librement sur le flan puis est bloqué dans cette position afin de ne pas venir exercer d'efforts sur le flan mais également de ne pas avoir de jeu entre le flan et le serre flan



**Figure 6.3.** Géométrie des flans emboutis

L'emboutissage proprement dit commence, après cette procédure de mise en place. Un programme de pilotage permet de contrôler la vitesse de déplacement de la traverse, fixée à 60 mm/min pour tous les essais, ainsi que les enregistrements simultanés de la course du poinçon, de l'avalement et de l'effort.

Une fois l'embouti terminé, le poinçon remonte. Les serre flans sont retirés puis l'embouti est extrait manuellement et délicatement des deux blocs matrices pour ne pas fausser la lecture du retour élastique.

Trois essais ont été réalisés pour chaque configuration. Si des écarts trop importants sont détectés sur la mesure des rayons résiduels, un plus grand nombre d'emboutis est réalisé.

### 6.2.2.Résultats

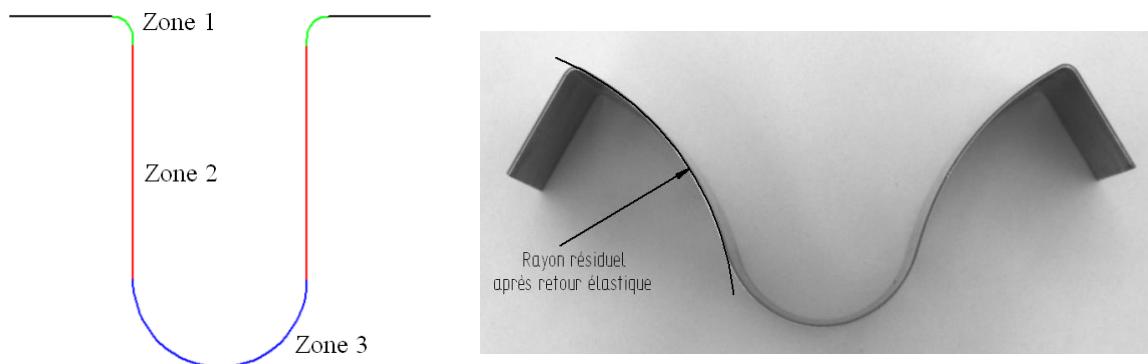
Par la suite, le rayon d'entrée matrice sera noté  $R_m$ , le rayon poinçon  $R_p$ , le jeu sur épaisseur  $j/e$  et l'épaisseur  $e$ .

Trois zones qui présentent une histoire déformation différente peuvent être identifiées sur l'embouti (figure 6.4) :

- La zone 1 est pliée à  $R_m+e/2$
- La zone 2 est pliée à  $R_m+e/2$  puis dépliée à 1'infini
- La zone 3 est pliée à  $R_p+e/2$

Le dépouillement des résultats a pour but essentiel de faire ressortir les rayons de courbure résiduel  $R_{res}$  après retour élastique de la seconde zone.

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour mesurer ces rayons comme l'utilisation d'une machine à mesurer tridimensionnelle. La méthode utilisée dans ce travail consiste à numériser le profil de la pièce à l'aide d'un scanner et de mesurer le rayon de courbure à l'aide d'un logiciel de CAO.



**Figure 6.4.** Zones de mêmes histoires de déformation et rayons résiduels des murs

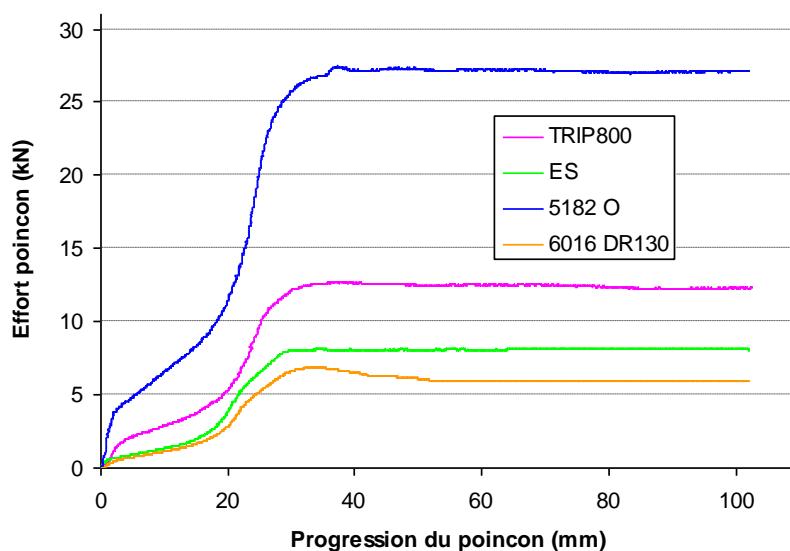
#### 6.2.2.1. Matériaux

Pour chaque essai, l'effort exercé sur le poinçon est relevé en fonction de la course.

La figure 6.5 montre l'évolution de cet effort poinçon pour les quatre matériaux utilisés (acières ES et TRIP 800 et aluminiums 5182 et 6016) et le même rayon matrice  $R_m = 4$  mm. Ces courbes peuvent être séparées en deux parties :

- une phase transitoire au départ, où l'effort varie fortement et durant laquelle la tôle prend la forme du poinçon et commence à être pliée sur le rayon matrice ;
- une phase stationnaire où l'effort varie très peu puisque la tôle est uniquement pliée puis dépliée sur le rayon matrice.

La phase transitoire dépendant fortement de la géométrie de l'outillage est donc pratiquement la même pour les quatre matériaux (environ 30 mm de course).



**Figure 6.5.** Evolution de l'effort sur le poinçon en fonction de la course pour les matériaux utilisés avec  $R_m = 4$  mm

Les tableaux 6.1 à 6.4 donnent les mesures des rayons résiduels pour chacun des matériaux. L'observation de ces tableaux montre un fort retour élastique pour l'acier TRIP 800 et l'aluminium 6016 DR130 ( $R_{\text{res}}$  faible). Les deux autres matériaux ont un retour élastique beaucoup moins prononcé que l'on peut expliquer par la faible limite d'élasticité de l'acier ES et la forte épaisseur de l'aluminium 5182 O.

N° de l'essai	Rayon résiduel (mm)	Ecart type
ES0401	600	32
ES0402	592	30
ES0403	625	35
ES0404	590	22

Valeurs moyennes	600	32
------------------	-----	----

**Tableau 6.1.** Résultats de retour élastique sur l'acier ES

N° de l'essai	Rayon résiduel (mm)	Ecart type
T80401	88	1
T80402	86	1
T80403	86.4	1.5
T80404	86	1
T80405	86	1

Valeurs moyennes	86.5	1.5
------------------	------	-----

**Tableau 6.2.** Résultats de retour élastique sur l'acier TRIP 800

N° de l'essai	Rayon résiduel (mm)	Ecart type
AL50401	413	15
AL50402	455	45
AL50403	423	20
AL50404	451	18
AL50405	442	13

Valeurs moyennes	437	40
------------------	-----	----

**Tableau 6.3.** Résultats de retour élastique sur l'aluminium 5182 O

N° de l'essai	Rayon résiduel (mm)	Ecart type
AL60401	99	1.5
AL60402	99	1
AL60403	99	1
AL60404	99	1
AL60405	100	1

Valeurs moyennes	99	1
------------------	----	---

**Tableau 6.4.** Résultats de retour élastique sur l'aluminium 6016 DR130

### 6.2.2.2. Influence du rayon d'entrée matrice sur l'aluminium 6016

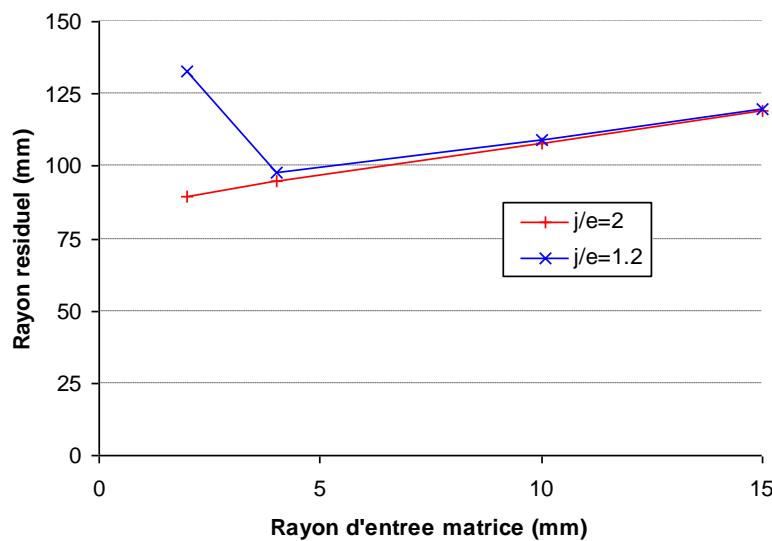
Pour cette étude, deux lots de pièces ont été emboutis à des jeux sur épaisseurs (j/e) différents. Les résultats sont donnés pour deux configurations j/e=2 et j/e=1,2 (tableau 6.5 et figure 6.6).

Si le jeu sur épaisseur est suffisamment grand, on s'aperçoit que le retour élastique augmente (le rayon résiduel du mur diminue) lorsque le rayon d'entrée matrice diminue. Ceci est conforme à un calcul analytique de ce rayon de courbure [1].

Rayon matrice (mm)	j/e=2		j/e=1,2	
	Rayon résiduel (mm)	Ecart type	Rayon résiduel (mm)	Ecart type
2	89,6	1,5	133	2
4	94,7	1	98	1
10	108	2	109	1
15	119	3	120	2

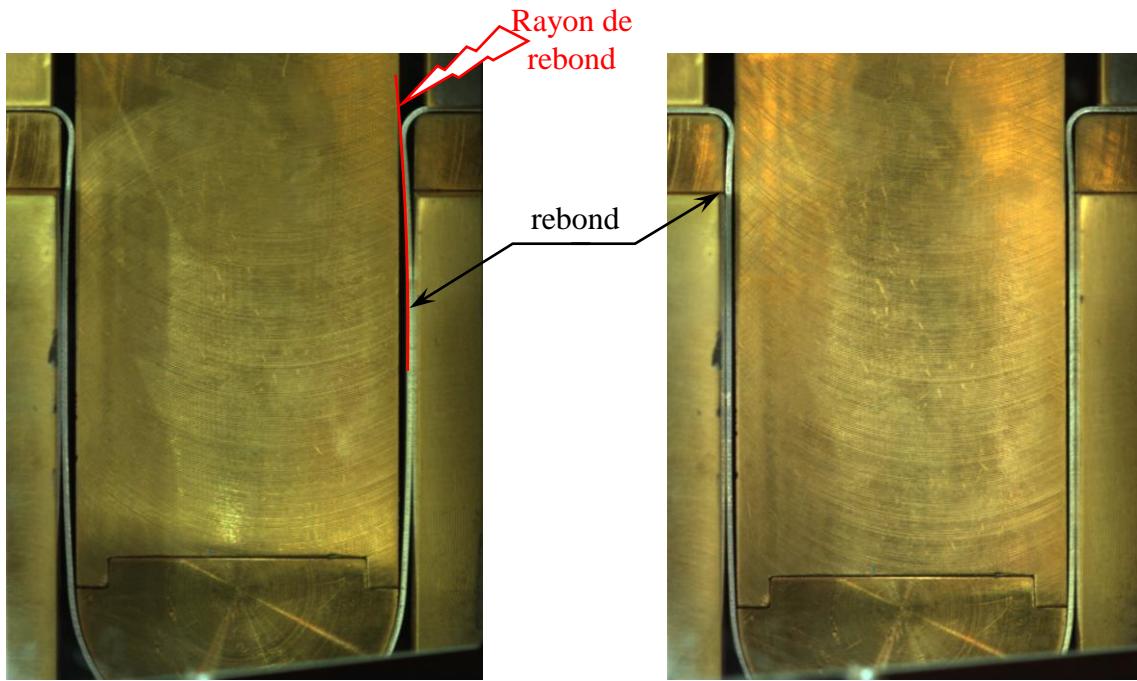
**Tableau 6.5** Résultats de retour élastique

Lorsqu'on diminue le jeu sur épaisseur à des valeurs couramment utilisées par les emboutisseurs ( $j/e=1,2$ ), la tendance est différente puisque le retour élastique diminue fortement lorsque  $R_m$  devient petit par rapport à l'épaisseur de la tôle (environ deux fois l'épaisseur de la tôle).

**Figure 6.6.** Evolution de retour élastique en fonction du rayon d'entrée matrice

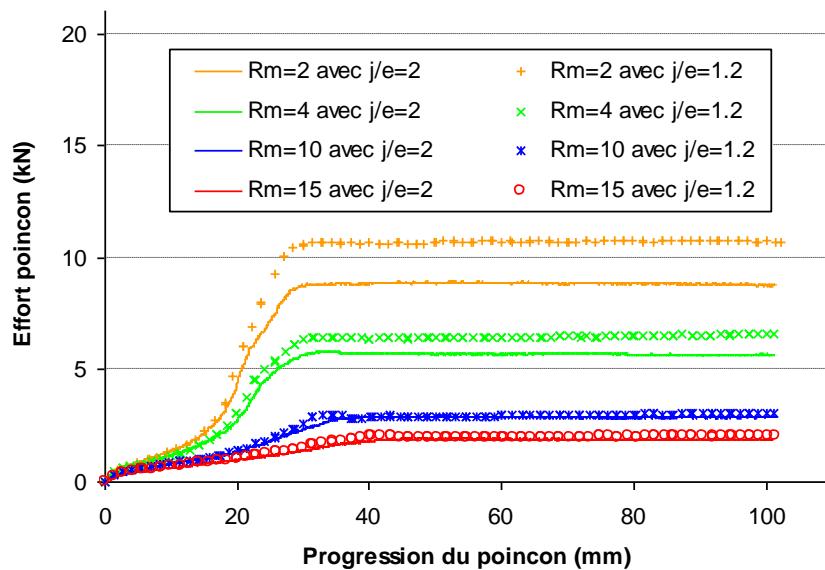
Cette diminution du retour élastique pour les petits rayons a été expliquée [2] par le phénomène de rebond (voir figure 6.7). La tôle ne suit pas exactement la géométrie de l'entrée matrice. Ce phénomène est surtout observable pour les petits rayons car la déviation géométrique occasionnée est non négligeable devant la valeur du rayon. Pour les pliages sur grands rayons, cette déviation devient négligeable et la tôle suit correctement l'outillage.

On constate sur la figure 6.7 la formation d'un rayon "de rebond" lors de ce phénomène de rebond. Ce rayon n'a pas été mesuré précisément mais son estimation permet de dire qu'il est d'autant plus petit que le jeu sur épaisseur est faible. Cette courbure, inverse de celle du rayon matrice, fait repasser le flan dans le domaine plastique si elle est suffisamment petite et diminue le retour élastique.



**Figure 6.7.** Géométrie du flan au cours de l'essai : avec  $j/e=2$  à gauche et  $j/e=1,2$  à droite

Concernant l'étude des efforts exercés sur le poinçon pour les configurations étudiées, on constate classiquement qu'à jeu sur épaisseur constant, l'effort augmente si le rayon matrice diminue (figure 6.8). Pour des rayons suffisamment grands, les efforts enregistrés sont très similaires quel que soit le rapport  $j/e$ .



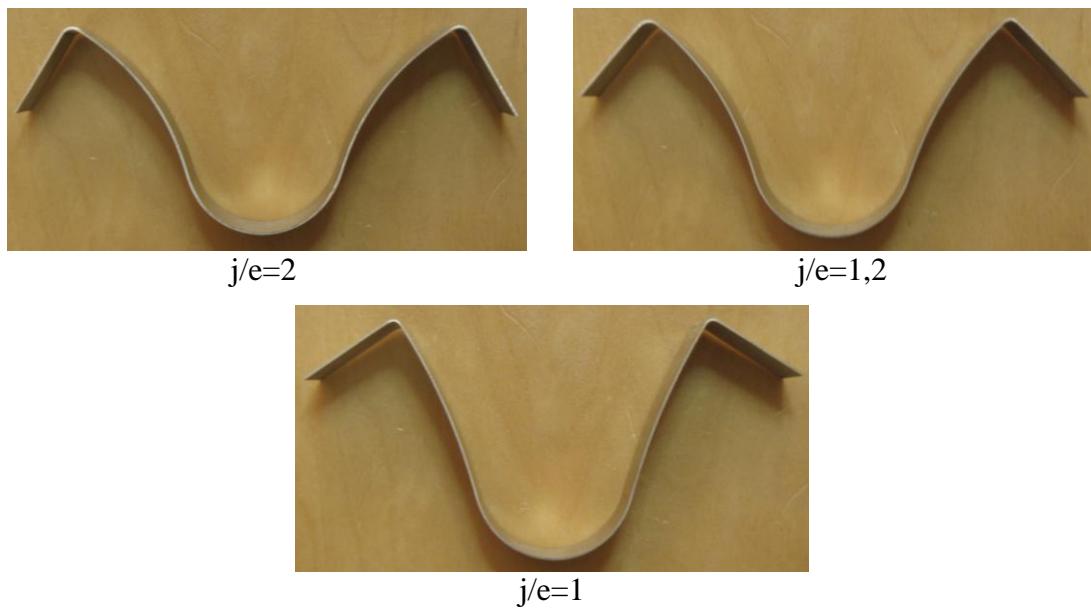
**Figure 6.8.** Evolution de l'effort poinçon pour différents rayons matrice et jeux sur épaisseur

### 6.2.2.3. Influence du jeu sur épaisseur pour l'aluminium 6016 DR130

Un lot d'essais complémentaires a été réalisé sur l'aluminium 6016 DR130 pour évaluer l'influence du jeu sur épaisseur à rayon d'entrée matrice constant (tableau 6.6 et figure 6.9). Nous avons vu sur la figure 6.6 que le jeu sur épaisseur semble avoir peu d'influence si le rayon d'entrée matrice est grand. Nous avons donc décidé de travailler avec le plus petit rayon d'entrée matrice dont nous disposons ( $R_m=2\text{mm}$ ).

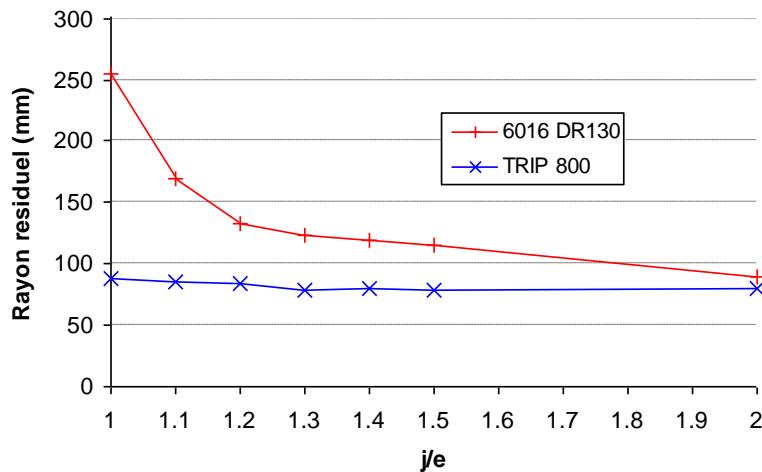
j/e	Rayon résiduel (mm)	Ecart type
1,0	255	4
1,1	170	2
1,2	133	1
1,3	124	1
1,4	119	2
1,5	115	2
2	89,6	2

**Tableau 6.6** Résultats de retour élastique en faisant varier le jeu sur épaisseur



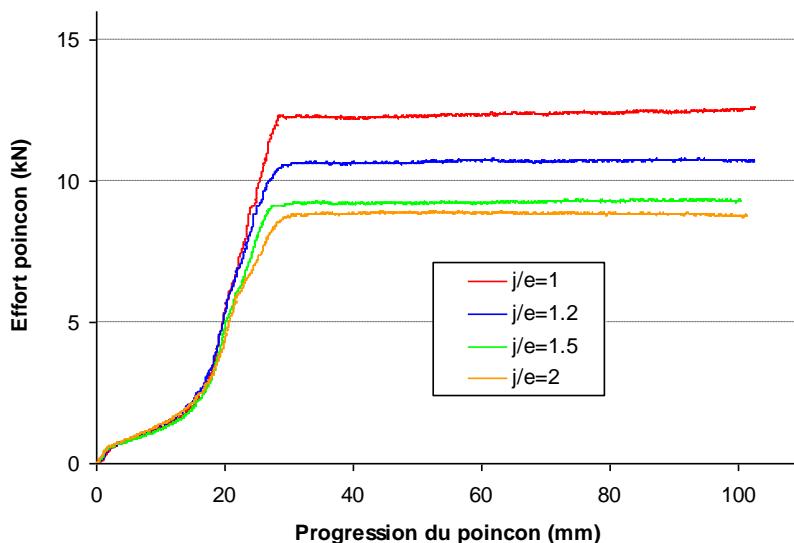
**Figure 6.9.** Profils obtenus avec différents jeux sur épaisseur pour l'aluminium 6016

Les figures 6.9 et 6.10 confirment les explications données au paragraphe précédent sur le phénomène de rebond. Lorsque le jeu sur épaisseur diminue, le rayon de rebond est de plus en plus petit et fait fortement diminuer le retour élastique de l'aluminium 6016 DR130.



**Figure 6.10.** Evolution du rayon résiduel en fonction du jeu sur épaisseur

Comme on pouvait s'y attendre, l'effort exercé sur le poinçon augmente lorsque le jeu sur épaisseur diminue (figure 6.11).



**Figure 6.11.** Evolution de l'effort poinçon pour différents jeux sur épaisseur

#### 6.2.2.4. Influence du jeu sur épaisseur pour l'acier TRIP800

L'évolution du rayon résiduel en fonction du jeu sur épaisseur est tracée sur la figure 6.10. A la différence de l'aluminium 6016 DR130, la diminution du jeu sur épaisseur a beaucoup moins d'effet sur le retour élastique pour ce matériau. Sa haute limite l'élasticité peut expliquer que le retour élastique sur ce matériau soit peu modifié par le phénomène de rebond.

j/e	Rayon résiduel (mm)	Ecart type
1,0	88,2	1
1,1	85,2	1
1,2	84,3	1
1,3	78,8	2
1,4	79,4	1
1,5	78,6	2
2	79,4	2

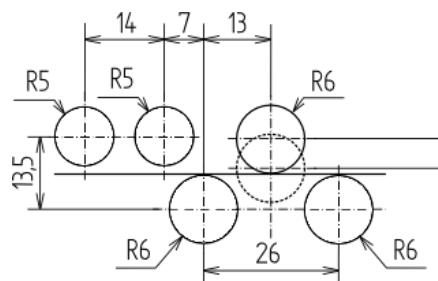
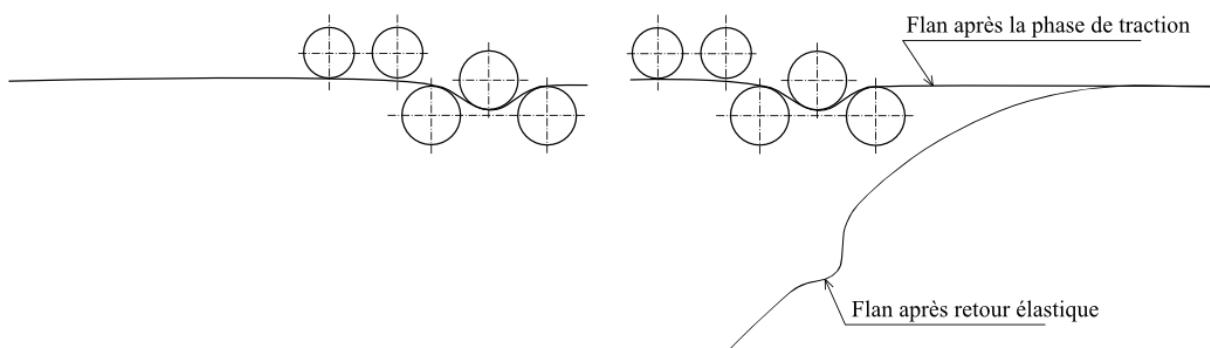
**Tableau 6.7** Résultats de retour élastique en faisant varier le jeu sur épaisseur

### 6.3. Pliage d'une tôle à travers des rouleaux

Le principe de cet essai peut être assimilé au passage d'un flan sur un jonc pendant l'emboutissage ou encore au passage d'une tôle dans une planeuse.

Pour compléter l'étude du retour élastique après emboutissage, une machine complémentaire a été conçue [3]. Cette machine est composée de trois rouleaux supérieurs et deux rouleaux inférieurs. Le rouleau central (en pointillé sur la figure 6.12) est déplacé verticalement pour emboutir le flan, l'extrémité droite de ce flan étant maintenue dans le mors d'une machine de traction à une distance de 100 mm de ce rouleau mobile (figure 6.13). La tôle est ensuite déplacée horizontalement sur une longueur de 150 mm. Finalement, le rouleau mobile est remonté, et le flan est décroché du mors mobile pour le sortir de l'outillage (figure 6.14).

Le niveau de déformation atteint dans la tôle peut être modifié par la profondeur d'emboutissage du rouleau mobile.

**Figure 6.12.** Géométrie de l'outillage**Figure 6.13.** Etape 1 : emboutissage**Figure 6.14.** Etapes 2 et 3 : traction et retour élastique

### 6.3.1.Mise en place

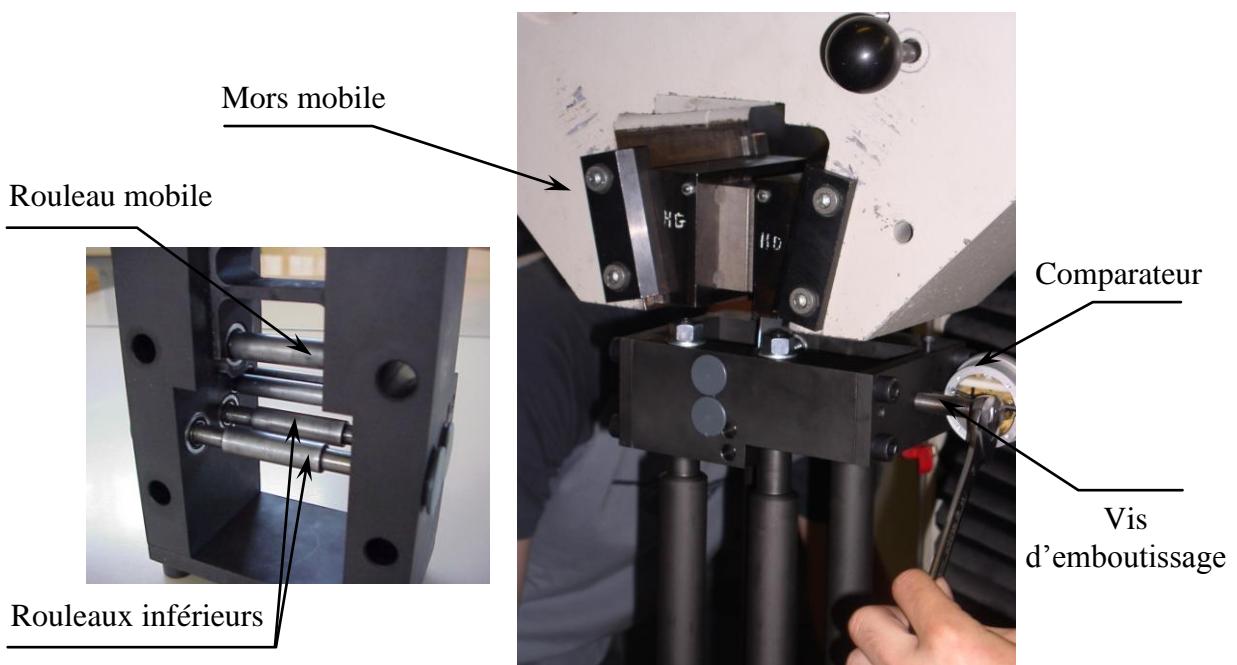
Les flans sont découpés aux dimensions 300 mm par 40 mm puis nettoyés à l'alcool.

Pour tenir compte de l'épaisseur de la tôle, un réglage de la position de l'outillage est possible pour assurer le bon alignement de la tôle avec le mors mobile de la machine de traction. Pour régler cette position, on place une tôle dans le mors mobile et on vient mettre en contact les deux rouleaux inférieurs avec la tôle. L'outillage est bloqué dans cette position. Il est nécessaire de réaliser ce réglage une fois pour chaque nuance de tôle.

Une fois ce réglage effectué, le mors mobile et la tôle sont descendus à une position de référence qui permettra d'avoir le rouleau mobile à 100 mm du bord de la tôle au départ de l'essai.

Le rouleau mobile est à son tour mis en contact avec la tôle et le comparateur (chargé de mesurer la position du rouleau mobile) est mis à zéro (figure 6.15). La phase d'emboutissage peut alors débuter. La profondeur d'emboutissage est contrôlée avec le comparateur. La profondeur d'emboutissage est de 5 mm pour l'acier ES, TRIP 800, l'aluminium 6016 DR130 et de 1,5 mm pour l'aluminium 5182 O de plus forte épaisseur.

Lorsque la phase d'emboutissage est réalisée, on peut débuter l'étape de traction. Dans nos essais, nous avons imposé un déplacement de 150 mm à une vitesse de 60 mm/min. Une fois la phase de traction terminée, le rouleau mobile est remonté et la tôle peut être sortie de l'outillage.



**Figure 6.15.** Mise en place de l'outillage

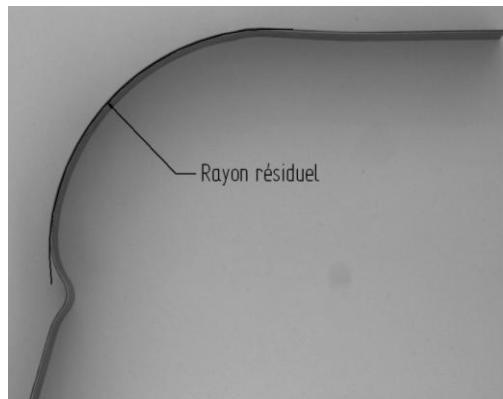
### 6.3.2.Résultats

Le rayon résiduel  $R_{res}$  après retour élastique de la zone pliée et dépliée sur les rouleaux est mesuré (figure 6.16). La méthode de mesure est identique à celle présentée au paragraphe 5.2.2.

Les tableaux 6.8 à 6.12 rendent compte des résultats de RE pour les quatre matériaux étudiés. Les résultats obtenus sur l'aluminium 5182 O ne peuvent pas être utilisés à cause de leur grande dispersion. Ce matériau met en jeu des efforts importants pour être déformé. Les

capacités maximales de l'outillage ont été utilisées mais ne permettent pas de déformer suffisamment le flan pour avoir un retour élastique exploitable.

Comme pour l'emboutissage en U, le retour élastique est important pour l'acier TRIP 800 et l'aluminium 6016 DR130 et beaucoup plus faible pour l'acier ES à cause de sa faible limite d'élasticité.



**Figure 6.16.** Rayon résiduel mesuré pour cet essai

N° de l'essai	Rayon résiduel (mm)	Ecart type
ES001	259	6
ES002	258	7
ES003	262	3
ES004	260	3
ES005	262	2
Valeurs moyennes	260	5

**Tableau 6.8.** Résultats de retour élastique sur l'acier ES

N° de l'essai	Rayon résiduel (mm)	Ecart type
T8001	96	1
T8002	98	1
T8003	96	0.5
T8004	97	1
T8005	97	1
Valeurs moyennes	97	1

**Tableau 6.9.** Résultats de retour élastique sur l'acier TRIP 800

N° de l'essai	Rayon résiduel (mm)	Ecart type
AL5001	1291	105
AL5002	661	22
AL5003	910	20
AL5004	954	30
AL5005	1127	25
Valeurs moyennes	989	235

**Tableau 6.10.** Résultats de retour élastique sur l'aluminium 5182 O

N° de l'essai	Rayon résiduel (mm)	Ecart type
AL6001	87	1
AL6002	87	1
AL6003	88	1
AL6004	86	0.5
AL6005	88	0.5
Valeurs moyennes	87	1

**Tableau 6.11.** Résultats de retour élastique sur l'aluminium 6016 DR130

## Bibliographie

- [1] Morestin F., Contribution à l'étude du retour élastique lors de la mise en forme des produits plats, Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1993
- [2] Umehara Y., Analysis of shape fixability in high tensile strength steel sheets in press forming, Mémoires Scientifiques Revue Métallurgie, p 247-253, 1980
- [3] Delavouet N., Mougin E., Analyse expérimentale et numérique du retour élastique, Rapport de projet de fin d'étude, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2006

# Chapitre 7

## Simulations numériques

<b>7.1. Introduction .....</b>	120
<b>7.2. Modélisation du procédé d'emboutissage par éléments finis .....</b>	120
7.2.1. Modélisation dans le code de l'INSA de Lyon .....	120
7.2.2. Modélisation dans PamStamp 2G V2005.0.4 .....	121
<b>7.3. Simulation de l'essai en U avec les codes INSA .....</b>	123
7.3.1. Influence de l'écrouissage cinématique .....	124
7.3.2. Influence de l'élément .....	127
7.3.3. Influence du maillage .....	128
<b>7.4. Simulation de l'essai en U avec PamStamp 2G V2005.0.4 .....</b>	129
7.4.1. Influence de l'élément .....	129
7.4.2. Influence du maillage .....	130
7.4.3. Effort d'emboutissage .....	132
<b>7.5. Simulation de l'essai de pliage à travers des rouleaux dans les codes INSA .....</b>	133
7.5.1. Influence de l'élément sur le retour élastique .....	133
7.5.2. Effort de traction .....	134
<b>7.6. Simulation de l'essai de pliage à travers des rouleaux dans PamStamp 2G .....</b>	135
7.6.1. Calcul de référence .....	135
7.6.2. Prise en compte de l'amortissement .....	136
7.6.3. Influence de l'élément .....	137
<b>7.7. Conclusion .....</b>	138

## 7.1. Introduction

Le comportement rhéologique des tôles a été identifié au moyen de deux essais de caractérisation sous différentes sollicitations. Ces modèles sont à présent utilisés pour la simulation des essais académiques dans un code de calcul développé au laboratoire puis au sein du logiciel PamStamp 2G v2005.0.4. Les résultats numériques sont comparés aux résultats expérimentaux présentés au chapitre 6.

Après une présentation des points clés des mises en données des simulations d'emboutissage et de retour élastique, les résultats issus des différentes modélisations sont comparés pour connaître l'apport des modèles de calculs, et notamment des types d'éléments finis utilisés. Pour les deux essais présentés au chapitre 6, la sensibilité du rayon résiduel aux paramètres numériques est abordée. La contribution des lois d'écrouissage combiné à la simulation du retour élastique est notamment soulignée.

## 7.2. Modélisation du procédé d'emboutissage par éléments finis

Les résultats qui suivent ont été obtenus avec une méthode d'intégration temporelle explicite pour la phase d'emboutissage. La phase de retour élastique est modélisée par une approche quasi-statique implicite pour éviter les oscillations.

Contrairement au déroulement d'un process réel, le retrait des outils n'est pas modélisé pendant la phase de retour élastique. Aucune véritable gestion des contacts flan/outils n'est donc prise en compte durant le calcul de cette phase. Une fois l'étape d'emboutissage proprement dite terminée, les efforts de contact calculés pour chaque nœud sont décrémentés proportionnellement. La phase de déchargement se termine lorsque les efforts appliqués sur la tôle deviennent nuls. D'autre part, pour éviter les mouvements de corps rigides de la tôle pendant la phase de retour élastique, des conditions aux limites de blocage isostatique sont appliquées au flan.

La validité des résultats de la simulation dépend fortement de la modélisation des outils. A ce titre, différentes représentations peuvent être utilisées : maillage des outils ou représentation des outils par des surfaces CAO.

### 7.2.1. Modélisation dans le code de l'INSA de Lyon

#### 7.2.1.1. Gestion du contact

Les surfaces actives des outils sont définies par des carreaux de surface utilisant les propriétés des courbes à pôles (Bézier ou NURBS). Les efforts de contact sont calculés par une méthode de projection dynamique des nœuds sur la surface des outils. L'idée principale consiste à appliquer au nœud (de masse  $m$ ) un effort de contact de la forme  $F_c = my$  où l'accélération est calculée en fonction de la pénétration  $d$  pour que dans un intervalle de temps  $\Delta t$ , le nœud se déplace de cette distance  $d$  suivant la normale sortante à l'outil considéré [1].

### 7.2.1.2. Maillage – Taille de maille

Trois types d'éléments finis sont utilisés : les éléments triangulaires S3 et DKT12 présentés au chapitre 4 et l'élément quadrangulaire Q4γ24 formulé par Bathe [2]. Ce dernier élément à quatre points d'intégration dans le plan, prend en compte le cisaillement transversal (calculé en élasticité) par l'intermédiaire d'un champ de déplacement assumé.

L'emboutissage étant un procédé impliquant des grandes déformations du flan, il s'avère nécessaire d'utiliser d'un point de vue numérique des tailles de maille relativement petites en vue de reproduire correctement la courbure de la tôle.

Ici, les maillages sont réguliers. Le découpage du flan dans la longueur est de 1 mm, 2 mm, 3 mm ou 4 mm.

### 7.2.1.3. Lois matériaux

Le comportement du matériau est modélisé en utilisant le critère de plasticité de Hill 48 associé à une loi d'écrouissage isotrope de type exponentielle ou une loi d'écrouissage combiné présentée au chapitre 3. Les paramètres utilisés sont indiqués dans les tableaux 3.1 à 3.8 du chapitre 3.

## 7.2.2. Modélisation dans PamStamp 2G V2005.0.4

### 7.2.2.1. Gestion du contact

Les outils sont maillés par des facettes à trois ou quatre nœuds. La discrétisation des surfaces constitue une tâche délicate à réaliser. Dans le cadre de la gestion nodale du contact, un nœud est considéré comme une boule de diamètre égal à la moyenne des épaisseurs des éléments auxquels il appartient. On définit la pénétration de la tôle dans les outils lorsque la boule d'un nœud du maillage pénètre le volume d'un élément rigide d'outil.

### 7.2.2.2. Maillage - Taille de maille

L'utilisation de maillage régulier et constant, comme dans le code de l'INSA de Lyon, entraîne des temps de calculs élevés pour des pièces de grandes dimensions. Une solution consiste à utiliser un maillage adaptatif, c'est-à-dire à raffiner les zones fortement déformées au détriment d'autres régions moins déformées et de gagner un temps précieux pour une précision comparable. La méthode de remaillage est présentée au paragraphe suivant.

Pour un calcul de retour élastique, la taille de l'élément en fin de calcul  $t_m$  doit être inférieure à 25% du rayon de courbure de la fibre neutre du flan :

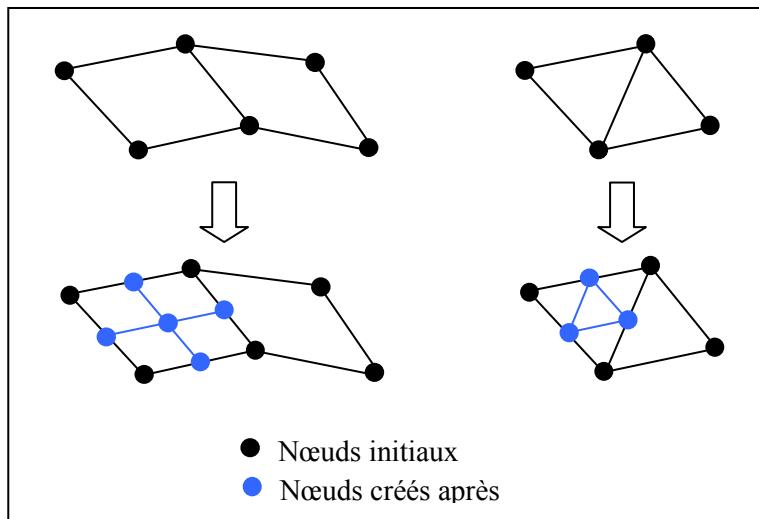
$$t_m \leq 0.25 \left( R_{\min} + \frac{h}{2} \right)$$

La taille initiale des éléments finis et le nombre de raffinement sont déterminés pour ne pas dépasser une taille d'élément maximale (25 mm) au début de l'étape de serrage.

L'utilisation de l'élément Belytschko Tsay [3] est proposée par défaut dans PamStamp 2G. Cet élément peut prendre la forme d'un quadrangle ou d'un triangle. Après leurs implémentations dans les routines utilisateurs, les éléments S3 et DKT12 sont également utilisés.

#### 7.2.2.3. Maillage adaptatif – Critères de remaillage

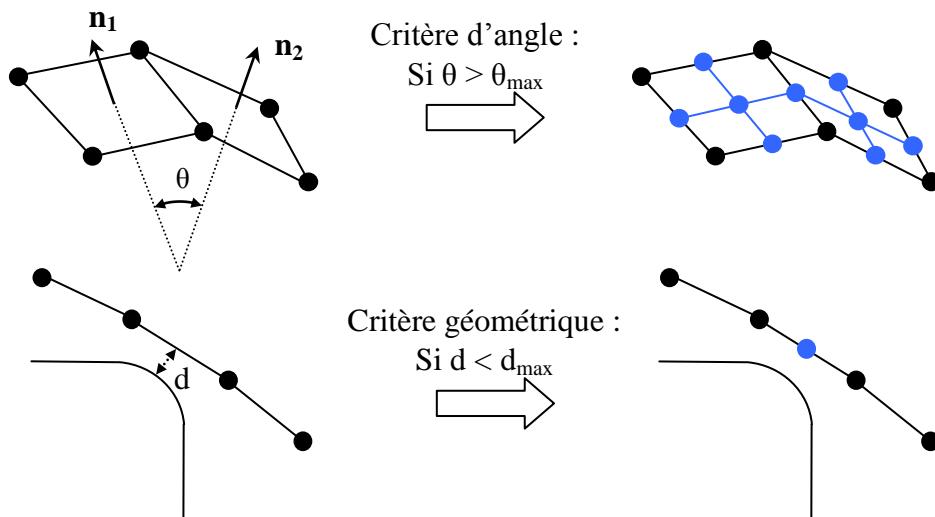
La procédure de maillage adaptatif consiste à diviser un élément parent en quatre éléments fils en créant de nouveaux nœuds au centre de chaque arête de l'élément père (voir figure 7.1) [4, 5]. Les nouveaux éléments reçoivent les contraintes et les déformations calculées dans les éléments parents.



**Figure 7.1.** Remaillage adaptatif des éléments coques quadrangulaires et triangulaires

Deux critères de remaillage sont disponibles dans PamStamp 2G v2005.0.4 : le critère d'angle et le critère géométrique (voir figure 7.2) utilisés simultanément dans les simulations :

- le critère d'angle dépend de la courbure locale de la pièce. Il active le remaillage des éléments si l'angle  $\theta$  entre les normales de deux éléments adjacents dépasse une valeur maximale donnée  $\theta_{\max}$ . Ce critère est adopté dans nos simulations avec une valeur  $\theta_{\max}$  de  $10^\circ$  ;
- le critère géométrique, fonction de la géométrie de l'outil et non de la géométrie de la pièce, permet de déclencher le remaillage. Le maillage de l'outil est analysé afin de détecter les zones critiques correspondant à des zones de forte courbure. Au cours de la simulation, lorsque le maillage de la tôle s'approche d'une zone critique de l'outil, le remaillage du flan est activé. Ce critère est aussi utilisé dans nos simulations.



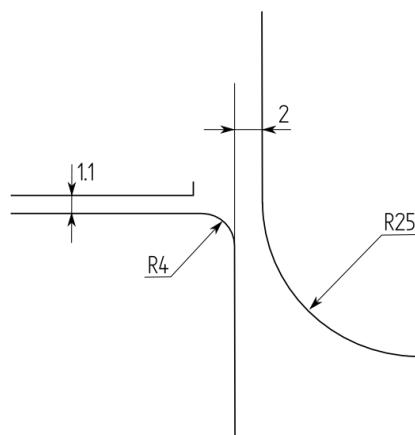
**Figure 7.2.** Critère d'angle et critère géométrique de raffinement.

#### 7.2.2.4. Lois matériaux

Pour une utilisation standard du logiciel avec l'élément finis Belytschko Tsay, le critère de plasticité de Hill 48 est utilisé avec un écrouissage isotrope ou cinématique non linéaire. Dans le cadre d'une utilisation avec les éléments S3 ou DKT12 les mêmes lois matériaux sont implémentées dans une routine utilisateur. Nous en avons profité pour ajouter la loi d'écrouissage combiné (à 4 paramètres cinématiques) proposée au chapitre 3.

### 7.3. Simulation de l'essai en U avec les codes de l'INSA de Lyon

L'objectif est de simuler l'essai d'emboutissage en U réalisé expérimentalement et présenté au chapitre 6. La configuration et la géométrie choisies sont décrites sur la figure 7.3. Comme pour l'essai expérimental, le serre flan est bloqué géométriquement à une distance de 1,1 mm de la matrice. Le jeu poinçon matrice a été fixé à 2 mm, correspondant à un jeu sur épaisseur de 2, pour les matériaux utilisés d'épaisseur 1mm.



**Figure 7.3.** Géométrie de l'outillage utilisée

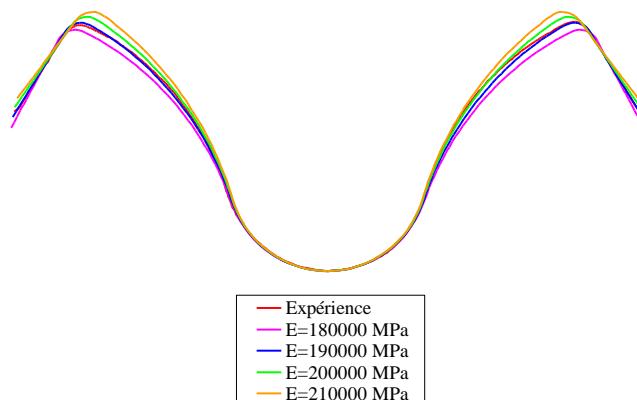
### 7.3.1. Influence du module de Young

Taille des éléments finis	2 mm
Elément utilisé	S3
Nombre de points d'intégration dans l'épaisseur	5 points de Lobatto
Coefficient de frottement	0,1
Vitesse d'emboutissage	5 m/s
Matériaux utilisés	TRIP 800
Modélisation du matériau	Critère de Hill 48 + écrouissage combiné
<b>Module de Young</b>	<b>180000 MPa – 190000 MPa – 200000 MPa – 210000 MPa</b>

 Paramètres variables

**Tableau 7.1.** Paramètres de la mise en données

Une première simulation est réalisée pour montrer l'influence du module de Young sur la prédiction du retour élastique. Le matériau utilisé est un acier HLE TRIP 800 sur lequel le module de Young identifié lors des essais de traction est d'environ 190000 MPa. La figure 7.4 montre qu'il est important de caractériser correctement ce module d'élasticité puisqu'il entraîne des variations importantes sur le retour élastique entre une valeur classique de ce module de Young (210000 MPa) et la valeur identifiée.



**Figure 7.4.** Profils après retour élastique avec le matériau TRIP 800 en faisant varier le module de Young

### 7.3.2. Influence de l'écrouissage cinématique

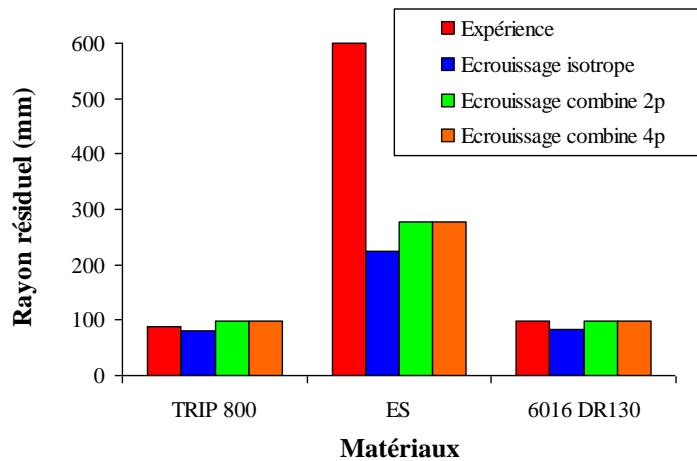
Taille des éléments finis	2 mm, 3mm, 4mm
Elément utilisé	S3
Nombre de points d'intégration dans l'épaisseur	5 points de Lobatto
Coefficient de frottement	0,1
Vitesse d'emboutissage	5 m/s
<b>Matériaux utilisés</b>	<b>TRIP 800 – ES – 6016 DR130</b>
<b>Modélisation du matériau</b>	<b>Critère de Hill 48 + écrouissage isotrope ou combiné</b>

Paramètres variables

**Tableau 7.2.** Paramètres de la mise en données

Si on observe l'histoire de déformation du flan au cours de la mise en forme, la tôle est d'abord pliée sur le rayon d'entrée matrice puis dépliée à l'infini au fur à mesure que le poinçon progresse. L'introduction d'une composante cinématique à l'écrouissage dans la description du comportement matériel des tôles, permet de rendre compte de l'aspect cyclique du pliage/dépliage du flan lors de la mise en forme et d'améliorer en conséquence la prédiction du retour élastique.

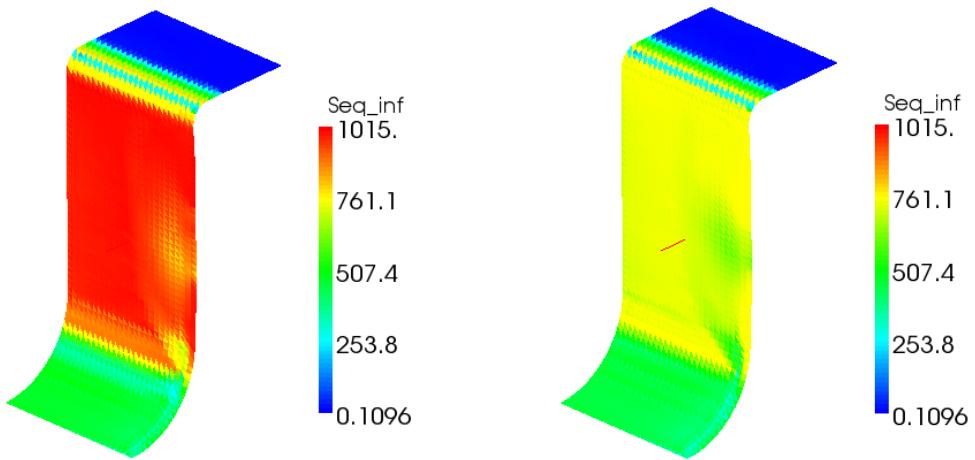
L'identification des paramètres cinématiques est développée au chapitre 3. Les paramètres utilisés sont donnés dans les tableaux 3.1 à 3.8.



**Figure 7.5.** Comparaison expérimentale/numérique du rayon résiduel avec différents types d'écrouissage pour les trois matériaux utilisés

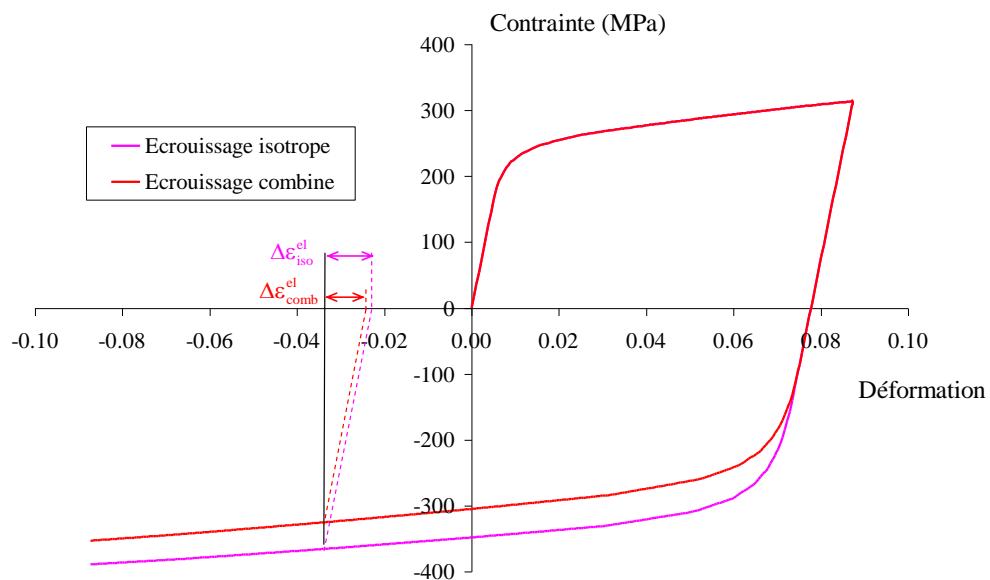
A la lecture de la mesure du retour élastique, on constate que la prise en compte de l'écrouissage cinématique a une influence directe sur le rayon de courbure résiduel. Ainsi, on note une amélioration sensible du retour élastique pour les trois matériaux utilisés.

On notera que l'introduction d'une composante cinématique dans l'écrouissage diminue le retour élastique (augmentation du rayon résiduel). Cette diminution est expliquée par le fait que le niveau de contrainte atteint dans le flan est moins important (voir figure 7.6) ; du moins s'il n'y a pas un nouveau pliage du flan après le dépliage à la sortie du rayon d'entrée matrice (voir paragraphe 6.4.2 pour le phénomène de rebond).



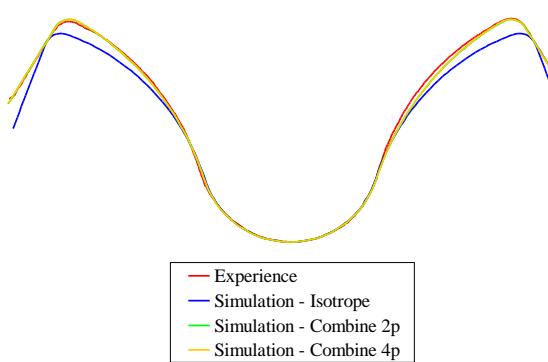
**Figure 7.6.** Visualisation de la contrainte équivalente avec un écrouissage isotrope (à gauche) et un écrouissage combiné (à droite)

Cette différence de niveau de contrainte est particulièrement visible si on simule un essai de traction-compression avec un écrouissage isotrope ou un écrouissage combiné (figure 7.7). Les deux courbes contraintes déformations se superposant pendant la phase de traction, elles se dissocient pendant la phase de compression. Il est alors évident que le retour élastique avec un écrouissage isotrope,  $\Delta\varepsilon_{\text{iso}}^{\text{el}}$  est plus important que lorsqu'on choisit d'utiliser un écrouissage combiné  $\Delta\varepsilon_{\text{comb}}^{\text{el}}$ .

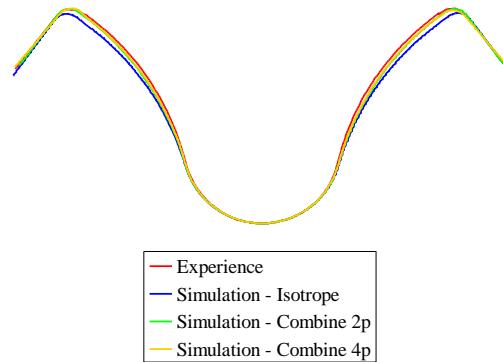


**Figure 7.7.** Effet de l'écrouissage cinématique sur le retour élastique

Comme déjà exposé lors de l'identification des matériaux au chapitre 3, les figures 7.8 et 7.9 montrent que l'aluminium 6016 est plutôt isotrope. L'erreur est faible avec un écrouissage isotrope ou combiné. A l'inverse, l'aspect cinématique de l'écrouissage de l'acier TRIP 800 n'est pas négligeable.



**Figure 7.8.** Profil après retour élastique de l'essai en U – Matériau TRIP 800

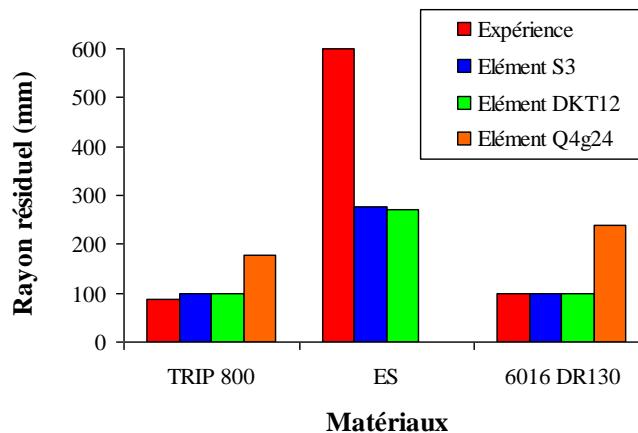


**Figure 7.9.** Profil après retour élastique de l'essai en U – Matériau 6016

### 7.3.3. Influence de l'élément

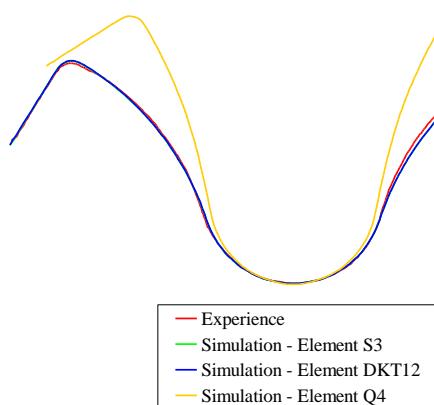
Taille des éléments finis	2 mm
<b>Eléments utilisés</b>	<b>S3 – DKT12 – Q4g24</b>
Nombre de points d'intégration dans l'épaisseur	5 points de Lobatto
Coefficient de frottement	0,1
Vitesse d'emboutissage	5 m/s
<b>Matériaux utilisés</b>	<b>TRIP 800 – ES – 6016 DR130</b>
Modélisation du matériau	Critère de Hill 48 + écrouissage combiné

**Tableau 7.3.** Paramètres de la mise en données

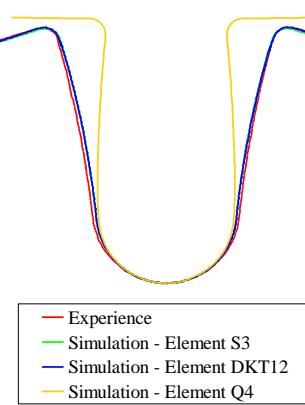


**Figure 7.10.** Comparaison expérimentale/numérique du rayon résiduel avec différents éléments pour les trois matériaux utilisés

Les figures 7.11 et 7.12 montrent que les éléments S3 et DKT12 permettent d'obtenir des résultats comparables aux résultats expérimentaux alors qu'avec l'utilisation de l'élément Q4g24, le rayon résiduel est fortement sous-estimé. La simulation de cet essai en U sur l'acier ES avec l'élément Q4g24 conduit même à un résultat erroné désigné par le terme de « retour élastique inverse » alors que le calcul implicite de retour élastique converge.



**Figure 7.11.** Profil après retour élastique de l'essai en U – Matériau TRIP 800



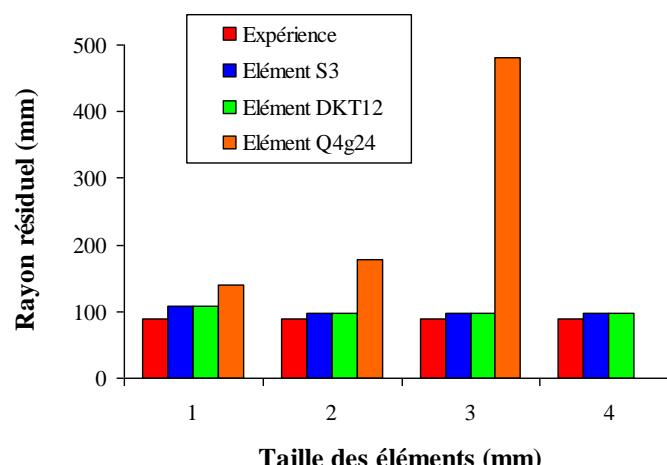
**Figure 7.12.** Profil après retour élastique de l'essai en U – Matériau ES

### 7.3.4. Influence du maillage

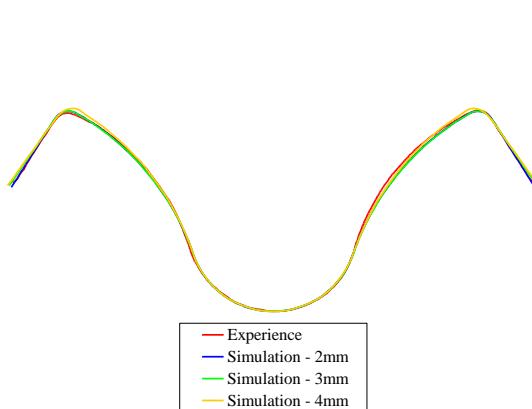
Taille des éléments finis	1 mm, 2 mm, 3mm, 4mm
Éléments utilisés	S3 – DKT12 – Q4g24
Nombre de points d'intégration dans l'épaisseur	5 points de Lobatto
Coefficient de frottement	0,1
Vitesse d'emboutissage	5 m/s
Matériau utilisé	TRIP 800
Modélisation du matériau	Critère de Hill 48 + écrouissage combiné

**Tableau 7.4.** Paramètres de la mise en données

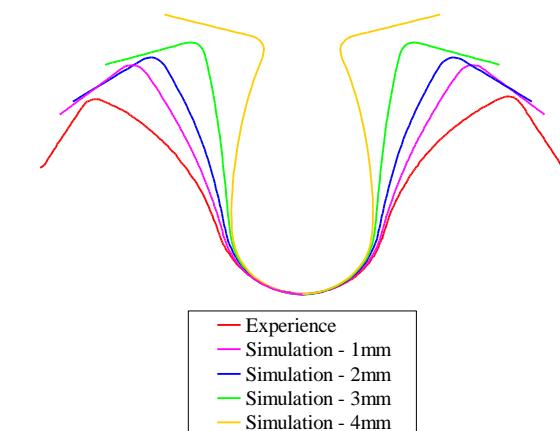
Dans ce paragraphe, les résultats de l'essai en U pour différents maillages sont présentés. Pour cette étude, des simulations numériques ont été faites pour quatre tailles d'éléments : 1, 2, 3 et 4 mm (sachant que le rayon d'entrée matrice vaut 4mm).



**Figure 7.13.** Comparaison expérimentale/numérique du rayon résiduel avec différents éléments pour différentes tailles de maille



**Figure 7.14.** Profil après retour élastique de l'essai en U – Elément S3



**Figure 7.15.** Profil après retour élastique de l'essai en U – Elément Q4 $\gamma$ 24

Le retour élastique reste quasiment constant et est très proche de la réalité quelle que soit la taille du maillage pour les éléments S3 et DKT12. Avec l'élément Q4 $\gamma$ 24, le retour élastique se dégrade fortement lorsque le maillage devient grossier.

## 7.4. Simulation de l'essai en U avec PamStamp 2G V2005.0.4

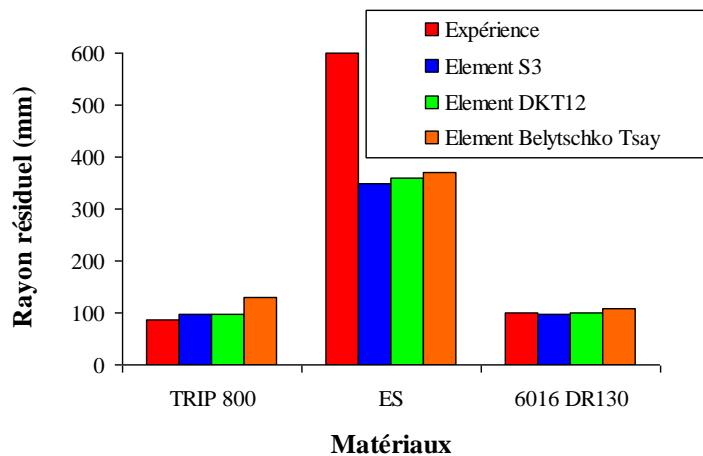
### 7.4.1. Influence de l'élément

Eléments utilisés	Belytschko Tsay – S3 – DKT12
Nombre de points d'intégration dans l'épaisseur	5 Points de Gauss
Coefficient de frottement	0,1
Vitesse d'emboutissage	5 m/s
Matériaux utilisés	TRIP 800 – ES – 6016 DR130
Modélisation du matériau	Critère de Hill 48 + écrouissage combiné

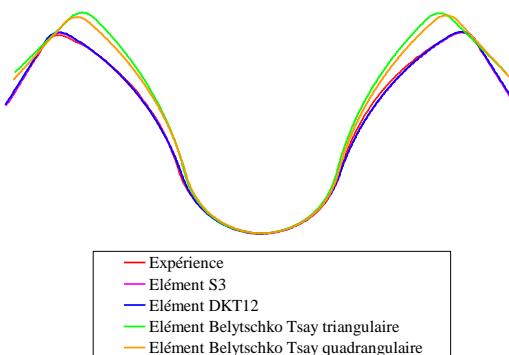
**Tableau 7.5.** Paramètres de la mise en données

Pour rappel, l'élément Belytschko Tsay proposé dans le logiciel PamStamp 2G V2005.0.4 peut prendre la forme d'un quadrangle ou d'un triangle. Les éléments finis S3 et DKT12 sont utilisés après leur implémentation dans la routine UDE de PamStamp 2G V2005.0.4.

La figure 7.17 compare les profils obtenus en simulation et celui issu des essais expérimentaux. On constate que, pour une taille de maille équivalente, les résultats obtenus avec les éléments S3 et DKT12 sont conformes aux résultats expérimentaux. Le résultat obtenu Belytschko Tsay, avec une taille de maille de 1 mm (préconisé par l'éditeur) ne permet pas de retrouver les données expérimentales. On notera une très faible différence de résultats entre l'élément Belytschko Tsay sous forme de triangle ou de quadrangle.



**Figure 7.16.** Rayons résiduels



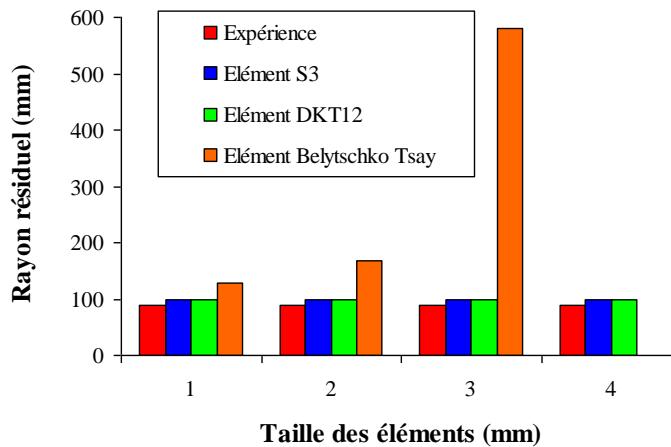
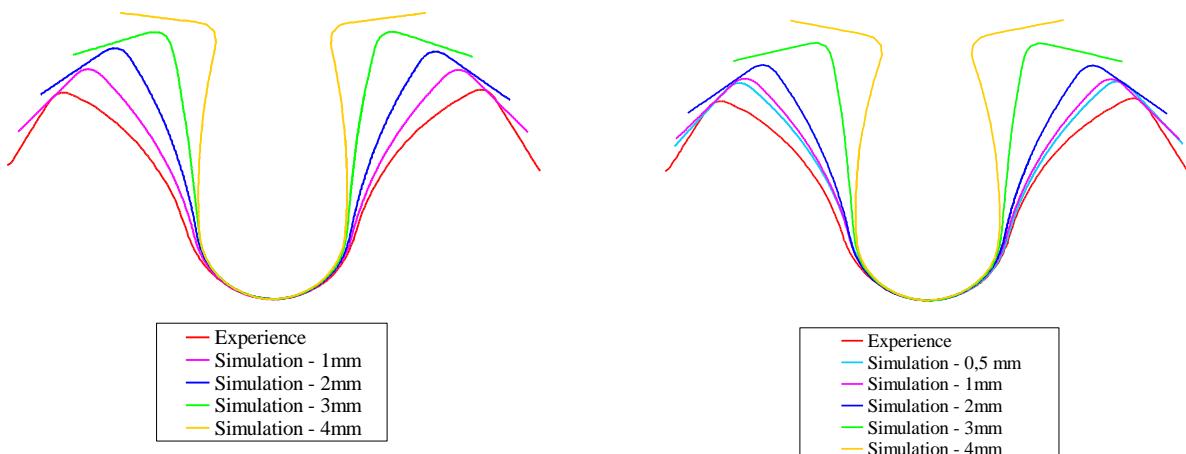
**Figure 7.17.** Profils après retour élastique avec le matériau TRIP 800

#### 7.4.2. Influence du maillage

Taille des éléments finis	1mm, 2 mm, 3mm, 4mm
Eléments utilisés	Belytschko Tsay – S3 – DKT12
Nombre de points d'intégration dans l'épaisseur	5 points de Gauss
Coefficient de frottement	0,1
Vitesse d'emboutissage	5 m/s
Matériau utilisé	TRIP 800
Modélisation du matériau	Critère de Hill 48 + écrouissage combiné

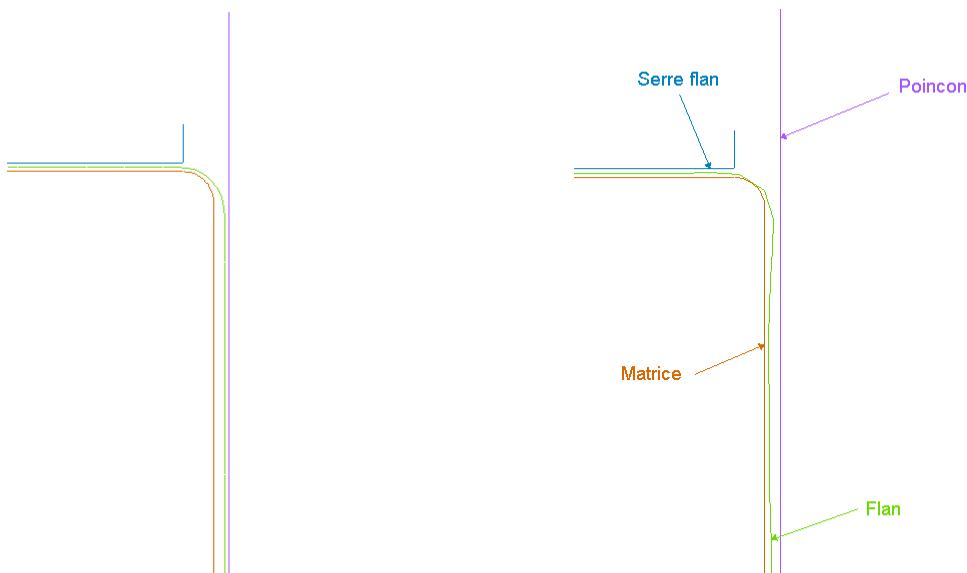
**Tableau 7.6.** Paramètres de la mise en données

La figure 7.18 montre l'évolution du rayon résiduel lorsqu'on augmente la taille de maille. Comme nous l'avions constaté dans les codes de l'INSA de Lyon, les éléments S3 et DKT12 ne sont pas sensibles à la taille des éléments contrairement à l'élément fini Belytschko Tsay. Par ailleurs, même avec une taille de maille fine (1mm) le résultat du calcul reste éloigné du résultat expérimental avec cet élément.

**Figure 7.18.** Rayons résiduels**Figure 7.19.** Profils avec l'élément Belytschko Tsay triangle – Matériau TRIP 800**Figure 7.20.** Profils avec l'élément Belytschko Tsay quadrangle – Matériau TRIP 800

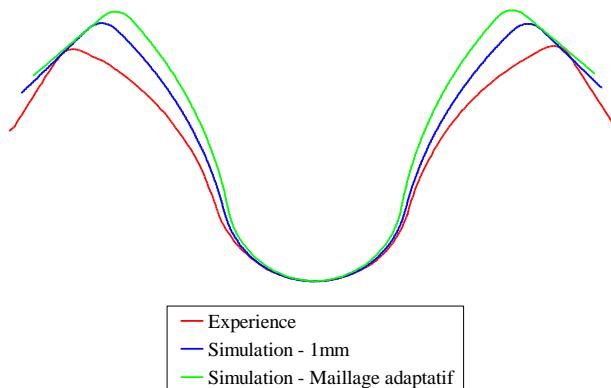
A titre indicatif, nous avons testé un maillage de 0,5 mm (figure 7.20) pour évaluer si la qualité du retour élastique s'améliorait en diminuant encore la taille des éléments. Même si la solution est meilleure, le résultat expérimental n'est pas atteint.

Pour tenter d'expliquer ces variations, nous avons regardé le trajet suivi par le flan durant la phase d'emboutissage (voir figure 7.21). Alors que le flan suit correctement le poinçon pour un maillage de 1 mm, lorsque le maillage est grossier, la raideur de la structure augmente et favorise le phénomène de rebond déjà observé dans les essais expérimentaux lorsque le jeu sur épaisseur devient faible [6][7].



**Figure 7.21.** Trajet suivi par le flan durant la phase d’emboutissage avec un maillage de 1mm (à gauche) et un maillage de 4mm (à droite)

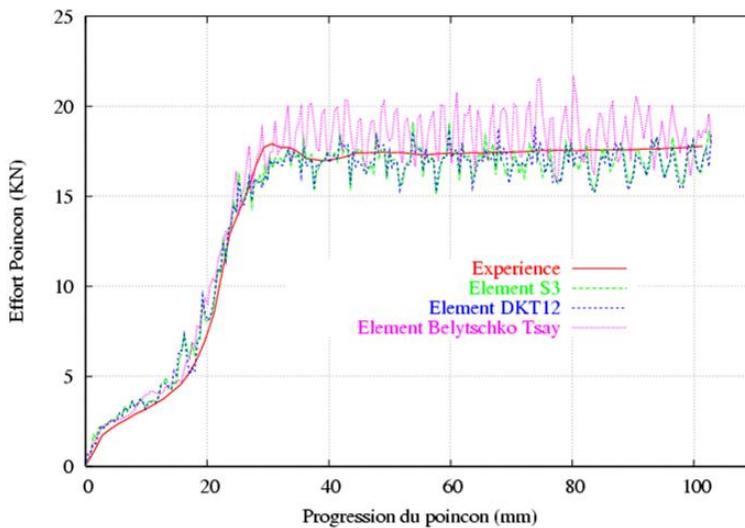
L’utilisation standard de PamStamp 2G fait appel au remaillage adaptatif du flan au cours du calcul. Une comparaison a été réalisée sur ce cas pour évaluer l’influence de ce maillage adaptatif. La figure 7.22 montre une comparaison entre un maillage régulier de 1 mm et un maillage adaptatif (taille de maille finale : 1 mm). Les résultats montrent une dégradation des résultats avec l’utilisation de cette technique.



**Figure 7.22.** Influence du maillage adaptatif

#### 7.4.3.Effort d’emboutissage

Les efforts d’emboutissage sont également vérifiés et comparés aux résultats expérimentaux présentés au chapitre 6. La figure 7.23 montre les efforts d’emboutissage obtenus pour l’acier TRIP 800. Un écrouissage isotrope + cinématique non linéaire a été utilisé pour les simulations. On constate sur cette figure que les efforts sont généralement bien reproduits. A noter, les variations, parfois importantes, de l’effort dans les simulations qui sont dues à la méthode dynamique explicite des différences centrées utilisée comme méthode de résolution [8].



**Figure 7.23.** Comparaison expérimentale/numérique des efforts d'emboutissage en fonction de la progression du poinçon

## 7.5. Simulation de l'essai de pliage à travers des rouleaux dans les codes de l'INSA de Lyon

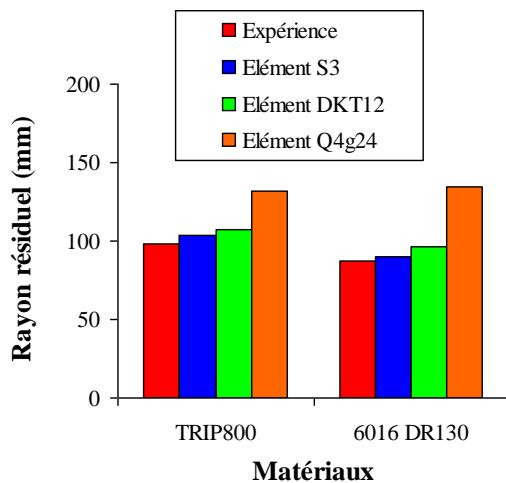
D'un point de vue numérique, la principale différence de cet essai par rapport à celui du U est l'utilisation d'un amortissement mécanique  $[C] = \alpha[M]$ . Dans cet essai où le flan n'est pas maintenu, l'amortissement permet au flan de ne pas osciller et ainsi modifier le retour élastique.

Taille des éléments finis	2 mm
<b>Eléments utilisés</b>	<b>S3 – DKT12 – Q4γ24</b>
Nombre de points d'intégration dans l'épaisseur	7 points de Lobatto
Coefficient de frottement	0
Vitesse de traction	2 m/s
Amortissement $C=\alpha M$	$\alpha \cdot \Delta t = 0,001$
<b>Matériaux utilisés</b>	<b>TRIP 800 – 6016 DR130</b>
Modélisation du matériau	Critère de Hill 48 + écrouissage combiné

**Tableau 7.7.** Paramètres de la mise en données

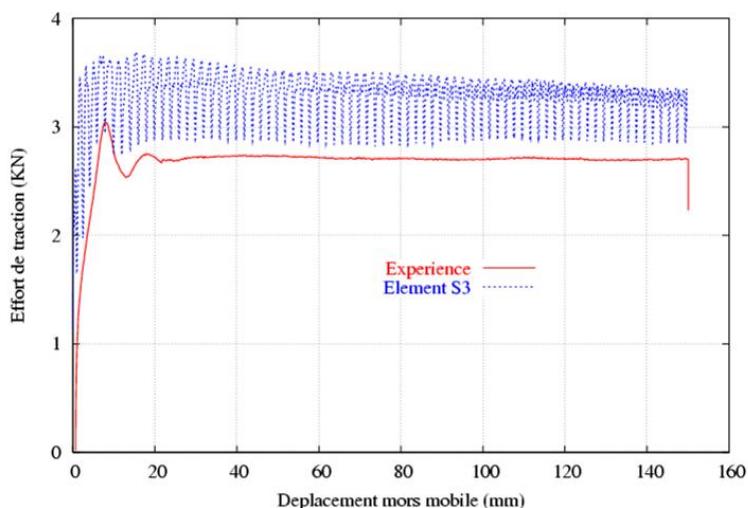
### 7.5.1. Influence de l'élément finis sur le retour élastique

L'utilisation des éléments finis S3 ou DKT12 permet d'obtenir un rayon résiduel sensiblement égal aux données expérimentales. L'élément fini Q4γ24 sous-estime assez nettement le retour élastique. Les tendances sont identiques pour les deux matériaux utilisés : l'acier TRIP 800 et l'aluminium 6016.



**Figure 7.24.** Rayon résiduel pour l'acier TRIP 800 et l'aluminium 6016

### 7.5.2.Effort de traction



**Figure 7.25.** Comparaison expérimentale/numérique de l'effort de traction en fonction du déplacement du mors mobile

L'effort de traction est légèrement surestimé par rapport à l'effort enregistré au cours de l'essai ; ceci est probablement dû à l'amortissement.

## 7.6. Simulation de l'essai de pliage à travers des rouleaux dans PamStamp 2G V2005.0.4

### 7.6.1. Calcul de référence

Taille des éléments finis	Maillage adaptatif – $t_m=1\text{mm}$ en fin de calcul
Elément utilisé	Belytschko Tsay
Nombre de points d'intégration dans l'épaisseur	7 points de Gauss
Coefficient de frottement	0
Vitesse de traction	2 m/s
Amortissement $C=\alpha M$	$\alpha.\Delta t = 0$
Matériau utilisé	TRIP 800
Modélisation du matériau	Critère de Hill 48 + écrouissage combiné

Tableau 7.8. Paramètres de la mise en données

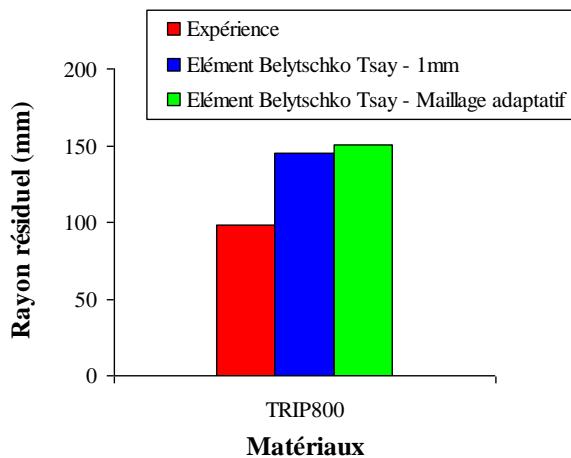


Figure 7.26. Rayons résiduels pour l'acier TRIP 800

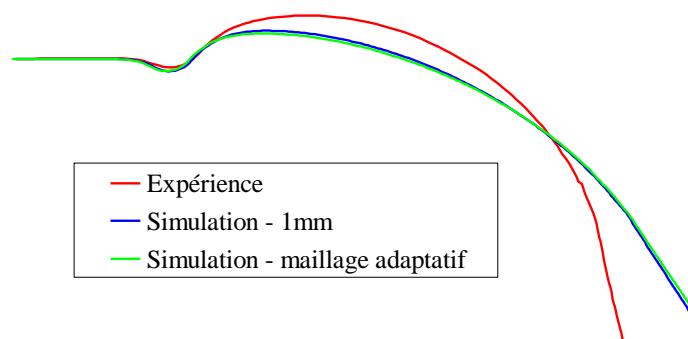


Figure 7.27. Profils après retour élastique pour l'acier TRIP 800 avec l'élément Belytschko Tsay

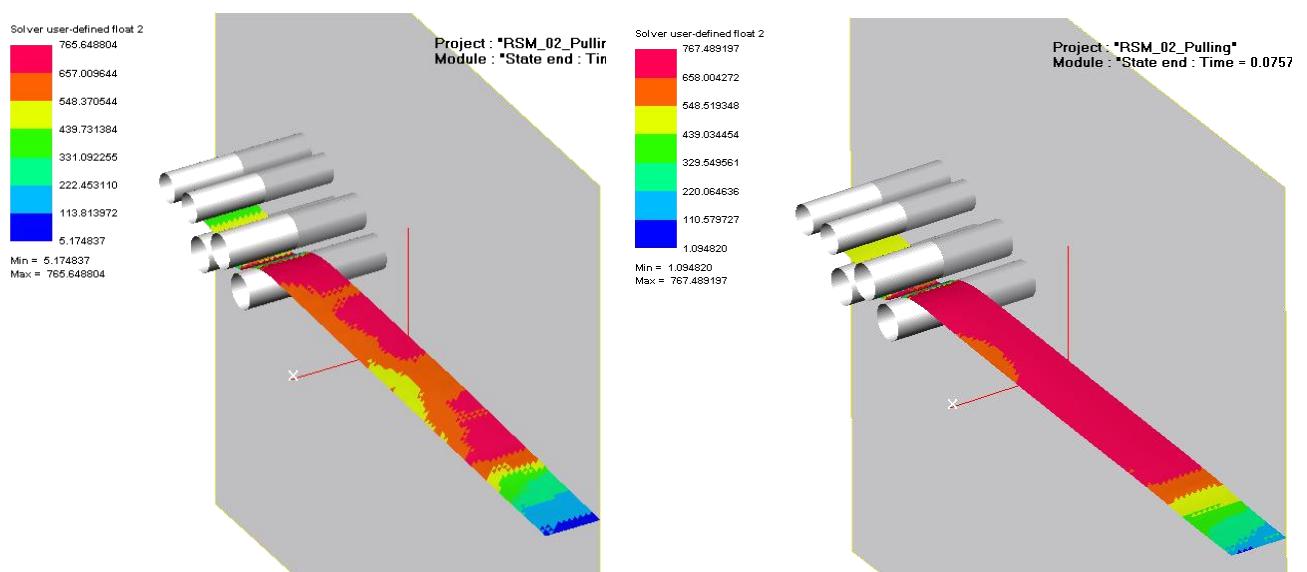
Ces premières simulations, réalisées sans amortissement, montrent que le retour élastique obtenu avec l'élément fini Belytschko Tsay est largement sous-estimé que ce soit avec un maillage régulier de 1 mm ou un maillage adaptatif. Nous confirmons ainsi sur un deuxième cas académique, les résultats observés sur le cas en U avec cet élément fini.

### 7.6.2. Prise en compte de l'amortissement

Taille des éléments finis	2 mm
Elément utilisé	S3
Nombre de points d'intégration dans l'épaisseur	7 points de Gauss
Coefficient de frottement	0
Vitesse de traction	2 m/s
<b>Amortissement <math>C=\alpha M</math></b>	<b>2 cas : <math>\alpha \cdot \Delta t = 0</math> et <math>\alpha \cdot \Delta t = 0,001</math></b>
Matériau utilisé	TRIP 800
Modélisation du matériau	Critère de Hill 48 + écrouissage combiné

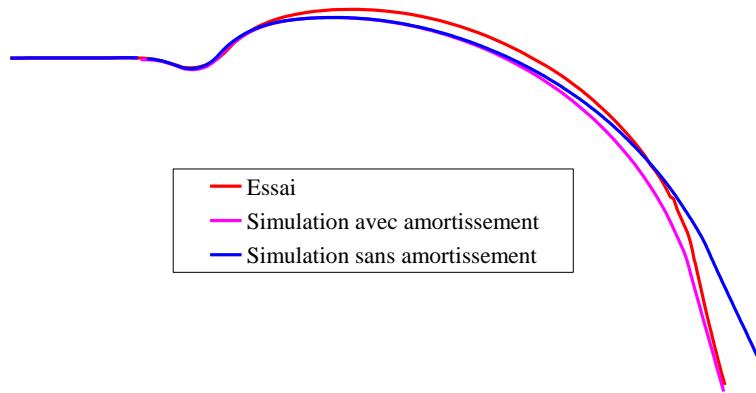
**Tableau 7.9.** Paramètres de la mise en données

La prise en compte de l'amortissement dans cet essai est essentielle car le flan n'est pas maintenu comme dans un emboutissage classique - où le flan est guidée entre la matrice et le serre flan - et peut se mettre à vibrer. La figure 7.28 montre les variations de contraintes que l'on obtient dans la zone de même histoire de déformation sans amortissement dû aux vibrations du flan entre les rouleaux et la zone tenue par le mors mobile. Grâce à l'amortissement, la contrainte est uniforme dans cette zone de même histoire de déformation.



**Figure 7.28.** Visualisation de la contrainte équivalente à la fin de la phase de traction sans amortissement (à gauche) et avec amortissement (à droite)

Cette variation d'état de contraintes se traduit fortement sur le retour élastique (voir figure 7.29). Alors qu'avec de l'amortissement, nous sommes proches du rayon expérimental, sans amortissement le retour élastique est moins important.

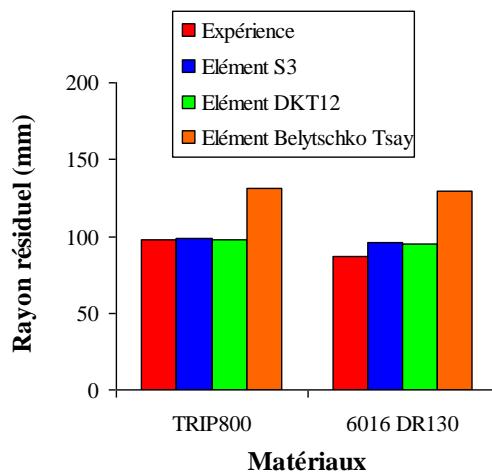


**Figure 7.29.** Profils après retour élastique pour l'acier TRIP 800

### 7.6.3. Influence de l'élément

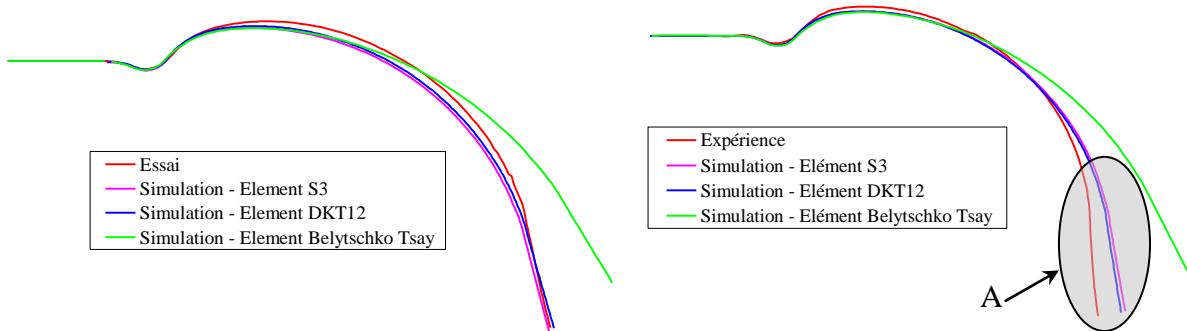
Taille des éléments finis	2 mm
<b>Eléments utilisés</b>	<b>Belytschko Tsay – S3 – DKT12</b>
Nombre de points d'intégration dans l'épaisseur	7 points de Gauss
Coeff de frottement	0
Vitesse de traction	2 m/s
Amortissement $C=\alpha M$	$\alpha \Delta t = 0,001$
<b>Matériaux utilisés</b>	<b>TRIP 800 – 6016 DR130</b>
Modélisation du matériau	Critère de Hill 48 + écrouissage combiné

**Tableau 7.10.** Paramètres de la mise en données



**Figure 7.30.** Rayons résiduels

La figure 7.30 montre que pour une taille de maille équivalente, le retour élastique est mieux simulé avec les éléments finis S3 et DKT12 qu'avec l'élément Belytschko Tsay.



**Figure 7.31.** Profils après retour élastique pour l'acier TRIP 800 (à gauche) et l'alliage d'aluminium 6016 (à droite)

On notera que la zone repérée par A sur la figure 7.31 correspond à la partie du flan qui est déformée en premier. Le rouleau mobile est descendu puis la traction du flan débute. Cette phase transitoire n'est pas bien reproduite en simulation provoquant des écarts dans certaines configurations.

## 7.7. Conclusion

Ce chapitre valorise le travail de caractérisation réalisé précédemment en traction et flexion tant sur l'aspect rhéologique que numérique. Il permet aussi d'évaluer aisément la contribution du type d'éléments finis et des lois matériaux employés pour la prédiction du retour élastique.

Les résultats montrent l'intérêt des lois d'écrouissage combiné qui permettent de prendre en compte l'effet Bauschinger naissant lors des phases de pliage/dépliage du flan existantes pendant l'emboutissage. La prise en compte d'une composante cinématique dans l'écriture de l'écrouissage du matériau est essentielle pour obtenir des résultats cohérents vis-à-vis de l'expérience. On note également que l'ajout de deux paramètres cinématiques à la loi de Lemaitre et Chaboche n'améliore pas les prédictions de retour élastique puisque ces paramètres sont identifiés pour des bas niveaux de déformation, peu rencontré en emboutissage.

L'étude de l'influence de l'élément fini sur la prédiction du retour élastique montre que les éléments finis S3 et DKT12 permettent d'obtenir des résultats conformes aux essais expérimentaux et sont très peu sensibles à la taille de maille choisie par l'utilisateur. Par ailleurs, on constate que l'élément Belytschko Tsay sur ces deux essais académiques donne de moins bonnes prédictions du retour élastique et est extrêmement sensibles à la taille de maille. Les résultats se dégradent rapidement lorsque la taille de maille augmente.

# Bibliographie

- [1] Boulmane L., Application des techniques implicites-explicites de la dynamique transitoire à la simulation numérique en mise en forme des métaux, Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, 1994.
- [2] Bathe K.J., Dvorkin E.N., A four-node plate bending element based on mindlin-reissner plate theory and a mixed interpolation, International Journal for Numerical Methods in Engineering, p367-383, 1985.
- [3] Belytschko T., and Tsay C-S., A stabilization procedure for the quadrilateral plate element with one-point quadrature, Int. J. for Numerical Methods in Engineering, vol. 19, p405-420, 1983.
- [4] PamStamp 2G 2005 User's guide.
- [5] Lange C., Etude physique et modélisation numérique du procédé de sertissage de pièces de carrosserie, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, CEMEF, 2006.
- [6] Sabourin F., Carbonnierre J., Brunet M., A new quadrilateral shell element using 16 DOF, Engineering Computations, à paraître vol 26 issue 3.
- [7] Sabourin F., Carbonnierre J., Brunet M., A new quadrilateral shell element using 16 degrees of freedom, Proceedings of the International Conference NUMISHEET 2008, Interlaken, p393-398, 2008.
- [8] Soive A., Apports à la méthodes éléments finis appliqués aux calculs de structures en dynamique rapide et amortissement numérique, Thèse de doctorat, Université de Bretagne Sud, 2003.



# Chapitre 8

## Simulations numériques sur pièces industrielles

<b>8.1. Introduction .....</b>	142
<b>8.2. Modélisation des conditions aux limites pour le calcul du retour élastique .....</b>	142
<b>8.3. Bavolet semi-industriel .....</b>	143
8.3.1. Présentation générale.....	143
8.3.2. Résultats .....	145
<b>8.4. Bavolet.....</b>	147
8.4.1. Présentation générale.....	147
8.4.2. Déformations.....	148
8.4.3. Ecarts .....	151
<b>8.5. Renfort pied arrière .....</b>	152
8.5.1. Présentation générale.....	152
8.5.2. Faisabilité .....	153
8.5.3. Résultats de retour élastique sur l'opération d'emboutissage OP20 .....	155
8.5.4. Résultats de retour élastique sur l'opération de découpe OP30 .....	157
8.5.5. Résultats de retour élastique sur l'opération de calibrage OP40.....	158
<b>8.6. Conclusion.....</b>	159

## 8.1. Introduction

Les modèles de comportement rhéologique des tôles et les éléments finis sans degrés de liberté en rotation (éléments finis S3 et DKT12) développés dans cette thèse sont validés sur des cas de pièces académiques (pièce en U et passage entre rouleau). Ces cas académiques ont été nécessaires pour vérifier le bon comportement de nos développements. L'étape suivante est de connaître la pertinence de nos développements sur différentes pièces industrielles (d'aspects en aluminiums et de structures en aciers) d'un véhicule. Nous présentons dans ce chapitre, les résultats obtenus que sur 3 cas :

- un embouti bavolet semi-industriel ;
- un embouti avec une découpe sur le bavolet Renault ;
- une gamme complète de 3 opérations sur le renfort pied arrière 306.

En ce qui concerne les modèles de comportement rhéologique, nous nous sommes focalisés à l'utilisation d'une modélisation à écrouissage combiné de type Lemaitre et Chaboche. L'écrouissage isotrope est modélisé via le modèle de Voce et l'écrouissage cinématique ne tient compte que de la formulation à deux paramètres. En effet, les cas académiques ont montré que l'utilisation d'une loi d'écrouissage cinématique avec une formulation à quatre paramètres n'améliore pas sensiblement la prédition du retour élastique.

Les résultats numériques sont comparés à ceux des essais réalisés chez PSA Peugeot Citroën Automobiles. Les données analysées sont essentiellement les avalements du flan, les déformations et la conformité géométrique des pièces.

Dans ce chapitre, le problème du choix des points de blocage pendant le calcul de retour élastique est abordé dans le cas général d'une pièce industrielle.

## 8.2. Modélisation des conditions aux limites pour le calcul du retour élastique

Pour éviter tout mouvement de corps rigides lors du calcul de retour élastique en implicite avec PamStamp 2G V2005.0.4, des conditions aux limites supplémentaires sont imposées en bloquant 6 degrés de liberté de la structure sur 3 nœuds du flan (conditions de blocages isostatiques).

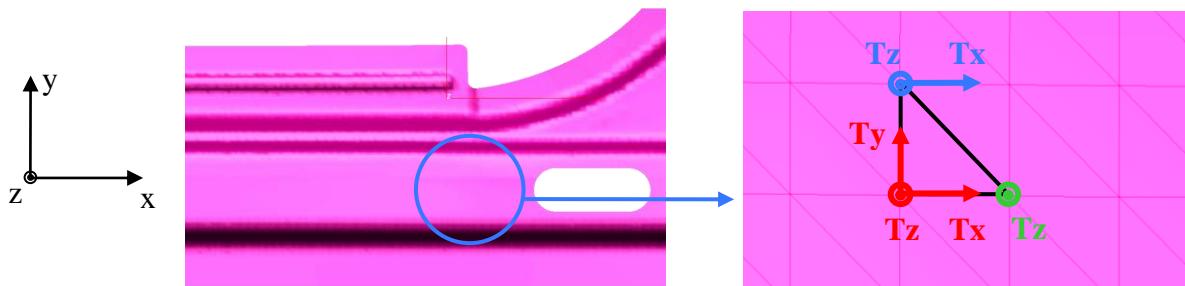
Cette opération simple sur une pièce simple comme un U est plus délicate sur une pièce industrielle. En effet, un choix peu judicieux de ces points et des directions de blocage empêcherait la pièce de se détendre normalement et fausserait indubitablement la lecture du retour élastique.

Le blocage des degrés de liberté en rotation déconseillé par l'éditeur est néanmoins impossible à mettre en œuvre sur nos éléments S3 (ou DKT12) du fait de l'absence de rotation sur les nœuds sommets.

La méthode que nous proposons consiste à choisir un élément fini et de bloquer trois nœuds dans un repère local de l'élément fini (figure 8.1) :

- 3 nœuds sont bloqués selon la direction normale à l'élément z ;
- 2 nœuds alignés sur x (ou y) sont bloqués dans la direction y (ou respectivement x) ;
- 1 nœud est bloqué en x (respectivement y).

La limitation de ce principe est un éventuel problème de convergence du calcul de retour élastique implicite, que nous n'avons encore jamais rencontré dans l'ensemble des cas que nous avons traités.



**Figure 8.1.** Position des points de blocage

### 8.3. Bavolet semi-industriel

#### 8.3.1. Présentation générale

Il s'agit d'un outil simplifié et à échelle réduite. Les données matériaux et les résultats expérimentaux sont fournis par ArcelorMittal.

Le critère de plasticité Hill 48 est utilisé pour modéliser le matériau avec un écrouissage de type Lemaitre et Chaboche à deux paramètres.



**Figure 8.2.** Vue de l'outillage

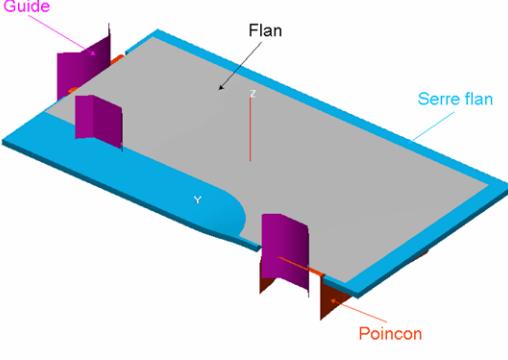
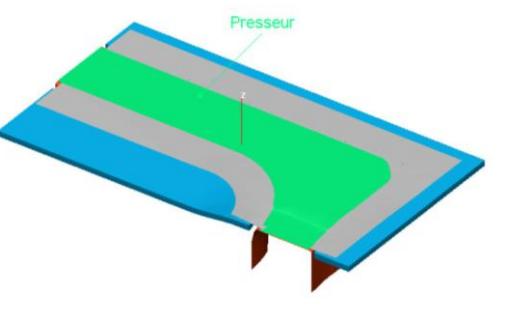
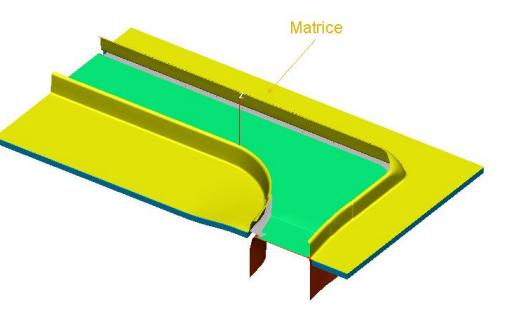
épaisseur	f	g	n	$\sigma_0$ (MPa)	Q (Mpa)	b
1.2	0.39	0.50	1.36	384.6	432.6	20.7
$C_m$ (MPa)						$\gamma_m$
12770.0						86.59.1

**Tableau 8.1.** Paramètres identifiés pour l'acier TRIP 800 (épaisseur 1.2mm)

Quatre calculs sont réalisés pour ce cas test :

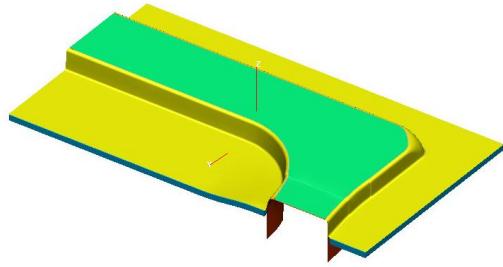
- cas 1 : un premier calcul avec l'élément Belytschko Tsay (BT) et l'utilisation d'un maillage adaptatif ;
- cas 2 : un second calcul avec l'élément BT et un maillage régulier formé essentiellement de quadrangles. Le découpage du flan dans la longueur est de 2mm ;
- cas 3 : le troisième calcul avec l'élément BT et un maillage régulier formé essentiellement de triangles ; les triangles sont obtenus en découpant en deux les quadrangles du précédent maillage ;
- cas 4 : le dernier calcul est réalisé avec l'élément S3 et le même maillage que le précédent.

Le tableau 8.2 décrit le processus cinématique double effet du process modélisé en numérique.

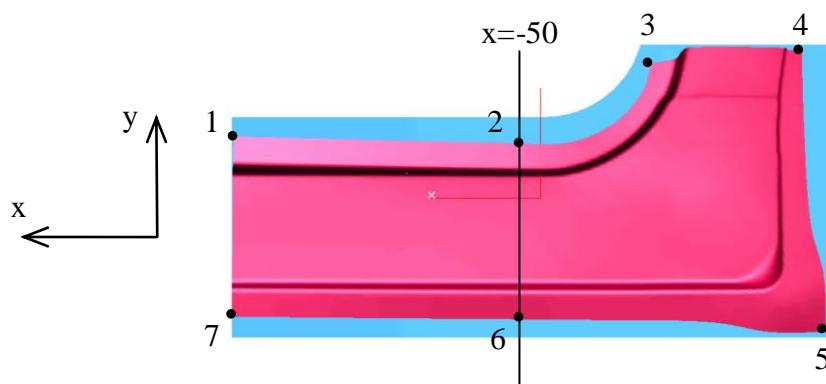
<b>A- Gravité</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Mise en position du flan sur les guides</li> <li>- Mise en position du flan sur le serre flan et le poinçon</li> <li>- Application du chargement</li> </ul>	
<b>B- Serrage presseur</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Mise en position du presseur sur le flan</li> <li>- Déplacement du presseur : <math>V_z = 2\text{m/s}</math> <u>Arrêt du calcul</u> : pincement entre le presseur et le poinçon</li> </ul>	
<b>C- Serrage serre flan</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Mise en position de la matrice sur le flan</li> <li>- Déplacement de la matrice : <math>V_z = 2\text{m/s}</math> <u>Arrêt du calcul</u> : pincement entre la matrice et le serre flan</li> </ul>	

**D- Emboutissage**

- Déplacement de la matrice :  $V_z = 5\text{m/s}$
  - Le serre flan est suiveur :  $F=380\text{ kN}$
  - Le presseur est suiveur :  $F=160\text{ kN}$
- Arrêt du calcul : pincement entre la matrice et le poinçon

**E- Retour élastique en implicite****Tableau 8.2.** Détail de la cinématique de l'essai**8.3.2. Résultats****8.3.2.1. Analyse des avalements**

La comparaison des avalements (également des déformations) permet de vérifier le bon déroulement de l'opération d'emboutissage. En effet, il est illusoire de penser obtenir des résultats corrects en retour élastique si les avalements et les déformations déterminés pendant la mise en forme ne correspondent pas à l'expérience.

**Figure 8.3.** Position des points de mesure

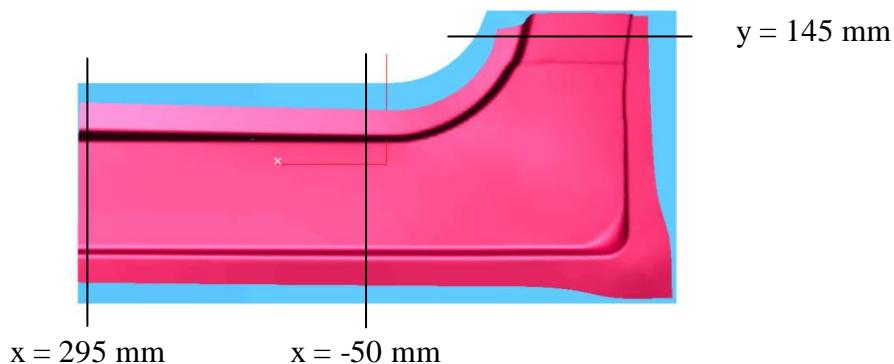
Points	Expérience		<u>Cas 1 :</u> Simulation BT maillage adaptatif		<u>Cas 2 :</u> Simulation BT quadrangle		<u>Cas 3 :</u> Simulation BT triangle		<u>Cas 4 :</u> Simulation S3 triangle	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
<b>1</b>	2.3	19.8	2.2	21.1	2.4	21.3	2.4	21.6	2.2	20.6
<b>2</b>	0.0	28.7	0.0	28.7	0.0	29.0	0.0	28.9	0.0	28.7
<b>3</b>	11.1	20.5	11.6	20.3	11.3	19.7	11.1	19.7	12.3	19.7
<b>4</b>	30.1	6.6	31.8	5.8	32.5	4.5	32.5	4.0	30.8	5.1
<b>5</b>	6.1	5.5	5.1	6.6	5.0	6.7	5.1	6.8	4.4	4.3
<b>6</b>	0.0	19.8	0.0	20.5	0.0	20.4	0.0	20.6	0.0	20.4
<b>7</b>	-0.2	20.9	-0.2	23.6	-0.1	23.8	-0.2	23.8	0.0	22.4

**Tableau 8.3.** Avalements en mm dans les directions x et y

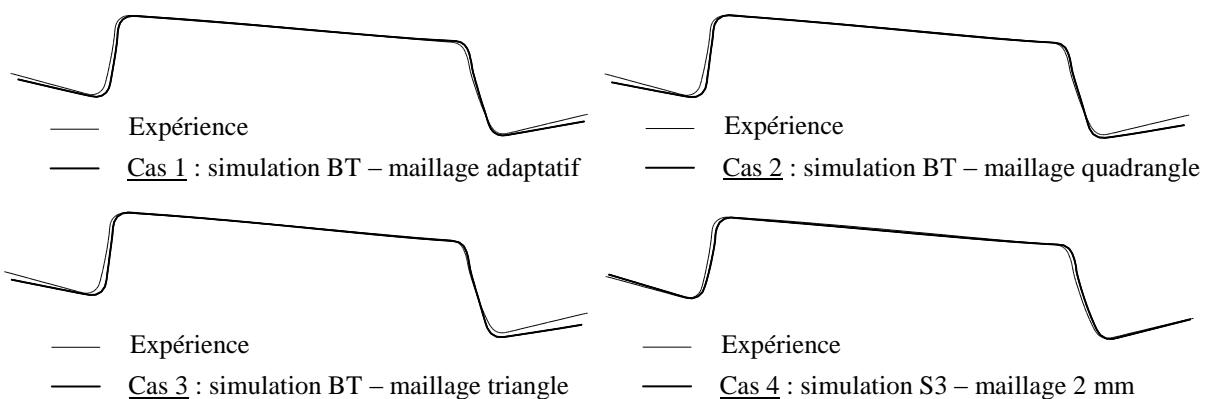
Les relevés des avalements donnés au tableau 8.3 pour les 7 points de mesures indiqués sur la figure 8.3 montrent que de manière générale les avalements sont quasiment les identiques quels que soient le maillage et le type d'élément finis utilisé.

### 8.3.2.2. Etude de sections

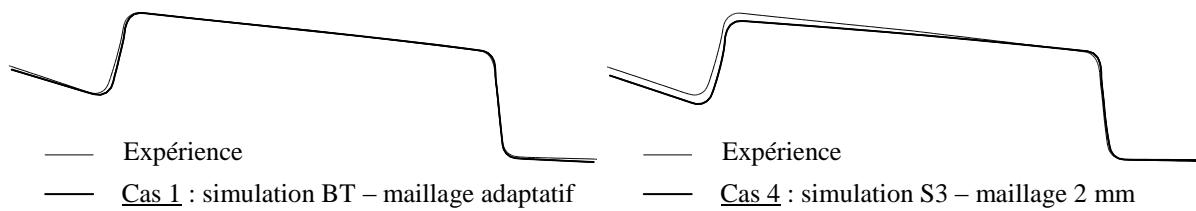
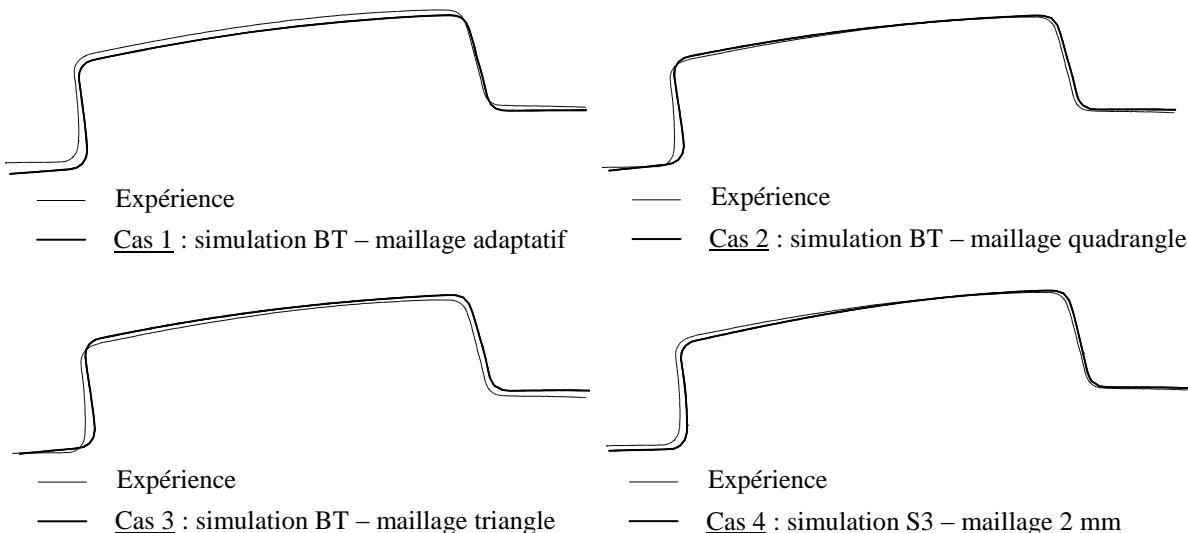
Pour visualiser les écarts géométriques entre la pièce issue de la simulation et la pièce réelle, nous avons choisi sur cette pièce de réaliser trois sections :



**Figure 8.4.** Position des sections analysées



**Figure 8.5.** Profils obtenus en x = 295 mm

**Figure 8.6.** Profils obtenus en  $x = -50$  mm**Figure 8.7.** Profils obtenus en  $y = 145$  mm

L’analyse des différents résultats sur la section  $x = 295$  mm (figure 8.5) met en évidence la bonne prédiction du retour élastique à l’ouverture avec l’élément S3. Pour les sections  $x = -50$  mm (figure 8.6) et  $y = 145$  mm (figure 8.7), on note que l’élément S3 ne prédit pas correctement le mode de vrillage présent après retour élastique.

## 8.4. Bavolet

### 8.4.1. Présentation générale

Il s’agit d’une pièce en acier DP780 dont les dimensions sont environ  $1500 \times 500$  mm<sup>2</sup>. Compte tenu de la symétrie de la pièce, seule la moitié est simulée. Le comportement du matériau est modélisé en utilisant le critère de plasticité de Hill 48 associé à une loi d’écrouissage combiné de type Lemaitre et Chaboche à deux paramètres. Les paramètres matériaux sont donnés dans le tableau 8.4.

épaisseur	f	g	n	$\sigma_0$ (MPa)	Q (Mpa)	b
0.87	0.45	0.57	1.46	498.5	140.5	44.83
			$C_m$ (MPa)	$\gamma_m$		
			4747.7	17.1		

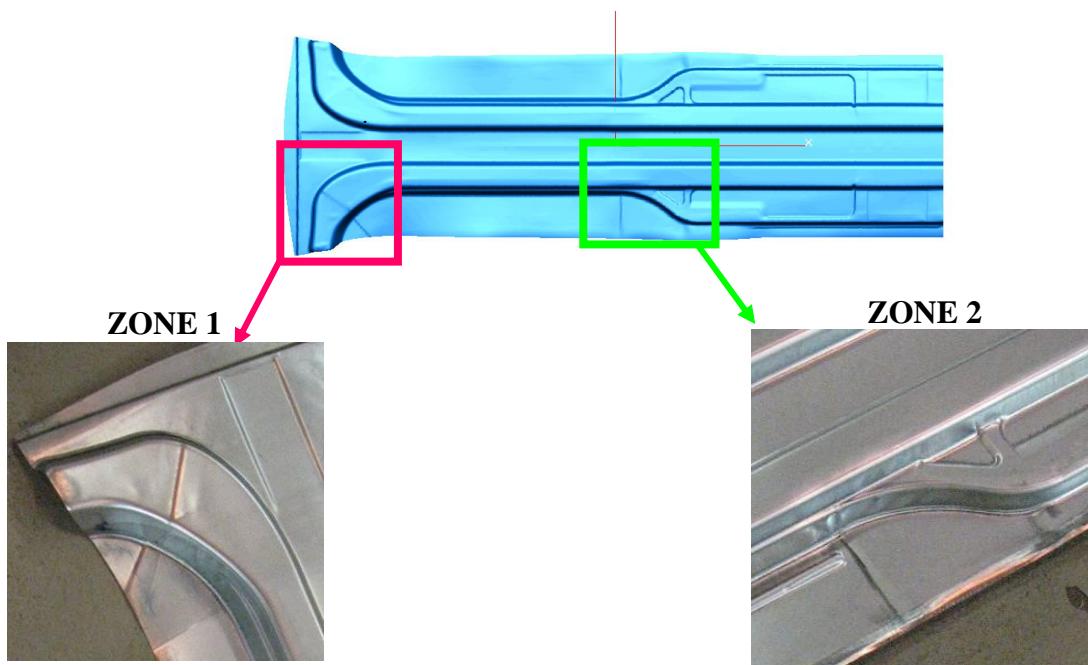
**Tableau 8.4.** Paramètres identifiés pour l’acier DP780

Trois résultats de calculs sont comparés :

- cas 1 : un premier calcul de référence avec l'élément Belytschko Tsay (BT) avec l'utilisation d'un maillage adaptatif ;
- cas 2 : un second calcul avec l'élément Belytschko Tsay quadrangulaire avec un maillage régulier. Le découpage du flan dans la longueur est de 2mm ;
- cas 3 : un troisième calcul avec l'élément S3. Les éléments triangulaires sont obtenus en coupant en deux les quadrangles du précédent maillage.

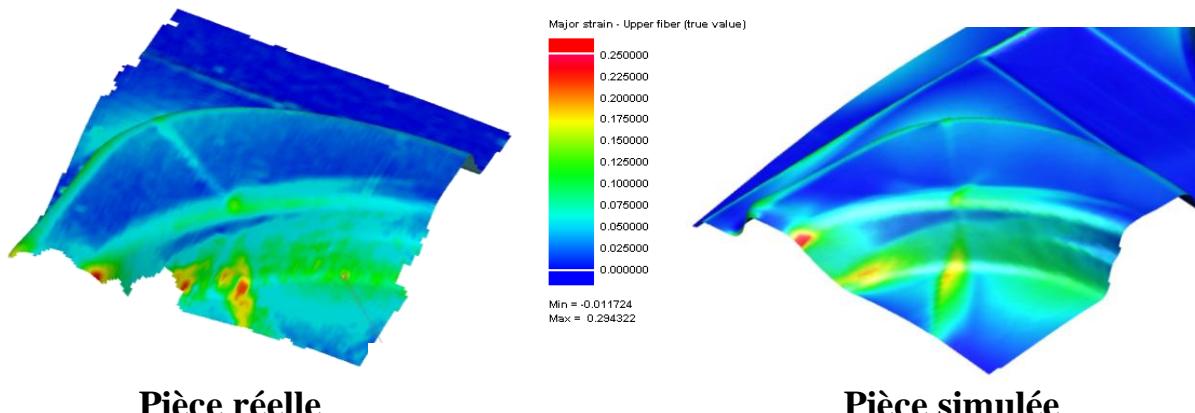
#### 8.4.2. Analyse des déformations

Pour ce cas industriel, nous comparons les valeurs de déformations majeure et mineure obtenues en simulations par rapport à celles mesurées sur la pièce dans des zones particulières en sortie d'OP20. Ces zones ont été cartographiées à l'aide du système ARGUS au sein du service PMXP/CEB/MFO.

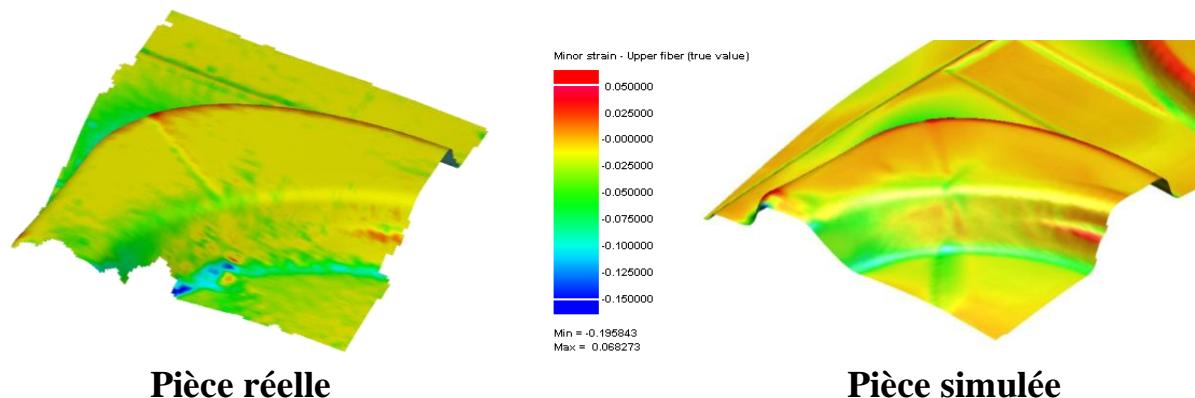


**Figure 8.8.** Présentation des zones cartographiées pour les relevés de déformation

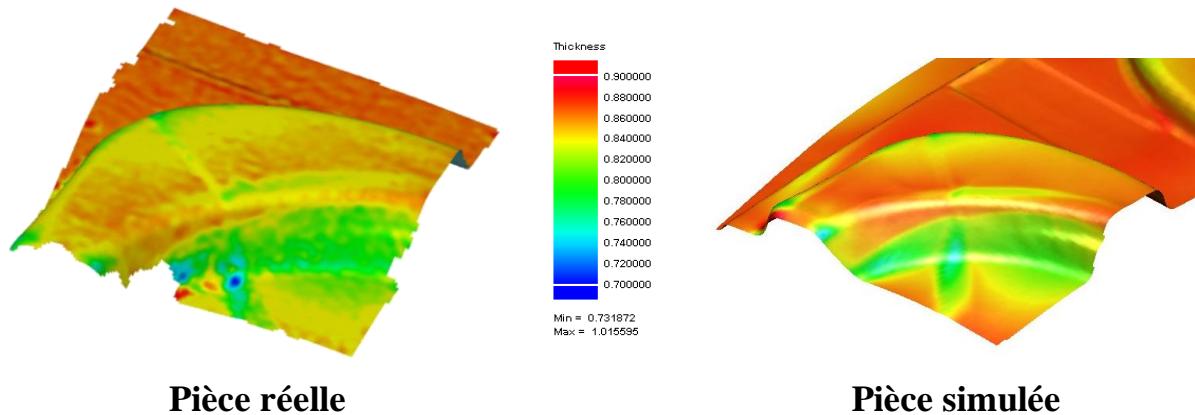
Les figures 8.9 à 8.14 montrent les résultats des relevés expérimentaux et des simulations réalisées avec l'élément S3. Les comparaisons des déformations et épaisseurs réelles par rapport à celles obtenues en numériques mettent en évidence que les résultats sur les fonds d'embouti, les parois ou encore les rayons sont très satisfaisants.



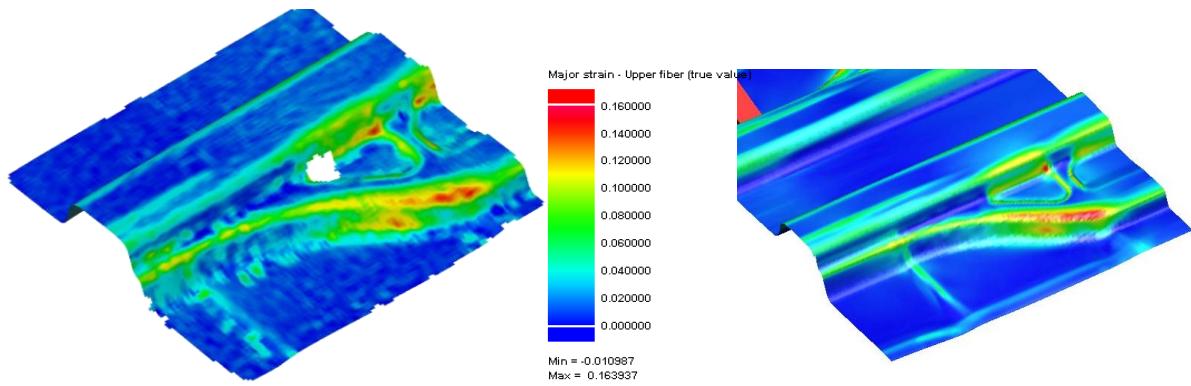
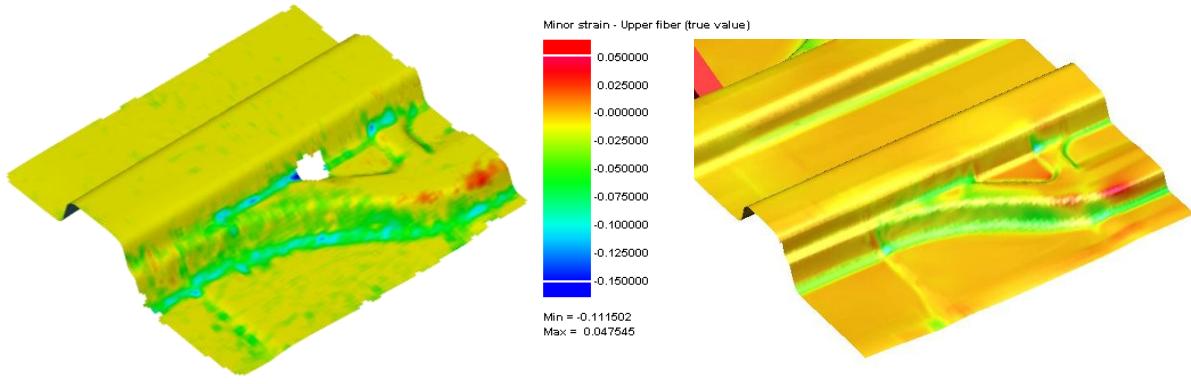
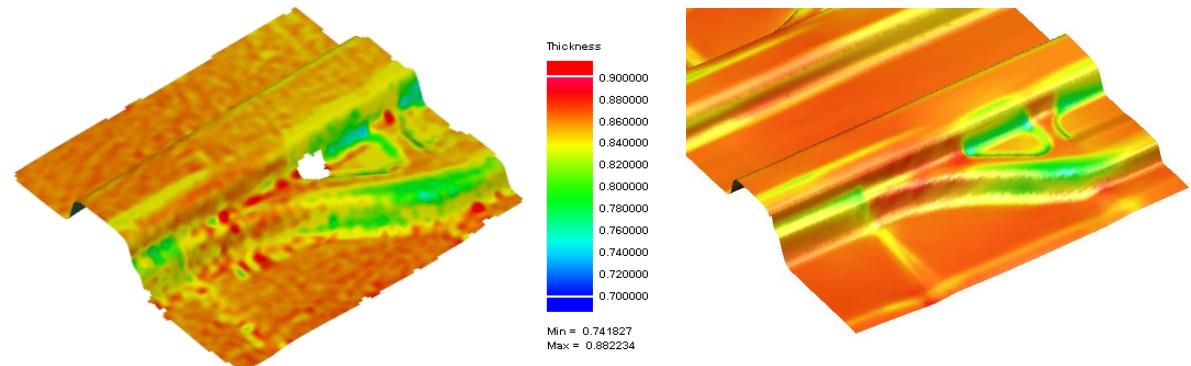
**Figure 8.9.** Déformation majeure dans la zone 1



**Figure 8.10.** Déformation mineure dans la zone 1



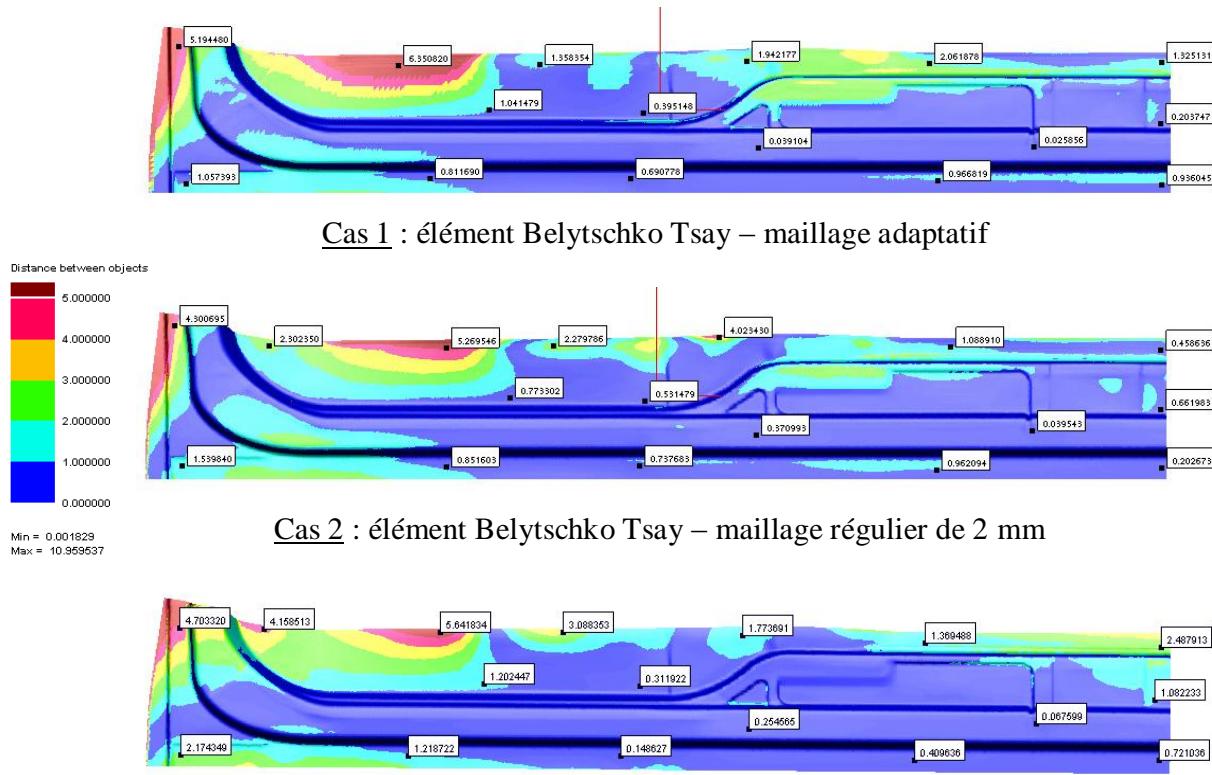
**Figure 8.11.** Epaisseur dans la zone 1

**Pièce réelle****Pièce simulée****Figure 8.12.** Déformation majeure dans la zone 2**Pièce réelle****Pièce simulée****Figure 8.13.** Déformation mineure dans la zone 2**Pièce réelle****Pièce simulée****Figure 8.14.** Epaisseur dans la zone 2

### 8.4.3. Ecarts

Le relevé de la géométrie de la pièce expérimentale est réalisé par une méthode sans contact de digitalisation 3D. La digitalisation de chaque pièce est effectuée avec un capteur KREON, celui-ci générant un nuage de points. Ces points sont ensuite utilisés pour construire un maillage de la pièce. Un offset de la demi-épaisseur est finalement appliqué au nuage de points pour se repositionner sur la fibre neutre.

Pour pouvoir comparer les géométries expérimentales et numériques, la pièce issue de la simulation est recalée sur la pièce réelle en minimisant l'écart entre les deux pièces au sens des moindres carrés. Cette approche est utilisée pour l'ensemble des cas que nous avons traités dans le cadre de cette thèse.



**Figure 8.15.** Visualisation des écarts entre les simulations et les pièces réelles

La figure 8.15 présente, pour chacune des trois simulations effectuées, les cartographies des écarts entre les pièces issues des simulations et la pièce réelle. La qualité de la prévision du retour élastique est quantifiée via une étude statistique mesurant la distance entre les deux pièces (voir tableau 8.5). Sur ce tableau, aucune différence importante n'est observée sur l'élément Belytschko Tsay (BT) avec un maillage adaptatif ou un maillage régulier. Cependant, la qualité de la prédiction du retour élastique est améliorée avec l'élément S3 puisque 56 % de la surface de la simulation réalisée avec cet élément est dans l'intervalle +/- 0.5 mm de la pièce réelle alors que ce pourcentage se limite à 44 % avec l'élément Belytschko Tsay.

Pourcentage de la surface de la pièce comprise dans l'écart spécifié			
Ecarts	Cas 1 : Elément BT – maillage adaptatif Tm init = 8.8 mm ; Tm finale = 1.1 mm	Cas 2 : Elément BT – maillage régulier de 2 mm	Cas 3 : Elément S3 – maillage régulier de 2 mm
0 → 0,5	44 %	44 %	56 %
0 → 1	66 %	70 %	73 %
0 → 2	84 %	90 %	87 %

Exemple de lecture : 87 % de la surface de la simulation réalisée avec l'élément S3 se trouve à plus ou moins 2 mm de la pièce expérimentale

**Tableau 8.5.** Analyse statistique

## 8.5. Renfort pied arrière

### 8.5.1. Présentation générale

Pour cette étude, la pièce est réalisée en acier TRIP 800. Le matériau est modélisé avec le critère de plasticité Hill 48 et un écrouissage de Lemaitre et Chaboche à deux paramètres.

Bien que cette pièce soit symétrique, les deux pièces sont modélisées à cause de la mise au point (MAP) réalisée sur l'outillage créant de légères différences de géométries entre la pièce droite et la pièce gauche. Les surfaces CAO utilisées pour les simulations proviennent en effet de la digitalisation 3D des surfaces d'outils après MAP. La digitalisation est effectuée avec ATOS qui génère un nuage de points pour chaque outil. Ces points sont ensuite utilisés pour construire les surfaces CAO des outils nécessaires en simulation. Grâce à une mesure in situ des outils d'emboutissage par photogrammétrie, TRITOP permet le repositionnement des outils digitalisés dans leur position d'emboutissage.

L'objectif est de montrer la différence de géométrie entre les deux parties qui intervient lors de l'opération de séparation.

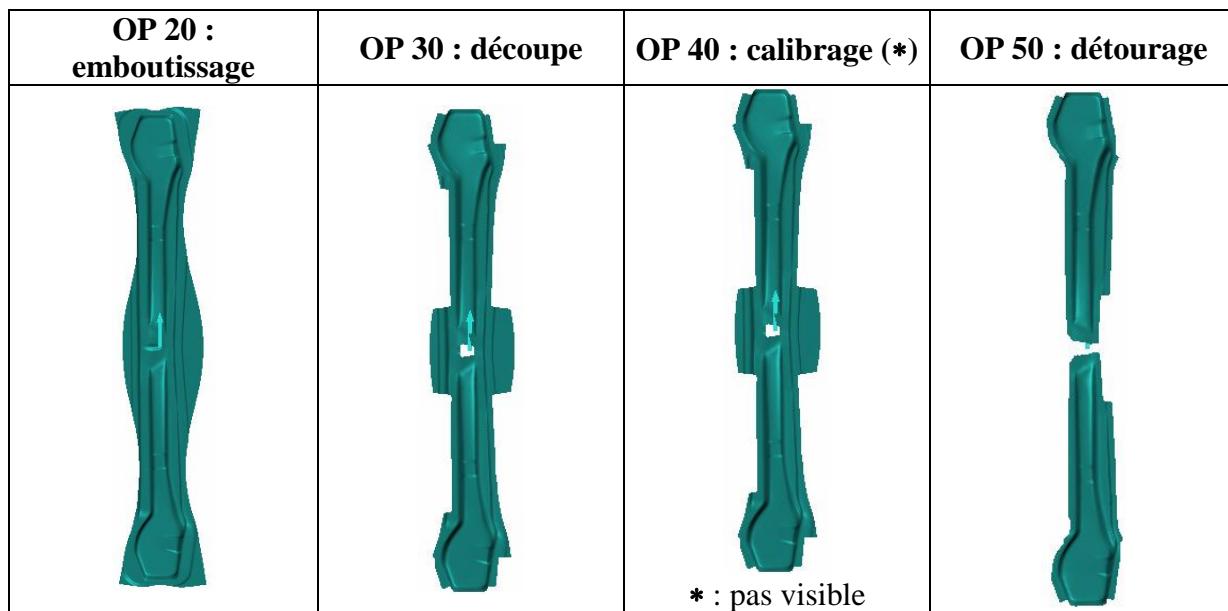
épaisseur	f	g	n	$\sigma_0$ (MPa)	Q (Mpa)	b
1.05	0.42	0.53	1.31	494.0	288.1	11.6
						$C_m$ (MPa)
						$\gamma_m$
						1953.7
						4.73

**Tableau 8.6.** Paramètres identifiés pour l'acier TRIP 800

Le renfort pied arrière est produit à l'aide de 4 opérations successives de mise en forme (figure 8.16) :

- OP 20 : opération d'emboutissage ;
- OP 30 : opération de découpe ;
- OP 40 : opération de calibrage (emboutissage de petits rayons – non visible) ;
- OP 50 : opération de détourage.

Les résultats de l'opération de détourage OP 50 ne seront pas présentés ici.



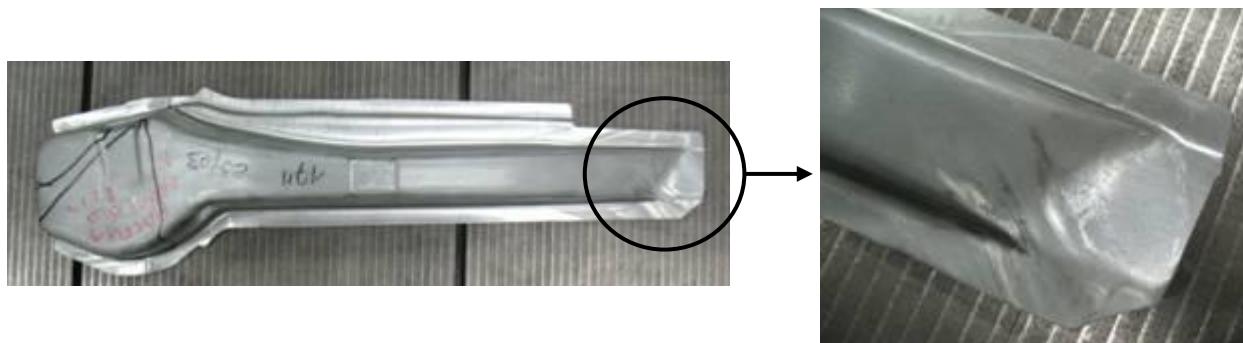
**Figure 8.16.** Détails de la gamme d'emboutissage du renfort pied arrière

Comme pour l'exemple précédent, trois résultats de calculs sont comparés ici :

- cas 1 : calcul de référence avec l'élément Belytschko Tsay et le maillage adaptatif ;
- cas 2 : calcul avec l'élément Belytschko Tsay et un maillage régulier de 2 mm ;
- cas 3 : calcul avec l'élément S3 et un maillage régulier pour différentes tailles de maille (1,6 mm, 2 mm, 2,5 mm et 3 mm).

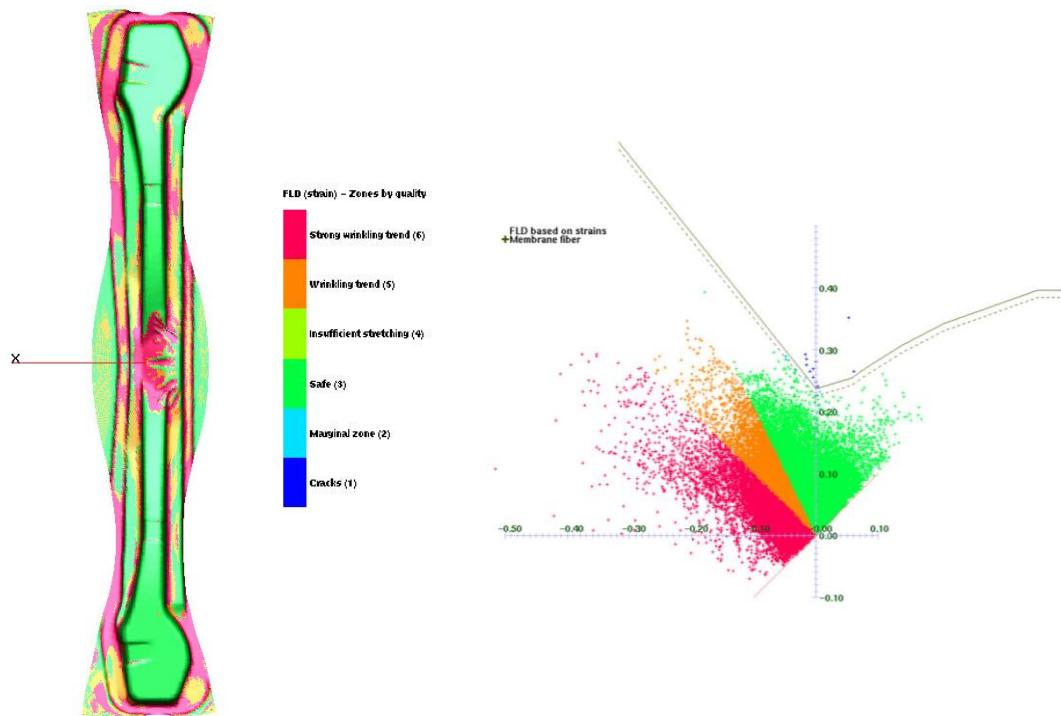
### 8.5.2. Faisabilité

La faisabilité est considérée comme acquise en l'absence de risque de casses ou de plis dans des zones sensibles. Pour cela, on détermine la position du niveau de déformation de chaque élément par rapport à la courbe limite de formage (voir chapitre 2).

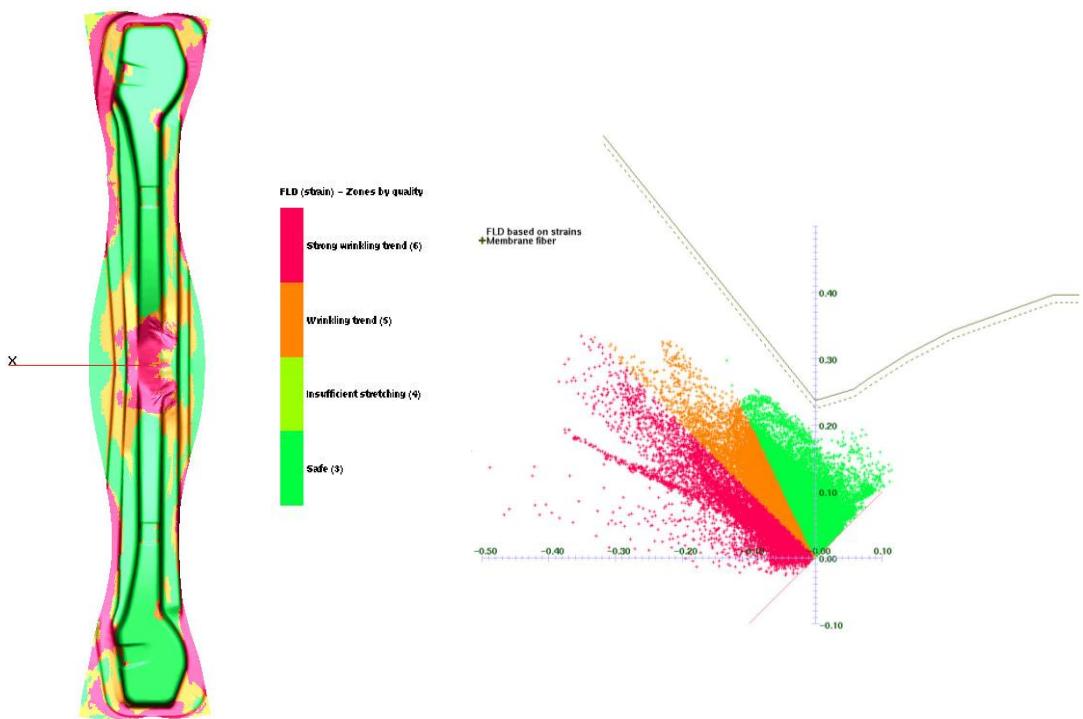


**Figure 8.17.** Pièce finale

Les figures 8.18 et 8.19 présentent les résultats obtenus avec l'élément S3 (maillage régulier de 2mm) et l'élément Belytschko Tsay (maillage adaptatif). Aucune casse n'est constatée avec l'élément Belytschko Tsay alors que l'élément S3 prédit des casses au milieu du renfort. Ces casses apparaissent dans une zone où beaucoup de plis redoublés apparaissent. Nous remarquons que l'état de la pièce en simulation est semblable à la réalité. Nous retrouvons de forts plis en milieu de pièce et des plis importants dans les feuillures.



**Figure 8.18.** Position des points par rapport à la CLF élément S3 - 2mm



**Figure 8.19.** Position des points par rapport à la CLF élément BT- maillage adaptatif

### 8.5.3. Résultats de retour élastique sur l'opération d'emboutissage OP20

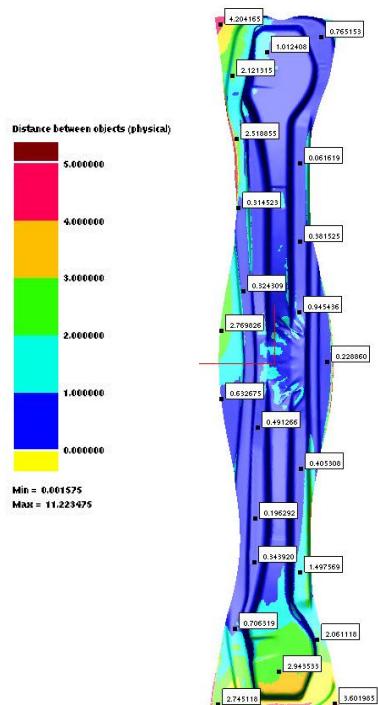
La géométrie mesurée expérimentalement est comparée à celle obtenue en simulation pour les deux éléments (S3 et Belytschko Tsay) après un recalage des deux pièces au sens des moindres carrés. On note que les deux éléments utilisés donnent sensiblement les mêmes résultats (tableau 8.7 et figure 8.20) pour l'opération d'emboutissage.

La prédiction du retour élastique est pertinente en milieu de pièce dans les deux cas. Les écarts relevés dans les feuillures sont légèrement plus marqués. Néanmoins, il est important de souligner que ces feuillures n'existent pas sur la pièce finale après l'opération de détourage extérieur et de séparation de pièces.

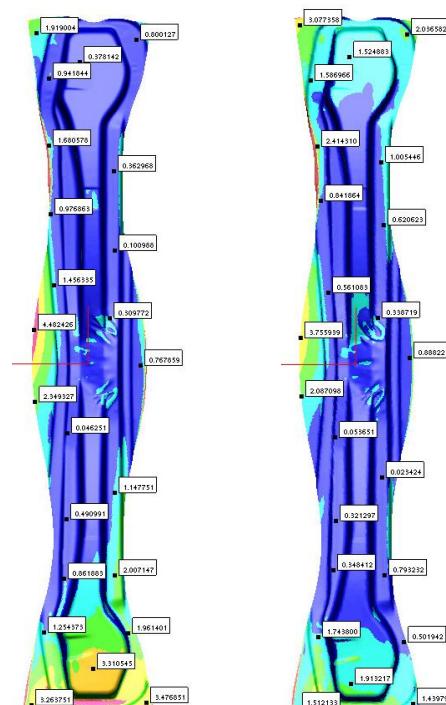
Ecart	Pourcentage de la surface de la pièce comprise dans l'écart spécifié		
	Cas 1 : Elément BT – maillage adaptatif Tm init = 6 mm ; Tm finale = 1.5 mm	Cas 2 : Elément BT – maillage régulier de 2 mm	Cas 3 : Elément S3 – maillage régulier de 2 mm
0 → 0,5	53 %	53 %	52 %
0 → 1	75 %	74 %	73 %
0 → 2	92 %	87 %	88 %

Tableau 8.7. Analyse statistique de l'OP20

Cas 1 : élément Belytschko Tsay –  
Maillage adaptatif



Cas 3 : élément S3 –  
Maillage régulier 2mm



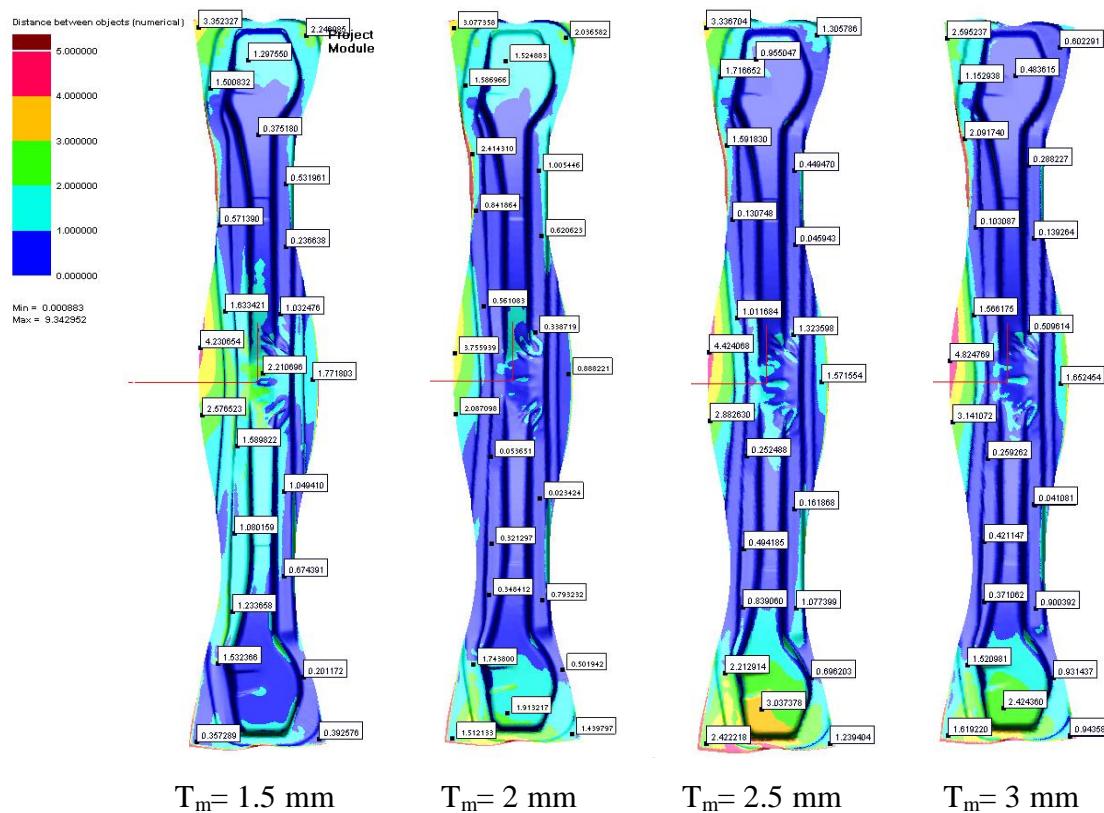
Cas 2 : élément Belytschko Tsay –  
Maillage régulier 2mm

Figure 8.20. Visualisation des écarts pour les différents calculs

Le tableau 8.8 et la figure 8.21 montrent les résultats obtenus avec des simulations utilisant des tailles de maille différentes avec l'élément S3. Ces simulations ne montrent pas de variation importante, en termes de qualité géométrique, lorsque la taille de maille varie. Toutefois, comme cela a déjà pu être remarqué, une taille de maille trop fine a tendance à dégrader les résultats (lorsque la taille de maille devient inférieure à la moitié du rayon d'entrée matrice – ici le rayon d'entrée matrice minimal est d'environ 5mm).

	Pourcentage de la pièce comprise dans l'écart spécifié			
Ecart	Elément S3 $T_m = 1.5 \text{ mm}$	Elément S3 $T_m = 2 \text{ mm}$	Elément S3 $T_m = 2.5 \text{ mm}$	Elément S3 $T_m = 3 \text{ mm}$
$0 \rightarrow 0,5$	39 %	52 %	49 %	51 %
$0 \rightarrow 1$	63 %	73 %	73 %	78 %
$0 \rightarrow 2$	94 %	88 %	90 %	93 %

**Tableau 8.8.** Analyse statistique de l'OP20 pour différentes tailles de mailles



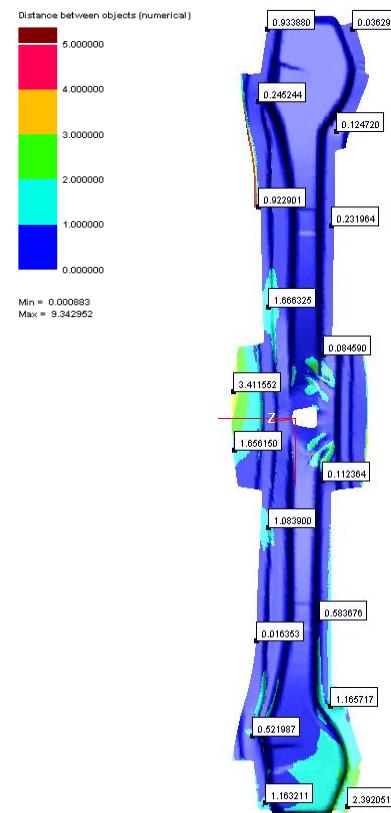
**Figure 8.21.** Visualisation des écarts expérience/simulation sur l'OP20 pour les différents maillages utilisés avec l'élément S3

### 8.5.4. Résultats de retour élastique sur l'opération de découpe OP30

Le tableau 8.9 donne une analyse statistique des écarts mesurés entre la pièce expérimentale et la pièce simulée après recalage des deux pièces (l'écart entre les pièces est minimisé au sens des moindres carrés). On constate une bonne prédition de la géométrie de la pièce finale avec l'élément S3. Une cartographie est présentée sur la figure 8.22.

	Pourcentage de la pièce comprise dans l'écart spécifié	
Ecart	Cas 1 : Elément BT – maillage adaptatif Tm init = 6 mm ; Tm finale = 1.5 mm	Cas 3 : Elément S3 – maillage régulier de 2 mm
0 → 0,5	53 %	55 %
0 → 1	73 %	81 %
0 → 2	90 %	98 %

**Tableau 8.9.** Analyse statistique de l'OP30



**Figure 8.22.** Visualisation des écarts expérience/simulation sur l'OP30 avec l'élément S3

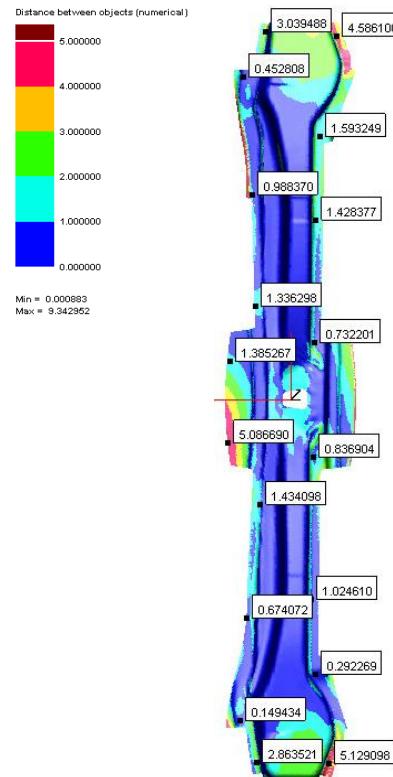
### 8.5.5.Résultats de retour élastique sur l'opération de calibrage OP40

L'opération de calibrage consiste à venir finir d'emboutir certains petits rayons. Cette étape ne peut être visualisée sur les figures.

Comme nous l'avons fait pour l'OP30, une analyse statistique est réalisée après recalage des deux pièces. Le tableau 8.10 montre que les résultats sont sensiblement équivalents avec l'élément S3 ou l'élément Belytschko Tsay.

	Pourcentage de la pièce comprise dans l'écart spécifié	
Ecart	Cas 1 : Elément BT – maillage adaptatif Tm init = 6 mm ; Tm finale = 1.5 mm	Cas 3 : Elément S3 – maillage régulier de 2 mm
0 → 0,5	52 %	50 %
0 → 1	73 %	75 %
0 → 2	87 %	91 %

**Tableau 8.10.** Analyse statistique de l'OP40



**Figure 8.23.** Visualisation des écarts expérience/simulation sur l'OP40 avec l'élément S3

## 8.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présentés les résultats de nos développements sur 3 cas industriels qui, contrairement aux cas des pièces académiques de type U, (pour lesquelles les modes d'ouverture sont plus prépondérants) combinent plusieurs modes de déformation (ouverture, vrillage, décambrage). A ce titre, la bonne prédiction du mode d'ouverture de l'élément S3 observé sur les cas de pièce en U se confirme sur le cas bavolet de ArcelorMittal. Cependant, cet élément ne prédit pas correctement les modes de vrillage. Néanmoins, dans l'ensemble, cet élément quantifie correctement le retour élastique vis-à-vis de la réalité pour l'ensemble des cas traités.

Pour les 3 cas présentés et d'autres cas que nous avons traités mais non exposé dans ce document de thèse, on note une bonne prédiction des niveaux de déformations majeure et mineure par rapport aux relevés expérimentaux. Les avalements sont généralement bien prédits dans la mesure où les efforts de serrage et de retenue sont réalistes. Il est en effet parfois délicat de bien rendre compte des effets de membrane créés par les joncs ou redans.

Une étude complémentaire sur le renfort pied arrière montre que la qualité de la prédiction du retour élastique se dégrade lorsque la taille de maille de l'élément S3 devient inférieur à la moitié à la moitié du rayon d'entrée matrice minimal.

Pour le calcul du retour élastique en implicite, nous avons de part notre expérience fait le choix de définir des points de blocage en isostatique (nécessaire pour supprimer les mouvements de corps rigides) sur un élément fini du flan du fond d'emboutissage plutôt que sur des zones considérées comme étant des points zéros de la pièce (points en contact avec l'outil fixe lors de la phase du retrait des outils). Ces points zéros ne sont pas définis en début d'un projet et ne sont connus qu'après la frappe de la pièce à l'atelier. Une mauvaise définition de ces points amène une lecture erronée du retour élastique. L'avantage de notre approche est de bien dissocier la suppression des mouvements de corps rigide et la déformation de la pièce par retour élastique.

# Bibliographie

- [1] GOM, Manuel d'utilisation du système ATOS II.
- [2] GOM, Manuel d'utilisation du système TRITOP.
- [3] GOM, Manuel d'utilisation du système ARGUS.
- [4] PamStamp 2G 2005 User's guide.
- [5] Lange C., Etude physique et modélisation numérique du procédé de sertissage de pièces de carrosserie, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, CEMEF, 2006.

# Chapitre 9

## DKS16 : un nouvel élément coque pour l'emboutissage ?

<b>9.1. Introduction .....</b>	162
<b>9.2. Élément DKS16 .....</b>	162
9.2.1. Caractéristiques .....	162
9.2.2. Membrane.....	163
9.2.3. Courbures .....	167

## 9.1. Introduction

L'élément S3 est un élément à 3 nœuds à 3 degrés de liberté par nœud. Cependant, la formulation de la flexion fait intervenir les composantes de translation des nœuds des triangles voisins, s'ils existent. On peut donc le voir comme un élément à six nœuds bien que les nœuds 4, 5 et 6 ne soient pas situés sur ses cotés

Concernant la flexion, le quadrilatère S4 est extrapolé du triangle S3 [1, 2, 3]. Les translations des nœuds des éléments voisins sont donc aussi utilisées ; ce qui correspond à 36 degrés de liberté si le quadrilatère considéré est entouré de quatre voisins.

Quant à l'élément dénommé ici DKS16, il étend l'idée de base du triangle DKT12 au quadrilatère : 4 sommets dotés de trois composantes de translations chacun et 4 nœuds aux milieux des cotés affectés d'un degré de liberté en rotation dans la direction du coté.

Les quatre éléments cités précédemment ont en commun de n'avoir qu'un seul point d'intégration dans le plan – impératif pour contenir le temps de calcul des simulations de mise en forme – et d'être réservés aux coques minces – pas de déformation de cisaillement transversal.

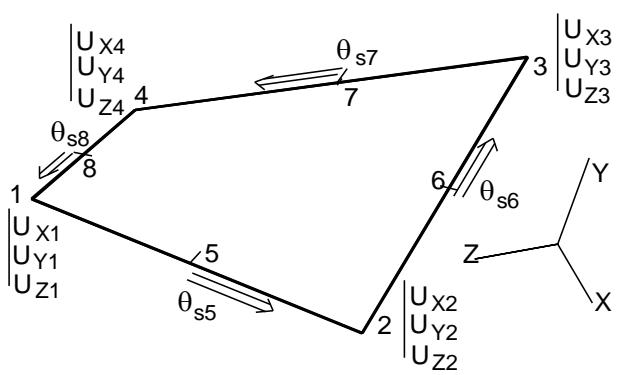
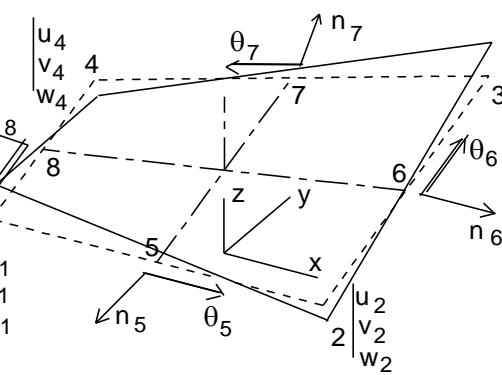
## 9.2. Elément DKS16

### 9.2.1. Caractéristiques

Il s'agit d'un quadrilatère à huit nœuds à bords droits [4] qui reprend certaines caractéristiques des éléments présentés précédemment au chapitre 4 :

- du triangle DKT12, il reprend le type de degrés de liberté : les quatre nœuds sommets (1, 2, 3, 4) sont dotés de trois composantes de translation notées  $U_X$ ,  $U_Y$ ,  $U_Z$  dans le repère global de la structure et  $u$ ,  $v$ ,  $w$  dans le repère local de l'élément où  $u$  et  $v$  sont dans le plan moyen de l'élément et  $w$  normal à ce plan ; les quatre nœuds aux milieux des côtés (5, 6, 7, 8) sont dotés d'une composante de rotation dans la direction du côté considéré :  $\theta_{s5}$ ,  $\theta_{s6}$ ,  $\theta_{s7}$  et  $\theta_{s8}$  ;

- du quadrangle S4 [1], il garde l'interpolation par fonctions d'aires et la manière de calculer les rotations de corps rigide  $\theta_5^r$ ,  $\theta_6^r$ ,  $\theta_7^r$ ,  $\theta_8^r$  qui, soustraites des degrés de liberté en rotation, donnent les angles de flexion  $\theta_5^b$ ,  $\theta_6^b$ ,  $\theta_7^b$ ,  $\theta_8^b$  puis les courbures par superposition. De même, certains modes de flexion à énergie nulle seront supprimés en superposant des déformations dans des directions normales aux diagonales 1-3 et 2-4 par découpage en quatre triangles S3 : (1-3-4), (3-1-2), (2-4-1) et (4-2-3).

**Figure 9.1.** Elément DKS16**Figure 9.2.** Degrés de liberté dans le repère local de l'élément

### 9.2.1.1. Repère local

Tout comme pour les autres éléments destinés à des calculs fortement non linéaires, il n'y a qu'un seul point d'intégration dans le plan local ( $x$ ,  $y$ ). Ce qui correspond à une intégration réduite aussi bien pour les effets de membrane que pour ceux de flexion.

La normale au repère local ( $x$ ,  $y$ ) en question est définie par :  $\vec{z} = (\vec{r}_{57} \wedge \vec{r}_{68}) / \| \vec{r}_{57} \wedge \vec{r}_{68} \|$ ; l'axe  $x$  étant ensuite pris, par exemple, parallèle au côté 1-2.

### 9.2.1.2. Fonctions d'interpolation

Pour la flexion – pas d'influence du cisaillement transversal –, les fonctions d'interpolation  $\bar{N}_i(x, y)$  ( $i = 1..4$ ) proposées par Long [5] sont utilisées pour exprimer les angles de rotation de corps rigide  $\theta_5^r, \theta_6^r, \theta_7^r, \theta_8^r$  à partir des translations  $w_1, w_2, w_3, w_4$  normales au plan ( $x, y$ ).

Pour les effets de membrane, ce sont les fonction bilinéaires classiques qui permettent d'interpoler les composantes ( $u, v$ ) de translation dans le plan à partir des composantes  $u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4$ .

## 9.2.2. Membrane

La formulation est extraite des nombreux travaux de Belytschko sur la stabilisation des modes à énergie nulle après une intégration en un seul point dans le plan moyen de l'élément. Et ce, avec les maintenant bien connus vecteurs  $\{\gamma\}$ .

### 9.2.2.1. Notations

Les fonctions bilinéaires sont décomposées en:

$$\{N\} = \frac{1}{4} (\{S\} + \{a_\xi\}\xi + \{a_\eta\}\eta + \{h\}\xi\eta) \quad (9.1)$$

où

$$\{S\} = \{S\}^T = \langle 1 \ 1 \ 1 \ 1 \rangle ;$$

$$\{a_\xi\} = \{a_\xi\}^T = \langle -1 \ 1 \ 1 \ -1 \rangle ; \quad \{a_\eta\} = \langle -1 \ -1 \ 1 \ 1 \rangle \text{ et } \{h\} = \langle 1 \ -1 \ 1 \ -1 \rangle .$$

Dans le repère local (x ,y), on notera :

$$\begin{aligned}\langle U_x^e \rangle &= \langle u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \rangle \quad \text{et} \quad \langle C_x^e \rangle = \langle x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \rangle \\ \langle U_y^e \rangle &= \langle v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \rangle \quad \langle C_y^e \rangle = \langle y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \rangle\end{aligned}\quad (9.2)$$

et dans le repère global :

$$\langle U_e \rangle = \langle U_{x1} \mid U_{y1} \mid U_{z1} \mid U_{x2} \mid U_{y2} \mid U_{z2} \mid \dots \mid U_{x4} \mid U_{y4} \mid U_{z4} \rangle$$

Par ailleurs :

$$\{N(\xi = \eta = 0)\} = \frac{1}{4} \{S\}; \quad \{N, \xi(0,0)\} = \frac{1}{4} \{a_\xi\}; \quad \{N, \eta(0,0)\} = \frac{1}{4} \{a_\eta\}; \quad \{N, \xi\eta(0,0)\} = \frac{1}{4} \{h\}$$

$$\langle N, x(0,0) \rangle = \langle b_x \rangle = \{b_x\}^T = \frac{1}{2A} \langle y_2 - y_4 \mid y_3 - y_1 \mid y_4 - y_2 \mid y_1 - y_3 \rangle;$$

$$\langle N, y(0,0) \rangle = \langle b_y \rangle = \{b_y\}^T = \frac{1}{2A} \langle x_4 - x_2 \mid x_1 - x_3 \mid x_2 - x_4 \mid x_3 - x_1 \rangle \quad (9.3)$$

avec A l'aire du quadrangle.

#### 9.2.2.2. Propriétés utiles

$$\langle N(0,0) \rangle \cdot \{N, \xi(0,0)\} = 0 \quad \text{et} \quad \langle N(0,0) \rangle \cdot \{N, \eta(0,0)\} = 0 \Rightarrow \langle b_x \rangle \cdot \{S\} = 0 \quad \text{et} \quad \langle b_y \rangle \cdot \{S\} = 0;$$

$$[\bar{J}] = \begin{bmatrix} \langle N, \xi(0,0) \rangle \\ \langle N, \eta(0,0) \rangle \end{bmatrix} \cdot [\{C_x^e\} \quad \{C_y^e\}]; \quad \begin{bmatrix} \langle b_x \rangle \\ \langle b_y \rangle \end{bmatrix} = [\bar{J}^{-1}] \begin{bmatrix} \langle N, \xi(0,0) \rangle \\ \langle N, \eta(0,0) \rangle \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \langle b_x \rangle \\ \langle b_y \rangle \end{bmatrix} \cdot [\{C_x^e\} \quad \{C_y^e\}] = [1]_{2x2}$$

$$\text{On a aussi : } \langle S \rangle \cdot \{h\} = 0; \quad \langle b_x \rangle \cdot \{h\} = 0; \quad \langle b_y \rangle \cdot \{h\} = 0. \quad (9.4)$$

#### 9.2.2.3. Déformations de membrane

Le fait de se placer en  $\xi = 0$  et  $\eta = 0$  après avoir dérivé les fonctions  $\langle N \rangle$  par rapport à  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\zeta$  entraîne l'absence de contrôle du mode  $\{h\}$ . Afin d'annihiler des déplacements incontrôlés suivant le mode en question, il faudra ajouter à la matrice de raideur précédente une matrice de stabilisation.

Comme il sera montré par la suite, des "déformations" généralisées seront associées au mode  $\{h\}$  sous la forme :  $\bar{q}_x = \langle \gamma \rangle \cdot \{U_x^e\}$ ;  $\bar{q}_y = \langle \gamma \rangle \cdot \{U_y^e\}$ . Le vecteur  $\langle \gamma \rangle$  doit donc vérifier la condition  $\langle \gamma \rangle \cdot \{U_R^e\} = 0$  afin d'être "normal" à un champ de petits déplacements de corps rigide  $\{U_R^e\} = c_0 \{S\} + c_x \{C_x^e\} + c_y \{C_y^e\}$  et ne pas créer des déformations dans un tel cas quels que soient  $c_0$ ,  $c_x$  et  $c_y$ .

Compte tenu des propriétés utiles précédentes et en recherchant  $\langle \gamma \rangle$  sous la forme :

$$\langle \gamma \rangle = \frac{1}{4} \langle h \rangle + d_x \langle b_x \rangle + d_y \langle b_y \rangle, \quad \text{on trouve :}$$

$$\langle \gamma \rangle = \frac{1}{4} \left( \{h\} - \left( \langle h \rangle \cdot \{C_x^e\} \right) \{b_x\} - \left( \langle h \rangle \cdot \{C_y^e\} \right) \{b_y\} \right) \quad (9.5)$$

Les déformations de membrane peuvent être considérées comme la somme des déformations classiques et des déformations généralisées associées au mode  $\{h\}$ .

$$\{\varepsilon_e^m\} = [B_0^m]\{U_e\} + \begin{bmatrix} h, x & \\ \hline h, y & h, y \\ h, y & h, x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{q}_x \\ \bar{q}_y \end{bmatrix} \text{ où : } h = \xi \eta \text{ et } \begin{bmatrix} h, x \\ h, y \end{bmatrix} = [J^{-1}] \begin{bmatrix} h, \xi \\ h, \eta \end{bmatrix} = [J^{-1}] \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

où :  $[B_0^m] = \begin{bmatrix} \langle b_x \rangle & & \\ \hline & \langle b_y \rangle & \\ \hline \langle b_y \rangle & \langle b_x \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_u \\ R_v \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} \bar{q}_x = \langle \gamma \rangle \cdot \{U_x^e\} \\ \bar{q}_y = \langle \gamma \rangle \cdot \{U_y^e\} \end{bmatrix}$

avec :

$$\{U_x^e\} = [R_u]\{U_e\}; [R_u] = \begin{bmatrix} xX & xY & xZ & & & & & & & & & \\ \hline & & & xX & xY & xZ & & & & & & \\ \hline & & & & & & xX & xY & xZ & & & \\ \hline & & & & & & & & & xX & xY & xZ \\ \hline & & & & & & & & & & & \end{bmatrix};$$

$$\{U_y^e\} = [R_v]\{U_e\}; [R_v] = \begin{bmatrix} yX & yY & yZ & & & & & & & & & \\ \hline & & & yX & yY & yZ & & & & & & \\ \hline & & & & & & yX & yY & yZ & & & \\ \hline & & & & & & & & & yX & yY & yZ \\ \hline & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}; \quad (9.7)$$

$xX, xY, xZ$  : composantes de  $\vec{x}$  dans le repère global ;

$yX, yY, yZ$  : composantes de  $\vec{y}$  dans le repère global ; (9.8)

$zX, zY, zZ$  : composantes de  $\vec{z}$  dans le repère global ;

#### 9.2.2.4. Stabilisation en membrane

Avec une loi de comportement de la forme :  $\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = [D] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$ ,  $[K_e^m]$  est telle que :

$$\langle \hat{U}_e \rangle \cdot [K_e^m] \{U_e\} = \iiint \langle \hat{\varepsilon}_e^m \rangle \cdot [D] \{U_e\} dV = \langle \hat{U}_e \rangle \cdot {}^T [B_0^m] [D^m] [B_0^m] A \cdot \{U_e\} + \langle \hat{q}_x \quad \hat{q}_y \rangle \cdot [D_s^m] \begin{bmatrix} \bar{q}_x \\ \bar{q}_y \end{bmatrix}$$

$$[K_e^m] = [K_0^m] + [K_s^m]; [K_0^m] = {}^T [B_0^m] [D^m] [B_0^m] A; [K_s^m] = {}^T [B_s^m] [D_s^m] [B_s^m] : \underline{\text{stabilisation}}$$

$$[B_s^m] = \begin{bmatrix} \langle \gamma \rangle & \\ \hline \langle \gamma \rangle & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_u \\ R_v \end{bmatrix} \quad A : \text{aire}; \quad e : \text{épaisseur de l'élément};$$

où :  $[D^m] = \int_{-e/2}^{e/2} [D] dz$ ;  $[D_s^m] = \begin{bmatrix} H_{xx} \cdot D_{11}^m + H_{yy} \cdot D_{33}^m & H_{xy} \cdot D_{12}^m + H_{xy} \cdot D_{33}^m \\ H_{xy} \cdot D_{12}^m + H_{xy} \cdot D_{33}^m & H_{yy} \cdot D_{22}^m + H_{xx} \cdot D_{33}^m \end{bmatrix}$  si  $D_{13} = D_{23} = 0$ .

$$H_{xx} = \iint (h, x) \cdot (h, x) dx dy = \iint (h, x) \cdot (h, x) \det J d\xi d\eta ;$$

$$H_{yy} = \iint (h, y) \cdot (h, y) dx dy = \iint (h, y) \cdot (h, y) \det J d\xi d\eta ;$$

$$H_{xy} = \iint (h, x) \cdot (h, y) dx dy = \iint (h, x) \cdot (h, y) \det J d\xi d\eta .$$

$$\text{Si } [J(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow [J^{-1}(\xi, \eta)] = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \text{ Comme } \begin{Bmatrix} h, x \\ h, y \end{Bmatrix} = [J^{-1}] \begin{Bmatrix} h, \xi \\ h, \eta \end{Bmatrix} = [J^{-1}] \begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \end{Bmatrix},$$

$$\text{on a : } H_{xx} = \sum_{r=1}^4 (\eta_r J_{22} - \xi_r J_{12})^2 \text{ où : } \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}; & \xi_2 &= \xi_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \eta_1 &= \eta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}; & \eta_3 &= \eta_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Nota : avec  $\langle \gamma \rangle = \langle \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \quad \gamma_4 \rangle$

$$\Rightarrow [B_s^m] = \begin{bmatrix} \gamma_1 \cdot xX & \gamma_1 \cdot xY & \gamma_1 \cdot xZ & \gamma_2 \cdot xX & \gamma_2 \cdot xY & \gamma_2 \cdot xZ & \dots & \gamma_4 \cdot xZ \\ \gamma_1 \cdot yX & \gamma_1 \cdot yY & \gamma_1 \cdot yZ & \gamma_2 \cdot yX & \gamma_2 \cdot yY & \gamma_2 \cdot yZ & \dots & \gamma_4 \cdot yZ \end{bmatrix}$$

#### 9.2.2.5. Efforts internes de stabilisation

Aux déformations généralisées  $\bar{q}_x, \bar{q}_y$  correspondent les "contraintes"  $\bar{Q}_x, \bar{Q}_y$  obtenues avec la relation :  $\begin{Bmatrix} \bar{Q}_x \\ \bar{Q}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{xx} \cdot D_{11} + H_{yy} \cdot D_{33} & H_{xy} \cdot D_{12} + H_{yx} \cdot D_{33} \\ H_{xy} \cdot D_{12} + H_{yx} \cdot D_{33} & H_{yy} \cdot D_{22} + H_{xx} \cdot D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_x \\ \bar{q}_y \end{Bmatrix}.$

Après intégration dans l'épaisseur, les efforts internes relatifs à la stabilisation en membrane ont pour expression dans le repère global :

$$\{F_s^m\} = \int [B_s^m]^T \cdot \begin{Bmatrix} \bar{Q}_x \\ \bar{Q}_y \end{Bmatrix} dz = [B_s^m]^T \cdot \left\{ \sum_{q=1}^{npi} \begin{Bmatrix} \bar{Q}_x \cdot \varpi_q \\ \bar{Q}_y \cdot \varpi_q \end{Bmatrix} \right\}$$

Ces efforts internes doivent être ajoutés à ceux obtenus classiquement avec les contraintes. Dans le cas d'un calcul incrémental, il faut donc sommer les contraintes  $\bar{Q}_x, \bar{Q}_y$  après chaque pas. D'une certaine façon, ces efforts internes de stabilisation ont une "histoire" et il convient d'en tenir compte si le calcul doit être poursuivi.

#### 9.2.2.6. Remarques

- La stabilisation décrite précédemment est dite "physique" car elle ne nécessite pas de facteur particulier autre que les caractéristiques du matériau et la géométrie de l'élément. Un comportement élastoplastique est même directement pris en compte par la matrice [D].

- Dans les cas élastiques de sollicitations en membrane pure, les résultats sont les mêmes que ceux obtenus par une intégration complète 2x2. Mais on retrouve aussi, les phénomènes de blocage en membrane associés...

- Afin d'éviter ce type de verrouillage, une méthode simple consiste à multiplier  $[D_s^m]$  par un facteur de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-3}$ .

### 9.2.3. Courbures

#### 9.2.3.1. Rotations de corps rigide

Les composantes  $w_1, w_2, w_3, w_4$  de translation des nœuds 1, 2, 3, 4 normales au plan défini par les axes x et y du repère local permettent de calculer les rotations de corps rigide  $\theta_5^r, \theta_6^r, \theta_7^r, \theta_8^r$  (ainsi que  $\theta_1^r, \theta_2^r, \theta_3^r, \theta_4^r$ ).

Avec  $w = \bar{N}_1 w_1 + \bar{N}_2 w_2 + \bar{N}_3 w_3 + \bar{N}_4 w_4$  (où  $\bar{N}_k$  sont les fonctions d'aires du quadrilatère), les angles de rotation  $\theta_i^r$  ( $i = 5, 6, 7, 8$ ) sont tels que :

$$\theta_i^r = -w_{ni} = -(n_{ix} w, x + n_{iy} w, y).$$

$$w_k = U_{xk} zX + U_{yk} zY + U_{zk} zZ ; x_k = X_k xX + Y_k xY + Z_k xZ ; y_k = X_k yX + Y_k yY + Z_k yZ ;$$

$$\theta_5^r = -\sum_{k=1}^4 (n_{5x} \bar{N}_k^5, x + n_{5y} \bar{N}_k^5, y) w_k ; \bar{N}_k^5, x \text{ et } \bar{N}_k^5, y : \text{prises en } x = (x_1+x_2)/2 \text{ et } y = (y_1+y_2)/2 ;$$

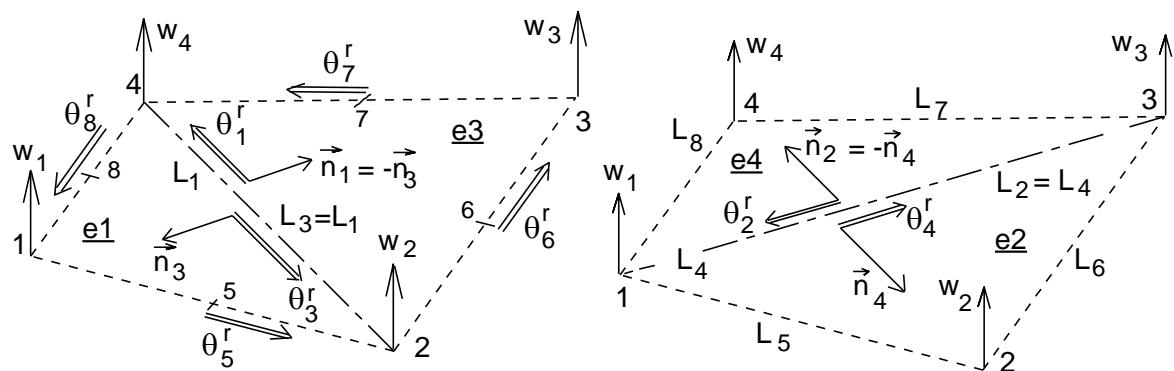
$$\theta_6^r = -\sum_{k=1}^4 (n_{6x} \bar{N}_k^6, x + n_{6y} \bar{N}_k^6, y) w_k ; \bar{N}_k^6, x \text{ et } \bar{N}_k^6, y : \text{prises en } x = (x_2+x_3)/2 \text{ et } y = (y_2+y_3)/2 ;$$

$$\theta_7^r = -\sum_{k=1}^4 (n_{7x} \bar{N}_k^7, x + n_{7y} \bar{N}_k^7, y) w_k ; \bar{N}_k^7, x \text{ et } \bar{N}_k^7, y : \text{prises en } x = (x_3+x_4)/2 \text{ et } y = (y_3+y_4)/2 ;$$

$$\theta_8^r = -\sum_{k=1}^4 (n_{8x} \bar{N}_k^8, x + n_{8y} \bar{N}_k^8, y) w_k ; \bar{N}_k^8, x \text{ et } \bar{N}_k^8, y : \text{prises en } x = (x_4+x_1)/2 \text{ et } y = (y_4+y_1)/2 ;$$

(9.9)

Si on n'utilise que ces quatre rotations autour des côtés, il s'avère que cet élément présente des modes à énergie nulle. Ces singularités peuvent être partiellement levées en superposant des déformations dans des directions normales aux diagonales 1-3 et 2-4. Pour cela, les rotations de corps rigide des triangles e1 (1, 2, 4), e3 (3, 4, 2) ainsi que des triangles e2 (2, 3, 1) et e4 (4, 1, 3) doivent être exprimées en fonction de  $w_1, w_2, w_3, w_4$ .



**Figure 9.3.** Rotations de corps rigide internes dans la direction des diagonales 2-4 et 1-3

$$\theta_1^r = -(n_{1x} N_i^{e1}, x + n_{1y} N_j^{e1}, y) w_1 - (n_{1x} N_i^{e1}, x + n_{1y} N_j^{e1}, y) w_2 - (n_{1x} N_k^{e1}, x + n_{1y} N_k^{e1}, y) w_4$$

$$\theta_2^r = -(n_{2x} N_i^{e2}, x + n_{2y} N_i^{e2}, y) w_2 - (n_{2x} N_j^{e2}, x + n_{2y} N_j^{e2}, y) w_3 - (n_{2x} N_k^{e2}, x + n_{2y} N_k^{e2}, y) w_1$$

$$\begin{aligned}\theta_3^r &= -(n_{3x}N_i^{e3}, x + n_{3y}N_i^{e3}, y)w_3 - (n_{3x}N_j^{e3}, x + n_{2y}N_j^{e3}, y)w_4 - (n_{3x}N_k^{e3}, x + n_{3y}N_k^{e3}, y)w_2 \\ \theta_4^r &= -(n_{4x}N_i^{e4}, x + n_{4y}N_i^{e4}, y)w_4 - (n_{4x}N_j^{e4}, x + n_{4y}N_j^{e4}, y)w_1 - (n_{4x}N_k^{e4}, x + n_{4y}N_k^{e4}, y)w_3\end{aligned}\quad (9.10)$$

où  $N_i, N_j, N_k$  sont les trois fonctions d'aires successives du triangle (i, j, k).

### 9.2.3.2. Angles de flexion

Ils sont obtenus de la même façon que celle décrite pour les éléments DKT12 et S3 :

Les angles de flexion ( $\theta_5^b, \theta_6^b, \theta_7^b, \theta_8^b$ ) sont calculés à partir de ceux de rotation de corps rigide ( $\theta_5^r, \theta_6^r, \theta_7^r, \theta_8^r$ ) qui sont soustraits des degrés de liberté en rotation ( $\theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8$ ) :

$$\theta_5^b = \theta_5 - \theta_5^r ; \theta_6^b = \theta_6 - \theta_6^r ; \theta_7^b = \theta_7 - \theta_7^r ; \theta_8^b = \theta_8 - \theta_8^r. \quad (9.11)$$

Les angles de flexion  $\theta_1^b, \theta_2^b, \theta_3^b, \theta_4^b$  sont calculés à partir de ceux de rotation de corps rigide ( $\theta_1^r, \theta_2^r, \theta_3^r, \theta_4^r$ ). L'élément décrit ici n'ayant qu'un point d'intégration dans le plan, les deux hypothèses (même état du matériau et même épaisseur pour deux triangles voisins) sont forcément vérifiées. Et donc :

$$\theta_1^b = -\frac{A_1(\theta_1^r + \theta_3^r)}{A_1 + A_3} ; \theta_2^b = -\frac{A_2(\theta_2^r + \theta_4^r)}{A_2 + A_4} ; \theta_3^b = -\frac{A_3(\theta_3^r + \theta_1^r)}{A_3 + A_1} ; \theta_4^b = -\frac{A_4(\theta_4^r + \theta_2^r)}{A_4 + A_2} \quad (9.12)$$

où  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  sont les aires des triangles  $e_1, e_2, e_3$  et  $e_4$ .

### 9.2.3.3. Courbures

Les courbures ( $\kappa_5, \kappa_6, \kappa_7, \kappa_8$ ) dans des directions normales à chacun des côtés sont calculées comme dans l'élément S4 à partir des relations suivantes :  $\kappa_m = \theta_m^b \cdot L_m / A$  ;  $m = 5..8$  où  $A$  est l'aire de l'élément "plat" (1, 2, 3, 4).

$$\kappa_5 = \frac{L_5(\theta_5 - \theta_5^r)}{A} ; \kappa_6 = \frac{L_6(\theta_6 - \theta_6^r)}{A} ; \kappa_7 = \frac{L_7(\theta_7 - \theta_7^r)}{A} ; \kappa_8 = \frac{L_8(\theta_8 - \theta_8^r)}{A} \quad (9.13)$$

La courbure  $\kappa_{1-3}$  dans une direction normale à la diagonale (2-4) et la courbure  $\kappa_{2-4}$  dans une direction normale à la diagonale (1-3) – avec :  $\kappa_{3-1} = \kappa_{1-3}$  et  $\kappa_{2-4} = \kappa_{4-2}$  – proviennent de la formulation de l'élément S3 :

$$\kappa_{1-3} = -\frac{L_1(\theta_1^r + \theta_3^r)}{A} ; \kappa_{2-4} = -\frac{L_2(\theta_2^r + \theta_4^r)}{A} ; \kappa_{3-1} = -\frac{L_3(\theta_3^r + \theta_1^r)}{A} ; \kappa_{4-2} = -\frac{L_4(\theta_4^r + \theta_2^r)}{A}$$

Pour des facilités d'écriture et puisque est ensuite imposée une courbure moyenne égale à  $(\kappa_{1-3} + \kappa_{2-4})/2$ , on notera  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  et  $\kappa_4$  les "courbures" suivantes :

$$\kappa_1 = -\frac{L_1(\theta_1^r + \theta_3^r)}{2A} ; \kappa_2 = -\frac{L_2(\theta_2^r + \theta_4^r)}{2A} ; \kappa_3 = -\frac{L_3(\theta_3^r + \theta_1^r)}{2A} ; \kappa_4 = -\frac{L_4(\theta_4^r + \theta_2^r)}{2A} \quad (9.14)$$

où :  $L_2 = L_4$  = longueur de la diagonale 2-4 et  $L_1 = L_3$  = longueur de 1-3.

### 9.2.3.4. Superposition

Ces huit courbures sont ensuite "superposées" comme pour les éléments DKT12 et S3 :

$$\begin{bmatrix} \kappa_{xx} & \kappa_{xy} \\ \kappa_{xy} & \kappa_{yy} \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^8 [R_m] [\kappa_{nm}] [R_m]^T ; \quad [\kappa_{nm}] = \begin{bmatrix} \kappa_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \text{exprimée dans le repère } (\vec{n}_m, \vec{t}_m) ;$$

Changement de base :  $[R_m] = \begin{bmatrix} n_{mx} & n_{my} \\ -n_{my} & n_{mx} \end{bmatrix} ; \quad \vec{n}_m = \begin{bmatrix} n_{mx} \\ n_{my} \end{bmatrix} = n_{mx}\vec{x} + n_{my}\vec{y} : \text{repère } (\vec{x}, \vec{y})$ .

### 9.2.3.5. Expressions matricielles

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} = [R] \{\kappa_n\} ; \quad \{\kappa_n\} = [R_n]^T \langle \kappa_n \rangle = \langle \kappa_1 | \kappa_2 | \kappa_3 | \kappa_4 | \kappa_5 | \kappa_6 | \kappa_7 | \kappa_8 \rangle$$

$$[R] = \begin{bmatrix} n_{1x}^2 & n_{2x}^2 & n_{3x}^2 & n_{4x}^2 & n_{5x}^2 & n_{6x}^2 & n_{7x}^2 & n_{8x}^2 \\ n_{1y}^2 & n_{2y}^2 & n_{3y}^2 & n_{4y}^2 & n_{5y}^2 & n_{6y}^2 & n_{7y}^2 & n_{8y}^2 \\ 2n_{1x}n_{1y} & 2n_{2x}n_{2y} & 2n_{3x}n_{3y} & 2n_{4x}n_{4y} & 2n_{5x}n_{5y} & 2n_{6x}n_{6y} & 2n_{7x}n_{7y} & 2n_{8x}n_{8y} \end{bmatrix}$$

$$\{\kappa_e\} = [H_w] \{\theta^r_e\} + [H_\theta] \{\theta_e\} ; \quad \{\theta^r_e\} = [H_e]^T \langle \theta^r_e \rangle = \langle \theta_1^r | \theta_2^r | \theta_3^r | \theta_4^r | \theta_5^r | \theta_6^r | \theta_7^r | \theta_8^r \rangle ;$$

$$[H_w] = -\frac{1}{2A} \begin{bmatrix} L_1 & & & & & & & \\ & L_2 & & & & & & \\ & & L_3 & & & & & \\ & & & L_4 & & & & \\ & & & & 2L_5 & & & \\ & & & & & L_6 & & \\ & & & & & & L_7 & \\ & & & & & & & 2L_8 \end{bmatrix} ; \quad [H_\theta] = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} L_5 & & & & & & & \\ & L_6 & & & & & & \\ & & L_7 & & & & & \\ & & & L_8 & & & & \end{bmatrix} ; \quad \{\theta_e\} = \begin{Bmatrix} \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \end{Bmatrix}$$

$$\{w_e\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{Bmatrix} = [R_w] \{U_e\} ; \quad [R_w] = \begin{bmatrix} zX & zY & zZ & & & & & & & & \\ & zX & zY & zZ & & & & & & & \\ & & & & zX & zY & zZ & & & & \\ & & & & & & & zX & zY & zZ & \\ & & & & & & & & & zX & zY & zZ \end{bmatrix}$$

$zX, zY, zZ$  étant les projections de l'axe  $\vec{z}$  dans le repère global.

$$\{U_e\}^T = \langle U_e \rangle = \langle U_{x1} | U_{y1} | U_{z1} | U_{x2} | U_{y2} | U_{z2} | U_{x3} | U_{y3} | U_{z3} | U_{x4} | U_{y4} | U_{z4} \rangle$$

La matrice  $[H_w]$  étant diagonale, le produit  $[R.H_w]$  devient :

$$-\frac{1}{2A} \begin{bmatrix} L_1 n_{1x}^2 & L_2 n_{2x}^2 & L_3 n_{3x}^2 & L_4 n_{4x}^2 & 2L_5 n_{5x}^2 & 2L_6 n_{6x}^2 & 2L_7 n_{7x}^2 & 2L_8 n_{8x}^2 \\ L_1 n_{1y}^2 & L_2 n_{2y}^2 & L_3 n_{3y}^2 & L_4 n_{4y}^2 & 2L_5 n_{5y}^2 & 2L_6 n_{6y}^2 & 2L_7 n_{7y}^2 & 2L_8 n_{8y}^2 \\ 2L_1 n_{1x} n_{1y} & 2L_2 n_{2x} n_{2y} & 2L_3 n_{3x} n_{3y} & 2L_4 n_{4x} n_{4y} & 4L_5 n_{5x} n_{5y} & 4L_6 n_{6x} n_{6y} & 4L_7 n_{7x} n_{7y} & 4L_8 n_{8x} n_{8y} \end{bmatrix}$$

N.B.  $[R.H_\theta]$  correspond, à un signe moins près, aux 4 dernières colonnes de  $[R.H_w]$ .

Finalement :  $\{\kappa\} = [B_U^b]\{U_e\} + [B_\theta^b]\{\theta_e\}$ ;  $[B_U^b] = [R][H_w][C]$ ;  $[B_\theta^b] = [R][H_\theta]$

Grâce aux équations 9.10 et aux projections des axes  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$  dans le repère global, les angles de rotations de corps rigide peuvent s'exprimer :  $\{\theta_e\} = [C]\{U_e\}$ .

#### 9.2.3.6. Stabilisation en flexion

Contrairement à l'élément S4, prendre en compte les courbures "internes" ne suffit pas à s'affranchir de modes à énergie nulle. Il est donc nécessaire d'ajouter une matrice de raideur en flexion propre à une stabilisation à la *Belytschko*.

Pour procéder par analogie la plus directe avec les effets de membrane, on pose :

$$\begin{aligned} \beta_x &= \langle N(\xi, \eta) \cdot \beta_x^e \rangle; \beta_x = \theta_y \Rightarrow \langle \beta_x^e \rangle = \langle \theta_{y5} \quad \theta_{y6} \quad \theta_{y7} \quad \theta_{y8} \rangle; \langle b_x \rangle = \langle N, x(\xi=0, \eta=0) \rangle \\ \beta_y &= \langle N(\xi, \eta) \cdot \beta_y^e \rangle; \beta_y = -\theta_x \Rightarrow \langle \beta_y^e \rangle = -\langle \theta_{x5} \quad \theta_{x6} \quad \theta_{x7} \quad \theta_{x8} \rangle; \langle b_y \rangle = \langle N, y(\xi=0, \eta=0) \rangle \\ h = \xi\eta \Rightarrow \begin{cases} h, x \\ h, y \end{cases} &= [J^{-1}] \begin{cases} \eta \\ \xi \end{cases}; [J] = \begin{bmatrix} \langle N, \xi \rangle \\ \langle N, \eta \rangle \end{bmatrix} \cdot [\{C_x^e\} \mid \{C_y^e\}]; \begin{cases} \langle C_x^e \rangle = \langle x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8 \rangle = {}^T \{C_x^e\} \\ \langle C_y^e \rangle = \langle y_5 \quad y_6 \quad y_7 \quad y_8 \rangle = {}^T \{C_y^e\} \end{cases} \end{aligned}$$

On remarquera qu'il s'agit bien des coordonnées des nœuds intermédiaires ; tout se passe donc comme si on s'intéressait au quadrilatère 5, 6, 7, 8.

Les conditions de kirchoff sont imposées en un nœud "milieu" m (m = 5..8) avec :

$$\theta_{n5} = (w_2 - w_1)/L_5; \theta_{n6} = (w_3 - w_2)/L_6;$$

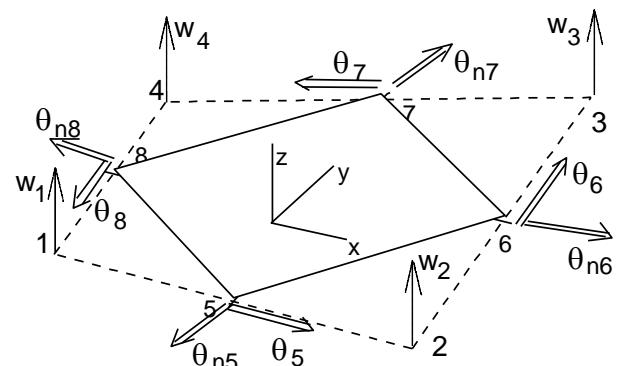
$$\theta_{n7} = (w_4 - w_3)/L_7; \theta_{n8} = (w_1 - w_4)/L_8;$$

$$L_5 = L_{1-2}; L_6 = L_{2-3}; L_7 = L_{3-4}; L_8 = L_{4-1}.$$

Les composantes de rotation suivant x et y sont :  $\theta_{xm} = n_{mx}\theta_{nm} - n_{my}\theta_m$ ;

$$\theta_{ym} = n_{my}\theta_{nm} + n_{mx}\theta_m;$$

$$\text{où : } \vec{n}_m = n_{mx}\vec{x} + n_{my}\vec{y} \text{ pour } m = 5, 6, 7, 8.$$



**Figure 9.4.** Degrés de liberté en rotation pour la stabilisation en flexion

$$\{\kappa\} = \begin{cases} \beta_x, x \\ \beta_y, y \\ \beta_x, y + \beta_y, x \end{cases} = \begin{bmatrix} \langle b_x \rangle + \langle \gamma \rangle h, x \\ \langle b_y \rangle + \langle \gamma \rangle h, y \\ \langle b_y \rangle + \langle \gamma \rangle h, y \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} \{\beta_x^e\} \\ \{\beta_y^e\} \end{cases}$$

$$\{\kappa\} = \begin{bmatrix} \langle b_x \rangle & | & \langle b_y \rangle \\ \hline \langle b_y \rangle & | & \langle b_x \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\beta_x^e\} \\ \{\beta_y^e\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} h, x & | & h, y \\ \hline h, y & | & h, x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{\chi}_x \\ \bar{\chi}_y \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \bar{\chi}_x \\ \bar{\chi}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \gamma \rangle & | & \langle \gamma \rangle \\ \hline \langle \gamma \rangle & | & \langle \gamma \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\beta_x^e\} \\ \{\beta_y^e\} \end{Bmatrix} = [\bar{B}_s^b] \begin{Bmatrix} \{\beta_x^e\} \\ \{\beta_y^e\} \end{Bmatrix}$$

La première partie peut être considérée comme celle relative aux courbures obtenues par superposition. La seconde partie correspond à la stabilisation recherchée. La matrice de stabilisation en flexion s'obtient ensuite en exprimant le travail virtuel :

$$\langle \hat{\beta}_x^e \rangle | \langle \hat{\beta}_y^e \rangle \rangle \langle K_s^b \rangle \begin{Bmatrix} \{\beta_x^e\} \\ \{\beta_y^e\} \end{Bmatrix} = \langle \hat{\beta}_x^e \rangle | \langle \hat{\beta}_y^e \rangle \rangle [^T [B_s^b] [D_s^b] [B_s^b]] \begin{Bmatrix} \{\beta_x^e\} \\ \{\beta_y^e\} \end{Bmatrix};$$

$$\text{En écrivant : } \begin{Bmatrix} \{\beta_x^e\} \\ \{\beta_y^e\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [M_w] \\ [M_\theta] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{w_e\} \\ \{\theta_e\} \end{Bmatrix} \text{ et } \{w_e\} = [R_w] \{U_e\} \Rightarrow [B_s^b] = \begin{bmatrix} \langle \gamma \rangle & | & \langle \gamma \rangle \\ \hline \langle \gamma \rangle & | & \langle \gamma \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [M_w \cdot R_w] \\ [M_\theta] \end{bmatrix}$$

$$[M_\theta] = \begin{bmatrix} n_{5x} & | & & | & | \\ & n_{6x} & | & & | \\ & & n_{7x} & | & | \\ & & & n_{8x} & | \\ n_{5y} & | & & & | \\ & n_{6y} & | & & | \\ & & n_{7y} & | & | \\ & & & n_{8y} & | \end{bmatrix}; [M_w] = \begin{bmatrix} -n_{5y}/L_5 & | & n_{5y}/L_5 & | & | \\ & -n_{6y}/L_6 & | & n_{6y}/L_6 & | \\ & & -n_{7y}/L_7 & | & n_{7y}/L_7 \\ n_{8y}/L_8 & | & & & -n_{8y}/L_8 \\ n_{5x}/L_5 & | & -n_{5x}/L_5 & | & | \\ & n_{6x}/L_6 & | & -n_{6x}/L_6 & | \\ & & n_{7x}/L_7 & | & -n_{7x}/L_7 \\ -n_{8x}/L_8 & | & & & n_{8x}/L_8 \end{bmatrix};$$

$$\vec{n}_m = \begin{bmatrix} n_{mx} \\ n_{my} \\ (\vec{x}, \vec{y}) \end{bmatrix}; m = 5..8$$

Si  $[D]$  est la matrice de comportement – éventuellement élastoplastique – reliant les contraintes aux déformations dans un cas d'état plan de contraintes, on arrive à :

$$[K_s^b] = [B_s^b] [D_s^b] [B_s^b]^T; [D^b] = \int_{-e/2}^{e/2} [D] z^2 dz; [D_s^b] = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{xx} D_{11}^b + \tilde{H}_{yy} D_{33}^b & | & \tilde{H}_{xy} D_{12}^b + \tilde{H}_{yx} D_{33}^b \\ \tilde{H}_{xy} D_{12}^b + \tilde{H}_{yx} D_{33}^b & | & \tilde{H}_{yy} D_{22}^b + \tilde{H}_{xx} D_{33}^b \end{bmatrix}$$

Nota : les facteurs  $\tilde{H}_{xx}, \tilde{H}_{yy}, \tilde{H}_{xy}$  sont intégrés sur la surface 5, 6, 7, 8.

$$\tilde{H}_{xx} = \iint (h, x) \cdot (h, x) dx dy = \iint (h, x) \cdot (h, x) \det J d\xi d\eta;$$

$$\tilde{H}_{yy} = \iint (h, y) \cdot (h, y) dx dy = \iint (h, y) \cdot (h, y) \det J d\xi d\eta;$$

$$\tilde{H}_{xy} = \iint (h, x) \cdot (h, y) dx dy = \iint (h, x) \cdot (h, y) \det J d\xi d\eta$$

Ces facteurs proviennent de l'intégration suivante qui nécessite 4 points dans le plan :

$$\begin{Bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ 2\chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\chi}_x h, x \\ \bar{\chi}_y h, y \\ \bar{\chi}_x h, y + \bar{\chi}_y h, x \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} q_x^b \\ q_x^b \\ 2q_{xy}^b \end{Bmatrix} = z \cdot \begin{Bmatrix} \bar{\chi}_x h, x \\ \bar{\chi}_y h, y \\ \bar{\chi}_x h, y + \bar{\chi}_y h, x \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} Q_x^b \\ Q_x^b \\ Q_{xy}^b \end{Bmatrix} = z \cdot \begin{Bmatrix} D_{11} \bar{\chi}_x h, x + D_{12} \bar{\chi}_y h, y \\ D_{12} \bar{\chi}_x h, x + D_{22} \bar{\chi}_y h, y \\ D_{33} (\bar{\chi}_x h, y + \bar{\chi}_y h, x) \end{Bmatrix}$$

$$\iiint \begin{pmatrix} q_x^b & q_x^b & 2q_{xy}^b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_x^b \\ Q_x^b \\ Q_{xy}^b \end{pmatrix} dv = \begin{pmatrix} \bar{\chi}_x & \bar{\chi}_y \end{pmatrix} \cdot \iiint z^2 \left[ \frac{D_{11}(h, x)^2 + D_{33}(h, y)^2}{(D_{12} + D_{33})h, x, h, y} \mid \frac{(D_{12} + D_{33})h, x, h, y}{D_{22}(h, y)^2 + D_{33}(h, x)^2} \right] dz \cdot \begin{pmatrix} \bar{\chi}_x \\ \bar{\chi}_y \end{pmatrix}$$

D'où le "comportement" incrémental :

$$\begin{Bmatrix} d\bar{\mu}_x \\ d\bar{\mu}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}\tilde{H}_{xx} + D_{33}\tilde{H}_{yy} & (D_{12} + D_{33})\tilde{H}_{xy} \\ (D_{12} + D_{33})\tilde{H}_{xy} & D_{22}\tilde{H}_{yy} + D_{33}\tilde{H}_{xx} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d\bar{\chi}_x \\ d\bar{\chi}_y \end{Bmatrix}$$

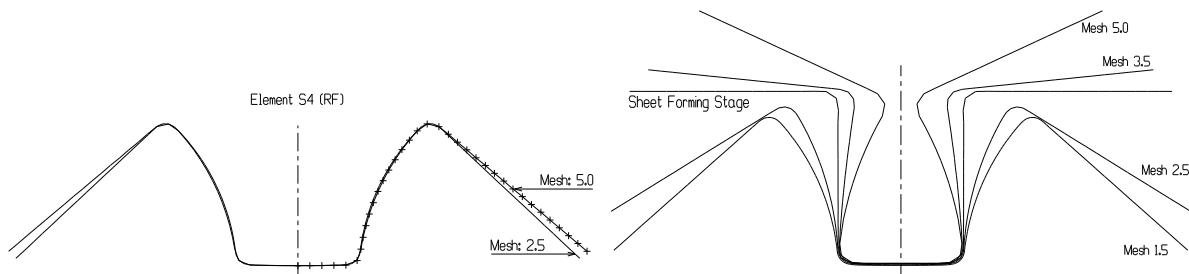
Les efforts internes (forces aux nœuds 1, 2, 3, 4 et moments aux nœuds 5, 6, 7, 8) seront :

$$\begin{Bmatrix} F_s^b \\ (16) \end{Bmatrix} = {}^T \begin{Bmatrix} B_s^b \end{Bmatrix} \int_{-e/2}^{e/2} \begin{Bmatrix} \bar{\mu}_x \\ \bar{\mu}_y \end{Bmatrix} z^2 . dz = {}^T \begin{Bmatrix} B_s^b \end{Bmatrix} \left\{ \sum_{q=1}^{npi} \begin{Bmatrix} \bar{\mu}_x \\ \bar{\mu}_y \end{Bmatrix} \varpi_q \zeta_q^2 \right\} \frac{e^3}{8} ; \quad \begin{cases} \zeta_q : \text{position} \\ \varpi_q : \text{poids} \end{cases} ; \quad \begin{cases} npi = 3 : \text{élasticité} \\ npi > 3 : \text{élastoplasticité} \end{cases}$$

#### 9.2.3.7. Exemple de retour élastique

L'exemple traité ci-dessous est issu du benchmark Numisheet93.

La figure 9.5 correspond aux formes après retour élastique pour deux maillages (2.5 et 5 mm) obtenues avec l'élément S4. Comme le triangle Rotation-Free S3 correspondant, ce quadrilatère est peu sensible à la taille de maille.



**Figure 9.5.** Profils après retour élastique obtenus avec l'élément S4

**Figure 9.6.** Profils après retour élastique obtenus avec l'élément DKS16

La figure 9.6 correspond aux formes après retour élastique pour 4 maillages (1.5, 2.5, 3.5 et 5 mm) obtenues avec l'élément DKS16.

Contrairement au triangle DKT12 correspondant, ce quadrilatère est très sensible à la taille de maille.

Cet élément a fait l'objet d'une publication à paraître dans la revue Engineering Computations Vol. 26, n° 3 [4]. Il y est expliqué, entre autres, la raison numérique conduisant à un retour élastique inverse quand le maillage n'est pas suffisamment dense ; ici, en rapport avec le rayon d'entrée matrice. Cependant, compte tenu des habitudes et des réglages usuels de remaillage, le découpage des éléments serait, dans le cas présenté ici, inférieur à 1.5 mm.

# Bibliographie

- [1] M. Brunet, F. Sabourin, Analysis of a rotation free 4 nodes shell element, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 66, p. 1483-1510, 2006.
- [2] F. Sabourin et M. Brunet, Analysis of plates and Shells with a simplified 3-node triangular element, International Journal of Thin-Walled Structures, vol 21, p238-251, 1995.
- [3] F. Sabourin et M. Brunet, Detailed formulation of the rotation-free triangular shell element 'S3' for general purpose shell analysis, Engineering Computations, Vol 23, p469-502, 2006.
- [4] Sabourin F., Carbonnierre J., Brunet M., A new quadrilateral shell element using 16 DOF, Engineering Computations, à paraître vol 26 issue 3, 2009.
- [5] Y. Long et al., Area coordinates used in quadrilateral elements, Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, p. 593-545, 1999.



# Conclusion générale et perspectives

L'objectif principal de notre étude a été d'apporter des éléments de modélisation pour prédire correctement le retour élastique. Ces éléments ont été développés à travers :

- la compréhension physique du procédé sur la base des essais académiques en termes de modélisation du comportement des tôles ;
- la description du comportement du matériau pendant la mise en forme ;
- l'étude par la simulation numérique de l'emboutissage de l'influence du comportement des tôles et du type d'éléments finis utilisé pour la simulation du procédé.

Dans le cadre de l'étude expérimentale du procédé, un premier montage de laboratoire est utilisé pour réaliser des pièces en U. Un second montage a été conçu pour simuler les pliages-dépliages successifs à travers des rouleaux présents sur des cas de pièces industriels (passage du flan dans les rayons et les joncs). Ces essais ont eu pour objectif de valider le modèle rhéologique, le comportement numérique des éléments finis, la prédiction de la géométrie de la pièce après retour élastique ainsi que l'évolution des efforts mis en jeu.

La description matérielle des tôles est réalisée par un comportement élastoplastique anisotrope. La loi d'écoulement du matériau utilise une loi d'écrouissage cinématique non linéaire de Lemaitre et Chaboche enrichi de deux paramètres permettant une meilleure prise en compte de l'histoire de déformations au cours de la mise en forme et une meilleure prédiction du retour élastique. Des essais en traction uniaxiale ont été réalisés pour déterminer l'anisotropie initiale et la courbe d'écrouissage isotrope des tôles. La partie cinématique de la loi d'écrouissage est identifiée à partir d'un essai de flexion alternée reproduisant au mieux la sollicitation cyclique de la tôle lors du passage sur les joncs ou les rayons lors de l'emboutissage. Un programme d'identification a été mis en place pour déterminer les paramètres d'écrouissage cinématique. A ce titre, des essais de cisaillement cyclique ont également été réalisés par le LIMATB de l'Université de Bretagne-Sud pour connaître les écarts de résultats vis-à-vis d'un essai de flexion alternée.

Plusieurs outils numériques ont été utilisés et/ou développés pour simuler le procédé d'emboutissage :

- un code éléments finis développé à l'INSA de Lyon pour pouvoir tester et valider les points nouveaux ;
- le code éléments finis PamStamp 2G V2005.0.4 utilisé chez PSA Peugeot Citroën Automobiles basé sur des éléments finis coques de Belytchko Tsay sous l'hypothèse de Mindlin-Reissner ;
- des routines utilisateurs sous la forme de User Defined Element et User Defined Material développé avec ESI group pour prendre en compte les éléments finis S3 et DKT12 et la modélisation rhéologique de la tôle dans PamStamp 2G V2005.0.4.

Les résultats obtenus sur les cas académiques ont mis en évidence que la bonne prédiction du retour élastique réside essentiellement dans une modélisation physique du comportement des tôles, ainsi que dans le choix de l'élément fini employé.

Concernant la modélisation matériau, ces lois d'écrouissage combiné mettent en évidence une nette amélioration de la prédiction des rayons résiduels par rapport à l'utilisation d'un écrouissage isotrope classique. En outre, la comparaison de deux techniques de caractérisation pour une gamme équivalente de déformation, montre que les contributions cinématiques identifiées avec un essai de flexion alternée ou un essai de cisaillement cyclique

sont assez proches. Enfin, la présence de deux paramètres supplémentaires dans la loi d'écrouissage de Lemaitre et Chaboche permet de décrire correctement la courbe de flexion expérimentale lors du déchargement de la tôle mais n'améliore pas de manière conséquente le résultat du retour élastique.

Concernant l'utilisation des éléments finis, les résultats sur les cas académiques montrent que les éléments finis sans degrés de liberté en rotation aux nœuds sommets (S3 et DKT12) ont un réel intérêt. Au-delà du fait que ces éléments soient peu sensibles à la taille de maille, le résultat obtenu est conforme aux expériences réalisées.

Des essais complémentaires d'emboutissage sur des pièces industrielles ont été réalisés chez PSA Peugeot Citroën Automobiles pour assurer les observations sur les cas académiques. Pour la validation des développements, aucune étude sur la comparaison de la loi matériau n'est réalisée. Compte tenu des résultats sur les cas académique, nous avons d'emblée utilisé le modèle rhéologique à deux paramètres (écrouissage isotrope de type Voce + écrouissage cinématique de Lemaitre et Chaboche). Les études de comparaison sur les éléments finis montrent que les conclusions sont moins nettes sur les pièces industrielles pour l'opération d'emboutissage OP20 puisque les résultats obtenus avec l'élément S3 sont sensiblement les mêmes que ceux que l'on peut obtenir avec l'élément Belytschko Tsay. Les opérations suivantes (découpe OP30 et calibrage OP40) montrent une amélioration des résultats avec l'élément S3. La bonne prédiction du mode d'ouverture de l'élément S3 observée sur les cas de pièce en U se confirme sur le cas bavoir de ArcelorMittal. Cependant, cet élément ne prédit pas correctement les modes de vrillage. Néanmoins, dans l'ensemble, cet élément quantifie correctement le retour élastique vis-à-vis de la réalité pour l'ensemble des cas traités.

Comme perspectives pour finaliser les observations obtenues dans cette thèse, nous estimons par ordre de priorité les points suivants à réaliser concernant la poursuite de nos travaux :

1. traiter un nouveau cas d'emboutissage gamme complète pour valider les modélisations développées (rhéologie de Lemaitre et Chaboche selon Ziegler à deux paramètres, éléments finis S3 ou DKT12) quant à la prédiction du retour élastique ;
2. réaliser une étude de compensation lorsque le point 1 est validé sur une pièce industrielle.

En ce qui concerne le développement de nouvelles technologies, nous estimons que la rhéologie de la tôle avec un écrouissage combiné de Lemaitre et Chaboche selon Ziegler à deux paramètres est suffisant. Toutefois, pour représenter les différents trajets de chargement quant aux contraintes sur les pièces aluminium, l'utilisation d'un critère de plasticité telle que Banabic [2] serait plus approprié. La gestion du contact/frottement serait également un point important en simulation par une utilisation d'une loi de frottement évolutive puisque celui-ci n'est pas constant sur l'ensemble de la pièce au cours de l'emboutissage. De plus, l'état du frottement dépend des conditions locales sur l'embouti. Par exemple, Sniekers [3] et Carleer [4] ont mis en évidence des différences significatives pour différentes lois de frottement (évolutive, locales,...).

Lorsque l'outil numérique prédit correctement le retour élastique, l'utilisateur souhaiterait ensuite connaître l'origine de son retour élastique et apporter les modifications

nécessaires à son produit sans utiliser au préalable la méthode de compensation pour réduire le retour élastique. Il serait intéressant d'envisager le développement d'un outil d'analyse de retour élastique utilisable pour toutes pièces industrielles et qui permettrait de répondre à deux besoins : modifier le produit pour réduire le retour élastique et modifier le produit lorsque la méthode de compensation diverge. En parallèle, l'adaptation des méthodes probabilistes telles utilisées en génie civil aux études de retour élastique permettra de donner une réponse avec un taux de satisfaction fiable. Les techniques de calcul stochastiques [5] apporteraient leur pierre à l'édifice quant à la mesure de la dispersion du retour élastique par rapport aux données d'entrées (limite d'élasticité, jeux ...) des lignes d'emboutissage (process, géométries, matières, ...) mais ne permettrait pas de comprendre les raisons des modes d'apparition du retour élastique.

# Bibliographie

- [1] K. Mattiasson, M. Sigvant, On the choice of yield criterion for industrial sheet forming simulations, Proceedings of the 24th IDDRG Congress, Besançon, 2005.
- [2] D. Banabic et al., An improved analytical description of orthotropy in metallic sheets, Int. J. of Plast., 21, p. 493-512, 2005.
- [3] J.M.M. Sniekers, Friction in deep drawing, PhD, Technische Universiteit Eindhoven, Netherlands, 1996.
- [4] B. Carleer et al., Sheet metal forming simulations with a friction model based on a local contact conditions, Proceedings of Numisheet'96, 1996.
- [5] T. de Souza, B.F. Rolfe, Accuracy and precision assessment of stochastic simulation tools for springback variation, Int. Conf. Proc. Numisheet'08, p. 539-544, 2008.



## Annexe A

### Compléments sur la caractérisation des matériaux

## A.1 Calcul des coefficients de Hill avec un écrouissage combiné

### A.1.1. Relations utiles :

L'anisotropie initiale des tôles laminées est prise en compte par certains critères de plasticité. Le critère proposé par Hill en 1948 suppose l'orthotropie de la tôle, ce qui correspond assez bien aux cas des tôles laminées. Dans le cas des contraintes planes, nous avons vu au chapitre 2 que ce critère s'écrivait sous la forme :

$$\sigma_{eq}^2 = \left\langle \sigma_{xx} - \alpha_{xx} \mid \sigma_{yy} - \alpha_{yy} \mid \sigma_{xy} - \alpha_{xy} \right\rangle \cdot \begin{vmatrix} g+h & -h & \\ -h & f+h & \\ & & 2.n \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} - \alpha_{xx} \\ \sigma_{yy} - \alpha_{yy} \\ \sigma_{xy} - \alpha_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

où  $f, g, h, l, m, n$  sont les paramètres caractéristiques de l'anisotropie et de la forme de la surface de charge.

Par dérivation de (A.1), on obtient

$$2.\sigma_{eq}.d\sigma_{eq} = 2.\langle d\sigma \rangle [M]\{\sigma\} \quad (\text{A.2})$$

On arrive à

$$\sigma_{eq} = \langle \sigma \rangle \cdot \{a\} \quad (\text{A.3})$$

avec la définition du gradient

$$\frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} = \{a\} = \frac{1}{\sigma_{eq}} [M]\{\sigma\}. \quad (\text{A.4})$$

Une équivalence au niveau du travail plastique élémentaire permet d'écrire

$$\langle \sigma \rangle \cdot \{d\varepsilon^p\} = \sigma_{eq} \cdot d\bar{\varepsilon}^p \quad (\text{A.5})$$

En substituant A.4 dans A.5 on trouve

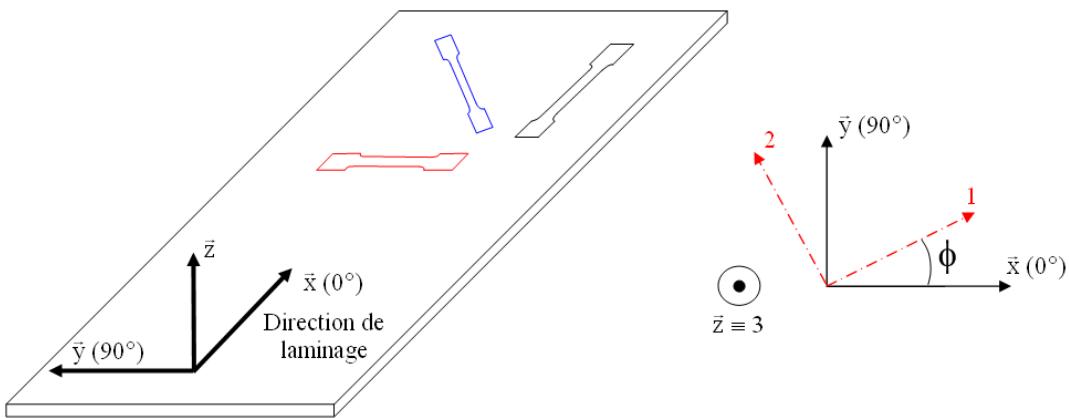
$$\{d\varepsilon^p\} = d\bar{\varepsilon}^p \cdot \{a\} \quad (\text{A.6})$$

Nous avons donc maintenant

$$\{d\varepsilon^p\} = \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{xx}^p \\ d\varepsilon_{yy}^p \\ 2.d\varepsilon_{xy}^p \end{Bmatrix} = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \begin{Bmatrix} g \cdot (\sigma_{xx} - \alpha_{xx}) + h \cdot ((\sigma_{xx} - \alpha_{xx}) - (\sigma_{yy} - \alpha_{yy})) \\ f \cdot (\sigma_{yy} - \alpha_{yy}) + h \cdot ((\sigma_{yy} - \alpha_{yy}) - (\sigma_{xx} - \alpha_{xx})) \\ 2.n \cdot (\sigma_{xy} - \alpha_{xy}) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

### A.1.2. Formulation de Ziegler :

Les coefficients  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $n$  sont calculés à partir des coefficients de Lankford  $r_0$ ,  $r_{45}$ ,  $r_{90}$ . Le calcul de  $r_0$  se fait à partir d'un essai de traction dans la direction de laminage avec  $\phi = 0^\circ$ .



**Figure A.1.** Orientation des éprouvettes de traction

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_{xx}^p \\ d\varepsilon_{yy}^p \\ 2.d\varepsilon_{xy}^p \end{Bmatrix} = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \begin{Bmatrix} g.(\sigma_{xx} - \alpha_{xx}) + h.((\sigma_{xx} - \alpha_{xx}) - (\sigma_{yy} - \alpha_{yy})) \\ f.(\sigma_{yy} - \alpha_{yy}) + h.((\sigma_{yy} - \alpha_{yy}) - (\sigma_{xx} - \alpha_{xx})) \\ 2.n.(\sigma_{xy} - \alpha_{xy}) \end{Bmatrix}$$

- $\phi = 0^\circ$  :

$$\sigma_{xx} \neq 0, \sigma_{yy} = 0, \sigma_{xy} = 0$$

$$\alpha_{xx} \neq 0, \alpha_{yy} = 0, \alpha_{xy} = 0$$

$$d\varepsilon_{xx}^p = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \cdot (g + h) \cdot (\sigma_{xx} - \alpha_{xx}) \quad \text{et} \quad d\varepsilon_{yy}^p = -\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \cdot h \cdot (\sigma_{xx} - \alpha_{xx})$$

$$d\varepsilon_{xy}^p = -(d\varepsilon_{xx}^p + d\varepsilon_{yy}^p) = -\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \cdot g \cdot (\sigma_{xx} - \alpha_{xx})$$

D'où le rapport

$$r_0 = \frac{d\varepsilon_{yy}^p}{d\varepsilon_{xy}^p} = \frac{-\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \cdot h \cdot (\sigma_{xx} - \alpha_{xx})}{-\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \cdot g \cdot (\sigma_{xx} - \alpha_{xx})} = \frac{h}{g}$$

(A.8)

De plus dans cette direction :  $d\varepsilon_{xx}^p = d\bar{\varepsilon}^p$  pour  $\sigma_{xx} = \sigma_{eq}$

D'où  $g + h = I$  (A.9)

Le calcul de  $r_{90}$  se fait à partir d'un essai de traction avec  $\phi = 90^\circ$ .

- $\phi = 90^\circ$  :

$$\sigma_{xx} = 0, \sigma_{yy} \neq 0, \sigma_{xy} = 0$$

$$\alpha_{xx} = 0, \alpha_{yy} \neq 0, \alpha_{xy} = 0$$

$$d\varepsilon_{xx}^p = -\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \cdot h \cdot (\sigma_{yy} - \alpha_{yy}) \quad \text{et} \quad d\varepsilon_{yy}^p = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \cdot (f + h) \cdot (\sigma_{yy} - \alpha_{yy})$$

$$d\varepsilon_{zz}^p = -(d\varepsilon_{xx}^p + d\varepsilon_{yy}^p) = -\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \cdot f \cdot (\sigma_{yy} - \alpha_{yy})$$

D'où le rapport  $r_{90} = \frac{d\varepsilon_{xx}^p}{d\varepsilon_{zz}^p} = \frac{-\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \cdot h \cdot (\sigma_{yy} - \alpha_{yy})}{-\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \cdot f \cdot (\sigma_{yy} - \alpha_{yy})} = \frac{h}{f}$  (A.10)

Le calcul de  $r_{45}$  se fait à partir d'un essai de traction avec  $\phi = 45^\circ$

- $\phi = 45^\circ$  :

$$\sigma_{11} \neq 0, \sigma_{22} = 0, \sigma_{12} = 0$$

$$\alpha_{11} \neq 0, \alpha_{22} = 0, \alpha_{12} = 0$$

A partir de l'angle  $\phi$ , les contraintes sont calculer dans le repère  $\vec{x}\vec{y}$ .

$$\cos \phi = \sin \phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma_{xx} - \alpha_{xx} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \alpha_{11}), \sigma_{yy} - \alpha_{yy} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \alpha_{11}), \sigma_{xy} - \alpha_{xy} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \alpha_{11})$$

$$d\varepsilon_{xx}^p = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \cdot g \cdot (\sigma_{11} - \alpha_{11}) \quad \text{et} \quad d\varepsilon_{yy}^p = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \cdot f \cdot (\sigma_{11} - \alpha_{11}) \quad \text{et}$$

$$d\varepsilon_{xy}^p = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \cdot n \cdot (\sigma_{11} - \alpha_{11})$$

$$d\varepsilon_{zz}^p = -\frac{1}{2} \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \cdot (f + g)(\sigma_{11} - \alpha_{11})$$

$$d\varepsilon_{22}^p = \sin^2 \phi \cdot d\varepsilon_{xx}^p - 2 \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi \cdot d\varepsilon_{xy}^p + \cos^2 \phi \cdot d\varepsilon_{yy}^p$$

$$d\varepsilon_{22}^p = \frac{1}{4} \cdot d\varepsilon_{xx}^p - \frac{1}{2} \cdot d\varepsilon_{xy}^p + \frac{1}{4} \cdot d\varepsilon_{yy}^p = \frac{1}{4} \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \cdot (g - 2n + f) \cdot (\sigma_{11} - \alpha_{11})$$

D'où le rapport

$$r_{45} = \frac{d\varepsilon_{22}^p}{d\varepsilon_{zz}^p} = -\frac{f + g - 2n}{2(f + g)} \quad (A.11)$$

Grâce à la définition des coefficients de Lankford et des relations A.8, A.9, A.10 et A.11, on peut calculer les coefficients d'anisotropie de Hill  $f$ ,  $g$ ,  $h$  et  $n$ . Les coefficients d'anisotropie sont indépendants dans la formulation de Ziegler des translations  $\alpha$  de la surface de charge dans l'espace des contraintes.

### A.1.3. Formulation de Prager :

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_{xx}^p \\ d\varepsilon_{yy}^p \\ 2d\varepsilon_{xy}^p \end{Bmatrix} = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \begin{Bmatrix} g(\sigma_{xx} - \alpha_{xx}) + h((\sigma_{xx} - \alpha_{xx}) - (\sigma_{yy} - \alpha_{yy})) \\ f(\sigma_{yy} - \alpha_{yy}) + h((\sigma_{yy} - \alpha_{yy}) - (\sigma_{xx} - \alpha_{xx})) \\ 2n(\sigma_{xy} - \alpha_{xy}) \end{Bmatrix}$$

- $\phi = 0^\circ$  :

$$\sigma_{xx} \neq 0, \sigma_{yy} = 0, \sigma_{xy} = 0$$

$$\alpha_{xx} \neq 0, \alpha_{yy} \neq 0, \alpha_{xy} = 0$$

$$d\varepsilon_{xx}^p = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \cdot ((g + h)(\sigma_{xx} - \alpha_{xx}) - h(-\alpha_{yy})) \quad \text{et}$$

$$d\varepsilon_{yy}^p = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \cdot (-h(\sigma_{xx} - \alpha_{xx}) + (f + h)(-\alpha_{yy}))$$

$$d\varepsilon_{zz}^p = -(d\varepsilon_{xx}^p + d\varepsilon_{yy}^p) = -\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \cdot (g(\sigma_{xx} - \alpha_{xx}) + f(-\alpha_{yy}))$$

D'où le rapport

$$r_0 = \frac{d\varepsilon_{yy}^p}{d\varepsilon_{zz}^p} = \frac{\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \cdot (-h(\sigma_{xx} - \alpha_{xx}) + (f + h)(-\alpha_{yy}))}{\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} \cdot (-g(\sigma_{xx} - \alpha_{xx}) - f(-\alpha_{yy}))} = \frac{-h(\sigma_{xx} - \alpha_{xx}) + (f + h)(-\alpha_{yy})}{-g(\sigma_{xx} - \alpha_{xx}) - f(-\alpha_{yy})} \quad (A.12)$$

- $\phi = 90^\circ$  :

$$\sigma_{xx} = 0, \sigma_{yy} \neq 0, \sigma_{xy} = 0$$

$$\alpha_{xx} \neq 0, \alpha_{yy} \neq 0, \alpha_{xy} = 0$$

$$d\bar{\varepsilon}_{xx}^p = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} ((g+h)(-\alpha_{xx}) - h(\sigma_{yy} - \alpha_{yy})) \quad \text{et}$$

$$d\bar{\varepsilon}_{yy}^p = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} ((f+h)(\sigma_{yy} - \alpha_{yy}) - h(-\alpha_{xx}))$$

$$d\bar{\varepsilon}_{zz}^p = -(d\bar{\varepsilon}_{xx}^p + d\bar{\varepsilon}_{yy}^p) = -\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} (g(-\alpha_{xx}) + f(\sigma_{yy} - \alpha_{yy}))$$

D'où le rapport

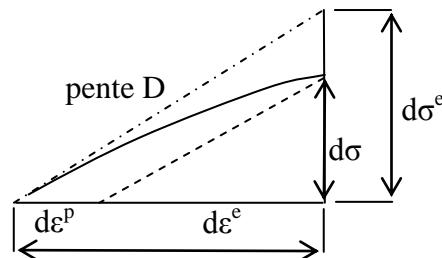
$$r_{90} = \frac{d\bar{\varepsilon}_{xx}^p}{d\bar{\varepsilon}_{zz}^p} = \frac{\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} ((g+h)(-\alpha_{xx}) - h(\sigma_{yy} - \alpha_{yy}))}{\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_{eq}} (-g(-\alpha_{xx}) - f(\sigma_{yy} - \alpha_{yy}))} = \frac{(g+h)(-\alpha_{xx}) - h(\sigma_{yy} - \alpha_{yy})}{-g(-\alpha_{xx}) - f(\sigma_{yy} - \alpha_{yy})} \quad (\text{A.13})$$

Les relations A.12 et A.13 montrent le couplage existant entre les coefficients d'anisotropie et les composantes d'écrouissage cinématique dans le cas de la formulation de Prager.

Ici, le calcul de  $r_{45}$  n'est pas présenté mais on note également que les coefficients  $f$ ,  $g$ ,  $h$  et  $n$  dépendent des translations  $\alpha$  de la surface de charge dans l'espace des contraintes.

## A.2 Calcul d'un incrément de contrainte pour un écrouissage isotrope

L'incrément de déformation se décompose en une partie élastique et une partie plastique :



**Figure A.2.** Décomposition additive de la déformation

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^e\} + \{d\varepsilon^p\} \quad (\text{A.14})$$

Pour la partie élastique de la déformation, nous avons la relation suivante :

$$\{d\sigma\} = [D]\{\delta^e\} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{12} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} d\delta_{11}^e \\ d\delta_{22}^e \\ 2.d\delta_{12}^e \end{Bmatrix}$$

Avec la matrice de comportement élastique  $[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix}$

Avec l'utilisation du critère de Hill48, les relations A.3 et A.6 restent valables et sont utilisées pour décrire la partie plastique de la déformation :

$$\begin{aligned} \{\delta^p\} &= \{a\}d\bar{\varepsilon}^p & (A.15) \\ \{a\} &= \frac{1}{\sigma_{eq}}[M]\{\sigma\} \end{aligned}$$

La relation A.14 peut alors s'écrire :

$$\{\delta\} = \{\delta^e\} + \{\delta^p\} = [D]^{-1} \cdot \{d\sigma\} + \{a\}d\bar{\varepsilon}^p$$

En multipliant par  $\langle a \rangle \cdot [D]$  chaque terme de l'égalité précédente, on obtient :

$$\langle a \rangle \cdot [D] \cdot \{\delta\} = \langle a \rangle \cdot \{d\sigma\} + \langle a \rangle \cdot [D] \cdot \{a\} \cdot d\bar{\varepsilon}^p \quad (A.16)$$

$$\text{or } \langle a \rangle \cdot \{d\sigma\} = d\sigma_c \text{ et } H' = \frac{d\sigma_c}{d\bar{\varepsilon}^p} \Rightarrow d\bar{\varepsilon}^p = \frac{\langle a \rangle \cdot [D] \cdot \{\delta\}}{H' + \langle a \rangle \cdot [D] \cdot \{a\}} \quad (A.17)$$

Le comportement élastoplastique est caractérisé par :  $\{d\sigma\} = [D_{ep}] \cdot \{\delta\}$

$$\text{A.15 et A.17 donnent : } \{\delta^p\} = \frac{\langle a \rangle \cdot \{a\} \cdot [D]}{H' + \langle a \rangle \cdot [D] \cdot \{a\}} \cdot \{\delta\} \quad (A.18)$$

$$\{d\sigma\} = [D] \cdot \{\delta^e\} = [D] \cdot \{\delta\} - [D] \cdot \{\delta^p\} \quad (A.19)$$

En substituant A.18 dans la relation A.19 on obtient :

$$\{d\sigma\} = \left[ [D] - \frac{[D] \cdot \{a\} \cdot \langle a \rangle \cdot [D]}{H' + \langle a \rangle \cdot [D] \cdot \{a\}} \right] \cdot \{\delta\} \quad (A.20)$$

$$\text{Avec } [D_{ep}] = [D] - \frac{[D] \cdot \{a\} \cdot \langle a \rangle \cdot [D]}{H' + \langle a \rangle \cdot [D] \cdot \{a\}}$$

### A.3 Calcul d'un incrément de contrainte pour l'écrouissage combiné de Lemaitre et Chaboche

Une méthode identique à celle présentée au paragraphe A.2 est utilisée pour la décomposition de l'incrément de déformation.

La définition du gradient  $\{a\}$  devient avec un écrouissage combiné :

$$\{a\} = \frac{1}{\sigma_{eq}} [M] \{\sigma - \alpha\}$$

La relation A.16 reste valable :

$$\langle a \rangle \cdot [D] \{d\varepsilon\} = \langle a \rangle \cdot \{d\sigma\} + \langle a \rangle \cdot [D] \{a\} d\bar{\varepsilon}^p \quad (A.21)$$

Or avec l'écrouissage combiné on a :  $\langle a \rangle \cdot \{d\sigma - d\alpha\} = d\sigma_c$ .

$$\Rightarrow \langle a \rangle \cdot \{d\sigma\} = d\sigma_c + \langle a \rangle \cdot \{d\alpha\} = \left[ H' + \langle a \rangle \cdot \frac{C_m}{\sigma_c} \cdot \{\sigma - \alpha\} - \gamma_m \cdot \langle a \rangle \cdot \{\alpha\} \right] d\bar{\varepsilon}^p$$

$$\text{Avec } H' = \frac{d\sigma_c}{d\bar{\varepsilon}^p} = Q \cdot b \cdot \exp(-b\bar{\varepsilon}^p)$$

$$\langle a \rangle \cdot \{d\sigma\} = [H' + C_m - \gamma_m \cdot \langle a \rangle \cdot \{\alpha\}] d\bar{\varepsilon}^p \quad (A.22)$$

En substituant l'expression A.22 dans A.21, on obtient alors :

$$d\bar{\varepsilon}^p = \frac{\langle a \rangle \cdot [D] \{d\varepsilon\}}{H' + C_m - \gamma_m \cdot \langle a \rangle \cdot \{\alpha\} + \langle a \rangle \cdot [D] \{a\}}$$

Grâce à  $\{d\varepsilon^p\} = \{a\} d\bar{\varepsilon}^p$ , on a :

$$\{d\varepsilon^p\} = \frac{\{a\} \langle a \rangle \cdot [D]}{H' + C_m - \gamma_m \cdot \langle a \rangle \cdot \{\alpha\} + \langle a \rangle \cdot [D] \{a\}} \cdot \{d\varepsilon\} \quad (A.23)$$

Avec la décomposition de l'incrément de déformation on peut écrire :

$$\begin{aligned} \{d\sigma\} &= [D] \{d\varepsilon^e\} = [D] \{d\varepsilon\} - [D] \{d\varepsilon^p\} \\ \{d\sigma\} &= \left[ [D] - \frac{[D] \{a\} \langle a \rangle \cdot [D]}{H' + C_m - \gamma_m \cdot \langle a \rangle \cdot \{\alpha\} + \langle a \rangle \cdot [D] \{a\}} \right] \{d\varepsilon\} \end{aligned} \quad (A.24)$$

On pose  $[D_{ep}] = [D] - \frac{[D] \{a\} \langle a \rangle \cdot [D]}{H' + C_m - \gamma_m \cdot \langle a \rangle \cdot \{\alpha\} + \langle a \rangle \cdot [D] \{a\}}$  telle que  $\{d\sigma\} = [D_{ep}] \{d\varepsilon\}$

#### A.4 Calcul d'un incrément de contrainte pour le modèle d'écrouissage combiné enrichi à 4 paramètres

Pour ce nouvel écrouissage combiné, la relation A.22 devient :

$$\begin{aligned} \langle a \rangle \cdot \{d\sigma\} &= [H' + C_m + C_s - \gamma_m \cdot \langle a \rangle \cdot \{\alpha\} - \gamma_s \cdot \langle a \rangle \cdot \{\alpha\}] d\bar{\varepsilon}^p \\ \text{avec } H' &= \frac{d\sigma_c}{d\bar{\varepsilon}^p} = Q \cdot b \cdot \exp(-b\bar{\varepsilon}^p) - C_s \cdot \exp(-\gamma_s \bar{\varepsilon}^p) \end{aligned} \quad (A.25)$$

En substituant l'expression A.25 dans A.21, on obtient alors :

$$d\bar{\varepsilon}^p = \frac{\langle a \rangle [D] \{d\varepsilon\}}{H' + C_m + C_s - \gamma_m \langle a \rangle \{a\} - \gamma_s \langle a \rangle \{a\} + \langle a \rangle [D] \{a\}}$$

Avec  $\{d\varepsilon^p\} = \{a\} d\bar{\varepsilon}^p$ , on a :

$$\{d\varepsilon^p\} = \frac{\{a\} \langle a \rangle [D]}{H' + C_m + C_s - \gamma_m \langle a \rangle \{a\} - \gamma_s \langle a \rangle \{a\} + \langle a \rangle [D] \{a\}} \cdot \{d\varepsilon\} \quad (\text{A.26})$$

Grâce à la décomposition de l'incrément de déformation on peut écrire :

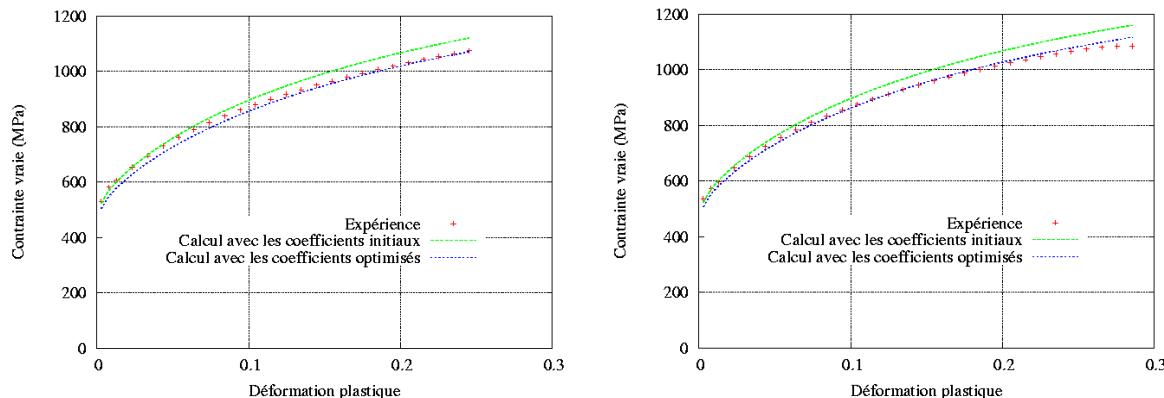
$$\begin{aligned} \{d\sigma\} &= [D] \{d\varepsilon^e\} = [D] \{d\varepsilon\} - [D] \{d\varepsilon^p\} \\ \{d\sigma\} &= \left[ [D] - \frac{[D] \{a\} \langle a \rangle [D]}{H' + C_m + C_s - \gamma_m \langle a \rangle \{a\} - \gamma_s \langle a \rangle \{a\} + \langle a \rangle [D] \{a\}} \right] \{d\varepsilon\} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} \text{Avec } [D^{ep}] &= [D] - \frac{[D] \{a\} \langle a \rangle [D]}{H' + C_m + C_s - \gamma_m \langle a \rangle \{a\} - \gamma_s \langle a \rangle \{a\} + \langle a \rangle [D] \{a\}} \\ \text{tel que } \{d\sigma\} &= [D^{ep}] \{d\varepsilon\} \end{aligned}$$

## A.5 Limitations du critère de Hill48

Dans le chapitre 3, nous avons montré les limites du critère de Hill 48 en cisaillement simple, il en va de même si on simule les essais de traction à 45° et à 90°.

L'optimisation des paramètres de Hill, f, g, h et n permet de se rapprocher des essais expérimentaux de ces courbes de traction.



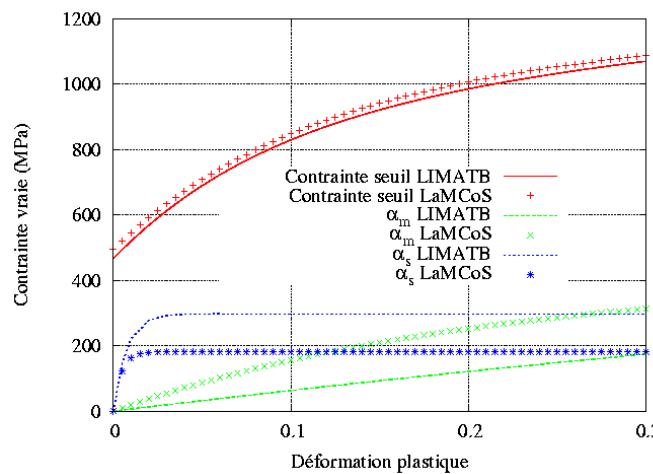
**Figure A.3.** Simulation de l'essai de traction à 45° (à gauche) et à 90° (à droite)

## A.6 Evolution des contributions cinématiques

La figure A.4 montre l'évolution, en traction uniaxiale, des différentes contributions cinématiques identifiées en flexion alternée et en cisaillement cyclique.

La forme des courbes relatives à la composante secondaire de l'écrouissage cinématique  $\alpha_s$  est la même, que l'identification soit faite en flexion ou en cisaillement : elles saturent très rapidement. La caractérisation en cisaillement donne une valeur de saturation nettement plus importante que celle trouvée en flexion (environ 100 MPa).

A l'inverse, l'identification en flexion donne une composante principale  $\alpha_m$  supérieure à celle calculée en cisaillement.



**Figure A.4.** Visualisation des composantes cinématiques identifiées avec les deux méthodes

## A.7 Procédures d'identification des paramètres $C_m$ , $\gamma_m$ , $C_s$ et $\gamma_s$

```
(* ..... *)  
PROCEDURE calculer_C_gamma_Cp_gp(epsilon_pMax:DOUBLE;  
                                     VAR C,gamma,Cp,gammaPrime:DOUBLE);  
(* Définition des variables *)  
(* Cp = Cm *)  
(* gammaPrime = γm *)  
(* C = Cs *)  
(* gamma = γs *)  
  
VAR b,h,M1,S1,ep1 : DOUBLE;  
     epi,Miso,Siso : DOUBLE;  
alpha1,Mexp,Sexp : DOUBLE;  
     Msup,Ssup : DOUBLE;  
Sx,Sy,Sxy,Sxx : DOUBLE;  
     nDif,i : INTEGER;  
DifX,DifY : ARRAY[1..compMax] OF DOUBLE;  
  
     Hp,Hpmin,epsp : DOUBLE;  
dif,epmin,facteur : DOUBLE;  
     fichier : TEXT;  
  
BEGIN  
h:=epaisseur;
```

```

b:=largeur;

(* M1max = moment en fin de pliage *)
M1:=M1max;
S1:=M1*4.0/(b*h*h);

(* Calcul de Epsilon plastique en fin de pliage *)
(* (Cas 1 : lissage de la courbe de traction par Ludwick) *)
(* (Cas 2 : lissage de la courbe de traction par Voce) *)
IF calcul_lissage
  THEN CASE typeLissage OF
    1: ep1:=exp((ln(S1-sigma0)-ln(cA))/nL);
    2: ep1:=(ln(-S1+sigma0+QVoce)-ln(QVoce)) / (-bVoce);
  END
  ELSE epsilon_p(nScE,S1,ep1);

(* Calcul de  $C_m$  et  $\gamma_m$  *)
nDif:=0;
FOR i:=1 TO nIso DO
  BEGIN
    (* Contrainte avec un écouvissage isotrope *)
    Miso:=IsoY[i];
    Siso:=ABS(Miso)*4.0/(b*h*h);
    (* Contrainte de l'essai expérimental *)
    Mexp:=ExpY[i];
    Sexp:=ABS(Mexp)*4.0/(b*h*h);
    IF calcul_lissage
      THEN CASE typeLissage OF
        1: epi:=exp((ln(Siso-sigma0)-ln(cA))/nL);
        2: epi:=(ln(-Siso+sigma0+QVoce)-ln(QVoce)) / (-bVoce);
      END
      ELSE epsilon_p(nScE,Siso,epi);
    dif:=Siso-Sexp;

    IF (dif)>1.0e-9 THEN
      BEGIN
        nDif:=nDif+1;
        DifX[nDif]:=epi-ep1;
        DifY[nDif]:=ln(dif);
      END;
    END;

    (* Linéarisation de la différence Siso-Sexp *)
    gammaInit:=0.0;
    IF nDif>2 THEN
      BEGIN
        Sx:=0.0;
        FOR i:=1 TO nDif DO Sx:=Sx+difX[i];
        Sy:=0.0;
        FOR i:=1 TO nDif DO Sy:=Sy+difY[i];
        Sxy:=0.0;
        FOR i:=1 TO nDif DO Sxy:=Sxy+difX[i]*difY[i];
        Sxx:=0.0;
        FOR i:=1 TO nDif DO Sxx:=Sxx+difX[i]*difX[i];
        gammaInit:=- (Sx*Sy-nDif*Sxy) / (Sx*Sx-nDif*Sxx);
      END;

    IF gammaInit>0.001 THEN
      BEGIN

```

```

alphan:=exp((Sy+gammaInit*Sx)/nDif)/2.0;
CInit:=gammaInit*alphan/(1.0-exp(-gammaInit*ep1));
Cp:=Cinit;
gammaPrime:=gammaInit;
END;

(* Premier calcul de Cs et γs *)
ASSIGN(fichier,CONCAT(drive,nom_fichier,'.sec'));
REWRITE (fichier);
nDif:=0;
FOR i:=1 TO nSup DO
  BEGIN
    Miso:=IsoY[i];
    Siso:=ABS(Miso)*4.0/(b*h*h);
    Mexp:=ExpY[i];
    Sexp:=ABS(Mexp)*4.0/(b*h*h);
    Msup:=SupY[i];
    Ssup:=ABS(Msup)*4.0/(b*h*h);
    IF calcul_lissage
      THEN CASE typeLissage OF
        1: epi:=exp((ln(Siso-sigma0)-ln(cA))/nL);
        2: epi:=(ln(-Siso+sigma0+QVoce)-ln(QVoce))/(-bVoce);
      END
    ELSE epsilon_p(nScE,Siso,epi);
    dif:=Siso-Ssup+Sexp-Ssup;

    IF (dif)>1.0e-9 THEN
      BEGIN
        nDif:=nDif+1;
        DifX[nDif]:=epi-ep1;
        DifY[nDif]:=ln(dif);
      END;
    END;
  END;

(* Linéarisation de la différence Siso-Sexp *)
gammaInit:=0.0;
IF nDif>2 THEN
  BEGIN
    Sx:=0.0;
    FOR i:=1 TO nDif DO Sx:=Sx+difX[i];
    Sy:=0.0;
    FOR i:=1 TO nDif DO Sy:=Sy+difY[i];
    Sxy:=0.0;
    FOR i:=1 TO nDif DO Sxy:=Sxy+difX[i]*difY[i];
    Sxx:=0.0;
    FOR i:=1 TO nDif DO Sxx:=Sxx+difX[i]*difX[i];
    gammaInit:=- (Sx*Sy-nDif*Sxy) / (Sx*Sx-nDif*Sxx);
  END;
IF gammaInit<1.0E-6
  THEN BEGIN
    gammaInit:=0.001;
    Cinit:=0.0;
  END
  ELSE BEGIN
    alphan:=exp((Sy+gammaInit*Sx)/nDif)/2.0;
    CInit:=gammaInit*alphan/(1.0-exp(-gammaInit*ep1));
  END;
C:=Cinit; gamma:=gammaInit;
CLOSE(fichier);
END;

```

```
(* .....*)

PROCEDURE optimiser_C_Gamma(nbVal:INTEGER; VAR C,gamma:DOUBLE);

VAR      Mopt,Kopt : Mat_500;
        sigma,C00,g00,C0,g0 : DOUBLE;
        ecart_mini,lambda : DOUBLE;
        ecart1,C1,g1 : ARRAY[1..4] OF DOUBLE;
        trouve : BOOLEAN;
        j,nIter : INTEGER;
        Psec,Psm1 : mat_3_3;
Exx0,Eyy0,E2xy0,EPB0 : DOUBLE;
Sxx0,Syy0,Sxy0,SB0 : DOUBLE;
Hp0,Axx0,Ayy0,Axy0 : DOUBLE;
epsilon_p : DOUBLE;

Apxx0,Apyy0,Apxy0 : DOUBLE; {Ajout pour nouveau modèle}

{-----}

PROCEDURE definition_courbe;

VAR i,j : INTEGER;

BEGIN
  Sigma_b[0]:=0.0;
  Epsil_b[0]:=0.0;
  i:=1;
  Sigma_b[i]:=sigma0;
  Epsil_b[i]:=sigma0/E;
  FOR j:=1 TO 10 DO
    BEGIN
      epsilon_p:=j*0.002;
      IF calcul_lissage
        THEN sigma_seuil_opt(typeLissage,epsilon_p,sigma,Hp0)
        ELSE sigma_seuil_opt(nScE_opt,epsilon_p,sigma,Hp0);
      Sigma:=Sigma-(C/gamma)*(1.0-exp(-gamma*epsilon_p));
      (* Ajout pour nouveau modèle *)
      Sigma:=Sigma-(Cp/gp)*(1.0-exp(-gp*epsilon_p));
      i:=i+1;
      Sigma_b[i]:=sigma;
      Epsil_b[i]:=epsilon_p+Sigma_b[i]/E;
      END;
  REPEAT
    epsilon_p:=epsilon_p+0.01;
    IF calcul_lissage
      THEN sigma_seuil_opt(typeLissage,epsilon_p,sigma,Hp0)
      ELSE sigma_seuil_opt(nScE_opt,epsilon_p,sigma,Hp0);
    Sigma:=Sigma-(C/gamma)*(1.0-exp(-gamma*epsilon_p));
    (* Ajout pour nouveau modèle *)
    Sigma:=Sigma-(Cp/gp)*(1.0-exp(-gp*epsilon_p));
    i:=i+1;
    Sigma_b[i]:=sigma;
    Epsil_b[i]:=epsilon_p+Sigma_b[i]/E;
  UNTIL epsilon_p>=0.2;
END;

{-----}
```

```

BEGIN {optimiser_C_Gamma}

lire_fichier_MoC_Opt(nopt,Mopt,Kopt);
lire_fichier_SlE_opt(nScE_opt,sigma0);

(* Etat de départ pour le pliage *)
init_depart_secant_opt(Psec,Psm1,Exx0,Eyy0,E2xy0,EPB0,
Sxx0,Syy0,Sxy0,SB0,Axx0,Ayy0,Axy0,Apxx0,Apyy0,Apxy0);

(* Definition de la courbe Sigma comparaison en fonction de
Epsilon_L_Barre *)
definition_courbe;

(* Premier calcul *)
Depliage_Secant_opt(Psec,Psm1,Exx0,Eyy0,E2xy0,EPB0,
Sxx0,Syy0,Sxy0,SB0,Axx0,Ayy0,Axy0,Apxx0,Apyy0,Apxy0,
nopt,Mopt,Kopt,ecart_mini);

lambda:=SQRT(2.0)/2.0;
C00:=C;
g00:=gamma;
C0:=C;
g0:=gamma;

nIter:=0;

(* Optimisation *)
REPEAT
    C1[1]:=C0; g1[1]:=g0+lambda*g00;
    C1[2]:=C0; g1[2]:=g0-lambda*g00;
    C1[3]:=C0+lambda*C00; g1[3]:=g0;
    C1[4]:=C0-lambda*C00; g1[4]:=g0;
    FOR j:=1 TO 4 DO
        BEGIN
        C:=C1[j];
        gamma:=g1[j];

        (* Definition de la courbe Sigma comparaison en fonction de
Epsilon_L_Barre *)
        definition_courbe;
        (* Calcul d'une précision (variable 'ecart1') *)
        Depliage_Secant_opt(Psec,Psm1,Exx0,Eyy0,E2xy0,EPB0,
Sxx0,Syy0,Sxy0,SB0,Axx0,Ayy0,Axy0,Apxx0,Apyy0,Apxy0,
nopt,Mopt,Kopt,ecart1[j]);
        END;
    trouve:=FALSE;
    FOR j:=1 TO 4 DO
        IF ecart1[j]<ecart_mini THEN
            BEGIN
            ecart_mini:=ecart1[j];
            C0:=C1[j];
            g0:=g1[j];
            trouve:=TRUE;
            nIter:=nIter+1;
            IF nIter=5 THEN
                BEGIN
                Write('.');
                nIter:=0;
            END;
        END;
    END;
END;

```

```
        END;
    END;
IF NOT trouve THEN
    lambda:=lambda/2.0;
UNTIL (lambda<0.000001);
C:=C0;
gamma:=g0;
WRITELN(' fin');
END;

(*.....*)
```



## Annexe B

### Compléments sur les outils numériques

## B.1. Stabilité du schéma des différences finies centrées en présence d'amortissement

La première condition de stabilité du schéma explicite des différences finies centrées est de limiter le pas de temps  $\Delta t$  (voir chapitre 4.4.1).

On rappelle la forme de l'équation d'équilibre :

$$[M]\{\ddot{u}^n\} + [C]\{\dot{u}^n\} + [K]\{u^n\} = \{F_{ext}^n\} \quad (B.1)$$

La méthode la plus utilisée pour étudier la stabilité des procédures d'intégration directe à un seul pas dans ce cas consiste à faire une décomposition modale du système B.1. La décomposition modale du système est réalisée en faisant une hypothèse sur la matrice d'amortissement pour s'assurer que le système sera découpé. Ici on a supposé l'amortissement de type Rayleigh (paragraphe 3.3.2) :

$$[M]\{\ddot{u}^n\} + (\alpha[M] + \beta[K])\{\dot{u}^n\} + [K]\{u^n\} = \{F_{ext}^n\}$$

La décomposition modale donne :

$$\{\ddot{u}^n\} + 2.\xi.\{\omega\}\{\dot{u}^n\} + \{\omega^2\}\{u^n\} = \{F_{ext}^n\}$$

où  $\xi$  est le facteur d'amortissement visqueux et  $\{\omega\}$  les pulsations du système non amorti.

Si le degré de liberté présentant la plus grande pulsation propre est conservé, on peut écrire :

$$\ddot{u}^n + 2.\xi.\omega.\dot{u}^n + \omega^2 u^n = F_{ext}^n \quad (B.2)$$

La méthode des différences finies centrées permet d'exprimer le déplacement et la vitesse par :

$$\begin{aligned} \dot{u}^{n+1} &= \dot{u}^n + \Delta t \ddot{u}^n \\ u^{n+1} &= u^n + \Delta t \dot{u}^n + \Delta t^2 \ddot{u}^n \end{aligned} \quad (B.3)$$

En remplaçant dans B.3 l'expression de  $\ddot{u}^n$  obtenue dans B.2, on arrive à

$$\begin{aligned} \dot{u}^{n+1} &= -\Delta t \omega^2 u^n + (1 - 2\Delta t \xi \omega) \dot{u}^n + \Delta t F_{ext}^n \\ u^{n+1} &= (1 - \Delta t^2 \omega^2) u^n + (\Delta t - 2\Delta t^2 \xi \omega) \dot{u}^n + \Delta t^2 F_{ext}^n \end{aligned} \quad (B.4)$$

On peut maintenant déterminer la matrice d'amplification  $[A_n]$  :

$$\begin{Bmatrix} u^{n+1} \\ \dot{u}^{n+1} \end{Bmatrix} = [A_n] \begin{Bmatrix} u^n \\ \dot{u}^n \end{Bmatrix} + \{L_n\}$$

D'après B.4 et la définition de la matrice d'amplification,  $[A_n]$  s'écrit :

$$[A_n] = \begin{bmatrix} 1 - \Delta t^2 \omega^2 & \Delta t - 2\Delta t^2 \xi \omega \\ -\Delta t \omega^2 & 1 - 2\Delta t \xi \omega \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique de la matrice  $[A_n]$  permettant de déterminer ses valeurs propres se met sous la forme :

$$\lambda^2 + (\Delta t^2 \omega^2 + 2\Delta t \cdot \xi \cdot \omega - 2)\lambda - 2\Delta t \cdot \xi \cdot \omega + 1 = 0 \quad (B.5)$$

En posant

$$\begin{aligned} h &= \Delta t^2 \omega^2 \\ g &= 2\Delta t \cdot \xi \cdot \omega \end{aligned} \quad (B.6)$$

B.5 devient

$$\lambda^2 + (g + h - 2)\lambda + (1 - g) = 0 \quad (B.7)$$

Si on écrit l'équation B.7 sous la forme

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

les trois conditions pour assurer la stabilité de la solution sont [2] :

$$\begin{aligned} a + b + c &= \Delta t^2 \omega^2 \geq 0 \\ a - c &= 2\Delta t \cdot \xi \cdot \omega \geq 0 \\ a - b + c &= 4 - 4 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \Delta t - \omega \cdot \Delta t^2 \geq 0 \end{aligned}$$

La première condition est automatiquement satisfaite. La seconde est remplie à condition que  $\xi \geq 0$  (l'amortissement doit être positif). Enfin, la troisième relation est satisfaite si :

$$\omega \cdot \Delta t = -2\xi \pm 2\sqrt{\xi^2 + 1}$$

La racine négative n'est pas satisfaisante puisqu'elle conduit à un pas de temps négatif. La racine positive donne donc le pas de temps critique :

$$\Delta t_{crit} = \frac{2}{\omega} \left( \sqrt{\xi^2 + 1} - \xi \right) \quad (B.8)$$

## B.2. Détail de la matrice masse de l'élément DKT12

```

SUBROUTINE matrice_masse_diagonale(deltat_c)

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

INCLUDE 'gene_exp.sdd'
DOUBLE PRECISION mpn,l1,l2,l3,Lmax,masseMax
DIMENSION T(3,3)

DO i=1, nnSom
    DO j=1, 6
        masse(i,j)=0.0D+00
    ENDDO
ENDDO

hmoy =0.0D+00
hmin =1.0D+09
masseMax=Dzero

DO p =1, nelts
    i =Ndelt(p,1)
    j =Ndelt(p,2)
    k =Ndelt(p,3)
    Xi=Cnoeud(i,1)
    Yi=Cnoeud(i,2)
    Zi=Cnoeud(i,3)
    Xj=Cnoeud(j,1)
    Yj=Cnoeud(j,2)
    Zj=Cnoeud(j,3)
    Xk=Cnoeud(k,1)
    Yk=Cnoeud(k,2)
    Zk=Cnoeud(k,3)
    CALL axes_locaux_ij(Xi,Yi,Zi,Xj,Yj,Zj,Xk,Yk,Zk,T)
    CALL coordonnees_locales_i(Xi,Yi,Zi,Xj,Yj,Zj,Xk,Yk,Zk,T,
    *                                     x1,y1,x2,y2,x3,y3)
    aire=(x2*y3-x3*y2+x3*y1-x1*y3+x1*y2-x2*y1)/2.0D+00
    mpn=aire*Epelt(p)*ro/3.0D+00

    DO n=1, 3
        masse(i,n)=masse(i,n)+mpn
        masse(j,n)=masse(j,n)+mpn
        masse(k,n)=masse(k,n)+mpn
    ENDDO

    l1=DSQRT((x3-x2)*(x3-x2)+(y3-y2)*(y3-y2))
    l2=DSQRT((x1-x3)*(x1-x3)+(y1-y3)*(y1-y3))
    l3=DSQRT((x2-x1)*(x2-x1)+(y2-y1)*(y2-y1))
    Lmax=l1
    IF (l2.GT.Lmax) Lmax=l2
    IF (l3.GT.Lmax) Lmax=l3
    h=2.0D+00*aire/Lmax
    IF (h.LT.hmin) hmin=h
    hmoy=hmoy+h

C     noeuds associés, ddl correspondant et position dans K
    l=ndpos(Ndelt(p,4),1)
    m=ndpos(Ndelt(p,5),1)
    n=ndpos(Ndelt(p,6),1)
    dl=ndpos(Ndelt(p,4),2)

```

```

dm=ndpos(Ndelt(p,5),2)
dn=ndpos(Ndelt(p,6),2)

h=2.0D+00*aire/13
masse(l,d1)=masse(l,d1)+mpn*h*h
IF (masse(l,d1).GT.masseMax) masseMax=masse(l,d1)
C
h=2.0D+00*aire/11
masse(m,dm)=masse(m,dm)+mpn*h*h
IF (masse(m,dm).GT.masseMax) masseMax=masse(m,dm)
C
h=2.0D+00*aire/12
masse(n,dn)=masse(n,dn)+mpn*h*h
IF (masse(n,dn).GT.masseMax) masseMax=masse(n,dn)
ENDDO

deltat_c=hmin*DSQRT(ro/Mat(1)*coef_dim)

C Masses pour ddl manquants
DO i=1, nnSom
  DO j=1, 3
    IF (ndpos(i,j).EQ.0) THEN
      n=j+3
      masse(i,n)=masseMax
    ENDIF
  ENDDO
ENDDO

RETURN
END

```

### B.3. Détail de la matrice $[C_c]$ pour l'élément S3

$\frac{1}{h_1} Z_x^e$	$-\frac{\cos \beta_3}{h_1} Z_x^e$	$-\frac{\cos \beta_2}{h_1} Z_x^e$	$-\frac{\cos \gamma_2}{q_1} Z_x^a$		$-\frac{\cos \phi_3}{p_1} Z_x^c$	$U_{X1}$
$\frac{1}{h_1} Z_y^e$	$-\frac{\cos \beta_3}{h_1} Z_y^e$	$-\frac{\cos \beta_2}{h_1} Z_y^e$	$-\frac{\cos \gamma_2}{q_1} Z_y^a$		$-\frac{\cos \phi_3}{p_1} Z_y^c$	$U_{Y1}$
$\frac{1}{h_1} Z_z^e$	$-\frac{\cos \beta_3}{h_1} Z_z^e$	$-\frac{\cos \beta_2}{h_1} Z_z^e$	$-\frac{\cos \gamma_2}{q_1} Z_z^a$		$-\frac{\cos \phi_3}{p_1} Z_z^c$	$U_{Z1}$
$-\frac{\cos \beta_3}{h_2} Z_x^e$	$\frac{1}{h_2} Z_x^e$	$-\frac{\cos \beta_1}{h_2} Z_x^e$	$-\frac{\cos \gamma_1}{q_2} Z_x^a$	$-\frac{\cos \psi_3}{r_2} Z_x^b$		$U_{X2}$
$-\frac{\cos \beta_3}{h_2} Z_y^e$	$\frac{1}{h_2} Z_y^e$	$-\frac{\cos \beta_1}{h_2} Z_y^e$	$-\frac{\cos \gamma_1}{q_2} Z_y^a$	$-\frac{\cos \psi_3}{r_2} Z_y^b$		$U_{Y2}$
$-\frac{\cos \beta_3}{h_2} Z_z^e$	$\frac{1}{h_2} Z_z^e$	$-\frac{\cos \beta_1}{h_2} Z_z^e$	$-\frac{\cos \gamma_1}{q_2} Z_z^a$	$-\frac{\cos \psi_3}{r_2} Z_z^b$		$U_{Z2}$
$-\frac{\cos \beta_2}{h_3} Z_x^e$	$-\frac{\cos \beta_1}{h_3} Z_x^e$	$\frac{1}{h_3} Z_x^e$		$-\frac{\cos \psi_2}{r_3} Z_x^b$	$-\frac{\cos \phi_1}{p_3} Z_x^c$	$U_{X3}$
$-\frac{\cos \beta_2}{h_3} Z_y^e$	$-\frac{\cos \beta_1}{h_3} Z_y^e$	$\frac{1}{h_3} Z_y^e$		$-\frac{\cos \psi_2}{r_3} Z_y^b$	$-\frac{\cos \phi_1}{p_3} Z_y^c$	$U_{Y3}$
$-\frac{\cos \beta_2}{h_3} Z_z^e$	$-\frac{\cos \beta_1}{h_3} Z_z^e$	$\frac{1}{h_3} Z_z^e$		$-\frac{\cos \psi_2}{r_3} Z_z^b$	$-\frac{\cos \phi_1}{p_3} Z_z^c$	$U_{Z3}$
			$\frac{1}{h_4} Z_x^a$			$U_{X4}$
			$\frac{1}{h_4} Z_y^a$			$U_{Y4}$
			$\frac{1}{h_4} Z_z^a$			$U_{Z4}$
				$\frac{1}{h_5} Z_x^b$		$U_{X5}$
				$\frac{1}{h_5} Z_y^b$		$U_{Y5}$
				$\frac{1}{h_5} Z_z^b$		$U_{Z5}$
					$\frac{1}{h_6} Z_x^c$	$U_{X6}$
					$\frac{1}{h_6} Z_y^c$	$U_{Y6}$
					$\frac{1}{h_6} Z_z^c$	$U_{Z6}$

**Figure B.1.** Matrice  $[C_c]$  pour le calcul des rotations de corps rigide

## B.4. Raideur géométrique

Les matrices  $[B_u]$ ,  $[B_v]$  et  $[B_w]$  utilisées pour construire la matrice de raideur géométrique ont la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} B_u \\ (2 \times 9) \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23}.xX & | & y_{23}.xY & | & y_{23}.xZ & | & y_{31}.xX & | & y_{31}.xY & | & y_{31}.xZ & | & y_{12}.xX & | & y_{12}.xY & | & y_{12}.xZ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_v \\ (2 \times 9) \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23}.yX & | & y_{23}.yY & | & y_{23}.yZ & | & y_{31}.yX & | & y_{31}.yY & | & y_{31}.yZ & | & y_{12}.yX & | & y_{12}.yY & | & y_{12}.yZ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_w \\ (2 \times 9) \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23}.zX & | & y_{23}.zY & | & y_{23}.zZ & | & y_{31}.zX & | & y_{31}.zY & | & y_{31}.zZ & | & y_{12}.zX & | & y_{12}.zY & | & y_{12}.zZ \end{bmatrix}$$

Dans notre cas, on a  $y_{12} = 0$ , certains termes de la matrice seront donc nuls.



## Annexe C

### Synthèse des simulations industrielles

Renfort pied arrière							
OP20 (Emboutissage)	Type d'éléments finis	Belytschko Tsay	Belytschko Tsay	S3			
	Taille de maille	Maillage adaptatif Tm initiale = 6 mm ; Tm finale = 1.5 mm	2 mm	1.5 mm	2 mm	2.5 mm	3 mm
	Critère de plasticité	Hill 48					
	Loi d'écrouissage	Lemaitre et Chaboche (Standard)		Lemaitre et Chaboche (User)			
OP30 (Détourage)	Type d'éléments finis			S3			
	Taille de maille			1.6 mm	2 mm	2.5 mm	3 mm
	Critère de plasticité			Hill 48			
	Loi d'écrouissage			Lemaitre et Chaboche (User)			
OP40 (Calibrage)	Type d'éléments finis			S3			
	Taille de maille			1.6 mm	2 mm	2.5 mm	3 mm
	Critère de plasticité			Hill 48			
	Loi d'écrouissage			Lemaitre et Chaboche (User)			
OP50 (Détourage)	Type d'éléments finis			S3			
	Taille de maille			1.6 mm	2 mm	2.5 mm	3 mm
	Critère de plasticité			Hill 48			
	Loi d'écrouissage			Lemaitre et Chaboche (User)			

Renfort baviolet				
OP20 (Emboutissage)	Type d'éléments finis	Belytschko Tsay	Belytschko Tsay	S3
	Taille de maille	Maillage adaptatif Tm initiale = 8.8 mm ; Tm finale = 1.1 mm	2 mm	2 mm
	Critère de plasticité	Hill 48		
	Loi d'écrouissage	Lemaitre et Chaboche (Standard)		Lemaitre et Chaboche (User)
OP30 (Détourage)	Type d'éléments finis			S3
	Taille de maille			2 mm
	Critère de plasticité			Hill 48
	Loi d'écrouissage			Lemaitre et Chaboche (User)

Doublure de capot				
OP20 (Emboutissage)	Type d'éléments finis	Belytschko Tsay	Belytschko Tsay	S3
	Taille de maille	Maillage adaptatif Tm initiale = 10 mm ; Tm finale = 1.6 mm	2 mm	2 mm
	Critère de plasticité	Hill 48		
	Loi d'écrouissage	Lemaitre et Chaboche (Standard)		Lemaitre et Chaboche (User)
OP30 (Détourage)	Type d'éléments finis			S3
	Taille de maille			2 mm
	Critère de plasticité			Hill 48
	Loi d'écrouissage			Lemaitre et Chaboche (User)

Capot				
OP20 (Emboutissage)	Type d'éléments finis	Belytschko Tsay	Belytschko Tsay	S3
	Taille de maille	Maillage adaptatif Tm initiale =10 mm ; Tm finale = 1.6 mm	2 mm	2 mm
	Critère de plasticité	Hill 48		
	Loi d'écrouissage	Lemaitre et Chaboche (Standard)		Lemaitre et Chaboche (User)



## ***Contribution à l'analyse du retour élastique en emboutissage***

### **Résumé :**

L'objectif de PSA Peugeot Citroën Automobiles est de disposer d'une simulation numérique robuste de l'opération d'emboutissage capable de prédire correctement la géométrie finale des pièces. Cet outil numérique est destiné par la suite à être utilisé avec un outil de compensation du retour élastique pour proposer une géométrie d'outil optimale. Pour que le modèle de calcul soit apte à prédire correctement l'état de contraintes en fin d'emboutissage, deux ingrédients majeurs doivent être considérés : l'aspect modélisation numérique (éléments finis, modèles de jons, frottement ...) et l'aspect matériel.

Des essais de traction uniaxiale ont été réalisés pour déterminer l'anisotropie initiale et la courbe d'écrouissage monotone des tôles. La modélisation du matériau est décrite par un modèle d'écrouissage combiné à 2 ou 4 paramètres cinématiques avec l'utilisation d'un critère de plasticité de Hill 48. Les paramètres de l'écrouissage cinématique sont quant à eux définis via les essais cycliques par flexion. Des essais de cisaillement ont également été réalisés pour comparer les deux techniques d'identification.

Dans une seconde partie, nous nous sommes attachés à décrire l'aspect modélisation numérique uniquement sur l'étude des éléments finis coques S3 et DTK12 au sein du logiciel PamStamp 2G V2005.0.4. Ces éléments finis ont la particularité de n'avoir aucun degré de liberté en rotation aux nœuds sommets. Un nouvel élément coque quadrangulaire DKS16, ayant des degrés de liberté similaire au triangle DKT12, est également proposé pour la simulation de la mise en forme et le retour élastique des tôles.

La validité des modèles (matériaux et éléments finis) développés est évaluée sur des cas académiques comme des pièces en U ou le passage à rouleau grâce à l'utilisation du code de calcul développé à l'INSA de Lyon puis grâce au logiciel PamStamp 2G. Une validation de ces modèles est ensuite menée sur des pièces industrielles avec le logiciel PamStamp 2G.

**Mots-clés :** retour élastique, essais rhéologiques, écrouissage combiné, simulation numérique, éléments finis.

### **Abstract :**

The aim of PSA Peugeot Citroën Automobiles is to have a reliable stamping numerical simulation in order to give the final geometry part. Then, this numerical simulation will be used with a springback compensation tool to propose an optimal tool geometry. To a good computation of stress state at the end of the stamping, two points must be considered : the numerical simulation (element type, drawbead, friction ...) and the modeling of the material behaviour.

Uniaxial tensile tests are performed to determine initial anisotropy and the hardening curve of the material. The material behaviour is defined by a combined hardening with 2 or 4 kinematics parameters with the use of a Hill 48 yield criterion. The identification of the kinematics parameters is based on a cyclic bending test. Shear test were also used to compare the two identifications methods.

In a second part, the shell element S3 (rotation-free) and DKT12 are described to their implementation on PamStamp 2G V2005.0.4. These elements have no rotation degree of freedom on their summits nodes. A new quadrilateral shell element called DKS16 which makes a pair with DKT12 triangle is proposed for the sheet metal forming and springback simulation.

The validity of these models (material and element type) are checked on basic tests like U deep drawing or the deformation of a metal strip through rollers with the use of a software developed at INSA de Lyon and then with PamStamp 2G. Finally, models are checked on industrial parts with PamStamp2G.

**Keywords :** springback, rheological tests, combined hardening, numerical simulation, finite elements.