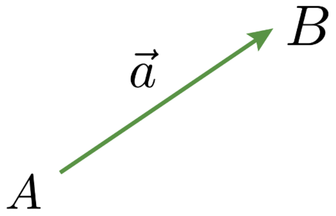
СБЕРБАНК
Корпоративный
университет

Линейная алгебра

Векторы и матрицы

Векторы

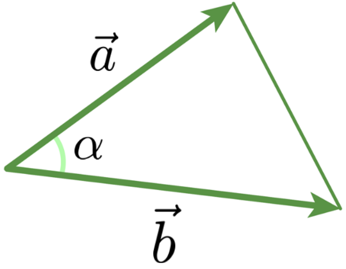
Вектор — **направленный отрезок:**



Примеры:

- Скорость автомобиля:

- Стороны треугольника:



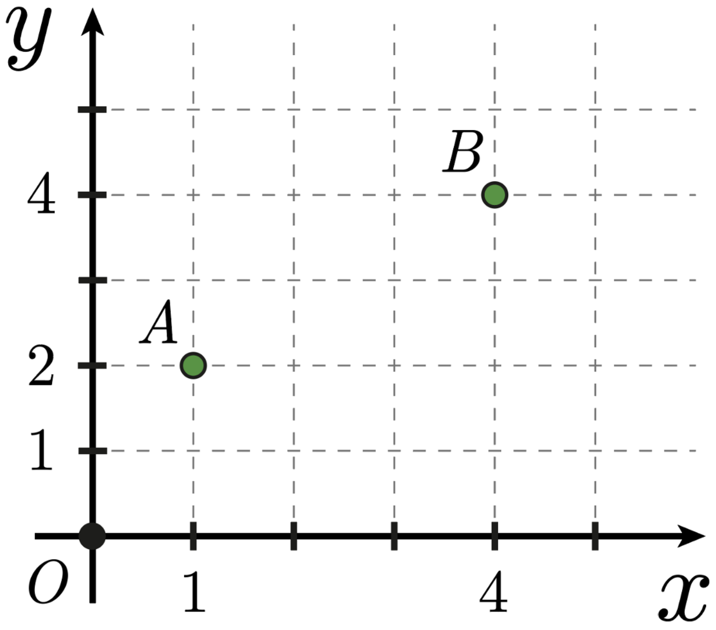
Система координат

Совокупность **координатных осей и начала отсчета**

$$A(x_a; y_a), B(x_b; y_b)$$

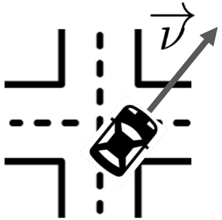
$$\overrightarrow{AB}(x_b - x_a; y_b - y_a)$$

Пример: найти компоненты вектора ***AB***



Виды векторов

- **На плоскости — 2 числа**
  Скорость автомобиля:
  $\{\nu_x, \nu_y\}$



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}$$

"вперед"
"вбок"

- **В пространстве — 3 числа**
  Скорость самолета:
  $\{\nu_x, \nu_y, \nu_z\}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

"вперед"
"вбок"
"вверх"

- **В произвольном случае *n* чисел**
  характеристики футболиста:
  {рост; масса; макс. скорость; сила удара; ...}

Месси

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 168 \\ 72 \\ 33 \\ 92 \end{pmatrix}$$

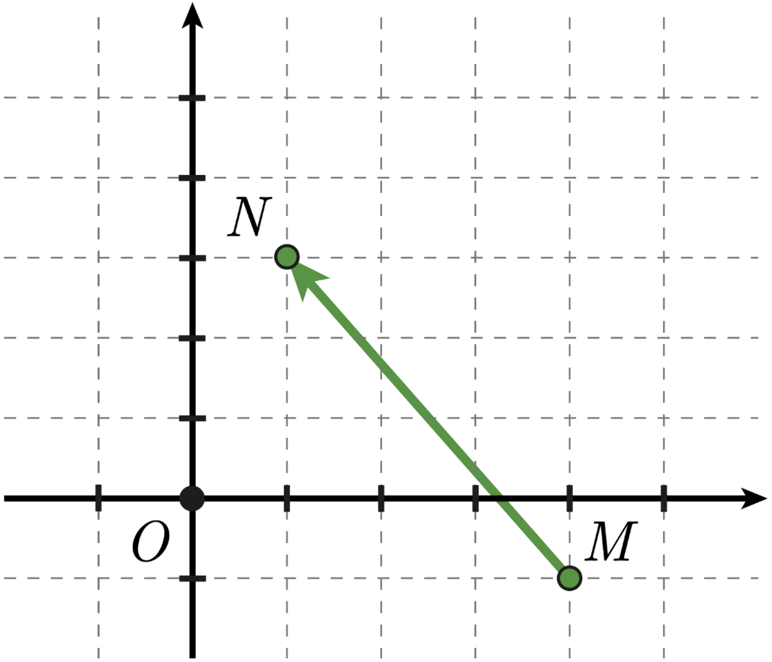
рост
масса
макс. скорость
сила удара

Длина вектора

Длина вектора $\vec{a}$ с компонентами (a_1, a_2) :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Пример. Найти длину вектора ***MN***, если ***M*** (4; –1), ***N*** (1; 4)



Линейные операции над векторами

СБЕРБАНК Корпоративный университет

$$\overrightarrow{a}(a_1; a_2),\ \overrightarrow{b}(b_1; b_2)$$

- Сложение: $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \iff \overrightarrow{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$
- Умножение на число: $\overrightarrow{c} = p \cdot \overrightarrow{a} \iff \overrightarrow{c}(p \cdot a_1; p \cdot a_2)$
- Вычитание: $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b}) \iff \overrightarrow{c}(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$

Пример. $\overrightarrow{a}(2; -1; 1),\ \overrightarrow{b}(3; -2; 0),\ \overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$

Скалярное произведение векторов

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\alpha$$

$$\overrightarrow{a}(a_1; a_2), \overrightarrow{b}(b_1; b_2) \Longrightarrow (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

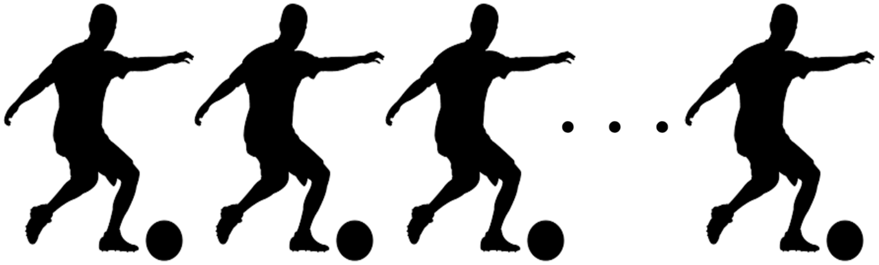
- Векторы параллельны $\Rightarrow (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| = \max$
- Векторы перпендикулярны $\Rightarrow (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0$

Пример. Найти скалярное произведение и угол α между векторами

$\overrightarrow{a}(2; -1; 2), \overrightarrow{b}(3; 4; 0)$

Матрица

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 168 \\ 72 \\ 33 \\ 92 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \textit{рост} \\ \textit{масса} \\ \textit{макс. скорость} \\ \textit{сила удара} \end{array}$$



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 168 & 179 & 191 & \cdots & 158 \\ 72 & 79 & 83 & \cdots & 67 \\ 33 & 31 & 29 & \cdots & 30 \\ 92 & 85 & 67 & \cdots & 90 \end{pmatrix}$$

Матрицы

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m — число строк
n — число столбцов
a_{ij} — элемент на пересечении *i*-той строки и *j*-того столбца

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица

$$E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица

Транспонирование матриц

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Если $A = A^T$, то матрица **симметричная**

Пример. Найти транспонированные матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^T = \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^T =$$

Линейные операции над матрицами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

- Сложение матриц: $C = A + B \Longleftrightarrow C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$
- Умножение на число: $C = p \cdot A \Longleftrightarrow C = \begin{pmatrix} p \cdot a_{11} & p \cdot a_{12} \\ p \cdot a_{21} & p \cdot a_{22} \end{pmatrix}$

Пример. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \; C = 2A - 2B =$

Умножение матриц

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times k}=C_{m\times k}$$

$$A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad B_{3\times 4}=\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & k & \cdot \\ \cdot & \cdot & l & \cdot \\ \cdot & \cdot & m & \cdot \end{pmatrix}$$

$$C_{2\times 4}=A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 4}=\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & c_{13} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$c_{13}=a\cdot k+b\cdot l+c\cdot m$$

Умножение матриц

Пример. Перемножить матрицы ***A*** и ***B***:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

- Обратная матрица

$$X \cdot A = A \cdot X = E, \qquad X = A^{-1}$$

- Ортогональная матрица

$$A^{-1} = A^T$$

Детерминант матрицы

Характерное число, определенное для **квадратных** матриц

Вычисление:

2x2: $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

3x3: $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

Детерминант матрицы. Примеры

Вычислить детерминанты матриц ***A*** и ***B*:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Свойства детерминанта матрицы

СБЕРБАНК
Корпоративный университет

1. $\det A = \det A^T$

2. $\det AB = \det A \cdot \det B$

3. $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -\det A$

4. $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{p} \cdot a_{11} & \mathbf{p} \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \mathbf{p} \cdot \det A$

5. $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + \alpha a_{11} & a_{22} + \alpha a_{12} \end{vmatrix} = \det A$

Детерминант матрицы. Пример

СБЕРБАНК
Корпоративный университет

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$