

Решение системы уравнений

Задача. Найти все $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 4x + \frac{1}{1+\operatorname{th}^2 x} + \frac{1}{1+\operatorname{th}^2 y} = \alpha \\ \cos y + 2x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Теорема. Если верны следующие условия:

1. X - полное нормированное пространство
2. $\Omega \subset X$ - выпуклое множество
3. Ω замкнуто
4. Отображение $P : \Omega \times A \rightarrow \Omega$
5. $\forall a \in A, \forall x \in \Omega \exists P'_x(x, \alpha)$
6. $\exists q \in (0, 1) : \sup_{x \in \Omega} \|P'_x(x, \alpha)\| \leq q < 1, \forall a \in A$
7. $\forall x \in \Omega$ отображение $P(x, \alpha)$ непрерывно по α в точке α_0

То:

1. $\forall \alpha \in A \exists!$ решение $x = x(\alpha)$ уравнения $P(x_*, \alpha) = x_*$
2. $x(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\alpha)$ и $x_{n+1}(\alpha) = P(x_n(\alpha), \alpha)$
3. Скорость сходимости: $\rho(x_n, x_*) \leq \frac{q^n}{1-q} \rho(x_1, x_0)$
4. Отображение $x(\alpha)$ непрерывно в точке α_0

Решение. Преобразуем систему (1):

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}(\cos y + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x) \\ y = \frac{1}{4}(\alpha - \frac{1}{1+\operatorname{th}^2 x} - \frac{1}{1+\operatorname{th}^2 y}) \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим отображение $P : \Omega \times A \rightarrow \Omega$,

$$((x, y), \alpha) \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\cos y + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x) \\ \frac{1}{4}(\alpha - \frac{1}{1+\operatorname{th}^2 x} - \frac{1}{1+\operatorname{th}^2 y}) \end{pmatrix}$$

Проверим выполнение условий теоремы. В качестве множества X возьмем \mathbb{R} . Теперь оценим Ω : $|\frac{1}{2}(\cos y + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x)| < 1 \Rightarrow |x| < 1$, из первого уравнения системы (1): $-2 < \alpha < 6$, тогда $|y| < 2$. Таким образом, положив $\Omega = [-1; 1] \times [-2, 2]$, $A = (-2; 6)$, получим, что условия 1-4 теоремы выполнены.

$$\forall \alpha \in A \quad P'_x((x, y), \alpha) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \frac{1}{1+x^2} & \frac{\sin y}{2} \\ \frac{\operatorname{th} 2x}{4 \operatorname{ch}^2 2x} & \frac{\operatorname{th} 2y}{4 \operatorname{ch}^2 2y} \end{pmatrix}$$

Т.е. условие 5 выполнено. Т.к. P линейна по α , то условие 7 выполнено. Найдем теперь $q \in (0, 1) : \sup_{x \in \Omega} \|P'_x(x, \alpha)\| \leq q < 1, \forall \alpha \in A$.

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 :$

$$\left| \frac{1}{4} \frac{1}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{4}, \quad \left| \frac{\sin y}{2} \right| \leq \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{\operatorname{th} 2x}{4 \operatorname{ch}^2 2x} \right)' = \frac{3 - \operatorname{ch} 4x}{4 \operatorname{sh}^3 2x} \Rightarrow \left| \frac{\operatorname{th} 2x}{4 \operatorname{ch}^2 2x} \right| \leq \frac{1}{8}$$

Рассмотрим $\|B\|$:

$$\|B\| = \max_j \sum_i |b_{ij}|, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \Rightarrow \|B\| = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} < 1$$

Итак, все условия теоремы выполнены. Вычислим оценку числа шагов. По теореме (п. 3): $\rho(x_n, x_*) \leq \frac{q^n}{1-q} \rho(x_1, x_0)$. Тогда с учетом $\rho(x_n, x_*) = \varepsilon$, $x_0 = (0, 0)$, $\alpha = 0$ получим:

$$n \leq \log_q \frac{\varepsilon(1-q)}{\rho(x_1, x_0)}, \quad x_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\alpha-2}{4} \right), \quad \rho(x_1, x_0) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 8}}{4} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$n \leq \log_{\frac{3}{8}} \frac{\varepsilon}{2\sqrt{5}}$$

Для $\varepsilon = 10^{-18} : n \leq 149.277$