Решение системы уравнений

Задача 21. Найти все (x, y) $\in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 4y + \frac{1}{1+\operatorname{th}^2 x} + \frac{1}{1+\operatorname{th}^2 y} & = \alpha \\ \cos y + 2x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x & = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Теорема. Если верны следующие условия:

1. X - полное нормированное пространство
2. $\Omega \subset X$ - выпуклое множество
3. Ω замкнуто
4. Отображение $P : \Omega \times A \to \Omega$
5. $\forall a \in A,\ \forall x \in \Omega\ \ \exists P_x'(x, \alpha)$
6. $\exists q \in (0, 1) :\ \sup\limits_{x\in\Omega} ||P_x'(x, \alpha)|| \le q < 1,\ \forall a \in A$
7. $\forall x \in \Omega$ отображение $P(x, \alpha)$ непрерывно по α в точке α_0

То:

1. $\forall \alpha \in A$ $\exists!$ решение $x = x(\alpha)$ уравнения $P(x_*, \alpha) = x_*$
2. $x(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(\alpha)$ и $x_{n+1}(\alpha) = P(x_n(\alpha), \alpha)$
3. Скорость сходимости: $\rho(x_n, x_*) \le \frac{q^n}{1-q}\rho(x_1, x_0)$
4. Отображение $x(\alpha)$ непрерывно в точке α_0

Решение. Преобразуем систему (1):

$$\begin{cases} x & = & -\frac{1}{2}(\cos y + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x) \\ y & = & \frac{1}{4}(\alpha - \frac{1}{1+\operatorname{th}^2 x} - \frac{1}{1+\operatorname{th}^2 y}) \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим отображение $P : \Omega\times$A$\to \Omega$,

$$((x,\ y),\ \alpha) \mapsto \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{2}(\cos y + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x) \\ \\ \frac{1}{4}(\alpha - \frac{1}{1+\operatorname{th}^2 x} - \frac{1}{1+\operatorname{th}^2 y}) \end{array} \right)$$

Проверим выполнение условий теоремы. В качестве множества X возьмем $\mathbb{R}$. Теперь оценим Ω: $|\frac{1}{2}(\cos y + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x)| < 1$ => |x| < 1, из первого ур-ия системы (1): $-2 < \alpha < 6$, тогда $|y| < 2$. Таким образом, положив $\Omega = [-1;1] \times \mathbb{R}$, A$= \mathbb{R}$, получим, что условия 1-4 теоремы выполнены.

$$\forall\alpha \in A \ \ P_x'((x,y),\alpha) = \left(\begin{array}{cc} -\frac{1}{4}\frac{1}{1+x^2} & \frac{\sin y}{2} \\ \\ \frac{\operatorname{th} 2x}{4\operatorname{ch}^2 2x} & \frac{\operatorname{th} 2y}{4\operatorname{ch}^2 2y} \end{array} \right)$$

Т.е. условие 5 выполнено. Т.к. P линейна по α, то условие 7 выполнено. Найдем теперь $q \in (0,1) : \ \sup\limits_{x\in\Omega} ||P_x'(x,\alpha)|| \le q < 1, \ \forall a \in A$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left|\frac{1}{4}\frac{1}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{4}, \quad \left|\frac{\sin y}{2}\right| \le \frac{1}{2}$$

$\left(\dfrac{\operatorname{th} 2x}{4\operatorname{ch}^2 2x}\right)' = \dfrac{3-\operatorname{ch} 4x}{4\operatorname{sh}^3 2x}$, $x = \pm\dfrac{1}{4\operatorname{ch} 3}$ - точки экстремума; покажем, что $\left|\dfrac{\operatorname{th} 2x}{4\operatorname{ch}^2 2x}\right| \le \dfrac{1}{8}$

$$19.8 \le e^3 \le 20.1 => 19.85 \le e^3 + e^{-3} \le 20.15 => 0.049 \le |2x| \le 0.05$$

$$=> 1.05 \le e^{2x} \le 1.052, 0.951 \le e^{-2x} \le 0.953 => 2.001 \le e^{2x} + e^{-2x} \le 2.005,$$

$$0.98 \le e^{2x} - e^{-2x} \le 0.99, \frac{\operatorname{th} 2x}{4\operatorname{ch}^2 2x} = \frac{\operatorname{sh} 2x}{4\operatorname{ch}^3 2x} = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{(e^{2x}+e^{-2x})^3} \le 0.124 \le \frac{1}{8}$$

Рассмотрим $||B||$:

$$||B|| = \max_j \sum_i |b_{ij}|, \ \ B = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{array} \right) => ||B|| = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} < 1$$

Итак, все условия теоремы выполнены. Вычислим оценку числа шагов. По теореме (п. 3): $\rho(x_n, x_*) \le \frac{q^n}{1-q}\rho(x_1, x_0)$. Тогда с учетом $\rho(x_n, x_*) = \varepsilon, \ x_0 = (0,0)$ получим:

$$n \le \log_q \frac{\varepsilon(1-q)}{\rho(x_1,x_0)} \ \ , x_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\alpha-2}{4}\right), \ \ \rho(x_1,x_0) = \frac{\sqrt{\alpha^2-4\alpha+8}}{4}$$

$$n \le \log_{\frac{5}{8}} \frac{3\varepsilon}{2\sqrt{\alpha^2-4\alpha+8}}$$

Например, для $\varepsilon = 10^{-18}, \ \alpha = 0 : \ n \le 89.5$