Решение системы уравнений

Задача 21. Найти все (x, y) $\in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 4y + \frac{1}{1+\operatorname{th}^2 x} + \frac{1}{1+\operatorname{th}^2 y} & = & \alpha \\ \cos y + 2x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x & = & 0 \end{cases} \quad (1)$$

Теорема. Если верны следующие условия:

1. X - полное нормированное пространство
2. $\Omega \subset X$ - выпуклое множество
3. Ω замкнуто
4. Отображение $P : \Omega \times A \to \Omega$
5. $\forall a \in A$, $\forall x \in \Omega\ \ \exists P_x'(x, \alpha)$
6. $\exists q \in (0,1) : \sup\limits_{x \in \Omega} ||P_x'(x, \alpha)|| \leq q < 1,\ \forall a \in A$
7. $\forall x \in \Omega$ отображение $P(x, \alpha)$ непрерывно по α в точке α_0

То:

1. $\forall \alpha \in A$ $\exists!$ решение $x = x(\alpha)$ уравнения $P(x_*, \alpha) = x_*$
2. $x(\alpha) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n(\alpha)$ и $x_{n+1}(\alpha) = P(x_n(\alpha), \alpha)$
3. Скорость сходимости: $\rho(x_n, x_*) \leq \frac{q^n}{1-q}\rho(x_1, x_0)$
4. Отображение $x(\alpha)$ непрерывно в точке α_0

Решение. Преобразуем систему (1):

$$\begin{cases} x & = & -\frac{1}{2}(\cos y + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x) \\ y & = & \frac{1}{4}(\alpha - \frac{1}{1+\operatorname{th}^2 x} - \frac{1}{1+\operatorname{th}^2 y}) \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим отображение $P:\Omega\times\mathrm{A}\to\Omega$,

$$((x,\ y),\ \alpha)\mapsto\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\cos y+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x) \\ \\ \frac{1}{4}(\alpha-\frac{1}{1+\operatorname{th}^2 x}-\frac{1}{1+\operatorname{th}^2 y}) \end{pmatrix}$$

Проверим выполнение условий теоремы. В качестве множества X возьмем $\mathbb{R}$. Теперь оценим Ω: $|\frac{1}{2}(\cos y+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x)|<1 => |\mathrm{x}|<1$, из первого ур-ия системы (1): $-2<\alpha<6$, тогда $|y|<2$. Таким образом, положив $\Omega=[-1;1]\times\mathbb{R}$, $\mathrm{A}=\mathbb{R}$, получим, что условия 1-4 теоремы выполнены.

$$\forall\alpha\in A\ \ P_x^{'}((x,y),\alpha)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\frac{1}{1+x^2} & \frac{\sin y}{2} \\ \\ \frac{\operatorname{th}2x}{4\operatorname{ch}^2 2x} & \frac{\operatorname{th}2y}{4\operatorname{ch}^2 2y} \end{pmatrix}$$

Т.е. условие 5 выполнено. Т.к. P линейна по α, то условие 7 выполнено. Найдем теперь $q\in(0,1):\ \sup\limits_{x\in\Omega}||P_x^{'}(x,\alpha)||\le q<1,\ \forall a\in A.$

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2:$

$$\left|\frac{1}{4}\frac{1}{1+x^2}\right|\le\frac{1}{4},\quad\left|\frac{\sin y}{2}\right|\le\frac{1}{2}$$

$\left(\dfrac{\operatorname{th}2x}{4\operatorname{ch}^2 2x}\right)'=\dfrac{3-\operatorname{ch}4x}{4\operatorname{sh}^3 2x},\ x=\pm\dfrac{1}{4\operatorname{ch}3}$ - точки экстремума => $\left|\dfrac{\operatorname{th}2x}{4\operatorname{ch}^2 2x}\right|\le\dfrac{1}{8}$

Рассмотрим $||B||$:

$$||B||=\max_j\sum_i|b_{ij}|,\quad B=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} => ||B||=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}<1$$

Итак, все условия теоремы выполнены. Вычислим оценку числа шагов. По теореме (п. 3): $\rho(x_n,x_*)\le\frac{q^n}{1-q}\rho(x_1,x_0)$. Тогда с учетом $\rho(x_n,x_*)=\varepsilon,\ x_0=(0,0)$ получим:

$$n\le\log_q\frac{\varepsilon(1-q)}{\rho(x_1,x_0)}\ \ ,x_1=\left(-\frac{1}{2},\frac{\alpha-2}{4}\right),\ \ \rho(x_1,x_0)=\frac{\sqrt{\alpha^2-4\alpha+8}}{4}$$

$$n\le\log_{\frac{5}{8}}\frac{3\varepsilon}{2\sqrt{\alpha^2-4\alpha+8}}$$

Например, для $\varepsilon=10^{-18},\ \alpha=0:\ n\le 89.5$