周一帆

蒲丰投针实验原理探究及复现实验的误差分析

【摘要】蒲丰投针实验在数学领域中具有举足轻重的意义.其实验首次证明圆周率π可以通过概率统计的方法近似计算，打破了传统几何与代数推导的局限，展示了数学工具交叉运用的潜力.

本实验基于蒲丰投针实验的基本原理，通过计算验证原理的正确性，再复现不同数量梯度的投针实验，分析误差来源并总结相应的改进措施及数学实验探究的方法.

【关键词】蒲丰投针；牛顿–莱布尼茨公式；三角函数；圆周率；统计学

蒲丰投针是18世纪法国数学家乔治·蒲丰提出的一个数学问题。1777年，蒲丰在家中宴请宾客时，邀请宾客参与投针实验，通过统计针与平行线相交的次数来推算圆周率①. 蒲丰投针实验在数学、概率学及统计学中具有非常重要的地位. 它表现出了π和概率之间的关系，是第一个将几何问题与概率学和统计学相结合的例子，是“几何概率”领域的奠基性实验，揭示了随机性与确定性数学之间的联系. 其实验思想被后世视为蒙特卡洛模拟的早期雏形，启发了后续科学研究中“模拟实验”的应用，为计算机时代通过随机抽样解决复杂的数学问题提供了理论启示②.

一. 原理计算

假定两条网格线的间距为d，则针的长度为网格线间距的一半，即针的长度为

$\frac{d}{2}$.

当针在两条直线之间时，有以下三种情况：

①针未与网格线相交，如图1；

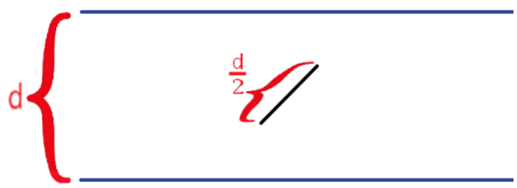

图1

②针与网格线刚好相交，如图2；

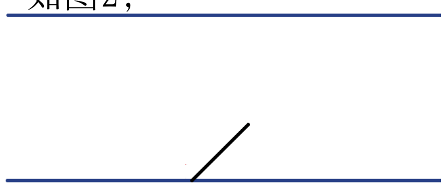

图2

③针与网格线完全相交，如图3.

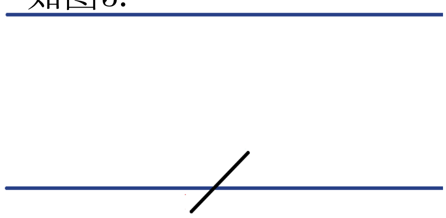

图3

设针的中点与最近网格线的距离为x，夹角为α，如图4.

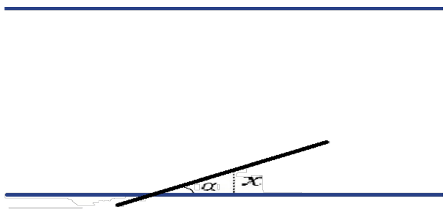

图4

对于针在网格线内所有的落位情况，可根据x和α的范围表达，即：x的最大值为$\frac{d}{2}$（针的中点在两条网格线的正中间），x最小值为0（针的中点在网格线上），

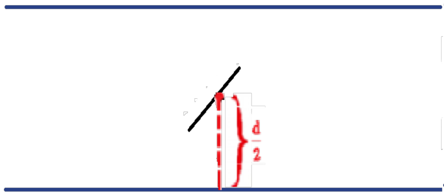

图5

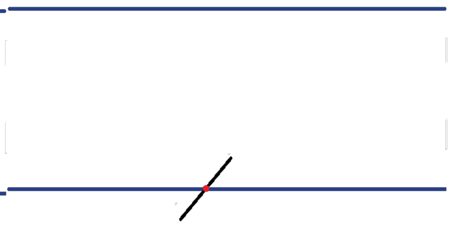

图6

α的最小值为0°，最大值为180°（针与网格线平行），

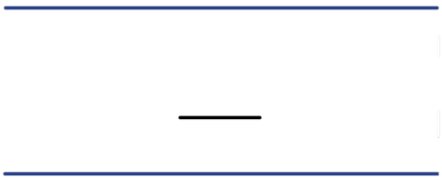

图7

观察后发现：当x≤$\frac{d}{4}$时，才有针与网格线相交的可能.

讨论相交时的可能情况：

①当x=$\frac{d}{4}$时，如图8，此时有且仅有一种情况针与网格线相交，即α=90°；

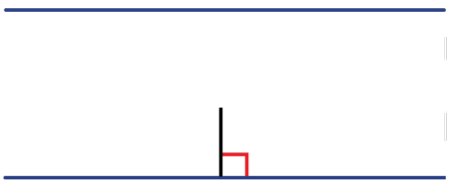

图8

②当x<$\frac{d}{4}$时，分以下两种情况：

（1）当针刚好碰上网格线时，如图9,此时x=$\frac{d}{4}$sinα；

图9

（2）当针穿过网格线时，如图10,此时$x<\frac{d}{4}\sin\alpha$.

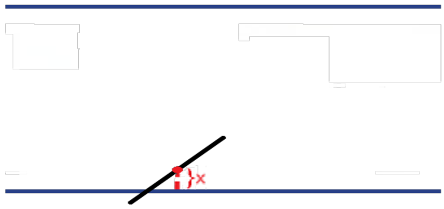

图10

综上所述，当$x\leqslant\frac{d}{4}\sin\alpha\,(0^\circ\leqslant\alpha\leqslant180^\circ)$时，针与网格线相交.

作$\alpha-x$图像（图11）：

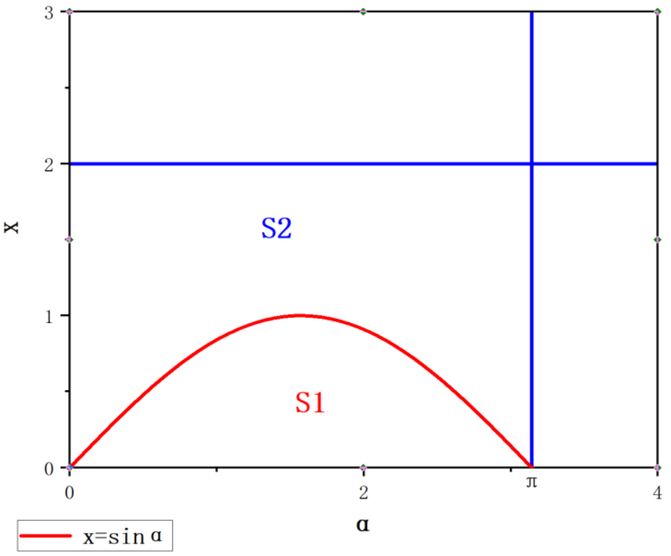

图11

如图所示，红色弧线与α轴围成的图形的面积表示针与网格线相交的可能性，记为S1；蓝线与$\alpha-x$围成的长方形的面积为投针的所有可能性，记为S2.

S1为$x=\frac{d}{4}\sin\alpha$（0≤α≤π）图像，由牛顿—莱布尼茨公式③可得：

$$S1=\int_0^\pi\frac{d}{4}sin\alpha d\alpha=[(-cos\pi)-(-cos0)]\times\frac{d}{4}=2\times\frac{d}{4}=\frac{d}{2}$$

而$S2=\frac{d}{2}\times\pi=\frac{d\pi}{2}$，所以针与直线相交的概率为：

$$P=\frac{\text{投针总数}}{\text{相交次数}}=\frac{S2}{S1}=\frac{\frac{d\pi}{2}}{\frac{d}{2}}=\pi$$

综上所述，通过计算看出，投针总数与网格线相交的个数的比值为π（约为3.14），可以说明蒲丰投针实验可以表现出π与概率的关系，由此结论进行

实际实验.

二.进行实验

为验证计算结果，我选取投针总数为100、200、500、1000的梯度进行实验.

针的长度为3.75cm，网格线间距为7.5cm，投针范围为边长为30cm的正方形白纸，投针过程尽量保持随机，记录与网格线相交的针的数量，作如下表格：

实验序号	一	二	三	四	五	六	七
投针总数N	100	100	200	200	500	1000	1000
相交数J	37	34	57	69	148	322	301
比值Z=N/J（保留小数点后4位）	2.7027	2.9412	3.5088	2.8986	3.3784	3.1056	3.3223
误差率$e=\frac{\lvert Z-\pi\rvert}{\pi}$（$\pi$取3.1416）（保留小数点后2	13.97%	6.38%	11.69%	7.73%	7.54%	1.15%	5.75%

表1

由表1可得，实验一和实验三的误差率都超过了10%，误差较大，其他实验结果均处于正常误差范围之内，其中，实验六的误差率为1.15%，误差较小，可以初步验证蒲丰投针实验的可信度和可行性.

三、误差分析

根据蒲丰投针实验的基本原理及上述实验结果，我分析出以下几点可能产生误差的原因：

○1投针数量较少，根据统计学原理，样本数量越多，实际测量结果就越可能接近理论值；

o2在投针时，我发现之前投过的针会影响后续投针的随机轨迹，针的实际覆盖会影响实验结果；

o3实际操作难以保证投针的角度、位置和力度统一，即出现投针过程不随机的情况；

o4本实验原理属于理想化模型，如针规定无限细、投针平面为绝对平面等日常难以实现的假设，实际实验会因此出现误差；

o5对于针的特殊落位情况（如一些刚好处于临界状态的针），可能会存在人为的判断误差.

四、总结与展望

1.总结

本实验基于蒲丰投针实验的基本原理，通过计算验证原理的正确性，再进行不同梯度的投针实验，计算误差率，分析误差来源，最终得出结论.

结论指出，蒲丰投针实验可以体现π与概率的关系，在足够多的样本和理想的实验条件下，实验结果会趋近于π.但是在实际情况下进行实验时，会存在很多影响实验的因素（如投针次数、针的覆盖、投针随机性等），使结果与真实值误差较大.

2.展望

基于误差分析，后续实验可以进行改进，例如增加投针数量、尽量排除人为因素的影响、优化实验道具（如使用更细的针、选取更加平整规则的水平面）等.在条件允许的情况下，可以利用计算机进行样本数量更大的模拟实验④.

蒲丰投针实验是一个看似不可能的实验，在平行的网格线上随机地投针，却能得到一个实际的数字π，这表现出很多事情在统计学和概率学上都具有一定的数学规律.

宇宙万物皆蕴藏着无限可能，那些看似荒诞离奇的设想、遥不可及的目标，在时间的累积与规模的拓展下，都将褪去“不可能”的外衣，显露出成功的曙光。这就如同在知识的瀚海中航行，每一次挑灯夜读的坚持，每一回攻克难题的突破，都在为人生的画卷添上浓墨重彩的一笔，让收获硕果从虚幻的憧憬化作触手可及的现实。

参考文献

①Buffon, G. -L. Leclerc de. Essai d'arithmétique morale[M]. Paris: Imprimerie Royale, 1777

②蒲丰投针问题 · 从 2009 年清华大学的一道自主招生试题谈起，刘培杰数学工作室，哈尔滨工业大学出版社，2014. 1

③牛顿–莱布尼茨公式词条，百度百科

④Siniksaran, E. Throwing Buffon’s Needle with Mathematica[J]. The Mathematical Journal, 2008, 11: 71