Lista de exercícios - Estatística Inferencial

Estatística Inferencial

Wagner Hugo Bonat

Verossimilhança e Log-verossimilhança

1. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Normal com esperança μ e variância conhecida $\sigma^2 = 1$. Escreva a verossimilhança e log-verossimilhança para μ e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
2. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Normal com esperança $\mu = 10$ e variância conhecida σ^2. Escreva a verossimilhança e log-verossimilhança para σ^2 e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
3. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Poisson com esperança μ. Escreva a verossimilhança e log-verossimilhança para μ e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
4. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Binomial com $n = 1$ e esperança μ. Escreva a verossimilhança e log-verossimilhança para μ e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
5. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Binomial com $n = 10$ e esperança $n\mu$. Escreva a verossimilhança e log-verossimilhança para μ e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
6. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a. iid de uma população Uniforme com parâmetros $a = 0$ e b desconhecido. Escreva a função de verossimilhança e log-verossimilhança para b e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
7. Considere as quatro observações $y_1 < 10$, $y_2 > 10$, $5 < y_3 < 10$ e $y_4 = 10$, escreva a função de verossimilhança e log-verossimilhança supondo que elas são iid provenientes de uma população Normal com esperança μ e variância conhecida $\sigma^2 = 1$. Use o R ou qualquer outro software para desenhar a função de verossimilhança em cada caso.
8. Repita o exercício (7) para uma população Poisson com esperança μ.
9. Caso você tivesse que escolher entre apenas uma das quatro observações qual você escolheria? Explique.
10. Demonstre a desigualdade de Jensen.

Função escore e Informação de Fisher

1. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Normal com esperança μ e variância conhecida $\sigma^2 = 1$.

a) Obtenha a função escore e a matriz de informação de Fisher para μ.
b) Mostre que a esperança da função escore é zero.
c) Mostre que a variância da função escore corresponde a esperança da segunda derivada da log-verossimilhança de μ.

2. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Binomial com esperança μ e n conhecido.

a) Obtenha a função escore e a matriz de informação de Fisher para μ.
b) Mostre que a esperança da função escore é zero.
c) Mostre que a variância da função escore corresponde a esperança da segunda derivada da log-verossimilhança de μ.

3. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Poisson com esperança μ.

a) Obtenha a função escore e a matriz de informação de Fisher para μ.
b) Mostre que a esperança da função escore é zero.
c) Mostre que a variância da função escore corresponde a esperança da segunda derivada da log-verossimilhança de μ.

4. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população exponencial com esperança μ.

a) Obtenha a função escore e a matriz de informação de Fisher para μ.
b) Mostre que a esperança da função escore é zero.
c) Mostre que a variância da função escore corresponde a esperança da segunda derivada da log-verossimilhança de μ.

5. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população geométrica de parâmetro μ.

a) Obtenha a função escore e a matriz de informação de Fisher para μ.
b) Mostre que a esperança da função escore é zero.
c) Mostre que a variância da função escore corresponde a esperança da segunda derivada da log-verossimilhança de μ.

6. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população uniforme com parâmetros $a = 0$ e b.

a) Discuta como o estimador de máxima verossimilhança para b pode ser obtido neste caso.
b) Obtenha a função e escore e verifique se as igualdades de Bartlett são válidas.

7. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ amostras iid com $E(Y_i) = \mu$ e $V(Y_i) = \sigma^2$. Considere os estimadores

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad \text{para} \quad \mu \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu)^2, \quad \text{para} \quad \sigma^2.$$

a) Mosque que ambos são não viciados.
b) Obtenha a variância de $\bar{Y}$ e $\hat{\sigma}^2$.
c) Mosque que ambos são consistentes.
d) Considere o estimador

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2,$$

mostre que este estimador é viciado. d) Proponha uma correção para o estimador em c) de modo a torná-lo não viciado.

8. Sejam Y_1, Y_2, Y_3 uma amostra iid de uma v.a. com $E(Y_i) = \mu$ e $V(Y_i) = \sigma^2$ em que σ^2 é conhecido. Considere os estimadores $\hat{\mu}_1 = \frac{Y_1+Y_2+Y_3}{3}$ e $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{2}Y_1 + \frac{1}{4}Y_2 + \frac{1}{4}Y_3$.

a) Mostre que ambos são não viciados para μ.
b) Obtenha a variância de $\hat{\mu}_1$ e $\hat{\mu}_2$.
c) Mosque que ambos são consistente para μ.
d) Qual estimador você prefere? Explique.

9. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ uma amostra iid de uma v.a. com $E(Y_i) = \mu$ e $V(Y_i) = \sigma^2$ em que σ^2 é conhecido. Considere os estimadores lineares $Y_L = \sum_{i=1}^{n} l_i Y_i$ em que $l_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$ são constantes conhecidas.

a) Sob quais condições Y_L é não viciado?
b) Sob quais condições Y_L é eficiente?
c) Sob quais condições Y_L é consistente?

10. Para cada um dos modelos abaixo, encontre o limite inferior de Cramér-Rao.

a) Normal média μ e variância σ^2 com σ^2 conhecido.
b) Normal média μ e variância σ^2 com μ conhecido.
c) Poisson média μ.
d) Binomial n conhecido e probabilidade de sucesso μ.
e) Geométrica com parâmetro μ.
f) Exponencial de média μ.

Distribuiçao assintótica da função escore

1. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Normal com esperança μ e variância conhecida $\sigma^2 = 1$. Encontre a função escore para μ mostre que sua esperança é zero e obtenha a sua distribuição assintótica.
2. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Normal com esperança $\mu = 10$ e variância desconhecida σ^2. Encontre a função escore para σ^2 mostre que sua esperança é zero e obtenha a sua distribuição assintótica.
3. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Poisson com esperança μ. Encontre a função escore para μ mostre que sua esperança é zero e obtenha a sua distribuição assintótica.
4. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população exponencial de esperança μ. Encontre a função escore para μ mostre que sua esperança é zero e obtenha a sua distribuição assintótica.
5. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a. iid de uma população Uniforme com parâmetros $a = 0$ e b desconhecido. Encontre a função escore para b, obtenha sua esperança e se possível sua distribuição assintótica.

Estimador de máxima verossimilhança

1. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Normal com esperança μ e variância conhecida $\sigma^2 = 1$. Encontre o estimador de máxima verossimilhaça para μ e obtenha sua distribuição assintótica.
2. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Normal com esperança $\mu = 10$ e variância desconhecida σ^2. Encontre o estimador de máxima verossimilhaça para σ^2 e obtenha sua distribuição assintótica.
3. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Poisson com esperança μ. Encontre o estimador de máxima verossimilhaça para σ^2 e obtenha sua distribuição assintótica.
4. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Binomial com $n = 1$ e esperança μ. Encontre o estimador de máxima verossimilhaça para σ^2 e obtenha sua distribuição assintótica.
5. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Binomial com $n = 1$ e esperança μ. Encontre o estimador de máxima verossimilhaça para σ^2 e obtenha sua distribuição assintótica.
6. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população exponencial com esperança μ. Encontre o estimador de máxima verossimilhaça para μ e obtenha sua distribuição assintótica.
7. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a. iid de uma população Uniforme com parâmetros $a = 0$ e b desconhecido. Encontre o estimador de máxima verossimilhaça para b e obtenha sua distribuição.
8. Considere quatro observações $y_1 < 10$, $y_2 > 10$, $5 < y_3 < 10$ e $y_4 = 10$, provenientes de uma população Normal com esperança μ e variância conhecida $\sigma^2 = 1$. Obtenha o estimador de máxima verossimilhança para μ. Dica use um otimizador numérico como a optim() em R.
9. Considere quatro observações $y_1 < 10$, $y_2 > 10$, $5 < y_3 < 10$ e $y_4 = 10$, provenientes de uma população Poisson com esperança μ. Obtenha o estimador de máxima verossimilhança para μ. Dica use um otimizador numérico como a optim() em R.

Família exponencial

1. Escreva as seguintes distribuições na forma da família exponencial:
   a) Normal (variância conhecida).
   b) Exponencial.
   c) Poisson.
   d) Binomial.
   e) Normal inversa.
   f) Geométrica.

Vetor de parâmetros

1. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Normal com esperança μ e variância desconhecida σ^2. Encontre o estimador de máxima verossimilhaça para μ e σ^2. Obtenha a distribuição assintótica e um intervalo de confiança para ambos.

2. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Gamma com esperança μ e dispersão desconhecida λ. Neste caso a fdp é dada por

$$f(y; \mu, \lambda) = \frac{\lambda^\lambda e^{-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} y^{-1} \exp\left\{ -\lambda \left(\frac{y}{\mu} - \log \frac{y}{\mu} - 1 \right) \right\}.$$

   Suponha que a seguinte amostra foi observada: $y_i = 35.81, 8.21, 0.02, 8.31, 14.43, 11.48, 20.88, 2.81, 40.03$. Encontre o estimador e estimativa de máxima verossimilhaça para μ e λ baseado na amostra observada. Numericamente quando necessário. Obtenha a distribuição assintótica e um intervalo de confiança para μ e λ.

3. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população von Mises de parâmetros μ e λ. Neste caso a fdp é dada por

$$f(y; \mu, \lambda) = \frac{1}{2\pi I_0(\lambda)} \exp\{\lambda \cos(y - \mu)\}, \quad \text{para} \quad 0 \leq y \leq 2\pi, \quad \text{e} \quad \mu \in [0, 2\pi), \lambda > 0.$$

   A função $I_0(\lambda)$ é a função Bessel modificada dada por

$$I_0(\lambda) = \int_0^{2\pi} \exp(\lambda \cos y) dy.$$

   Suponha que a seguinte amostra foi observada: $y_i = 1.17, 0.64, 0.59, 0.38, 0.20, 0.63, 0.67, 0.38, 0.69, 0.72.$. Encontre o estimador e estimativa de máxima verossimilhaça para μ e λ baseado na amostra observada. Numericamente quando necessário. Obtenha a distribuição assintótica e um intervalo de confiança para μ e λ.

4. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Simplex de parâmetros μ e σ^2. Neste caso a fdp é dada por

$$f(y; \mu, \sigma) = [2\pi\sigma^2\{y(1-y)\}^3]^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \frac{(y-\mu)^2}{y(1-y)\mu^2(1-\mu)^2} \right\},$$

   onde $0 < y, \mu < 1$ e $\sigma^2 > 0$. Suponha que a seguinte amostra foi observada: $y_i = 0.48, 0.48, 0.50, 0.51, 0.50, 0.49, 0.51, 0.52, 0.50, 0.48.$. Encontre o estimador e estimativa de máxima verossimilhaça para μ e σ^2 baseado na amostra observada. Numericamente quando necessário. Obtenha a distribuição assintótica e um intervalo de confiança para μ e σ^2.

5. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Beta de parâmetros α e β. Neste caso a fdp é dada por

$$f(y; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1},$$

   onde B é a função beta definida por

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

   Suponha que a seguinte amostra foi observada: $y_i = 0.48, 0.48, 0.50, 0.51, 0.50, 0.49, 0.51, 0.52, 0.50, 0.48.$. Encontre o estimador e estimativa de máxima verossimilhaça para μ e σ^2 baseado na amostra observada. Numericamente quando necessário. Obtenha a distribuição assintótica e um intervalo de confiança para α e β.

6. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Power exponencial de parâmetros μ, σ^2 e ρ. Neste caso a fdp é dada por

$$f(y; \mu, \sigma, \rho) = \frac{\rho(2\sigma^2)^{-1/\rho}}{2\Gamma(1/\rho)} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} |y - \mu|^\rho \right\},$$

onde $y, \mu \in \Re$ e $\sigma, \rho > 0$. Suponha que a seguinte amostra foi observada: $y_i = $. Encontre o estimador e estimativa de máxima verossimilhaça para μ e σ^2 baseado na amostra observada fixando o $\rho = 1$ e $\rho = 2$. Proponha uma estratégia para estimar o parâmetro ρ. Numericamente quando necessário. Obtenha a distribuição assintótica e um intervalo de confiança para μ e σ para os casos anteriores.

Suficiência

1. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ uma amostra iid de uma população $B(1, p)$. Verifique se a estatística $T = \sum_{i=1}^n Y_i$ é suficiente para p.
2. Considere a mesma situação do Exercício 1, com $n = 3$ e $T = Y_1 + 2Y_2 + Y_3$. Verifique se T é suficiente para p.
3. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ uma amostra iid de uma população Poisson $P(\theta)$. Verifique se $T = \sum_{i=1}^n Y_i$ é suficiente para θ.
4. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ uma amostra iid de uma população $U(0, \theta)$. Encontre uma estatística suficiente para θ usando o Critério da fatorização.
5. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ uma amostra iid de uma população $G(\alpha, \beta)$. Encontre uma estatística conjuntamente suficiente para α e β.

Testes de hipóteses

1. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ uma amostra de uma v.a com função densidade

$$f(y, \theta) = \theta^2 y e^{-\theta y}, \quad y, \theta > 0.$$

   Obtenha a estatística dos testes LRT, Wald e Score para testar $H_0 : \theta = 1$ vs $H_1 : \theta = 2$.
2. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ uma amostra iid de uma população $N(\mu, 1)$. Obtenha a estatística dos testes LRT, Wlad e Score para testar $H_0 : \mu = 4$ vs $H_1 : \mu \neq 4$. Suponha que a seguinte amostra foi observada $y_i = 4.36, 4.47, 7.01, 5.59, 6.61, 5.09, 5.57, 7.99, 6.11, 4.84$. Qual a sua conclusao aos níveis 10%, 5% e 1% de significância.
3. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ uma amostra iid de uma população $Exp(\theta)$. Encontre o LRT, Wald e score testes para testar $H_0 : \theta = 1$ vs $H_1 : \theta \neq 1$. Se você observar $y_i = 0.8, 1.3, 1.8, 0.9, 1.0$ qual a sua decisão ao nível de 5%.
4. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ uma amostra iid de uma população $Y \sim N(\mu_Y, 9)$ e $X_1, \ldots, X_m$ uma amostra iid de uma população $X \sim N(\mu_X, 25)$. Sendo as amostras independentes construa um teste para avaliar $H_0 : \mu_Y = \mu_X$ vs $H_1 : \mu_Y \neq \mu_X$. Sendo $n = 9$, $\sum y_i = 3.4$ e $m = 16$ e $\sum x_i = 4.3$. Qual a sua conclusão a um nível de significância de 5%?
5. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra iid de uma população $X \sim P(\theta_1)$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ uma amostra iid de uma população $Y \sim N(\theta_2)$. Sendo as amostras independentes construa um teste para avaliar $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ vs $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$. Sendo $n = 5$, $\sum x_i = 3.8$ e $m = 8$ e $\sum y_i = 4.8$. Qual a sua conclusão a um nível de significância de 5%?