Lista de exercícios II - Verossimilhança e Log-Verossimilhança

Verossimilhança e Log-Verossimilhança

Wagner Hugo Bonat

2018-08-13

Verossimilhança e Log-verossimilhança

1. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Normal com esperança μ e variância conhecida $\sigma^2 = 1$. Escreva a verossimilhança e log-verossimilhança para μ e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
2. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Normal com esperança $\mu = 10$ e variância conhecida σ^2. Escreva a verossimilhança e log-verossimilhança para σ^2 e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
3. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Poisson com esperança μ. Escreva a verossimilhança e log-verossimilhança para μ e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
4. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Binomial com $n = 1$ e esperança μ. Escreva a verossimilhança e log-verossimilhança para μ e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
5. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Binomial com $n = 10$ e esperança $n\mu$. Escreva a verossimilhança e log-verossimilhança para μ e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
6. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a. iid de uma população Uniforme com parâmetros $a = 0$ e b desconhecido. Escreva a função de verossimilhança e log-verossimilhança para b e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
7. Considere as quatro observações $y_1 < 10$, $y_2 > 10$, $5 < y_3 < 10$ e $y_4 = 10$, escreva a função de verossimilhança e log-verossimilhança supondo que elas são iid provenientes de uma população Normal com esperança μ e variância conhecida $\sigma^2 = 1$. Use o R ou qualquer outro software para desenhar a função de verossimilhança em cada caso.
8. Repita o exercício (7) para uma população Poisson com esperança μ.
9. Caso você tivesse que escolher entre apenas uma das quatro observações qual você escolheria? Explique.
10. Demonstre a desigualdade de Jensen.

Função escore e Informação de Fisher

1. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Normal com esperança μ e variância conhecida $\sigma^2 = 1$.

a) Obtenha a função escore e a matriz de informação de Fisher para μ.
b) Mostre que a esperança da função escore é zero.
c) Mostre que a variância da função escore corresponde a esperança da segunda derivada da log-verossimilhança de μ.

2. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Binomial com esperança μ e n conhecido.

a) Obtenha a função escore e a matriz de informação de Fisher para μ.
b) Mostre que a esperança da função escore é zero.
c) Mostre que a variância da função escore corresponde a esperança da segunda derivada da log-verossimilhança de μ.

3. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid de uma população Poisson com esperança μ.

a) Obtenha a função escore e a matriz de informação de Fisher para μ.
b) Mostre que a esperança da função escore é zero.
c) Mostre que a variância da função escore corresponde a esperança da segunda derivada da log-verossimilhança de μ.

4. Sejam $Y_1, \dots, Y_n$ v.a iid de uma população exponencial com esperança μ.

a) Obtenha a função escore e a matriz de informação de Fisher para μ.
b) Mostre que a esperança da função escore é zero.
c) Mostre que a variância da função escore corresponde a esperança da segunda derivada da log-verossimilhança de μ.

5. Sejam $Y_1, \dots, Y_n$ v.a iid de uma população geométrica de parâmetro μ.

a) Obtenha a função escore e a matriz de informação de Fisher para μ.
b) Mostre que a esperança da função escore é zero.
c) Mostre que a variância da função escore corresponde a esperança da segunda derivada da log-verossimilhança de μ.

6. Sejam $Y_1, \dots, Y_n$ v.a iid de uma população uniforme com parâmetros $a = 0$ e b.

a) Discuta como o estimador de máxima verossimilhança para b pode ser obtido neste caso.
b) Obtenha a função e escore e verifique se as igualdades de Bartlett são válidas.

7. Sejam $Y_1, \dots, Y_n$ amostras iid com $E(Y_i) = \mu$ e $V(Y_i) = \sigma^2$. Considere os estimadores

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad \text{para} \quad \mu \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu)^2, \quad \text{para} \quad \sigma^2.$$

a) Mosque que ambos são não viciados.
b) Obtenha a variância de $\bar{Y}$ e $\hat{\sigma}^2$.
c) Mosque que ambos são consistentes.
d) Considere o estimador

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2,$$

mostre que este estimador é viciado. d) Proponha uma correção para o estimador em c) de modo a torná-lo não viciado.

8. Sejam Y_1, Y_2, Y_3 uma amostra iid de uma v.a. com $E(Y_i) = \mu$ e $V(Y_i) = \sigma^2$ em que σ^2 é conhecido. Considere os estimadores $\hat{\mu}_1 = \frac{Y_1+Y_2+Y_3}{3}$ e $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{2}Y_1 + \frac{1}{4}Y_2 + \frac{1}{4}Y_3$.

a) Mostre que ambos são não viciados para μ.
b) Obtenha a variância de $\hat{\mu}_1$ e $\hat{\mu}_2$.
c) Mosque que ambos são consistente para μ.
d) Qual estimador você prefere? Explique.

9. Sejam $Y_1, \dots, Y_n$ uma amostra iid de uma v.a. com $E(Y_i) = \mu$ e $V(Y_i) = \sigma^2$ em que σ^2 é conhecido. Considere os estimadores lineares $Y_L = \sum_{i=1}^{n} l_i Y_i$ em que $l_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ são constantes conhecidas.

a) Sob quais condições Y_L é não viciado?
b) Sob quais condições Y_L é eficiente?
c) Sob quais condições Y_L é consistente?

10. Para cada um dos modelos abaixo, encontre o limite inferior de Cramér-Rao.

a) Normal média μ e variância σ^2 com σ^2 conhecido.
b) Normal média μ e variância σ^2 com μ conhecido.
c) Poisson média μ.

d) Binomial n conhecido e probabilidade de sucesso μ.
e) Geométrica com parâmetro μ.
f) Exponencial de média μ.