

# Lista de exercícios II - Verossimilhança e Log-Verossimilhança

Verossimilhança e Log-Verossimilhança

*Wagner Hugo Bonat*

*2018-08-13*

## Verossimilhança e Log-verossimilhança

1. Sejam  $Y_1, \dots, Y_n$  v.a iid de uma população Normal com esperança  $\mu$  e variância conhecida  $\sigma^2 = 1$ . Escreva a verossimilhança e log-verossimilhança para  $\mu$  e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
2. Sejam  $Y_1, \dots, Y_n$  v.a iid de uma população Normal com esperança  $\mu = 10$  e variância conhecida  $\sigma^2$ . Escreva a verossimilhança e log-verossimilhança para  $\sigma^2$  e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
3. Sejam  $Y_1, \dots, Y_n$  v.a iid de uma população Poisson com esperança  $\mu$ . Escreva a verossimilhança e log-verossimilhança para  $\mu$  e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
4. Sejam  $Y_1, \dots, Y_n$  v.a iid de uma população Binomial com  $n = 1$  e esperança  $\mu$ . Escreva a verossimilhança e log-verossimilhança para  $\mu$  e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
5. Sejam  $Y_1, \dots, Y_n$  v.a iid de uma população Binomial com  $n = 10$  e esperança  $n\mu$ . Escreva a verossimilhança e log-verossimilhança para  $\mu$  e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
6. Sejam  $Y_1, \dots, Y_n$  v.a. iid de uma população Uniforme com parâmetros  $a = 0$  e  $b$  desconhecido. Escreva a função de verossimilhança e log-verossimilhança para  $b$  e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
7. Considere as quatro observações  $y_1 < 10$ ,  $y_2 > 10$ ,  $5 < y_3 < 10$  e  $y_4 = 10$ , escreva a função de verossimilhança e log-verossimilhança supondo que elas são iid provenientes de uma população Normal com esperança  $\mu$  e variância conhecida  $\sigma^2 = 1$ . Use o R ou qualquer outro software para desenhar a função de verossimilhança em cada caso.
8. Repita o exercício (7) para uma população Poisson com esperança  $\mu$ .
9. Caso você tivesse que escolher entre apenas uma das quatro observações qual você escolheria? Explique.
10. Demonstre a desigualdade de Jensen.

## Função escore e Informação de Fisher

1. Sejam  $Y_1, \dots, Y_n$  v.a iid de uma população Normal com esperança  $\mu$  e variância conhecida  $\sigma^2 = 1$ .
  - a) Obtenha a função escore e a matriz de informação de Fisher para  $\mu$ .
  - b) Mostre que a esperança da função escore é zero.
  - c) Mostre que a variância da função escore corresponde a esperança da segunda derivada da log-verossimilhança de  $\mu$ .
2. Sejam  $Y_1, \dots, Y_n$  v.a iid de uma população Binomial com esperança  $\mu$  e  $n$  conhecido.
  - a) Obtenha a função escore e a matriz de informação de Fisher para  $\mu$ .
  - b) Mostre que a esperança da função escore é zero.
  - c) Mostre que a variância da função escore corresponde a esperança da segunda derivada da log-verossimilhança de  $\mu$ .
3. Sejam  $Y_1, \dots, Y_n$  v.a iid de uma população Poisson com esperança  $\mu$ .

- a) Obtenha a função escore e a matriz de informação de Fisher para  $\mu$ .
  - b) Mostre que a esperança da função escore é zero.
  - c) Mostre que a variância da função escore corresponde a esperança da segunda derivada da log-verossimilhança de  $\mu$ .
4. Sejam  $Y_1, \dots, Y_n$  v.a iid de uma população exponencial com esperança  $\mu$ .
- a) Obtenha a função escore e a matriz de informação de Fisher para  $\mu$ .
  - b) Mostre que a esperança da função escore é zero.
  - c) Mostre que a variância da função escore corresponde a esperança da segunda derivada da log-verossimilhança de  $\mu$ .
5. Sejam  $Y_1, \dots, Y_n$  v.a iid de uma população geométrica de parâmetro  $\mu$ .
- a) Obtenha a função escore e a matriz de informação de Fisher para  $\mu$ .
  - b) Mostre que a esperança da função escore é zero.
  - c) Mostre que a variância da função escore corresponde a esperança da segunda derivada da log-verossimilhança de  $\mu$ .
6. Sejam  $Y_1, \dots, Y_n$  v.a iid de uma população uniforme com parâmetros  $a = 0$  e  $b$ .
- a) Discuta como o estimador de máxima verossimilhança para  $b$  pode ser obtido neste caso.
  - b) Obtenha a função e escore e verifique se as igualdades de Bartlett são válidas.
7. Sejam  $Y_1, \dots, Y_n$  amostras iid com  $E(Y_i) = \mu$  e  $V(Y_i) = \sigma^2$ . Considere os estimadores

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad \text{para } \mu \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \mu)^2, \quad \text{para } \sigma^2.$$

- a) Mostre que ambos são não viciados.
- b) Obtenha a variância de  $\bar{Y}$  e  $\hat{\sigma}^2$ .
- c) Mostre que ambos são consistentes.
- d) Considere o estimador

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2,$$

mostre que este estimador é viciado. d) Proponha uma correção para o estimador em c) de modo a torná-lo não viciado.

8. Sejam  $Y_1, Y_2, Y_3$  uma amostra iid de uma v.a. com  $E(Y_i) = \mu$  e  $V(Y_i) = \sigma^2$  em que  $\sigma^2$  é conhecido. Considere os estimadores  $\hat{\mu}_1 = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3}$  e  $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{2}Y_1 + \frac{1}{4}Y_2 + \frac{1}{4}Y_3$ .
- a) Mostre que ambos são não viciados para  $\mu$ .
  - b) Obtenha a variância de  $\hat{\mu}_1$  e  $\hat{\mu}_2$ .
  - c) Mostre que ambos são consistente para  $\mu$ .
  - d) Qual estimador você prefere? Explique.
9. Sejam  $Y_1, \dots, Y_n$  uma amostra iid de uma v.a. com  $E(Y_i) = \mu$  e  $V(Y_i) = \sigma^2$  em que  $\sigma^2$  é conhecido. Considere os estimadores lineares  $Y_L = \sum_{i=1}^n l_i Y_i$  em que  $l_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  são constantes conhecidas.
- a) Sob quais condições  $Y_L$  é não viciado?
  - b) Sob quais condições  $Y_L$  é eficiente?
  - c) Sob quais condições  $Y_L$  é consistente?
10. Para cada um dos modelos abaixo, encontre o limite inferior de Cramér-Rao.
- a) Normal média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  com  $\sigma^2$  conhecido.
  - b) Normal média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  com  $\mu$  conhecido.
  - c) Poisson média  $\mu$ .

- d) Binomial  $n$  conhecido e probabilidade de sucesso  $\mu$ .
- e) Geométrica com parâmetro  $\mu$ .
- f) Exponencial de média  $\mu$ .