Lista de exercícios I - Revisão de probabilidade

Revisão de probabilidade

Wagner Hugo Bonat

2018-08-13

Probababilidade Básica

1. (Probabilidade Condicional e Independência) Uma empresa produz peças em duas máquinas I e II, que podem apresentar desajustes com probabilidade 0.05 e 0.10, respectivamente. No início do dia de operação um teste é realizado e, caso a máquina esteja fora de ajuste, ela ficará sem operar nesse dia passando por revisão técnica. Para cumprir o nível mínimo de produção pelo menos uma das máquinas deve operar. Você diria que a empresa corre o risco de não cumprir com suas metas de produção?
2. (Probabilidade Condicional e Independência) Suponha que a probabilidade de um avião decolar no horário é de $P(D) = 0.83$; a probabilidade do avião chegar no horário é de $P(A) = 0.82$; e a probabilidade de decolar e chegar no horário é de $P(D \cap A) = 0.78$. Encontre as probabilidades:
    a) Chegue no horário dado que decolou no horário.
    b) Decole no horário dado que chegou no horário.
3. (Teorema de Bayes) Uma montadora trabalha com 2 fornecedores (A e B) de uma determinada peça. As chances de que uma peça proveniente dos fornecedores A e B esteja fora das especificações são 10% e 5% respectivamente. A montadora recebe 30% das peças do fornecedor A e 70% de B. Se uma peça do estoque inteiro é escolhido ao acaso:
    a) Calcule a probabilidade de que ela esteja fora das especificações.
    b) Se uma peça escolhida ao acaso está fora das especificações, qual é a probabilidade que venha do fornecedor fornecedor A?
4. (Teorema de Bayes) Uma empresa de manufatura emprega três planos para o desenvolvimento de um particupar produto. Por razões de custos, os três planos são usados aleatóriamente. Dados históricos mostram que os planos 1, 2 e 3 são usados para 30%, 20% e 50% dos produtos, respectivamente. A taxa de defeito é diferente para os três planos, sendo

$$P(D|P_1) = 0.01, P(D|P_2) = 0.03 \quad \text{e} \quad P(D|P_3) = 0.02.$$

   Se um produto é observado aleatóriamente e verificado defeituoso, qual é o plano mais provável de ter sido usado em sua produção?
5. (Distribuições de Probabilidade) Com o objetivo de verificar a resistência à pressão de água, os técnicos de qualidade de uma empresa inspecionam os tubos de PVC produzidos. Os tudos inspecionados têm 6 metros de comprimento e são submetidos a grandes pressões até o aparecimento do primeiro vazamento, cuja distância a uma das extremidades (fixada à priori) é anotada para fins de analise. Escolhe-se um tubo ao acaso para ser inspecionado. Queremos calcular a probabilidade de que o vazamento esteja, a no máximo 1 metro das extremidades.
6. O intervalo de tempo, em minutos, entre emissões consecutivas de uma fonte radioativa é uma variável aleatória com distribuição Exponencial de parâmetro $\alpha = 0.2$. Calcule a probabilidade de haver uma emissão em um intervalo inferior a 2 minutos.

Principais distribuições de probabilidade

7. Seja X uma variável aleatória com distribuição Bernoulli de parâmetro p, em que $0 < p < 1$. Mostre que $E[X] = p$ e $Var[X] = p(1-p)$. Considere a seguinte parametrização

$$p(x) = p^x(1-p)^{1-x}, x \in \{0,1\}.$$

8. Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros n e p, em que $n \in \mathbb{N}$ e $p \in [0,1]$. Mostre que $E[X] = np$ e $Var[X] = np(1-p)$. Considere a seguinte parametrização

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}, x \in \{0,...,n\}.$$

9. Seja X uma variável aleatória com distribuição Poisson de parâmetro θ, em que $\theta \in \mathbb{R}^+$. Mostre que $E[X] = \theta$ e $Var[X] = \theta$. Considere a seguinte parametrização

$$p(x) = \frac{\theta^x \exp^{-\theta}}{x!}, x \in \mathbb{N}.$$

10. Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme de parâmetros $(0,\theta)$, em que $\theta \in \mathbb{R}$. Mostre que $E[X] = \frac{\theta}{2}$ e $Var[X] = \frac{\theta^2}{12}$. Considere a seguinte parametrização

$$f(x) = \frac{1}{(\theta - 0)}, x \in [0,\theta].$$

11. Seja X uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro θ, em que $\theta \in \mathbb{R}^+$. Mostre que $E[X] = \frac{1}{\theta}$ e $Var[X] = \frac{1}{\theta^2}$. Considere a seguinte parametrização

$$f(x) = \theta \exp^{-\theta x}, x \in \mathbb{R}^+.$$

12. Seja X uma variável aleatória com distribuição gamma de parâmetros (α,β), em que $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $\beta \in \mathbb{R}^+$. Mostre que $E[X] = \frac{\alpha}{\beta}$ e $Var[X] = \frac{\alpha}{\beta^2}$. Considere a seguinte parametrização

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} \exp^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, x \in \mathbb{R}^+.$$

13. Seja X uma variável aleatória com distribuição Normal de parâmetros (μ,σ^2), em que $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$. Mostre que $E[X] = \mu$ e $Var[X] = \sigma^2$. Considere a seguinte parametrização

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], x \in \mathbb{R}.$$