

Lista de exercícios II - Verossimilhança e Log-Verossimilhança

Verossimilhança e Log-Verossimilhança

Wagner Hugo Bonat

2018-08-13

Verossimilhança e Log-verossimilhança

1. Sejam Y_1, \dots, Y_n v.a iid de uma população Normal com esperança μ e variância conhecida $\sigma^2 = 1$. Escreva a verossimilhança e log-verossimilhança para μ e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
2. Sejam Y_1, \dots, Y_n v.a iid de uma população Normal com esperança $\mu = 10$ e variância conhecida σ^2 . Escreva a verossimilhança e log-verossimilhança para σ^2 e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
3. Sejam Y_1, \dots, Y_n v.a iid de uma população Poisson com esperança μ . Escreva a verossimilhança e log-verossimilhança para μ e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
4. Sejam Y_1, \dots, Y_n v.a iid de uma população Binomial com $n = 1$ e esperança μ . Escreva a verossimilhança e log-verossimilhança para μ e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
5. Sejam Y_1, \dots, Y_n v.a iid de uma população Binomial com $n = 10$ e esperança $n\mu$. Escreva a verossimilhança e log-verossimilhança para μ e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
6. Sejam Y_1, \dots, Y_n v.a. iid de uma população Uniforme com parâmetros $a = 0$ e b desconhecido. Escreva a função de verossimilhança e log-verossimilhança para b e verifique se as condições de regularidade estão satisfeitas.
7. Considere as quatro observações $y_1 < 10$, $y_2 > 10$, $5 < y_3 < 10$ e $y_4 = 10$, escreva a função de verossimilhança e log-verossimilhança supondo que elas são iid provenientes de uma população Normal com esperança μ e variância conhecida $\sigma^2 = 1$. Use o R ou qualquer outro software para desenhar a função de verossimilhança em cada caso.
8. Repita o exercício (7) para uma população Poisson com esperança μ .
9. Caso você tivesse que escolher entre apenas uma das quatro observações qual você escolheria? Explique.
10. Demonstre a desigualdade de Jensen.

Função escore e Informação de Fisher

1. Sejam Y_1, \dots, Y_n v.a iid de uma população Normal com esperança μ e variância conhecida $\sigma^2 = 1$.
 - a) Obtenha a função escore e a matriz de informação de Fisher para μ .
 - b) Mostre que a esperança da função escore é zero.
 - c) Mostre que a variância da função escore corresponde a esperança da segunda derivada da log-verossimilhança de μ .
2. Sejam Y_1, \dots, Y_n v.a iid de uma população Binomial com esperança μ e n conhecido.
 - a) Obtenha a função escore e a matriz de informação de Fisher para μ .
 - b) Mostre que a esperança da função escore é zero.
 - c) Mostre que a variância da função escore corresponde a esperança da segunda derivada da log-verossimilhança de μ .
3. Sejam Y_1, \dots, Y_n v.a iid de uma população Poisson com esperança μ .

- a) Obtenha a função escore e a matriz de informação de Fisher para μ .
 - b) Mostre que a esperança da função escore é zero.
 - c) Mostre que a variância da função escore corresponde a esperança da segunda derivada da log-verossimilhança de μ .
4. Sejam Y_1, \dots, Y_n v.a iid de uma população exponencial com esperança μ .
- a) Obtenha a função escore e a matriz de informação de Fisher para μ .
 - b) Mostre que a esperança da função escore é zero.
 - c) Mostre que a variância da função escore corresponde a esperança da segunda derivada da log-verossimilhança de μ .
5. Sejam Y_1, \dots, Y_n v.a iid de uma população geométrica de parâmetro μ .
- a) Obtenha a função escore e a matriz de informação de Fisher para μ .
 - b) Mostre que a esperança da função escore é zero.
 - c) Mostre que a variância da função escore corresponde a esperança da segunda derivada da log-verossimilhança de μ .
6. Sejam Y_1, \dots, Y_n v.a iid de uma população uniforme com parâmetros $a = 0$ e b .
- a) Discuta como o estimador de máxima verossimilhança para b pode ser obtido neste caso.
 - b) Obtenha a função e escore e verifique se as igualdades de Bartlett são válidas.
7. Sejam Y_1, \dots, Y_n amostras iid com $E(Y_i) = \mu$ e $V(Y_i) = \sigma^2$. Considere os estimadores

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad \text{para } \mu \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \mu)^2, \quad \text{para } \sigma^2.$$

- a) Mostre que ambos são não viciados.
- b) Obtenha a variância de \bar{Y} e $\hat{\sigma}^2$.
- c) Mostre que ambos são consistentes.
- d) Considere o estimador

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2,$$

mostre que este estimador é viciado. d) Proponha uma correção para o estimador em c) de modo a torná-lo não viciado.

8. Sejam Y_1, Y_2, Y_3 uma amostra iid de uma v.a. com $E(Y_i) = \mu$ e $V(Y_i) = \sigma^2$ em que σ^2 é conhecido. Considere os estimadores $\hat{\mu}_1 = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3}$ e $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{2}Y_1 + \frac{1}{4}Y_2 + \frac{1}{4}Y_3$.
- a) Mostre que ambos são não viciados para μ .
 - b) Obtenha a variância de $\hat{\mu}_1$ e $\hat{\mu}_2$.
 - c) Mostre que ambos são consistente para μ .
 - d) Qual estimador você prefere? Explique.
9. Sejam Y_1, \dots, Y_n uma amostra iid de uma v.a. com $E(Y_i) = \mu$ e $V(Y_i) = \sigma^2$ em que σ^2 é conhecido. Considere os estimadores lineares $Y_L = \sum_{i=1}^n l_i Y_i$ em que $l_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ são constantes conhecidas.
- a) Sob quais condições Y_L é não viciado?
 - b) Sob quais condições Y_L é eficiente?
 - c) Sob quais condições Y_L é consistente?
10. Para cada um dos modelos abaixo, encontre o limite inferior de Cramér-Rao.
- a) Normal média μ e variância σ^2 com σ^2 conhecido.
 - b) Normal média μ e variância σ^2 com μ conhecido.
 - c) Poisson média μ .

- d) Binomial n conhecido e probabilidade de sucesso μ .
- e) Geométrica com parâmetro μ .
- f) Exponencial de média μ .