

# Probabilidades

Wagner H. Bonat  
Fernando P. Mayer  
Elias T. Krainski

Universidade Federal do Paraná  
Departamento de Estatística  
Laboratório de Estatística e Geoinformação

13/08/2018



# Sumário

## 1 Introdução

- Teoria das Probabilidades
- Experimentos e eventos

## 2 Probabilidade

- Definições

## 3 Probabilidade condicional

# Teoria das Probabilidades

- A **Teoria das Probabilidades** é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e pesquisa **modelos** que podem ser utilizados para estudar **experimentos ou fenômenos aleatórios**
- A **Inferência Estatística** é totalmente fundamentada na **Teoria das Probabilidades**
- O **modelo** utilizado para estudar um fenômeno aleatório pode variar em complexidade, mas todos eles possuem ingredientes básicos comuns.

# Tipos de experimentos

## Experimentos determinísticos

Dizemos que um experimento é determinístico quando repetido inúmeras vezes, **em condições semelhantes**, conduz a resultados *essencialmente* idênticos. Ex.:

- Aceleração da gravidade
- Leis da Física e da Química

## Experimentos aleatórios

Os experimentos que **repetidos sob as mesmas condições** geram resultados diferentes, são chamados de experimentos aleatórios. Ex.:

- Lançamento de uma moeda
- Lançamento de um dado
- Tempo de vida de um equipamento eletrônico

# Objetivo

- O objetivo é construir um modelo matemático para representar **experimentos aleatórios**. Isso ocorre em duas etapas:
- Descrever o **conjunto** de resultados possíveis
- Atribuir *pesos* a cada resultado, refletindo suas chances de ocorrência

# Definições

Um experimento, que ao ser realizado sob as mesmas condições não produz os mesmos resultados, é denominado um **experimento aleatório**. Exemplo: lançamento de uma moeda, medir altura, ...

O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é denominado **espaço amostral** ( $\Omega$ ). Pode conter um número finito ou infinito de pontos. Exemplo: {cara, coroa},  $\mathbb{R}$ , ...

Os elementos do espaço amostral (**pontos amostrais**) são denotados por  $\omega$ . Exemplo:  $\omega_1 = \text{cara}$ ,  $\omega_2 = \text{coroa}$ .

Todo resultado ou subconjunto de resultados de um experimento aleatório, é um **evento**. Exemplo:  $A = \text{"sair cara"}$ ,  $B = \text{"sair face par"}$ .

# Exemplos

- **Experimento:** retirar uma carta de um baralho de 52 cartas.
- **Espaço amostral:**  $\Omega = \{\clubsuit A, \clubsuit 2, \dots, \heartsuit A, \dots, \spadesuit A, \dots, \diamondsuit J, \diamondsuit Q, \diamondsuit K\}$ .
- **Pontos amostrais:**  $\omega_1 = \clubsuit A, \omega_2 = \clubsuit 2, \dots, \omega_{52} = \diamondsuit K$ .
- **Eventos:**  $A = \text{"sair um ás"}$ ,  $B = \text{"sair uma letra"}$ ,  $C = \text{"sair carta de } \clubsuit \text{"}$ .

- **Experimento:** pesar um fruto ao acaso
- **Espaço amostral:**  $\Omega = \mathbb{R}^+$ .
- **Pontos amostrais:** espaço amostral é infinito.
- **Eventos:**  $A = \text{"peso menor que 50g"}$ ,  $B = \{x : x \geq 100\text{g}\}$ .

# Operações com eventos

Usamos a **Teoria dos conjuntos** para definir operações com eventos

- **União** é o evento que consiste da união de **todos** os pontos amostrais dos eventos que a compõem. Denotamos a união do evento A com B por  $A \cup B$ .  $A \cup B = \{\omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$
- **Interseção** é o evento composto pelos pontos amostrais **comuns** aos eventos que a compõem. Denotamos a interseção de A com B por  $A \cap B$ .  $A \cap B = \{\omega \in A \text{ e } \omega \in B\}$
- **Complemento** é o conjunto de pontos do espaço amostral que não estão no evento. Denotamos o complemento do evento A por  $A^c$ .  $A^c = \{\omega \notin A\}$



# Tipos de eventos

- **Disjuntos** (mutuamente exclusivos) são eventos que possuem interseção nula, ou seja,  $A \cap B = \{\emptyset\}$ .
- **Complementares** são eventos que a união é o espaço amostral, ou seja,  $A \cup B = \Omega$ .

# Exemplo

Considere o lançamento de um dado e os eventos:  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{\omega : \omega \leq 3\}$ ,  $C = \text{face par}$ ,  $D = \text{face primo}$ .

- Uniões
  - $A \cup B =$
  - $A \cup C =$
  - $A \cup D =$
- Interseções
  - $A \cap B =$
  - $A \cap C =$
  - $A \cap D =$
- Complementos
  - $A^c =$
  - $B^c =$
  - $D^c =$

# Exemplo

Considere o lançamento de um dado e os eventos:  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{\omega : \omega \leq 3\}$ ,  $C = \text{face par}$ ,  $D = \text{face primo}$ .

- Uniões

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

- $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

- $A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- Interseções

- $A \cap B = \{1, 2, 3\}$

- $A \cap C = \{2, 4\}$

- $A \cap D = \{2, 3\}$

- Complementos

- $A^c = \{5, 6\}$

- $B^c = \{\omega : \omega > 3\}$

- $D^c = \{1, 4, 6\}$

# Sumário

## 1 Introdução

- Teoria das Probabilidades
- Experimentos e eventos

## 2 Probabilidade

- Definições

## 3 Probabilidade condicional

# Definição de probabilidade

Probabilidade é uma função  $P(\cdot)$  que atribui valores numéricos aos eventos do espaço amostral, de tal forma que

- 1  $0 \leq P(A) \leq 1, \quad \forall A \in \Omega;$
- 2  $P(\Omega) = 1;$
- 3  $P(\bigcup_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n P(A_j),$  com os  $A_j$ 's disjuntos.

A pergunta que surge é então: como atribuir probabilidades aos elementos do espaço amostral?

# Definição de probabilidade

Existem duas maneiras principais de atribuir probabilidades aos elementos do espaço amostral:

- ➊ **(Clássica)** baseia-se nas características teóricas da realização do fenômeno. Ex.:
  - Considerando o lançamento de um dado, temos  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - Admitindo que o dado é honesto, podemos assumir que  $P(1) = P(2) = \dots = P(6) = 1/6$
- ➋ **(Frequentista)** baseia-se nas frequências (relativas) de ocorrência do fenômeno. Ex.:
  - Determinar a probabilidade de ocorrência de cada face de um dado
  - Sem fazer nenhuma suposição inicial, podemos usar as **frequências relativas** de sucessivas ocorrências

## Definição frequentista

Podemos então pensar em repetir o experimento aleatório  $n$  vezes, e contar quantas vezes o evento  $A$  ocorre,  $n(A)$ .

Dessa forma a frequência relativa de  $A$  nas  $n$  repetições será

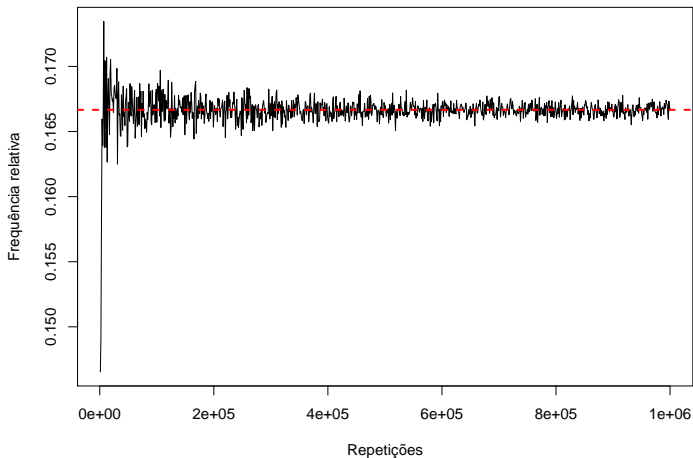
$$f_{n,A} = \frac{n(A)}{n}$$

Para  $n \rightarrow \infty$  repetições sucessivas e independentes, a frequência relativa de  $A$  tende para uma constante  $p$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n} = P(A) = p$$

**Exemplo:** Se um dado fosse lançado  $n$  vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?

# Definição frequentista





# Definição frequentista

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n} = P(A) \approx 0,1667$$

As probabilidades calculadas a partir de frequências relativas, são **estimativas** da verdadeira probabilidade

À medida que o número de repetições vai aumentando, as **frequências relativas** se estabilizam em um número que chamamos de **probabilidade**.

## Lei dos Grandes Números

A Lei dos Grandes Números nos diz que as estimativas dadas pelas frequências relativas tendem a ficar melhores com mais observações.

# Exemplo

Considerando os dados da variável Idade da aula anterior

- O espaço amostral é  $\Omega = \{17, 18, \dots, 25\}$
- Se um aluno é escolhido ao acaso, definimos a probabilidade dele ter certa idade pela frequência relativa

	$n_i$	$f_i$	$f_{ac}$
17	9	0.18	0.18
18	22	0.44	0.62
19	7	0.14	0.76
20	4	0.08	0.84
21	3	0.06	0.90
22	0	0.00	0.90
23	2	0.04	0.94
24	1	0.02	0.96
25	2	0.04	1.00
Sum	50	1.00	

$$P(17) = 0,18; \dots; P(25) = 0,04$$

## Exemplo

Considerando os dados das variáveis Sexo e Turma

	F	M	Sum
A	21	5	26
B	16	8	24
Sum	37	13	50

Podemos extrair as seguintes probabilidades

$$P(F) = \frac{37}{50} = 0,74; P(M) = \frac{13}{50} = 0,26$$

$$P(A) = \frac{26}{50} = 0,52; P(B) = \frac{24}{50} = 0,48$$

Qual seria a probabilidade de escolhermos ao acaso um estudante do sexo feminino ou alguém da Turma B?

# Exemplo

Queremos então  $P(F \cup B)$

$$\begin{aligned}P(F \cup B) &= P(F) + P(B) \\&= 0,74 + 0,48 \\&= 1,22\end{aligned}$$

o que não é possível pois a soma é superior a 1.

Não é difícil ver que estamos somando alguns indivíduos 2 vezes, pois os estudantes do sexo feminino e da turma B, ou seja, o evento  $F \cap B$  está incluído no evento  $F$  e no evento  $B$ .

## Exemplo

Logo, precisamos subtrair  $P(F \cap B)$  para obter a probabilidade correta.

Nesse caso, pela tabela, vemos que a interseção  $F \cap B$  resulta na probabilidade

$$P(F \cap B) = \frac{16}{50} = 0,32$$

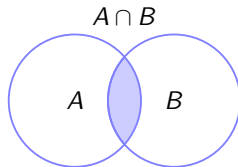
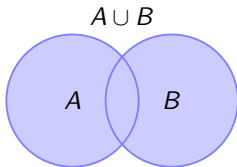
E o resultado correto para  $P(F \cup B)$  é

$$\begin{aligned} P(F \cup B) &= P(F) + P(B) - P(F \cap B) \\ &= 0,74 + 0,48 - 0,32 \\ &= 0,9 \end{aligned}$$

# Regra da adição de probabilidades

A probabilidade da união entre dois eventos quaisquer,  $A$  e  $B$ , é dada pela **regra da adição de probabilidades**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

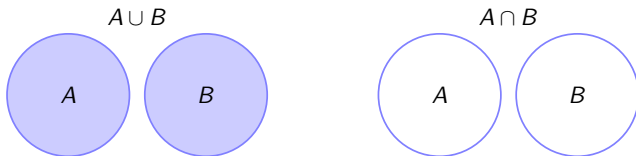


# Regra da adição de probabilidades

Note que a regra da adição pode ser simplificada, **se e somente se** os eventos  $A$  e  $B$  forem **disjuntos** (ou mutuamente exclusivos)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

pois, neste caso,  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$



# Regra do complementar

Como consequência da regra da adição, temos que, para qualquer evento  $A$ ,

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

Verifique através de  $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) - P(A \cap A^c)$



# Sumário

## 1 Introdução

- Teoria das Probabilidades
- Experimentos e eventos

## 2 Probabilidade

- Definições

## 3 Probabilidade condicional

# Probabilidade condicional

Em muitas situações práticas, o fenômeno aleatório com o qual trabalhamos pode ser separado em etapas.

A informação do que ocorreu em uma determinada etapa pode influenciar nas probabilidades de ocorrências das etapas sucessivas.

Nestes casos, dizemos que **ganhamos informação**, e podemos *recalcular* as probabilidades de interesse.

Estas probabilidades *recalculadas* recebem o nome de **probabilidade condicional**.

# Definição

- Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A ocorrer, dado que ocorreu B é representado por  $P(A|B)$  e dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{para } P(B) > 0.$$

- Caso  $P(B) = 0$ , definimos  $P(A|B) = P(A)$ .

# Probabilidade condicional

Considere o seguinte exemplo:

- Um dado foi lançado, qual é a probabilidade de ter ocorrido face 4?
- Suponha que o dado foi jogado, e, sem saber o resultado, você recebe a informação de que ocorreu face par. Qual é a probabilidade de ter saído face 4 com essa “nova” informação?

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, n(\Omega) = 6$$

$$A = \text{face 4} = \{4\}, n(A) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

$$B = \text{face par} = \{2, 4, 6\}, n(B) = 3 \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6}$$

$$C = \text{face 4, dado que ocorreu face par} = \{4\}, n(C) = \frac{1}{3}$$

# Probabilidade condicional

Usando a definição formal:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6}$$

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{1/6}{3/6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

## Regra do produto

A regra do produto é uma expressão derivada do conceito de probabilidade condicional. Uma vez que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

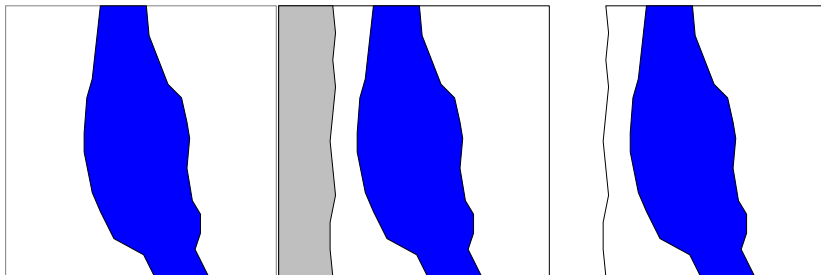
temos que

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Essa expressão permite calcular probabilidades em espaços amostrais que são realizados em sequência, onde a ocorrência da *segunda* etapa **depende** (ou não) da ocorrência da *primeira* etapa.

## Regra do produto

Sabe-se que há um aquífero (em azul) numa região  $100\text{km}^2$ . Para localizar o mesmo perfura-se uma área de  $20\text{km}^2$  (em cinza). Sem conhecer a localização do aquífero, temos que a probabilidade de realizar um furo e encontrar água é 0,2.



Não foi encontrado água. Temos a informação  $I$ , água deve estar nos demais  $80\text{km}^2$ . A probabilidade de encontrar água numa nova perfuração de  $20\text{km}^2$  passa a ser  $P(H|I) = P(H \cap I) / P(I) = 0,2 / 0,8 = 0,25$

# Independência de eventos

Vimos que para probabilidades condicionais,  $P(A|B)$ , saber que  $B$  ocorreu nos dá uma informação “extra” sobre a ocorrência de  $A$ .

Porém, existem algumas situações nas quais saber que o evento  $B$  ocorreu, não tem qualquer interferência na ocorrência ou não de  $A$ .

Nestes casos, podemos dizer que os eventos  $A$  e  $B$  são **independentes**.



# Independência de eventos

Os eventos A e B são **eventos independentes** se a ocorrência de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, ou seja, eventos A e B são independentes se

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{e também que} \quad P(B|A) = P(B)$$

Com isso, e a regra do produto, temos que

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B)$$

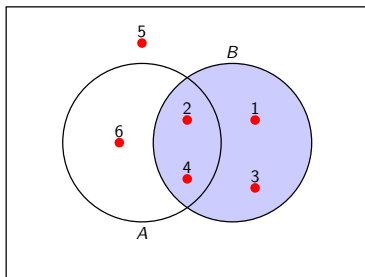
# Exemplo

Considere o lançamento de um dado e os seguintes eventos

$A$  = “resultado é um número par”

$B$  = “resultado é um número menor ou igual a 4”

Os eventos  $A$  e  $B$  são independentes?



## Exemplo

**Pela definição intuitiva:**

$$P(A) = 1/2, \quad P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = \frac{2/6}{4/6} = 1/2$$

$$P(B) = 2/3, \quad P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) = \frac{2/6}{3/6} = 2/3.$$

Portanto:  $P(A|B) = P(A)$  e  $P(B|A) = P(B)$

**Pela definição formal:**

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1/3$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = 1/3, \text{ assim } P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Portanto, os eventos  $A$  e  $B$  são independentes. Saber que  $A$  ocorreu não muda a probabilidade de  $B$  ocorrer e vice-versa.

## Exemplo 2.4 (livro)

Uma empresa produz peças em duas máquinas I e II, que podem apresentar desajustes com probabilidade 0,05 e 0,10, respectivamente.

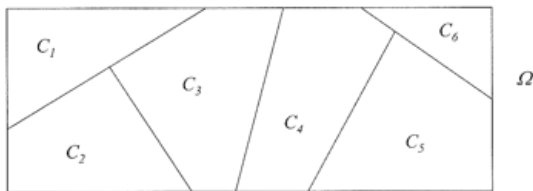
No início do dia de operação um teste é realizado e, caso a máquina esteja fora de ajuste, ela ficará sem operar nesse dia passando por revisão técnica.

Para cumprir o nível mínimo de produção pelo menos uma das máquinas deve operar. Você diria que a empresa corre o risco de não cumprir com suas metas de produção?

# Partição do espaço amostral

Dizemos que os eventos  $C_1, C_2, \dots, C_k$  formam uma **partição** do espaço amostral, se eles não tem interseção entre si, e se sua união é igual ao espaço amostral. Isto é,

$$C_i \cap C_j = \emptyset \quad \text{para} \quad i \neq j \quad \text{e} \quad \bigcup_{i=1}^k C_i = \Omega.$$



## Exemplo 2.5 (livro)

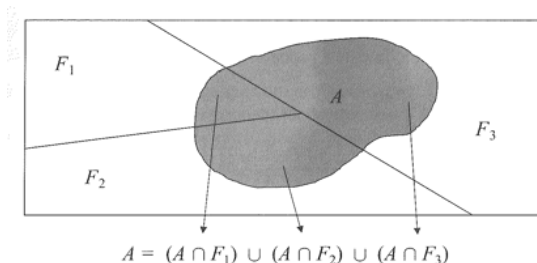
Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda  $F_1$ , 30% de uma outra fazenda  $F_2$  e 50% de  $F_3$ .

Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por  $F_1$  estava adulterado por adição de água, enquanto que para  $F_2$  e  $F_3$ , essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente.

Na indústria de sorvetes os galões de leite são armazenados em um refrigerador sem identificação das fazendas. Para um galão escolhido ao acaso, qual a probabilidade do leite estar adulterado?

## Exemplo 2.5 (livro)

Seja  $A$  o evento “o leite está adulterado”, podemos defini-lo conforme a figura abaixo.



Calcule  $P(A)$ .

# Teorema de Bayes

Podemos estar interessados também na probabilidade de uma amostra adulterada ter sido obtida a partir da fazenda  $F_1$ , ou seja,  $P(F_1|A)$ .

## Teorema de Bayes

Suponha que os eventos  $C_1, C_2, \dots, C_k$  formem uma partição de  $\Omega$  e que suas probabilidades sejam conhecidas. Suponha, ainda, que para um evento  $A$ , se conheçam as probabilidades  $P(A|C_i)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ . Então, para qualquer  $j$ ,

$$P(C_j|A) = \frac{P(C_j)P(A|C_j)}{\sum_{i=1}^k P(C_i)P(A|C_i)}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$



## Exemplo 2.6 (livro)

Usando o exemplo anterior, podemos agora calcular a probabilidade de que o leite adulterado tenha sido obtido a partir da fazenda  $F_1$ .

$$\begin{aligned} P(F_1|A) &= \frac{P(F_1)P(A|F_1)}{P(F_1)P(A|F_1) + P(F_2)P(A|F_2) + P(F_3)P(A|F_3)} \\ &= \frac{0,2 \times 0,2}{0,2 \times 0,2 + 0,3 \times 0,05 + 0,5 \times 0,02} \\ &= 0,615 \end{aligned}$$

De maneira similar, podemos obter  $P(F_2|A)$  e  $P(F_3|A)$ .

# Exercícios recomendados

- Seção 2.1 Ex. 1, 2, 3, 4 e 5.
- Seção 2.2 Ex. 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.
- Seção 2.3 Ex. 1, 3, 8, 9, 11, 13, 15 e 19.