

# Medidas resumo

Wagner H. Bonat  
Elias T. Krainski  
Fernando P. Mayer

Universidade Federal do Paraná  
Departamento de Estatística  
Laboratório de Estatística e Geoinformação



# Sumário

## 1 Introdução

## 2 Medidas de posição

- Medidas de posição para um conjunto de dados
- Medidas de posição para VAs discretas

## 3 Medidas de dispersão

- Medidas de dispersão para um conjunto de dados
- Medidas de dispersão para VAs discretas

## 4 Exercícios recomendados

# Introdução

Características importantes de qualquer conjunto de dados ou de uma variável aleatória

- Centro
- Variação
- Distribuição
- Valores atípicos

# Introdução

Características importantes de qualquer conjunto de dados ou de uma variável aleatória

- Centro
- Variação
- Distribuição
- Valores atípicos

Classificaremos as medidas descritivas em dois grupos

- de posição
- de dispersão

# Sumário

## 1 Introdução

## 2 Medidas de posição

- Medidas de posição para um conjunto de dados
- Medidas de posição para VAs discretas

## 3 Medidas de dispersão

- Medidas de dispersão para um conjunto de dados
- Medidas de dispersão para VAs discretas

## 4 Exercícios recomendados

# Definição

- medidas de posição central
  - úteis para **resumo** e **análise** de dados
    - Média, Mediana, Moda
- outras medidas de posição
  - extremos: mínimo, máximo
  - quantis: 1º quartil, 3º quartil, percentil 5%, entre outras

# Moda

Valor **mais frequente** em um conjunto de dados

- Dependendo do conjunto de dados, ele pode ser
  - **Sem moda** quando nenhum valor se repete
  - **Unimodal** quando existe apenas um valor repetido com maior frequência
  - **Bimodal** quando existem dois valores com a mesma maior frequência
  - **Multimodal** quando mais de dois valores se repetem com a mesma frequência

# Moda

Valor **mais frequente** em um conjunto de dados

- Dependendo do conjunto de dados, ele pode ser
  - **Sem moda** quando nenhum valor se repete
  - **Unimodal** quando existe apenas um valor repetido com maior frequência
  - **Bimodal** quando existem dois valores com a mesma maior frequência
  - **Multimodal** quando mais de dois valores se repetem com a mesma frequência

Valor com **maior probabilidade** de ocorrer numa **VA discreta**

- Ex.: lançamento de duas moedas
  - $X$ : número de caras,  $X = \{0, 1, 2\}$
  - $P(x) = 0.25, 0.5$  e  $0.25$ , respectivamente
  - moda: 1



# Mediana

## O valor do meio da amostra ordenada

- Separa o conjunto de dados em duas partes iguais, 50% abaixo e 50% acima

Observações ordenadas:

- a menor observação por  $x_{(1)}$ , a segunda por  $x_{(2)}$ , e assim por diante:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n-1)} \leq x_{(n)}$$

As observações ordenadas são chamadas de **estatísticas de ordem**

- $x_{(1)}$  é o mínimo da amostra
- $x_{(n)}$  é o máximo da amostra

# Média de dados brutos

Divide-se a soma de todos os dados pelo número total deles:

$$\bar{x}_{obs} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

# Média de dados agrupados

Soma dos produtos dos valores pelas respectivas frequências e divide pela frequência total

$$\bar{x}_{obs} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n}.$$

## Exemplo: média de dados discretos agrupados

Considere a tabela de frequência abaixo:

| Número       | $n_i$ | $f_i$ |
|--------------|-------|-------|
| 0            | 4     | 0,20  |
| 1            | 5     | 0,25  |
| 2            | 7     | 0,35  |
| 3            | 3     | 0,15  |
| 5            | 1     | 0,05  |
| <b>Total</b> | 20    | 1     |

A média é calculada por:

$$\begin{aligned}\bar{x}_{obs} &= \frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1}{4 + 5 + 7 + 3 + 1} \\ &= \frac{33}{20} \\ &= 1,65\end{aligned}$$

## Exemplo: média de dados agrupados em classes

Usar **ponto médio** de cada classe e respectivas frequências

| Classe       | PM = $x_i$ | $n_i$ | $f_i$ |
|--------------|------------|-------|-------|
| [4, 8)       | 6          | 10    | 0,278 |
| [8, 12)      | 10         | 12    | 0,333 |
| [12, 16)     | 14         | 8     | 0,222 |
| [16, 20)     | 18         | 5     | 0,139 |
| [20, 24)     | 22         | 1     | 0,028 |
| <b>Total</b> | 36         | 1     |       |

Considerando os **pontos médios** de cada classe, a média é calculada por

$$\begin{aligned}\bar{x}_{obs} &= \frac{(6 \cdot 10 + 10 \cdot 12 + \cdots + 22 \cdot 1)}{10 + 12 + 8 + 5 + 1} \\ &= \frac{404}{36} \\ &= 11,22\end{aligned}$$

## Exemplo 4.1

Suponha que parafusos a serem utilizados em tomadas elétricas são embalados em caixas rotuladas como contendo 100 unidades. Em uma construção, 10 caixas de um lote tiveram o número de parafusos contados, fornecendo os valores:

98, 102, 100, 100, 99, 97, 96, 95, 99 e 100

Calcular média, mediana e moda.

- $\bar{x}_{obs} = 98.6$ .
- $md_{obs} = 99$ .
- $mo_{obs} = 100$ .

# Média e mediana

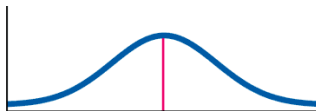
Notar a influência de valores extremos na média (se ao invés de 95, o valor fosse 45):

$$95 \ 96 \ 97 \ 98 \ 99 \ 99 \ 100 \ 100 \ 100 \ 102 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_{obs} = 98,6 \text{ e } Md = 99$$

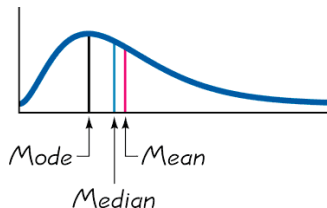
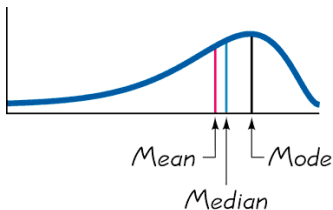
$$45 \ 96 \ 97 \ 98 \ 99 \ 99 \ 100 \ 100 \ 100 \ 102 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_{obs} = 93,6 \text{ e } Md = 99$$

Devido a esse fato, a mediana é uma medida de posição central **robusta**, ou seja, *não influenciada por valores extremos*.

# Média, mediana e moda



$$\text{Mode} = \text{Mean} = \text{Median}$$





## Exemplo 4.4

Um estudante está procurando um estágio para o próximo ano. As companhias A e B têm programas de estágios e oferecem uma remuneração por 20 horas semanais com as seguintes características.

| Companhia | A   | B   |
|-----------|-----|-----|
| média     | 2,5 | 2,0 |
| mediana   | 1,7 | 1,9 |
| moda      | 1,5 | 1,9 |

Qual companhia você escolheria?

## Exemplo 4.3

Foram coletadas 150 observações da variável  $X$ , representando o número de vestibulares FUVEST (um por ano) que um mesmo estudante prestou. Com os dados da tabela abaixo, calcule as medidas de posição de  $X$ .

| $X$ | $n_i$ |
|-----|-------|
| 1   | 75    |
| 2   | 47    |
| 3   | 21    |
| 4   | 7     |

Suponha ainda que o interesse é estudar o gasto dos alunos associado com as despesas do vestibular. Para simplificar, suponha que se atribui para cada aluno, uma despesa fixa de R\$ 1300,00 relativa a preparação e mais R\$ 50 para cada vestibular prestado. Calcule as medidas de posição central para a variável  $D$  (despesa com vestibular).

# Medidas de posição para VAs discretas

Sabemos que a descrição completa do comportamento de uma VA discreta é feita através de sua **função de probabilidade**.

Assim como fizemos para um conjunto de dados qualquer, podemos obter as medidas de posição para qualquer variável aleatória.

Lembrando que se os possíveis valores de uma VA  $X$  são  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , com correspondentes probabilidades  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , então as medidas de posição podem ser definidas a seguir.

# Medidas de posição para VAs discretas

A Média é chamada de **valor esperado** ou **esperança**

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i p_i.$$

A Mediana é o valor  $Md$  que satisfaz as seguintes condições

$$P(X \leq Md) \geq 1/2 \quad \text{e} \quad P(X \geq Md) \geq 1/2.$$

A Moda é o valor (ou valores) com maior probabilidade de ocorrência

$$P(X = Mo) = \max\{p_1, p_2, \dots, p_k\}.$$

## Exemplo 4.5

Considere a VA  $X$  com a seguinte função discreta de probabilidade:

|       |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|
| $X$   | -5  | 10  | 15  | 20  |
| $p_i$ | 0.3 | 0.2 | 0.4 | 0.1 |

Calcule as medidas de tendência central.

## Exemplo 4.6

Considere uma VA  $X$  com função de probabilidade dada por

|       |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$   | 2   | 5   | 8   | 15  | 20  |
| $p_i$ | 0.1 | 0.3 | 0.2 | 0.2 | 0.2 |

Calcule as medidas de posição para a VA  $Y = 5X - 10$ .

# Sumário

## 1 Introdução

## 2 Medidas de posição

- Medidas de posição para um conjunto de dados
- Medidas de posição para VAs discretas

## 3 Medidas de dispersão

- Medidas de dispersão para um conjunto de dados
- Medidas de dispersão para VAs discretas

## 4 Exercícios recomendados

# Introdução

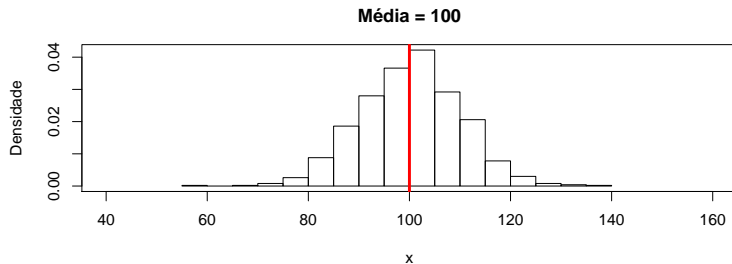
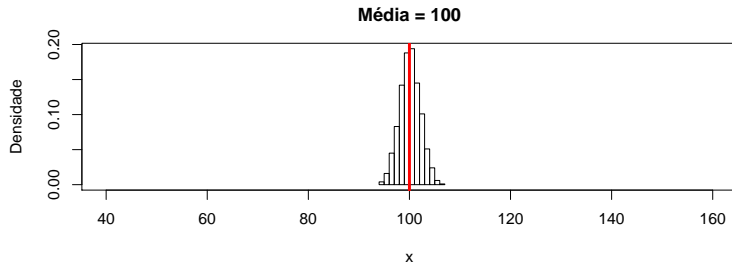
O resumo de um conjunto de dados exclusivamente por uma medida de centro, **esconde** toda a informação sobre a variabilidade do conjunto de observações.

Não é possível analisar um conjunto de dados apenas através de uma medida de tendência central.

Por isso precisamos de medidas que resumam a **variabilidade** dos dados em relação à um valor central.



# Exemplo: mesma média, diferente dispersão



## Exemplo

Cinco grupos de alunos se submeteram a um teste, obtendo as seguintes notas

| Grupo | Notas         | $\bar{x}$ |
|-------|---------------|-----------|
| A     | 3, 4, 5, 6, 7 | 5         |
| B     | 1, 3, 5, 7, 9 | 5         |
| C     | 5, 5, 5, 5, 5 | 5         |
| D     | 3, 5, 5, 5, 7 | 5         |
| E     | 3, 5, 5, 6, 6 | 5         |

O que a média diz a respeito das notas quando comparamos os grupos?

# Definição

São medidas estatísticas que caracterizam o quanto um conjunto de dados está disperso em torno de sua tendência central.

Ferramentas para **resumo** e **análise** de dados:

- Amplitude
- Desvio-médio (ou mediano)
- Variância
- Desvio-padrão
- Coeficiente de Variação

# Amplitude

A **amplitude** de um conjunto de dados é a diferença entre o maior e o menor valor:

$$\Delta = \max - \min = x_{(n)} - x_{(1)}$$

| Grupo | Notas         | $\Delta$ |
|-------|---------------|----------|
| A     | 3, 4, 5, 6, 7 | 4        |
| B     | 1, 3, 5, 7, 9 | 8        |
| C     | 5, 5, 5, 5, 5 | 0        |
| D     | 3, 5, 5, 7    | 4        |
| E     | 3, 5, 5, 6, 6 | 3        |

- **Apenas** usar máximo e mínimo torna **sensível** a valores extremos
  - Melhor medida de variabilidade: considerar **todos os dados disponíveis**
  - **Desvio** de cada valor em relação à uma medida de posição central (média ou mediana)

# Desvio médio e mediano

Um **resumo** da variabilidade: **média** dos desvios **absolutos**

- **Desvio mediano**: a **mediana** como medida de posição central

$$\text{desvio mediano} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - md_{obs}|.$$

- **Desvio médio**: a **média** como medida de posição central

$$\text{desvio médio} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}_{obs}|.$$

## Exemplo: Desvio médio

Considere as notas do grupo A do exemplo acima ( $\bar{x}_{obs} = 5$ )

O desvio médio (DM) pode ser calculado da seguinte forma:

| <b>Grupo A</b> | $x_i - \bar{x}$ | $ x_i - \bar{x} $ |
|----------------|-----------------|-------------------|
| 3              | -2              | 2                 |
| 4              | -1              | 1                 |
| 5              | 0               | 0                 |
| 6              | 1               | 1                 |
| 7              | 2               | 2                 |
| Soma           | 0               | 6                 |

$$DM = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}_{obs}| = \frac{6}{5} = 1,2$$

O desvio médio é baseado em uma operação **não algébrica** (módulo), o que torna mais difícil o estudo de suas propriedades.

# Variância e desvio-padrão de um conjunto de dados

Uma alternativa melhor é usar a **soma dos quadrados dos desvios**, que dá origem à **variância** de um conjunto de dados

$$var_{obs} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_{obs})^2$$

Para manter a mesma unidade de medida dos dados originais, definimos o **desvio padrão** como

$$dp_{obs} = \sqrt{var_{obs}}$$

Uma expressão alternativa da variância (mais fácil de calcular) é

$$var_{obs} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}_{obs}^2$$

# Exemplo

No exemplo anterior

| <b>Grupo A</b> | $x_i - \bar{x}$ | $ x_i - \bar{x} $ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $x_i^2$ |
|----------------|-----------------|-------------------|---------------------|---------|
| 3              | -2              | 2                 | 4                   | 9       |
| 4              | -1              | 1                 | 1                   | 16      |
| 5              | 0               | 0                 | 0                   | 25      |
| 6              | 1               | 1                 | 1                   | 36      |
| 7              | 2               | 2                 | 4                   | 49      |
| Soma           | 0               | 6                 | 10                  | 135     |

A variância é

$$var_{obs} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_{obs})^2 = \frac{10}{5} = 2.$$

Ou, usando a fórmula alternativa

$$var_{obs} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}_{obs}^2 = \frac{135}{5} - 5^2 = 2.$$



# Coeficiente de variação

O **coeficiente de variação** para um conjunto de dados é definido por

$$cv_{obs} = \frac{dp_{obs}}{\bar{x}_{obs}}$$

É uma medida **adimensional**, e geralmente apresentada na forma de porcentagem.

No exemplo anterior:  $dp_{obs} = \sqrt{var_{obs}} = \sqrt{2} = 1,414214$ .

Portanto:

$$cv_{obs} = \frac{dp_{obs}}{\bar{x}_{obs}} = \frac{1,414214}{5} = 0,2828427 \approx 28,3\%$$

## Variância em tabelas de frequência

Assim como no caso da média, se tivermos  $n$  observações da variável  $X$ , das quais  $n_1$  são iguais a  $x_1$ ,  $n_2$  são iguais a  $x_2$ ,  $\dots$ ,  $n_k$  são iguais a  $x_k$ , então a variância pode ser definida por:

$$var_{obs}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_{obs})^2$$

Ou, pela fórmula alternativa:

$$var_{obs}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - \bar{x}_{obs}^2$$

## Exemplo

Como exemplo, considere a tabela de frequência abaixo ( $\bar{x} = 1,65$ ):

| Número       | $n_i$ | $f_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ |
|--------------|-------|-------|-----------------|---------------------|
| 0            | 4     | 0,20  | -1,65           | 2,72                |
| 1            | 5     | 0,25  | -0,65           | 0,42                |
| 2            | 7     | 0,35  | 0,35            | 0,12                |
| 3            | 3     | 0,15  | 1,35            | 1,82                |
| 5            | 1     | 0,05  | 3,35            | 11,22               |
| <b>Total</b> | 20    | 1     |                 |                     |

A variância pode ser calculada por:

$$\begin{aligned}
 var_{obs} &= \frac{(4 \cdot 2,72 + 5 \cdot 0,42 + \dots + 1 \cdot 11,22)}{4 + 5 + 7 + 3 + 1} \\
 &= \frac{30,55}{20} \\
 &= 1,528
 \end{aligned}$$

## Exemplo

Considere a seguinte tabela de distribuição de frequência ( $\bar{x} = 11,22$ ):

| Classe       | PM = $x_i$ | $n_i$ | $f_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ |
|--------------|------------|-------|-------|-----------------|---------------------|
| [4, 8)       | 6          | 10    | 0,278 | -5,222          | 27,272              |
| [8, 12)      | 10         | 12    | 0,333 | -1,222          | 1,494               |
| [12, 16)     | 14         | 8     | 0,222 | 2,778           | 7,716               |
| [16, 20)     | 18         | 5     | 0,139 | 6,778           | 45,938              |
| [20, 24)     | 22         | 1     | 0,028 | 10,778          | 116,160             |
| <b>Total</b> |            | 36    | 1     |                 |                     |

Considerando os **pontos médios** de cada classe como os valores  $x_i$ , a variância pode ser calculada por

$$\begin{aligned}
 var_{obs} &= \frac{(10 \cdot 27,272 + 12 \cdot 1,494 + \dots + 1 \cdot 116,160)}{10 + 12 + 8 + 5 + 1} \\
 &= \frac{698,22}{36} = 19,395
 \end{aligned}$$

## Exemplo 4.9

No Exemplo 4.3, definimos a quantidade  $D$ , despesa no vestibular, obtida a partir de  $X$  pela expressão  $D = 50X + 1300$ , com  $X$  indicando o número de vestibulares prestados.

| $X$ | $n_i$ |
|-----|-------|
| 1   | 75    |
| 2   | 47    |
| 3   | 21    |
| 4   | 7     |

Calcule a variância de  $D$ .

Fazer também: Exemplo 4.10.

## Variância de uma VA discreta

Calcula o valor esperado:  $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^k x_i p_i$

Multiplica o quadrado dos desvios em torno do valor esperado pela probabilidade e soma

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 p_i$$

Alternativamente, podemos usar

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - E(X)^2$$

com  $E(X^2) = \sum_{i=1}^k x_i^2 p_i$

- Ver Tabelas resumo 4.2 e 4.3.

## Exemplo 4.11

Uma pequena cirurgia dentária pode ser realizada por três métodos diferentes cujos tempos de recuperação (em dias) são modelados pelas variáveis  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ . Admita suas funções de probabilidades são dadas por

|       |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X_1$ | 0   | 4   | 5   | 6   | 10  |
| $p_i$ | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 |

|       |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|
| $X_2$ | 1   | 5   | 9   |
| $p_i$ | 1/3 | 1/3 | 1/3 |

|       |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|
| $X_3$ | 4   | 5   | 6   |
| $p_i$ | 0.3 | 0.4 | 0.3 |

Calcule as medidas de posição central e dispersão para cada VA e decida sobre o método mais eficiente.

# Esperança e variância de modelos teóricos

- Exemplo 4.14: Seja  $X$  com distribuição Bernoulli de parâmetro  $p$ . Calcule a esperança e a variância de  $X$ .
- Exemplo 4.15: Seja  $X$  com distribuição Binomial de parâmetros  $n$  e  $p$ . Calcule a esperança e a variância de  $X$ .
- Ver resultados da Tabela 4.4.



# Sumário

## 1 Introdução

## 2 Medidas de posição

- Medidas de posição para um conjunto de dados
- Medidas de posição para VAs discretas

## 3 Medidas de dispersão

- Medidas de dispersão para um conjunto de dados
- Medidas de dispersão para VAs discretas

## 4 Exercícios recomendados

# Exercícios recomendados

- Seção 4.2 - 1, 2, 3, 4 e 6.
- Seção 4.3 - 1, 2, 3, 4, 5 e 6.
- Extras: Seção 4.4 - 2, 4, 7, 10 e 15.