数学.

No.

Date

1、 $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

2、积分技巧: $\int_a^b \frac{f(x)}{f(a+b-x)+f(x)}dx = \frac{b-a}{2} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x} \cdot dx = \frac{\pi}{4}$

证明: 令 $t=a+b-x$，则 $dx=-dt$.

$\therefore \int_{b}^{a} \frac{f(a+b-t)}{f(t)+f(a+b-t)} \cdot -dt = \int_a^b \frac{f(a+b-t)}{f(t)+f(a+b-t)}dt$

$\therefore \int_a^b \frac{f(x)}{f(a+b-x)+f(x)}dx + \int_a^b \frac{f(a+b-x)}{f(a+b-x)+f(x)}dx = \int_a^b dx$

$= \cancel{\frac{b-a}{2}}\ b-a$

$\therefore$原积分 $= \frac{b-a}{2}$.

3、第一类数学归纳法:

第二类数学归纳法:

跳跃归纳法.

反向归纳法

KOKUYO

No.

Date

4. $\{a_1, a_2 \dots a_n\} \underset{<}{\subseteq} A \subseteq \{a_1, a_2 \dots a_m\}$
$m > n$

∴ A的可能个数为 2^{n-m}

若 $\{\dots\} \subsetneq A \subseteq \{a_1 \dots a_m\}$，则 $2^{n-m}-1$

若 $\subsetneq$、$\subsetneq$，则 $2^{n-m}-2$。

5. $A \subseteq B \Leftrightarrow C_U B \subseteq C_U A$.

6. $f(x)=x^n$，$n \in N^*$，则f(x)在正半轴上单调递增。

7. 容斥 $|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

No.

Date

题集

1. $M=\{x \mid x是直线\}$，$N=\{y \mid y是圆\}$，求 $M \cap N$

解：0个，不要混淆交点与交集。

2、设集合 $A=\{x \mid -1 \le x < 2\}$，$B=\{x \mid x<a\}$，若 $A \cap B \neq \phi$，求 a 取值

解：逆向：$A \cap B = \phi$ 时 $\Rightarrow a \le -1$

$\therefore a > -1$.

3、已知 $A \subseteq S$，$B \subseteq S$，若 $A \cup B = S$，则称 (A,B) 为集合 S 的一个分拆，当且仅当 $A=B$ 时，(A,B) 与 (B,A) 是同一分拆。

若 $S=\{1,2\}$，则其分拆有 ___ 个

解：9个。分类思想

① $A=\phi$ 时，$B=\{1,2\}$

② $A=\{1\}$ 时，$B=\{1,2\}$，$\{2\}$

③ $A=\{2\}$ 时，$B=\{1,2\}$，$\{1\}$

④ $A=\{1,2\}$ 时，$B=\phi$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$.

4、若 $f(x)=x^2-ax+a^2$ 在 $[\frac{1}{a},a]$ 上满足 $\frac{1}{2a} \le f(x) \le 2a$，求 a 的取值范围。

解：1 若讨论对称轴 $x=\frac{a}{2}$ 与区间 $[\frac{1}{a},a]$ 的关系较为繁琐，故可

KOKUYO

No.

Date

在$[\frac{a}{2}, a]$中且

直接利用对称轴$x=\frac{a}{2}$，直接解出对称轴更靠近a，剩去一次讨论。第二，挖掘隐含条件$a>1$，剩去又一次讨论，只剩一种可能，列$f(x)_{max}=f(a)\le 2a$即可。

答 $a\in(1,2]$.

5. 解不等式$(a+1)^{-1}<(3-2a)^{-1}$

解：分类讨论。注意一正一负就没必要再解一次了。

而且只可能$a+1$正，$3-2a$负

1° $\begin{cases} a+1>0 \\ 3-2a>0 \\ a+1>3-2a \end{cases} \Leftrightarrow a\in(\frac{2}{3},\frac{3}{2})$

2° $\begin{cases} a+1<0 \\ 3-2a>0 \end{cases} \Leftrightarrow a<-1$ 且 $a<\frac{3}{2}$

3° $\begin{cases} a+1<0 \\ 3-2a<0 \\ a+1<3-2a \end{cases} \Leftrightarrow a<-1$ 且 $3-2a>0 \Leftrightarrow$ 无解.

综上，$a\in(-\infty,-1)\cup(\frac{2}{3},\frac{3}{2})$.

拉乘教案

一、概述

1、拉格朗日乘数法用来解决在满足约束条件 $g(x)=0$ 下，$f(x)$ 的最值问题。 注：多元更为常见.

2、涉及知识：求导、求驻点、偏导.

二、Pre knowledge

1、求导：求一个函数切线的变化。方法 $y=ax^n \Rightarrow y'=anx^{n-1}$

e.g. $f(x)=-x^2-2x+3$

$f'(x)=-2x-2$、也可写作 $\frac{df}{dx}$

2、求驻点（最值）、令 $f'(x)=0$

类比：竖直上抛，最高点 $v=0$

不再向上 / 向下变化

3、偏导。 对于多元函数如何求导？

偏向性 $\frac{\partial f}{\partial x}$

e.g. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+x+y+z$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y+1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=2z+1$$

三、拉乘.

多项式 $f(x,y,z)$. 有约束 $g(x,y,z)=0$ (不一定唯一).

设一个 $L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x}&=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}&=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}&=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}&=0\end{aligned}\right\}$$

解 ⟹ x, y, z ⟹ 重新代入 $f(x,y,z)$ 得到最值.

⇓

判断 Max Min? 二阶导

e.g. 若 $a+b+c=1$ 且 $a^2+b^2+c^2=1$, 求 $(a^3+b^3+c^3)_{min}$ 判断 $f(x)$ & $g(x)$.

常规: 放缩、配方.

拉乘: 设 $L(a,b,c)=a^3+b^3+c^3+\lambda(a+b+c-1)+M(a^2+b^2+c^2-1)$ (λ, M)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial a}&=3a+\lambda a+2Ma\\ &3b+\lambda b+2Mb\\ &3c+\lambda c+2Mc\\ &a+b+c-1\\ &a^2+b^2+c^2-1\end{aligned}\right\}$$ 都为0 ⟹ 三元 $a=b=\frac{2}{3}$, $c=-\frac{1}{3}$, $\lambda=-\frac{1}{3}$, $M=-\frac{1}{2}$ ⟹ min 为 $\frac{5}{9}$.

好处: ① 部分不等式, 特别是只有一个 $g(x)$, 算起来很快

② 大部分有约束的, 暴力算, 很少出错, 不用想, 保命.