EPREUVE DE MATHEMATIQUES 2000

Durée 4h

Thème de la préparation :

Un athlète ne peut arriver en compétition très motivé s'il n'a jamais été mis à l'épreuve.

[Sénèque]

EXERCICE 1

Déterminer toutes les isométries du plan qui laissent invariant l'ensemble F des points de coordonnées $(n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$, dans un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

EXERCICE 2

I- On pose $\Phi(a,b) = \left(\frac{1}{a-b}\right) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ et $\Psi(a,b) = \left(\frac{1}{a-b}\right) \ln\left(\frac{b^2}{a^2}\right)$, avec a et b réels.

A tout couple (a, b), on associe le point M de coordonnées a et b dans un plan rapporté à un repère orthonormé. Représenter les ensembles suivants, en hachurant à chaque fois soigneusement leur complémentaire :

E_1, ensemble des points M tels que $\Phi(a,b)$ est défini ;
E_2, ensemble des points M tels que $\Psi(a,b)$ est défini ;
E_1' ensemble des points M tels que $\Phi(a,b) \geq 0$;
E_2' ensemble des points M tels que $\Psi(a,b) \geq 0$;

2°) Quelle est la limite de $\frac{\ln(1+x)}{x}$ lorsque $x \to 0$? Justifiez votre réponse. Calculer alors la limite de $\Phi(a,b)$ lorsque $b \to a$, puis la limite de $\Phi(a,b)$ lorsque $a \to c$ et $b \to c$.

II- 1°) Résoudre chacune des équations suivantes, où l'inconnue est x :
$ae^{ax} = be^{bx}$ et $a^2e^{ax} = b^2e^{bx}$.

2°) Soit $f_{(a,b)}$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telle que $f_{(a,b)}(t) = e^{at} - e^{bt}$. Comparer les représentations dans un repère orthonormé, de $f_{(a,b)}$, $f_{(b,a)}$ et $f_{(-b,-a)}$

3°) Représenter graphiquement les fonctions $f_{(a,0)}$ et $f_{(0,b)}$

4°) Dans le cas, où $0 < b < a$, étudier et représenter graphiquement la fonction $f_{(a,b)}$

EXERCICE 3

$\mathcal{P}$ désigne le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

I- Soit f la fonction définie par $f(x) = x + \frac{1-e^x}{1+e^x}$

1°) Montrer que f est impaire, étudier ses variations et construire, dans $\mathcal{P}$ sa courbe représentative, notée C

2°) Vérifier, pour tout x réel, la relation $2f'(x) - 1 = (f(x) - x)^2$.

3°) Déterminer les primitives de la fonction $h : x \to \frac{1}{1+e^x}$ (on pourra remarquer que $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$). Si λ est un réel positif, calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine délimité par la courbe C et les droites d'équations respectives $y = x - 1$, $x = 0$ et $x = \lambda$. Quelle est la limite de $A(\lambda)$ lorsque $\lambda \to +\infty$?

II- Pour tout réel a, on définit les applications S_a et T_a de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ comme suit : à un point M de coordonnées (x, y) on associe les points $S_a(M)$ de coordonnées $(-x + 2a, -y + 2a)$ et $T_a(M)$ de coordonnées $(x + a, y + a)$. On note G l'ensemble des applications S_a et T_a, pour tout a réel .

1°) Déterminer la nature géométrique des applications S_a et T_a

2°) Montrer que pour tout couple $(a\,,b)$ de réels, les applications composées $S_a o S_b$, $T_a o T_b$, $S_a o T_b$, et $T_a o S_b$ appartiennent à G et que G est un sous–groupe du groupe des bijections affines de $\mathcal{P}$. Est-il commutatif ?

3°) Montrer que pour tout réel a, on a la relation suivante $S_a = T_a o S_0 o T_a^{-1}$ (1)

4°) Si C est la courbe construite dans la partie I, on note $C_a = T_a(C)$. Montrer, à l'aide de la relation (1), que le point I de coordonnées $(a\,,a)$ est centre de symétrie de C_a.

5°) Montrer qu'il existe une fonction f_a telle que l'équation de C_a soit $y = f_a(x)$