EPREUVE DE MATHEMATIQUES 2001

Durée 4h

Thème de la préparation :

Les aptitudes sont ce que vous pouvez faire. La motivation détermine ce que vous faites. Votre attitude détermine votre degré de réussite.

[Lou Holtz]

EXERCICE 1

I- On note z_1 et z_2 les racines de l'équation $z^2 + az + b = 0$, où $a, b \in \mathbb{C}^*$. Montrer que ($|z_1| = |z_2| = 1$) Si et seulement si ($|b| = 1, |a| \leq 2$ *et* $\arg b = 2 \arg a$)

II- Pour $a, b, c \in \mathbb{C}^*$, on considère les trois propriétés suivantes :

$$|a - b| = |b - c| = |a - c|$$

$$j \text{ ou } j^2 \text{ est solution de } az^2 + bz + c = 0 \text{ (avec } j = e^{i\frac{2\pi}{3}}\text{)}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$$

1^0) Montre que si $a = b$, chacune de ces propriétés implique $a = b = c$. Expliquer alors pourquoi on peut supposer a, b et c distincts deux à deux.

2^0) Montrer que ces trois propriétés sont équivalentes (On pourra poser : $u = \frac{a-b}{b-c}$)

III- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z + 1)^n - (z - 1)^n = 0$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ (N.B : On écrira les solutions sous forme la plus simple possible). Combien y a-t-il de solutions ? Pouvait-on s'y attendre ?

EXERCICE 2

Pour tout $k \in \mathbb{R} - \{-0,1\}$, on définit $f_k : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$, telle que $f_k(x) = exp[x^k \ln(x)]$.

1^0) Étudier la limite de f_k à la droite de $x = 0$. En déduire un prolongement F_k de f_k qui soit défini et continu sur $\mathbb{R}_+$ (On distinguera $k > 0$ et $k < 0$)

2) Étudier la dérivabilité de F_k à la droite de $x = 0$. (On admettra pour cela que si est une application définie et continue sur $]0,1]$, telle que la limite de $\varphi(x)$, lorsque $x \to 0$, $x > 0$, soit 0, alors les limites, lorsque $x \to 0, x > 0$, de $[\exp(\varphi(x)) - 1]/x$ et de $\varphi(x)/x$ sont égales)

3^0) Étudier les variations des fonctions F_k et construire les diverses formes de leurs représentations graphiques C_k dans un repère orthonormé d'unité 2,5cm. (On ne demande pas de chercher les points d'inflexion, mais on précisera soigneusement la position des deux coordonnées x_i et y_i des extremums éventuels par rapport à 1 et à $\alpha = \exp(-1) = 0{,}36$; par rapport à 1 et à $\beta = \exp(-e^{-1}) = 0{,}69$ respectivement)

EXERCICE 3

(NB : Les probabilités demandées seront données sous forme de fractions irréductibles).

Dans un laboratoire, une cage contient 5 souris blanches et 15 souris grises.

1^0) On prélève une souris au hasard, on note sa couleur et on le remet dans la cage. Cette opération est effectuée 8 fois.

a) Quelle est la probabilités pour qu'on ait exactement deux souris blanches ?

b) Calculer le nombre minimum n de prélèvement à effectuer pour que la probabilités de prélever au moins une souris blanche soit supérieure ou égale à 0 ,95 (*NB : ln2=0,62 ; ln3=1,10 ; ln5=1,61*) .

c) Peut-on trouver un tel nombre n pour que l'évènement du b) soit certain ?

2^0) On prélève cette fois-ci 8 souris d'un coup. Calculer la probabilités de l'évènement du 1^0)a)

EXERCICE 4

(NB : On ne demande pas de figure).

Soit dans un plan affine euclidien P un triangle équilatéral ABC, dont la longueur d'un côté est a. On désigne par O le milieu du segment $[BC]$, par G le centre de gravité du triangle ABC et par O' le symétrique de G par rapport à O.

1^0) Déterminer le barycentre des points G et O, respectivement affectés des coefficients -3 et 2.

Quel est l'ensemble E_1 des points M de P tels que $\|-3\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{MO}\| = \|\overrightarrow{MO'}\|$?

2^0) Déterminer l'ensemble E_2 des points M de P tels que $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Comment choisir k pour que cet ensemble contienne le point G ?

3^0) Démontrer que, pour tout M appartenant à P, $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + a^2$.

Déterminer l'ensemble E_3 des points M de P tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$.