EPREUVE DE MATHEMATIQUES 2002

<u>Thème de la préparation</u> :

La motivation est, pour l'esprit, semblable à de la nourriture. Une assiette seule ne suffit pas.

[Peter J. Davies]

Le sujet consiste en six exercices et un questionnaire .Chaque exercice compte approximativement pour 10% de la note et le questionnaire pour 40% de la note. Chaque exercice est indépendant et les questions apparaissant dans le questionnaire sont également indépendantes. Le sujet est long mais les questions qui le constituent sont en grande majorité élémentaires. Nous conseillons aux candidats d'attacher plus d'importance à fournir des réponses correctes, et pour ce qui concerne les exercices, des réponses convenablement justifiées plutôt que d'essayer de couvrir l'ensemble du sujet.

EXERCICE 1

1. soit la fonction numérique définie sur $]0;+\infty]$ par $g(x)=x^3-x-2\ln x+1$

   (a) Montrer que la fonction g est dérivable et que , pour tout $x\in\,]0;+\infty[$,

$$g'(x)=\frac{(x-1)\left(3x^2+3x+2\right)}{x}$$

   (b) Etudier les variations de la fonction g puis déterminer le signe de g(x)

2. déterminer les limites de $f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x^2}$ en 0 et en $+\infty$

3. Montrer que, pour tout $x\in\,]0:+\infty[$, on a $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$, puis donner le tableau de variation de f

EXERCICE 2

1. On pose, pour tout entier naturel n non nul.

$$I_n=\frac{1}{n!}\int_0^1(1-x)^n e^{-x}dx\,.$$

   (a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1

   (b) Prouver, que pour tout entier naturel n non nul,

$$0\le I_n\le\frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}dx$$

   En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n$

(c) Montrer que, en utilisant une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $I_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}-I_n$

2. On considère la suite réelle (a_n), définie sur IN* par $a_1=0$ et pour tout entier naturel n non nul,

$$a_{n+1}=a_n+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

   (a) démontrer, par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_n=\frac{1}{e}+(-1)^n I_n$$

   (b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n$

EXERCICE 3

On considère les intégrales $I=\int_0^{\pi}\cos^4 x\,dx$ $\quad et \quad$ $J=\int_0^{\pi}\sin^4 x\,dx$

1. montrer que l'intégrale I peut s'écrire : $I=\int_0^{\pi}\cos x\left(\cos x-\cos x\sin^2 x\right)dx$

2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $I=\int_0^{\pi}\sin^2 x dx-\frac{1}{3}J$

3. Montrer de même que : $J=\int_0^{\pi}\cos^2 x dx-\frac{1}{3}I$

4. En déduire que : $I=J=\frac{3\pi}{8}$

EXERCICE 4

Dans l'espace muni du repère ortho normal direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. O considère les points $A(4;0;0)$, $B(2;4;0)$, $C(0;6;0)$, $S(0;0;4)$, $E(6;0;0)$ et F(0;8;0) .Réaliser une figure comportant les points définis dans l'exercice qu'on completera au fur et à mesure

1. Montrer que E est le point d'intersection des droites (BC) et (OA)
2. On admettra que F est le point d'intersection dans droites (AB) et (OC).

(a) Déterminer les coordonnées du produit vectoriel $\vec{SE}\wedge\vec{EF}$. En déduire une équation cartésienne du plan (SEF)

(b) Calculer les coordonnées du point A' barycentre des points pondérés (A,1) et (S,3).

(c) On considère le plan (P) parallèle au plan (SEF) et passant par A' . Vérifier qu'une équation cartésienne de P est $4x+3y+6z-22=0$.

3. Le plan (P) coupe les arêtes $[SE],[SA],[SB]$ et $[SC]$ de la pyramide SOABC respectivement aux points O', A', B' et C' $[SE],[SA],[SB]$ et $[SC]$.

(a) déterminer les coordonnées de O'

(b) Vérifier que C' a pour coordonnées (0 ; 2 ; 8/3).

(c) déterminer une représentation paramétrique de la droite (SB) , en déduire les coordonnées du point B' .

(d) Prouver que O'A'B'C' est un parallélogramme

EXERCICE 5

Dans le plan complexe rapporté au repère ortho normal direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. unité graphique 4 cm . On considère les points A d'affixe $z_A=1$ et B d'affixe $z_B=2$ .Soit θ un réel appartenant à l'intervalle $]0;\pi[$ .On note M le point d'affixe $z=1+e^{2i\theta}$

1. Montrer que le point M appartient au cercle (C) de centre A et de rayon 1 .

2. exprimer l'angle $(\vec{AB};\vec{AM})$ en fonction de θ. En déduire l'ensemble (E) des points M quand θ décrit l'intervalle $]0;\pi[$.

3. On appelle M' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle -2 θ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z' = \overline{z}$ et que M'appartient à (C).

4. Dans toute la suite, on choisit $\theta = \frac{\pi}{3}$.On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et A' l'image de A par r.

(a) Définir l'image (C') de (C) par r. Placer sur une figure A,B,(C),M,(C') puis le point M' image de M par r.

(b) Montrer que le triangle AMO est équilatéral.

(c) Montrer que (C) et (C') se coupent en O et M'.

(d) Soit p le point symétrique de M par rapport à A. Montrer que M'est le milieu de $[A'P]$.

EXERCICE 6

On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace .L'espace est rapporté à un repère ortho normal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. d'unité 1km.Le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. représente le sol. Les deux « routes aériennes » à contrôler sont représentées respectivement par la droite (D_1) et la demi-droite $(D_1): \begin{cases} x = 3 + a \\ y = 9 + 3a \text{ ;} avec \text{ a} \in \text{IR} \\ \text{z=2} \end{cases}$ (D_2) dont on connaît les représentations paramétriques

$$(D_1): \begin{cases} x = 3 + a \\ y = 9 + 3a \text{ ;} avec \text{ a} \in \text{IR} \\ \text{z=2} \end{cases} \qquad (D_2): \begin{cases} x = 0,5 + 2b \\ y = 4 + b \text{ ; } avec \text{ a} \in \left]-\infty ;4\right[\\ \text{z=4-b} \end{cases}$$

1. Indiquer les coordonnées d'un vecteur u_1 directeur de la droite (D_1) et d'un vecteur $\vec{u_2}$ directeur de la droite (D_2) .

2. Prouver que (D_1)et (D_2) ne sont pas coplanaires

3. On veut installer au sommet S de la tour de contrôle, de coordonnées (3 ; 4 ; 0,1) un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée (R). Soit (P_1) le plan contenant S et (D_1).Soit (P_2) plan contenant S et(D_2).

(a) Montrer que (D_2) est sécante à(P_1).

(b) Montrer que (D_1) est sécante à(P_2).

(c) Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de (R) pour que cette droite coupe (D_1) et (D_2) .Cette affirmation est –elle vraie ? Justifier la réponse.

QUESTIONNAIRE

Le questionnaire ci-dessous consiste en une série d'exercices comportant chacun quatre affirmations .Indiquer, sans justification, pour chacune d'entre elles si elle est vraie ou fausse. Note : Vous n'avez aucun intérêt à répondre au hasard car toute réponse fausse vous retirera un nombre de points équivalent au nombre de points que vous aurait procuré une réponse correcte, dans le doute .laisser la question sans réponse. Tout exercice obtenant 4 bonnes réponses procure un bonus .Sur une base de 5 points par exercice, comptez 1 point par bonne réponse ,-1 point par mauvaise réponse et 1 point pour l'éventuel bonus .

1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$ par $f(x)=-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

(a) $f'(x)=\frac{(1+x)(2+x)}{2x(x-1)}$

(b) Le point $I=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ est centre de symétrie de l courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé

(c) Une équation de la tangente en 1 à (C) est $y=-\frac{15}{2}x+\frac{59}{4}$

(d) L'équation f(x)=0 a une unique solution.

2. Limites

(a) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x^2+x-6}{-3x^2-5x+2}=-\frac{2}{3}$

(b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{3-\sqrt{x+8}}{x-1}=-\frac{1}{6}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x^2+\cos x}=0$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$

3. Soient $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ et E l'équation complexe :

$z^2-\left[1+i(\sin\alpha+\tan\alpha)\right]z+(i-\tan\alpha)\sin\alpha=0$.

(a) E a une solution imaginaire pure

(b) Si z_1 et z_2 sont deux solutions de E , on a : $z_1z_2=-\left(1+i(\sin\alpha+\tan\alpha)\right)$

(c) Si z_1 et z_2 sont deux solutions de E , on a : $z_1+z_2=(i-\tan\alpha)\sin\alpha$

(d) Une solution de E est $I_n=\int_0^{\pi/2}e^{-nx}\sin x\,dx$ et $J_n=\int_0^{\pi/2}\ -\frac{1}{\cos\alpha}e^{i(\pi+\alpha)}$

4. Soit le complexe $w=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

(a) w est racine carrée de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$.

(b) $\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(c) w^2 est une solution de l'équation $z^2-\sqrt{2}z+1=0$

(d) $w^4 = i$

5. Pour tout entier n, on considère $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-nx}\sin x dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-nx}\cos x dx$

(a) Pour tout entier n, $I_n + n J_n = 1$

(b) Pour tout entier n, $nI_n + n J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}}$

(c) Pour tout n $\neq 1$, $J_n = \dfrac{e^{-n\frac{\pi}{2}}-n}{1-n^2}$

(d) Pour tout n $\neq 1$, $I_n = 1-n(\dfrac{e^{-n\frac{\pi}{2}}-n}{1-n^2})$

6. Soit la fonction définie sur IR par $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

(a) La fonction f est paire.

(b) On a : $[AB]$ $f'(x)=-\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$

(c) La fonction f est décroissante sur IR

(d) Pour tout $x\in\left]1;+\infty\right[$, f(x)<2

7. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1+2i$, $z_B = 1+\sqrt{3}+i$, $z_C = 1+\sqrt{3-2i}$ et $z_D = 1-2i$.

(a) AB = CD

(b) Le triangle ABD est rectangle

(c) Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

(d) Les points A, B, C et D sont sur un même cercle

8. Dans la plan complexe, on considère un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit f la fonction définie par : $f(z)=\dfrac{z}{z-1+\bar{z}}$

(a) la fonction f est définie sur $\mathbb{C} - \{1/2\}$

(b) on a $fof(z)=\dfrac{1}{f(z)}$

(c) f(i) = -i

(d) Il existe un unique z tel que f(z) = z.

9. Soit la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2 e^{-x}$

(a) l'aire de domaine plan délimité par la courbe représentative de f et les droites d'équations y = 0, x = 0,

x = 1 est égale à $2 - \frac{5}{e}$

(b) f est solution de l'équation différentielle (E) : y' + y = $2xe^{-x}$

(c) on a : $\int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^1 xe^{-x}dx + e^{-1}$

(d) la solution générale de (E) est $y(x) = ke^{-x} + 2xe^{-x}$ avec une constante k réelle

10. Soit θ un réel, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, et la suite définie par $u_0 = 2\cos\theta$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout entier n.

(a) Pour tout entier, $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

(b) la suite (u_n) est croissante

(c) la suite (u_n) est majorée par 1

(d) la suite (u_n) converge vers 1

11. On considère le nombre complexe : $z = -\frac{\sqrt{2}}{1+i} e^{i\pi/3}$

(a) On a : $|z| = 1$

(b) On a : $z = -(1-i)e^{i\pi/3}$

(c) Le réel $-\frac{\pi}{12}$ est un argument de z.

(d) On a $z = e^{i\frac{13\pi}{12}}$

12. Si z et z' désignent deux nombres complexes, on pose $Z = \overline{z}z' + z\overline{z'}$

(a) Si z = 2i et z' = -1 alors Z =4i

(b) Si $z = e^{i\pi/4}$ et $z' = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ alors Z = 0

(c) Si z = z' alors $Z = 2|z|$.

(d) Si z est un nombre complexe de module r>0 et d'argument θ et z' est le nombre complexe de module r'>0 et d'argument θ', alors Z=2rr'cos (θ- θ').

13. Soit la fonction définie sur IR par $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$

(a) Sur $IR-\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$, $f'(x)=\frac{\sqrt{|4x^2-1|}-4x}{\sqrt{|4x^2-1|}}$

(b) la tangente à la courbe (C) représentative de f au point (-0,1) a pour équation y = x + 1.

(c) la droite d'équation y = x est asymptote à la courbe (C)

(d) la droite d'équation y = 3x est asymptote à la courbe (C)

14. Soit la fonction définie sur IR par $f(x)=\int_x^{+\infty} te^{1-t^2}dt$

(a) la fonction f est positive pour tout x positif

(b) pour tout réel x, on a $f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{1-x^2}-1\right)$.

(c) pour tout réel x, on a $f'(x)=xe^{1-x^2}-1$

(d) on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

15. Soit α un réel appartenant à l'intervalle $[0;\pi]$ et (E_α) l'équation d'inconnue complexe z :

$z^2+2(\sin\alpha)z+1=0$

(a) Pour tout $\alpha\in[0;\pi]$, l'équation (E_α) admet deux racines complexes conjuguées distinctes.

(b) Il existe une unique valeur de $\alpha\in[0;\pi]$ pour laquelle i est solution de l'équation (E_α).

(c) Pour tout $\alpha\in[0;\pi]$, l'équation (E_α) a pour solutions :

$z_1=\sin\alpha-i\cos\alpha$ et $z_2=\sin\alpha+i\cos\alpha$

(d) Pour tout $\alpha\in[0;\pi]$,l'équation (E_α) a pour solutions $z_1=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$ et $z_2=e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$

16. Soient A,B et C trois points non alignés du plan P et G le point défini par

$$\vec{AG}=\frac{1}{4}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AC}$$

(a) Le point G est barycentre du système de points pondérés $\{(A,1);(B,1);(C,2)\}$

(b) L'application $f:P\to P$ qui, à tout point M du plan, associe la point M' du plan défini par :

$\vec{MM'}=\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}$ est une homothétie de centre G et de rapport 3.

(c) Le point G est le milieu du segment $[IC]$, où le point I est le milieu du segment $[AB]$.

(d) Si le triangle ABC est rectangle en A, alors GA=GC