EPREUVE DE MATHEMATIQUES 2003

Durée : 4 heures

<u>Thème de la préparation</u> :

La réussite, c'est un peu de savoir, un peu de savoir-faire et beaucoup de faire-savoir.

[Jean Nohain]

EXERCICE 1

1. Soit la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{x}$

(a) Etudier les variations de f.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, l_n $\ln(n+1)-\ln(n)\leq\frac{1}{n}$

(c) Démontrer de même que, pour tout entier n non nul , $\ln(n+1)-\ln(n)\geq\frac{1}{n+1}$

2. Soit la suite définie pour tout entier n non nul par $u_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$

(a) Montrer que, pour tout entier n non nul, $u_n\geq\ln(n+1)$

(b) Etudier la convergence de la suite (u_n)

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n non nul par $v_n=u_n-\ln(n)$.

(a) Etudier le sens de variation de (v_n).

(b) En déduire que la suite (v_n) est convergente.

4. Pour tout entier $n\geq2$,on définie la suite (w_n) par $w_n=\frac{u_n}{\ln(n)}$

(a) Montrer que, pour tout entier $n\geq2, 1\leq w_n\leq1+\frac{1}{\ln(n)}$

(b) Déterminer la limite de la suite (w_n)

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté au repère ortho normal $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$;unité graphique :2 cm .Soient

A_0 le point d'affixe 2, A_0' le point d'affixe 2i et A_1 le milieu du segment $\left[A_0A_0'\right]$.Plus généralement ,si A_n le point d'affixe z_n ,on désigne par A_n' le point d'affixe $z_n'=iz_n$ et par A_{n+1} le milieu du segment $\left[A_nA_n'\right]$.On note ρ_n et θ_n le module et l'argument de z_n.

1. Déterminer les affixes des points $A_0, A_0', A_1, A_1', A_2, A_2'$ et A_3.Placer ces points sur une figure.
2. Calculer ρ_0,ρ_1,ρ_2 et ρ_3 ainsi que $\theta_0,\theta_1,\theta_2$ et θ_3.
3. Pour tout entier n, exprimer z_{n+1} en fonction de z_n . En déduire z_n en fonction de n
4. Etablir les expressions de ρ_n et θ_n en fonction de n.
5. Déterminer la limite de ρ_n quand n tend vers $+\infty$
6. Comparer les modules et les arguments de z_n et z_{n+8}
7. Etablir que $A_nA_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}A_{n-1}A_n$

8. Après avoir exprimer A_nA_{n+1} en fonction de n, déterminer en fonction de n, la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2...A_n$. Déterminer la limite de l_n quand n tend vers $+\infty$

EXERCICE 3

Soient 3 points de l'espace A, B et C non alignés et soit k un réel de l'intervalle $[-1;1]$.On note G_k le barycentre du système $\left\{(A,k^2+1),(B,k),(c,-k)\right\}$.

1. Représenter trois points non alignés A, B, C le milieu I de $[BC]$ et les points G_1 et G_{-1} correspondant

2. Montrer que, pour tout réel k de l'intervalle $[-1;1]$,on a : $\overrightarrow{AG_k}=\dfrac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$

3. Etablir le tableau de variation de la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(x)=\dfrac{-x}{x^2+1}$.

4. En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle $[-1;1]$

5. déterminer l'ensemble E des points M de l'espace tels que : $[AC]$

$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

6. Déterminer l'ensemble F des points de l'espace tels que

$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$

7. L'espace est maintenant rapporté à un repère ortho normal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.les points A,B,C ont pour coordonnées respectives $(0;0;2),(-1;2;1),(-1;2;5)$ .le point G_k et les ensembles E et F sont définis comme ci-dessus.

(a) Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1}. Montrer que les ensembles E et F sont sécants.

(b)Calculer le rayon du cercle C intersection de E et F.

EXERCICE 4

On pose $I_0=\int_0^{\pi/6}\sin(3x)dx$ et, pour tout entier naturel n non nul $I_n=\int_0^{\pi/6}x^n\sin(3x)dx$

1. Calculer I_0

2. En utilisant une intégration par parties, calculer I_1

3. En utilisant deux intégrations par parties successives, déterminer, lorsque $n\geq 1$, I_{n+2} en fonction de I_n

4. Vérifier que $I_3=\dfrac{\pi^3}{108}-\dfrac{2}{27}$

5. Sans calculer l'intégrale I_n

(a) Montrer que la suite (I_n) est monotone

(b) Pour tout entier naturel n non nul, comparer I_n à $\int_0^{\pi/6} x^n dx$

(c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

EXERCICE 5

PARTIE A

On appelle (E) l'équation différentielle $y'' - y = 0$, où y est une variable numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble IR des nombres réels.

1. Déterminer les nombres réels r tels que la fonction h, définie par $h(x) = e^{rx}$,soit solution de (E)
2. Vérifier que les fonctions φ définies par $\varphi(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x}$, où α et β sont deux nombres réels ,sont les solutions de (E).On admet qu'on obtient ainsi toutes les solutions de (E)
3. Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $\left(\ln 2; \frac{3}{4}\right)$ et admet en ce point une tangente dont le coefficient directeur est 5/4

PARTIE B

On appelle f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$.On désigne par C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère ortho normal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Soit μ un nombre réel. Montrer que, pour tout nombre réel x , $f(x) = \mu$ est équivalent à $e^{2x} - 2\mu e^{x} - 1 = 0$ .En déduire que l'équation $f(x) = \mu$ a une unique solution dans IR et déterminer sa valeur en fonction de μ .
2. Déterminer les limites de f en +∞ et en -∞.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x et en déduire le sens de variation de f sur IR.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
5. En étudiant le sens de variation de la fonction d définie sur IR par $d(x) = f(x) - x$, préciser la position de (C) par rapport à (T).
6. Tracer (C) et (T) (unité graphique 2cm)
7. Soit D la partie représentant sur le graphique l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que $0 \le x \le 1$ et $x \le y \le f(x)$ .Calculer, en cm^2, l'aire de D.

Partie C

On cherche à caractériser les fonctions Φ, dérivables sur l'ensemble des nombres réels, telles que, pour tout nombre réel x, $\Phi(x)-\int_0^x (x-t)\Phi(t)dt = x$ .Notons (H) cette relation .

1. On suppose qu'il existe une telle fonction Φ.

(a) Justifier que, pour tout nombre réel x, $\Phi(x) = x + x\int_0^x \Phi(t)dt - \int_0^x t\Phi(t)dt$

Calculer Φ(0)

(b) Démontrer que, pour tout nombre réel x, $\Phi'(x) = 1+\int_0^x \Phi(t)dt$ .Calculer $\Phi'(0)$

(c)Vérifier que Φ est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.
Déterminer laquelle, parmi toutes les solutions explicitées dans la question A.

2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^x \left(e^t - e^{-t}\right)dt$

3. Démontrer que la fonction trouvée à la question C.1.c vérifie la relation (H).