CONCOURS D'ENTRÉE EN 1^{ere} ANNÉE DE L'INSTITUT UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE DE BANDJOUN, SECTION DE SEPTEMBRE 2005; Cycle de D.U.T

Épreuve : ***Mathématiques*** **Durée** *04 heures*

EXERCICE 1:

1. Écrire le nombre complexe $\frac{-1+i}{4}$ sous forme trigonométrique
2. En déduire ses racines cubiques sous forme trigonométrique: $X_K = [\rho_k, \theta_k]$ pour $k \in \{1,2,3\}$
3. En utilisant les racines carrées de l'unité $(1, j, j^2$ avec $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$, determiner la forme algebrique de X_1, X_2, X_3 et en déduire les valeurs de $\tan(\frac{11\pi}{12})$ et $\tan(\frac{19\pi}{12})$
4. Montrer que parmi les $X_k (1 \leq k \leq 3)$, un seul a une puissance quatrième réelle.
5. Déterminer les nombres réelles dont la puissance quatrième est réelle et représenter graphiquement leur ensemble.

EXERCICE 2:

Pour tout entier n, on pose: $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^{2n+1}(x)} d_x$.
1. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall x \in [0; \pi/4]$, on a:

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{a\cos(x)}{1-\sin(x)} + \frac{b\cos(x)}{1+\sin(x)}$$

.
En déduire le calcul de I_0. **2.** Montrer par une intégration par parties, que: $\forall n \in N_+^*, 2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$
3. En déduire le calcul de I_2

EXERCICE 3:

1. Soient $\lambda \in R$, (U_n) et (V_n) deux suites numériques définies par:

$$\begin{cases} U_{n+1} = \frac{2}{5}U_n + 3 \\ V_n = U_n + \lambda \end{cases}$$

i. Pour quelle valeur de λ, la suite (V_n) est-elle une suite géometrique?
ii. Quelle est alors la raison de (V_n)?
2. Donner la somme de la serie: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
3. Étudier la convergence de la série: $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{4}{17} + \cdots + \frac{n}{n^2+1}$

EXERCICE 4:

Soit $f : R \rightarrow R$ telle que $f(x) = \frac{2x^2-3x}{x^2-3x+3}$
1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C_f) dans le plan rapporté à un repère orthonormal.
2.

a. Calculer l'expression de la dérivée seconde $f''(x)$.

b. On définit la fonction g sur R par $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.
Étudier les variations de g et prouver que l'équation $f''(x) = 0$ admet trois solutions réelles que l'on note a, b, c.

c. Prouver que : $a - f(a) = b - f(b) = c - f(c) = 1$

d. On pose A, B et C, des points de (C_f) d'abscisses a, b et c
Prouver que les points A, B et C sont alignes.

EXERCICE 5:

Un mobile M de coordonnées (x, y) telles que $\begin{cases} x = 5 - 8\sin^2(t) \\ y = 1 + 2\sin(2t) \end{cases}$ évolue suivant une certaine trajectoire (C).

1. Déterminer l'équation cartésienne de (C).

2. En considérant que y est une fonction de la variable réelle x, déterminer $\frac{d_y}{d_x}$ en fonction de t.

3. Quelle est le module V de la vitesse de M à l'instant $t = 2$ secondes, si y et x sont mesurées en mètres?