CONCOURS D'ENTRÉE EN 1^{ere} ANNÉE À L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE POLYTECHNIQUE DE DOUALA *(ENNPD)*, SECTION DE JUILLET 2021; Cursus Ingénieur

First year entrance examination to the National Higher Polytecnic School of Douala
NHPSD, July session 2021; Engineer Curriculum

Épreuve de *(Paper)* **: Mathématiques** *(Mathematics)*; **BACC C|D|E** *(GCE AL)*
Durée *(time)* **: 03 heures**

INSTRUCTIONS

Calculatrice non programmable autorisée. Encadrer tous les résultats *(Non programmable calculators are autorized. Square all the results)*

EXERCICE 1: *(4 Points)*

Le sultan dit a Ali Baba: "Voici 02 urnes, 04 boules blanches (b) et 04 boules (n). Repartis les boules dans les urnes, mais je rendrai ensuite les urnes indiscernables. Tu auras la vie sauve en tirant une boule blanche."

1. Quelle est la probabilité qu'Ali Baba ait la vie sauve s'il place les 04 boules blanches dans la première urne et les 04 boules noires dans la seconde urne?

2. Idem avec $2b + 2n$ dans la première urne et $2b + 2n$ dans la seconde.

3. Idem avec $3b$ dans la première urne et $1b + 4n$ dans la seconde.

4. Comment Ali Baba maximise t-il ses chances?

EXERCICE 2: *(5 Points)*

1. On considère une fonction f définie et continue sur le segment $[-\alpha, \alpha]$. Démontrer que si la fonction f est paire, alors $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, d_x = 2\int_0^{\alpha} f(x)\, d_x$

On considère la fonction F impaire et 2π-périodique définie sur R vers R par:

$$F(x) = \begin{cases} x & si \;\; 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi - x & si \;\; \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

On pose $A_n(F) = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(nx)\, d_x$

2. Montrer que: $\forall n \in N, A_n(F) = \dfrac{2}{\pi}\left(1 - (-1)^n\right)\int_0^{\pi} x\sin(nx)\, d_x$

3. En déduire la valeur de $A_{2n}(F)$

4. Montrer que: $\forall n \in N, A_{2n+1}(F) = \dfrac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)^2}$.

5. On admet que: $\forall x \in R, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(F)\sin(nx)$

a. Montrer que: $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$

b. En déduire que: $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$

EXERCICE 3: *(5 Points)*

Soit (E), l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe vérifie: $10z\bar{z} + 3(z^2 + \bar{z}^2) = 4$

1. Démontrer que (E) est une ellipse dont on précisera les éléments caractéristiques (Centre, Foyer, Excentricité et Directrice)

2.

a. Déterminer l'expression analytique de la similitude directe s de centre O, de rapport 2 et d'angle $\pi/4$.

b. Soit ρ, l'endomorphisme associé à s et $(\vec{i}, \vec{j})$, une base du plan. Déterminer $\rho(\vec{i}) = \vec{e_1}$ et $\rho(\vec{j}) = \vec{e_2}$

c. Montrer que $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ forme une base du plan.

3. Soit (E'), l'image de (E) par s.

a. Déterminer l'expression de (E') dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b. On pose $O\vec{M'} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$, un point de (E') dans le repère $(\vec{i}, \vec{j})$ et $O\vec{M'} = X'\vec{e_1} + Y'\vec{e_2}$ dans le repère $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$. Déterminer x' et y' en fonction de X' et Y'.

c. Donner la nature et les éléments caractéristiques de (E')

d. Tracer (E) et (E') dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

EXERCICE 4: ***(6 Points)***
Partie A

Soient $\alpha \in]0,1[$ et $b \in R$. Soit f, une application de R dans lui-même, et de classe C^1, telle que $\forall x \in R, f\,(f(x)) = ax + b$.
1. Montrer que $\forall x \in R, f(ax+b) = af(x) + b$. En déduire que: $\forall x \in R, f'(ax+b) = f'(x)$
2. Soit $(u_n)_{n\in N}$, une suite réelle telle que $\forall n \in N, u_{n+1} = au_n + b$. Montrer que u_n est convergente et de limite $l = \dfrac{b}{1-a}$
3. Montrer que f' est constante; en déduire l'expression de f.
4. Que faire si $\alpha \in]1, +\infty[$?

Partie B

Soit un nombre réel appartenant à $[0,1]$. On désigne par n, un entier naturel non nul. On désigne par $g_n(x) = x^2(\ln x)^n$. On note (Γ_n), la courbe représentative de g_n dans un repère (O, u, v).
1. On pose $J_n(t) = \int_t^1 g_n\, d_x$ et $I_n(t) = \int_0^1 g_n\, d_x$. Prouver que J_n existe.
2. Montrer que la fonction $t \to (I_n - J_n)_{(t)}$ est une primitive sur [0,1] de la fonction g_n qui s'annule pour $t = 0$.
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} J_n(t)$.