CORRECTION ÉPREUVE CONCOURS POLYTECHNIQUE DE MAROUA, NIVEAU III, SECTION DE 2021

Spécialités: **GC**(***G****énie* ***C****ivil*), **INFOTEL**(***INFO****rmatique et* ***TÉL****écommunication*)

1^{ere} épreuve de spécialité: ***Mathématiques***

PARTIE A: *ANALYSE*

Q1.

Q2. B

$\forall n \geq 3$, on a:

$$\begin{aligned}
u_n &= \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\\
&= \left(\frac{2^2-1}{2^2}\right)\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)\left(\frac{4^2-1}{4^2}\right)\cdots\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)\\
&= \left(\frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\right)\left(\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\right)\left(\frac{(4-1)(4+1)}{4^2}\right)\cdots\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)\\
&= \left(\frac{(1)(3)}{2^2}\right)\left(\frac{(2)(4)}{3^2}\right)\left(\frac{(3)(5)}{4^2}\right)\cdots\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)\\
&= \left(\frac{(1)(3)(2)(4)(3)(5)\cdots(n-1)(n+1)}{(2^2)(3^2)(4^2)\cdots(n^2)}\right)\\
&= \left(\frac{(1)(2)(3)\cdots(n-1)}{(2)(3)(4)\cdots(n-1)(n)}\right)\left(\frac{(3)(4)(5)\cdots(n)(n+1)}{(2)(3)(4)\cdots(n)}\right)\\
&= \frac{n+1}{2n}
\end{aligned}$$

$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty}(\frac{n+1}{2n}) = \frac{1}{2}$

Q3. C

Soient a, b, c tels que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{x+3}\\
&= \frac{(a+b+c)x^2+(5a+4b+3c)x+6a+3b+2c}{(x+1)(x+2)(x+3)}
\end{aligned}$$

Par identification: $\begin{cases} a+b+c=0\\ 5a+4b+3c=0\\ 6a+3b+2c=1\end{cases} \implies \begin{cases} a=\dfrac{1}{2}\\ b=-1\\ c=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Ainsi, on a:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,d_x &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2(x+3)}\right)d_x\\
&= \left[\frac{1}{2}\ln(x+1)-\ln(x+2)+\frac{1}{2}\ln(x+3)\right]_0^{+\infty}\\
&= \left[\ln(x+1)^{\frac{1}{2}}+\ln(x+2)^{-1}+\ln(x+3)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{+\infty}\\
&= \left[\ln\left((x+1)^{\frac{1}{2}}(x+2)^{-1}(x+3)^{\frac{1}{2}}\right)\right]_0^{+\infty}
\end{aligned}$$

$$= \left[\ln\left(\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}(x+3)^{\frac{1}{2}}}{x+2}\right)\right]_0^{+\infty}$$
$$= \left[\ln\left(\frac{\sqrt{(x+1)(x+3)}}{x+2}\right)\right]_0^{+\infty}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{(x+1)(x+3)}}{x+2}\right)\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{(0+1)(0+3)}}{0+2}\right)$$
$$= 0 - \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

Q4.

Q5.

Q6. D

$$L(p) = \frac{p+2}{p^2+5}$$
$$= \frac{p}{p^2+5} + \frac{2}{p^2+5}$$
$$= \frac{p}{p^2+(\sqrt{5})^2} + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\frac{\sqrt{5}}{p^2+(\sqrt{5})^2}$$
$$\Longrightarrow f(t) = \left(\cos(\sqrt{5}t) + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}t)\right)u(t)$$

PARTIE B: ***ALGÈBRE***

Q7. B

On a:

$$f : R^3 \longrightarrow R$$
$$(x,y,z) \longmapsto x+2y-z$$

$ker(f) = \{(x,y,z) \in R^3 : f(x,y,z) = 0\}$

$f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow x+2y-z = 0$

$ker(f)$ est un plan vectoriel, et donc de dimension 2.

Q8. A,B

- $x+2y-z=0 \Rightarrow z = x+2y$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+2y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $x+2y-z=0 \Rightarrow y = \frac{z}{2} - \frac{x}{2}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{x}{2}+\frac{z}{2} \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $x+2y-z=0 \Rightarrow x = z-2y$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-2y \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Une base de $ker(f)$ est (u, v) telle que:

$u = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \alpha'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ou $u = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, v = \lambda'\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $u = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \beta'\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{NB}}$ Pour un vecteur se répétant plusieurs fois dans une base, ne considérer qu'une seule occurrence de celui-ci.

PARTIE C: *PROBABILITÉS ET STATISTIQUES*

Q9.

Q10.