向量内积

定义

向量$\boldsymbol{\alpha} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]^T, \boldsymbol{\beta} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^T$的内积定义为

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\beta} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

性质

- 对称性：$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$
- 线性性：$(k_1 \boldsymbol{\alpha} + k_2 \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = k_1 (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) + k_2 (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$
- 正定性：$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) > 0$，如果$\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$

施瓦兹不等式

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})^2 \leq (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})$$

向量长度和夹角

定义

向量$\boldsymbol{\alpha}$的长度定义为

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}$$

与向量$\boldsymbol{\beta}$ 的夹角定义为

$$\theta = \arccos \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|}$$

由一般普通向量得到长度为1的单位向量称为向量的单位化，即

$$\boldsymbol{\alpha} \to \frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha}$$

正交基

定义

- 向量α, β正交$\Leftrightarrow (\alpha, \beta) = 0$
- 两两正交的非零向量组称为正交向量组

注：

（齐次）线性方程组的第三种理解可以由内积引出。

定理

正交向量组是线性无关组

定义

向量空间两两正交的向量构成的基称为正交基；如果每个向量长度又都是1，则称为规范正交基。

单位正交化

给定一组线性无关向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$

- 施密特正交化：

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{\|\beta_1\|^2}\beta_1 \\
\beta_3 &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{\|\beta_1\|^2}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{\|\beta_2\|^2}\beta_2 \\
&\vdots \\
\beta_k &= \alpha_k - \frac{(\alpha_k, \beta_1)}{\|\beta_1\|^2}\beta_1 - \frac{(\alpha_k, \beta_2)}{\|\beta_2\|^2}\beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_k, \beta_{k-1})}{\|\beta_{k-1}\|^2}\beta_{k-1}
\end{aligned}
$$

- 单位化；$\gamma_i = \frac{1}{\|\beta_i\|}\beta_i$

QR分解

给定一个列满秩矩阵$\mathbf{A}_{n\times k}$，则存在$\mathbf{Q}_{n\times k}, \mathbf{R}_{k\times k}$，满足

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR}$$

其中$\mathbf{Q}$的列向量组是单位正交向量组，$\mathbf{R}$是对角元都是正数的上三角形可逆矩阵。

例 (3.1.2)

设$\alpha_1=[2,1,2]^T$，$\alpha_2=[-1,2,0]^T$，$\alpha_3=[-1,0,1]^T$，求与$\{\alpha_i\}$等价的规范正交基。

解：正交化：

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 = [2,1,2]^T \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{\|\beta_1\|^2}\beta_1 = [-1,2,0]^T \\
\beta_3 &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3,\beta_1)}{\|\beta_1\|^2}\beta_1 - \frac{(\alpha_3,\beta_2)}{\|\beta_2\|^2}\beta_2 \\
&= [-1,0,1]^T - \frac{1}{5}[-1,2,0]^T = [-\frac{4}{5},-\frac{2}{5},1]^T
\end{aligned}$$

再单位化得,

$$\gamma_1=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=[\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}]^T,\ \gamma_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=[-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},0]^T,\ \gamma_3=\frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3=[-\frac{4\sqrt{5}}{15},-\frac{2\sqrt{5}}{15},\frac{\sqrt{5}}{3}]^T$$

正交矩阵与规范正交基

定义

方阵$\mathbf{A}$是正交矩阵，如果$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E}$。

- 正交矩阵行列式值为±1
- 正交矩阵的转置，逆，伴随以及乘积都是正交矩阵
- 正交矩阵保持内积不变，即$(\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\beta) = (\alpha, \beta)$
- 正交矩阵的列向量组是R^n的一个规范正交基

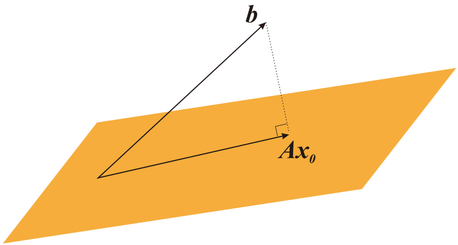
作业

第131页练习3.1：

A1, A3, A4, B4

最小二乘问题

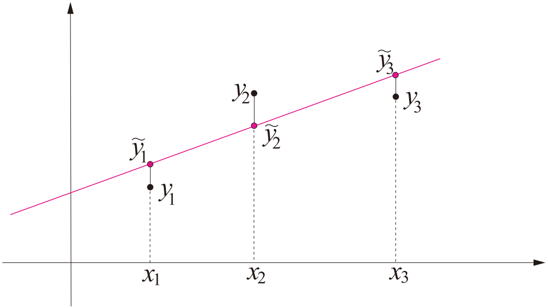
某个现实中的线性方程组$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$无解，如何找到最近似的解$\mathbf{x}_0$？



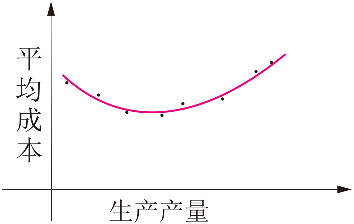
由图示知向量$\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0$与整个橙色平面垂直，于是有$\mathbf{A}^T(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0) = 0$，即所求近似解为方程组$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$的解

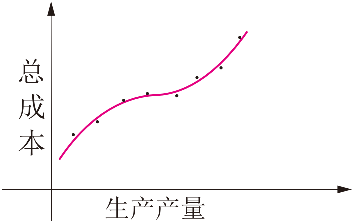
线性回归

- 理论上猜测数据x与y应满足直线关系，即$y = ax + b$；而实际观测数据为$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$并非完美满足直线关系，如何获得最接近实际数据的直线关系（如红线所示）?



- 若某企业成本与产量的观测数据如下图所示，猜测平均成本依照二次曲线关系，总成本依照三次曲线关系，于是解决方案转换为曲线的拟合问题。





- 地理观测所出现的曲面拟合问题
- 使用最小二乘解拟合数据来自Gauss（与Legendre）。在1801年，谷神星被观测40天后消失于太阳背后，Gauss通过这40天的数据拟合了谷神星的运动轨迹，精确预测了它10个月之后的出现以及出现的具体位置。