线性方程组与矩阵方程

n个未知数，m个方程组成的方程组为，

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

等价于一个矩阵方程$\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\beta}$，其中$\mathbf{A}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$为系数矩阵

例 (2.1.4)

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +3x_3 = 1 \\ 4x_1 & +2x_2 & +5x_3 = 4 \\ 2x_1 & & +2x_3 = 6 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +3x_3 = 1 \\ & 4x_2 & -x_3 = 2 \\ & x_2 & -x_3 = 5 \end{cases} \qquad \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +3x_3 = 1 \\ & x_2 & -x_3 = 5 \\ & & 3x_3 = -18 \end{cases} \qquad \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -18 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +3x_3 = 1 \\ & x_2 & -x_3 = 5 \\ & & x_3 = -6 \end{cases} \qquad \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

线性方程组求解流程

- 利用矩阵初等变换

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A}\mathbf{x}=\boldsymbol{\beta} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \mathbf{A}_0\mathbf{x}=\boldsymbol{\beta}_0 \\
{[\mathbf{A},\boldsymbol{\beta}]} \arrow[r, "\text{化行最简形}"] & {[\mathbf{A}_0,\boldsymbol{\beta}_0]} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

- 用非拐角的未知数表达拐角的未知数，然后令非拐角的未知数取参数。

线性方程组解的判别定理

线性方程组$\mathbf{A}\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta}$有解的充要条件是$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta})$，而且
当$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}) = n$时有唯一解，$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}) < n$时有无穷多解。

- 齐次线性方程组($\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$)必定有解
- 系数矩阵行满秩时必定有解

克拉默法则

当线性方程组$\mathbf{A}\mathbf{x}=\boldsymbol{\beta}$的系数矩阵是方阵，且$|\mathbf{A}|\neq 0$，则方程组有唯一解

$$x_j=\frac{B_j}{|\mathbf{A}|}$$

其中B_j是由$\boldsymbol{\beta}$替换$|\mathbf{A}|$的第j列所得的行列式。

例 (2.1.5)

解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

解： 对方程组的增广矩阵化行最简形，

$$[\mathbf{A}, \beta] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得同解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad -x_3 \quad -x_4 \quad -5x_5 = -2 \\ \qquad x_2 \quad +2x_3 \quad +2x_4 \quad +6x_5 = 3 \end{cases}$$

令$x_3 = c_1, x_4 = c_2, x_5 = c_3$，得方程组通解为

$$\begin{cases} x_1 = -2 + c_1 + c_2 + 5c_3 \\ x_2 = 3 - 2c_1 - 2c_2 - 6c_3 \\ x_3 = c_1 & \qquad c_1, c_2, c_3 \in R \\ x_4 = c_2 \\ x_5 = c_3 \end{cases}$$

例 (2.1.7)

常数a为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + (a+2)x_2 - 5x_3 = 3 \\ -3ax_2 + (a+6)x_3 = -3 \end{cases}$$

无解，有唯一解？有无穷多解？并在方程组有解时求出其解

解： 由于$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -5 \\ 0 & -3a & a+6 \end{vmatrix} = a(a-3)$，因此由克拉默法则得，

(1) 方程组有唯一解的充要条件为$a(a-3) \neq 0$，即$a \neq 0$且$a \neq 3$。此时$B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & a+2 & -5 \\ -3 & -3a & a+6 \end{vmatrix} = (a-1)(a-3)$，$B_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & a+6 \end{vmatrix} = a-3$，

$B_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a+2 & 3 \\ 0 & -3a & -3 \end{vmatrix} = 0$，因此方程组解为$x_1 = \frac{a-1}{a}, x_2 = \frac{1}{a}, x_3 = 0$

(2) $a=0$时，增广矩阵为

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 6 & -3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 6 & -3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

此时方程组无解。

(3) $a=3$时，增广矩阵为

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 5 & -5 & 3\\ 0 & -9 & 9 & -3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -3 & 1\\ 0 & -9 & 9 & -3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

此时方程组通解为$x_1=\frac{2}{3}, x_2=\frac{1}{3}+c, x_3=c, \quad c\in R$

例 (2.1.8)

确定常数b的值，使方程组

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +3x_3 = 0 \\ 3x_1 & -4x_2 & +7x_3 = 0 \\ -x_1 & +2x_2 & +bx_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解，并求出所有非零解。

解：由克拉默法则知，齐次方程组有非零解的充要条件为系数行列式等于零，即

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 7 \\ -1 & 2 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3+2b \\ 0 & 2 & 7+3b \\ -1 & 2 & b \end{vmatrix} = -3(7+3b) + 2(3+2b) = -5b - 15 = 0$$

得$b = -3$；此时增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 7 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$，因此非零解为$x_1 = -c, x_2 = c, x_3 = c, \quad c \neq 0.$

第87页练习2.1：

A3, A4, B1, B3

插值多项式

如果$1,2,3,m$，则$m=?$

设$a_n = x_0 + x_1 n + x_2 n^2 + x_3 n^3$，则

$$\begin{cases} x_0 + 1x_1 + 1^2 x_2 + 1^3 x_3 = 1 \\ x_0 + 2x_1 + 2^2 x_2 + 2^3 x_3 = 2 \\ x_0 + 3x_1 + 3^2 x_2 + 3^3 x_3 = 3 \\ x_0 + 4x_1 + 4^2 x_2 + 4^3 x_3 = m \end{cases}$$

在一个风洞实验中，测得空气对飞机的阻力在不同速度下为

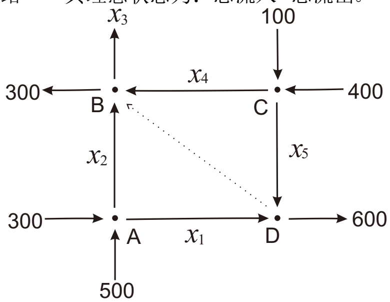
速度(100m/s)	0	2	4	6	8	10
空气阻力(100kg)	0	4.1	20.4	54.4	100.7	163

求750m/s 时的阻力。

网络流量

如城市规划与交通工程人员监控特定区域道路流量；电气工程师计算一片电路中的电流；经济学家分析从制造商到分销商到零售商再到顾客的销售网络……其理想状态为：总流入=总流出。

$$
\begin{aligned}
\text{A:}\quad & 300+500 = x_1 + x_2\\
\text{B:}\quad & x_2 + x_4 = 300 + x_3\\
\text{C:}\quad & 100+400 = x_4 + x_5\\
\text{D:}\quad & x_1 + x_5 = 600\\
\text{总:}\quad & 300+500+100+400 = 300+600+x_3
\end{aligned}
$$



解得，

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 200 \\ 400 \\ 500 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$