一、 单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 下面结论错误的是（ ）。

   A. 若 n 维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$线性无关，则$\alpha_3,\alpha_5,\alpha_6$也线性无关

   B. 若 n 维向量组$\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$线性相关，则$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$也线性相关

   C. 含零向量的向量组线性无关

   D. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$（当 m>1 时）线性相关的充分必要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中至少有一个向量可由其余向量线性表示

2. A 是 m×n 矩阵，$R(A)=r$，B 是 m 阶可逆矩阵，C 是 m 阶不可逆矩阵，且$R(C)<r$，则（ ）。

   A. $BAX=O$ 的基础解系由 $n-m$ 个向量组成

   B. $BAX=O$ 的基础解系由 $n-r$ 个向量组成

   C. $CAX=O$ 的基础解系由 $n-m$ 个向量组成

   D. $CAX=O$ 的基础解系由 $n-r$ 个向量组成

3. a 与 b 是两个不同的非零向量，则下列命题正确的是（ ）。

   A. $[a,b]$ 表示一个向量　　B. $[a,b]\le\|a\|\|b\|$

   C. $[a,b]$ 表示一个正实数　　D. $\|a+b\|=\|a\|+\|b\|$

4. 设 A 是 n 阶方阵，λ_1,λ_2 是 A 的特征值，ξ_1,ξ_2 是 A 的分别属于 λ_1,λ_2 的特征向量，下列结论中正确的是（ ）。

   A. 若 $\lambda_1=\lambda_2$，则 ξ_1 与 ξ_2 对应分量成比例

   B. 若 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 且 $\lambda_3=\lambda_1+\lambda_2$ 也是 A 的特征值，则对应的特征向量是 $\xi_1+\xi_2$

C. 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则 $\xi_1+\xi_2$ 不可能是 A 的特征向量

D. 若 $\lambda_1 = 0$，则$\xi_1 = 0$

5. 若矩阵 A 与 B 相似，则下列结论可能错误的是（　　）。

A. A 与 B 对应于相同的特征值，它们的特征向量相同

B. A^2 与 B^2 相似

C. A 与 B 相似于同一矩阵

D. $|A| = |B|$

6. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 0、1、2，则下列结论不正确的是（　　）。

A. A 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 等价

B. 存在正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

C. A 是不可逆矩阵

D. 以 0、1、2 为特征值的 3 阶矩阵都与 A 相似

7. 下列矩阵中，与 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 合同的是（　　）。

A. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

8. 实数向量空间 $V = \{(x, y, z) \mid 3x + 2y + 5z = 0\}$ 的维数是（　　）。

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

9. 以下关于正定矩阵叙述正确的是（　　）。

A．正定矩阵的乘积一定是正定矩阵　B．正定矩阵的行列式一定小于零

C. 正定矩阵的行列式一定大于零　　　D. 正定矩阵的差一定是正定矩阵

10. 若 A 为 n 阶正定矩阵，则 A 与 A^{-1} 必定（　　）。

A. 相似　　　B. 合同

C. 有相同的特征值　　　D. 正交相似

二、　填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 若 A 的阶数为 4×5, 而 A 的秩为 2, 则齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系所含解向量个数为_______。

2. 若 R^3的一组基为 $\alpha_1=(1,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,1,-1)^T$, $\alpha_3=(1,-1,-1)^T$，则向量 $\beta=(1,2,1)^T$ 在此基下的坐标是_______。

3. 设 $\|\alpha\|=2$，$\|\beta\|=3$，则 $[\alpha+\beta,\alpha-\beta]=$_______。

4. 设 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ 为正交矩阵，则其逆矩阵 $A^{-1}=$_______。

5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2$ 的正惯性指数为_______。

三、　计算题（共 55 分）

1. （15 分）请利用正交变换化将如下二次型转换为标准型。

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$$

2. （12 分）设三阶实对称矩阵 A 的特征值是 1、2、3，矩阵 A 对应于特征值 1 和 2 的特征向量分别是 $\alpha_1=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$、$\alpha_2=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$。

（1）求 A 对应于特征值 3 的特征向量；

（2）求矩阵 A 。

3. （8 分）设有向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix}$，求该向量组的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示。

4. （10 分）设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_2-x_3+2x_4=1, \\ 2x_1+3x_2+(m+2)x_3+4x_4=n+2, \\ 3x_1+5x_2+x_3+(m+8)x_4=5. \end{cases}$$

讨论当 m,n 为何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？在有无穷多解时，求其通解。

5. （10 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$ 的三个特征值分别为 1、2、5，求正的常数 a 的值及可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$。

四、 证明题（每题 5 分，共 10 分）

1. 设 A 为 n 阶正交矩阵，且 $|A|=-1$，证明：$-E-A$ 不可逆。

2. 设矩阵 A 为 n 阶正定矩阵，证明：$|A+E|>1$。