

厦门大学《线性代数》课程试卷



信息 学院 _____ 系 2021 年级 _____ 专业 _____

学年学期: 212201 主考教师: 线性代数教学组 A 卷 (√) B 卷

注: A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, $R(A)$ 表示矩阵 A 的秩, O 表示全 0 矩阵

一、单项选择题 (每小题 2 分, 共 20 分)

1. 设 n 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $|A| = (\quad)$ 。

- (A) $(-1)^n n$ (B) $(-1)^{n-1} n$ (C) $(-1)^{n-1} (n-1)$ (D) $(-1)^n (n-1)$

2. 齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$ 的系数矩阵记为 A , 若存在三阶矩阵 $B \neq O$ 使得 $AB = O$, 则 ()。

- (A) $\lambda = -2$ 且 $|B| = 0$ (B) $\lambda = -2$ 且 $|B| \neq 0$
(C) $\lambda = 1$ 且 $|B| = 0$ (D) $\lambda = 1$ 且 $|B| \neq 0$

3. 已知 A 是三阶矩阵, 且 $(A - E)^{-1} = A^2 + A + E$, 则 $|A| = (\quad)$ 。

- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 8

4. 设 A 、 B 均为 2 阶矩阵, A^* 、 B^* 分别为 A 、 B 的伴随矩阵, 若 $|A| = 2$, $|B| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ()。

- (A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$
(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

5. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times l$ 矩阵, $B \neq O$, 如果有 $AB = O$, 则矩阵 A 的秩为 ()。

- (A) $R(A) = n$ (B) $R(A) < n$ (C) 无法判断 (D) $R(A) < m$

6. 下列结论错误的是()。

(A) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $|A^5 - 4A^3| = 0$

(B) 若 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(C) 设 $A_{3 \times 3}, B_{4 \times 4}$, 且 $|A| = 1, |B| = -2$, 则 $||B|A| = -8$

(D) 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. 已知 A 是 n 阶方阵, E 是 n 阶单位矩阵, 且 $A^3 = E$, 则 $\begin{pmatrix} O & -E \\ A & O \end{pmatrix}^{98} =$ ()。

(A) $\begin{pmatrix} A & E \\ O & A \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} A & O \\ E & A \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} -A & O \\ O & -A \end{pmatrix}$

8. 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, 其中 a, b, c 为实数, 则下列选项中不能使 $A^{100} = E$ 的是()。

(A) $a=1, b=2, c=-1$

(B) $a=1, b=-2, c=-1$

(C) $a=-1, b=2, c=1$

(D) $a=-1, b=2, c=-1$

二、填空题 (每空格 3 分, 共 15 分)

1. 已知 $R(A_{3 \times 3})=2$, $R(AB)=1$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -a \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $a =$ _____。

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求

$(P_1)^{2021} A (P_2)^{2021} =$ _____。

3. 设 $C = B_{n \times m} A_{m \times n}$, 且 $n > m$, 则 $|C| =$ _____。

4. 设 A 为 4 阶方阵, $|A| = 3$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若将矩阵 A 的第 3 行与第 4 行交换得到 B , 则 $|BA^*| =$ _____。

5. 设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, $|A| = 2$, A_{ij} 表示 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式 ($i, j = 1, 2, 3$), 则

$$(a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23})^2 + (a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23})^2 + (a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23})^2 =$$

_____。

三、计算题 (共 50 分)

1. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且满足 $AX + E = A^2 + X$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, 求 X 。

2. 设 A, B 都是 3 阶矩阵, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & a \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $AB - A + B = E$, 且 $B \neq E$,

$R(A + B) = 3$, 求常数 a 的值。

3. 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + ax_3 + 15x_4 = 3 \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = b \end{cases}$$

a, b 取何值时, 方程组无解? 有惟一解? 有无穷多解时, 求出通解。

4. 设五次多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$, 求 (1) x^5 的系数; (2) x^4

的系数; (3) 常数项。

5. 设 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$, 求 A 。

四、证明题 (每小题 5 分, 共 15 分)

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & & 0 & a^2 & 2a \end{pmatrix}$ 是 n 阶矩阵, 试证明 $|A| = (n+1)a^n$ 。

2. 设矩阵 A 和 B 为同阶方阵, $A = A^T$, $B = -B^T$, 证明 $7AB - 2BA$ 是对称矩阵的充要条件是 $AB + BA = O$ 。

3. 证明: 当 a_1, a_2, \dots, a_n 互不相等时, 方程组无解。

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 + \cdots + a_1^{n-2} x_{n-1} = a_1^{n-1} \\ x_1 + a_2 x_2 + a_2^2 + \cdots + a_2^{n-2} x_{n-1} = a_2^{n-1} \\ \vdots \\ x_1 + a_n x_2 + a_n^2 + \cdots + a_n^{n-2} x_{n-1} = a_n^{n-1} \end{cases}$$