厦门大学《线性代数 I》课程试卷

________ 学院 ______ 系 _____ 年级 _______ 专业

主考教师：____ 试卷类型：期中考解答卷 考试日期：2024.04.13

注意：所有行列式化简和矩阵初等变换必须标出每一步骤！

1. (10 分) 设 4 阶行列式 $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 的 (i,j) 元的余子式和代数余子式分别记作 M_{ij} 和 A_{ij}，求：

$$A_{11}+M_{12}+A_{13}+M_{14}.$$

解：$A_{11}+M_{12}+A_{13}+M_{14} = A_{11}-A_{12}+A_{13}-A_{14} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -14.$

（写出 $A_{11}-A_{12}+A_{13}-A_{14}$ 及其对应的行列式分别给 1 分和 2 分，行列式计算过程 5 分，结果 2 分）

2. (10 分) 求解矩阵方程 $AX = -A-2X$，其中 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

解：由 $AX = -A-2X$ 可得，$(A+2E)X = -A$. 若 $A+2E$ 可逆，则所给方程有唯一解 $X = (A+2E)^{-1}\cdot(-A)$，其中 $A+2E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

由于 $|A+2E| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$，故 $A+2E$ 可逆。由

$$(A+2E,-A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&1&-1&-1\\0&1&-1&2&1&1\\0&0&4&-2&-2&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{4}}\begin{bmatrix}1&1&1&1&-1&-1\\0&1&-1&2&1&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-r_3}\begin{bmatrix}1&1&0&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&0&-1&-1\\0&1&0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

因此，

$$X=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

3. (10 分) 设 A,B 均为 3 阶方阵，且 $|A|=3$, $|B|=-2$, A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵，求 $|2A^*(3B)^{-1}|$.

解：

$$|2A^*(3B)^{-1}|=|2A^*|\cdot|(3B)^{-1}|=\left|2|A|A^{-1}\right|\cdot\left|\frac{1}{3}B^{-1}\right|=(2|A|)^3|A^{-1}|\cdot\frac{1}{3^3}|B^{-1}|$$
$$=\frac{8|A|^3}{|A|}\cdot\frac{1}{3^3|B|}=\frac{8|A|^2}{3^3|B|}=\frac{8\times3^2}{3^3\times(-2)}=-\frac{4}{3}.$$

4. (10 分) 用**克拉默法则** 求解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1,\\2x_1+5x_2+8x_3=-2,\\3x_1-4x_2-x_3=3.\end{cases}$$

解：因所求方程组的系数行列式 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&5&8\\3&-4&-1\end{vmatrix}=10\neq0$, 由克拉默法则，该方程组有唯一解，且

$$x_1=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix}1&2&3\\-2&5&8\\3&-4&-1\end{vmatrix}=5,\quad x_2=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix}1&1&3\\2&-2&8\\3&3&-1\end{vmatrix}=4,\quad x_3=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&5&-2\\3&-4&3\end{vmatrix}=-4,$$

即

$$\begin{cases}x_1=5,\\x_2=4,\\x_3=-4.\end{cases}$$

5. (10 分) a,b 取何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ 2x_1+3x_2-ax_3=2, \\ 3x_1+4x_2-3x_3=b, \end{cases}$$

（1）无解；（2）有唯一解；（3）有无穷多解？并在有解时求出其解。

解：对增广矩阵 $\overline{A}=(A,\mathbf{b})$ 作行初等变换把它化为行梯形矩阵，有

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -a & 2 \\ 3 & 4 & -3 & b \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a-2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & b-3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a-2 & 0 \\ 0 & 0 & a-4 & b-3 \end{bmatrix}.$$

(1) 当 $a=4$ 且 $b\neq 3$ 时，$R(A)=2$，$R(\overline{A})=3$，故原方程组无解；

(2) 当 $a\neq 4$ 时，$R(A)=R(\overline{A})=3$，故原方程组有唯一解，这时，

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a-2 & 0 \\ 0 & 0 & a-4 & b-3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3\times\frac{1}{a-4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-3}{a-4} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+(a+2)r_3]{r_1-r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{a-b-1}{a-4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{(a+2)(b-3)}{a-4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-3}{a-4} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-ab+4a-3b+5}{a-4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{(a+2)(b-3)}{a-4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-3}{a-4} \end{bmatrix}.$$

由此便得唯一解

$$\begin{cases} x_1=\frac{-ab+4a-3b+5}{a-4}, \\ x_2=\frac{(a+2)(b-3)}{a-4}, \\ x_3=\frac{b-3}{a-4}. \end{cases}$$

(3) 当 $a=4$ 且 $b=3$ 时，$R(A)=R(\overline{A})=2$，故原方程组有无穷多解，这时，

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

则原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1+7x_3=1, \\ x_2-6x_3=0. \end{cases}$$

从而，原方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1=1-7c \\ x_2=6c, \\ x_3=c. \end{cases} \qquad (c \text{ 为任意常数})$$

6. (10 分) 设

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 7 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

求矩阵 A 的秩及 A 的一个最高阶非零子式。

解：对 A 作行初等变换化成行梯形矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 7 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1<->r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 8 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times(-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} = B.$$

由于行梯形矩阵 B 的非零行的个数为 3, 故 $R(A)=3$。

下面求矩阵 A 的一个最高阶非零子式。将矩阵 A 按列分块 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5]$。则矩阵 $A_3=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5]$ 的行梯形矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

因此，$R(A_3)=3$, 故

$$|A_3|=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-16.$$

于是这个 3 阶子式即为 A 的一个最高阶非零子式。

7. (10 分) 设 $AP=P\Lambda$，其中 $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\Lambda=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, 求 $\phi(A)=3A^3+4A^2-5A$. 解：$|P|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=4\neq 0$, 故 P 可逆，从而

$$A=P\Lambda P^{-1},\quad \phi(A)=P\phi(\Lambda)P^{-1}.$$

而 $\phi(-1)=6$, $\phi(1)=2$, $\phi(-2)=2$,

$$P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

故 $\phi(\Lambda)=\mathrm{diag}(6,2,2)$. 于是,

$$\phi(A)=P\phi(\Lambda)P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

8. (10 分) 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 2a & a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a \end{vmatrix}.$$

解：将 D_n 按第一行展开，我们有

$$\begin{aligned} D_n &= 2aD_{n-1}+a^2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & a^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a \end{vmatrix}_{n-1} \quad (\text{第二项中的 } n-1 \text{ 阶行列式按第一列展开}) \\ &= 2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}. \end{aligned}$$

由此可得,

$$D_n-aD_{n-1}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})=a^2(D_{n-2}-aD_{n-3})=\cdots=a^{n-2}(D_2-aD_1)=a^{n-2}(3a^2-2a^2)=a^n.$$

因此,

$$\begin{aligned} D_n &= aD_{n-1}+a^n=a(aD_{n-2}+a^n)+a^n=a^2D_{n-2}+2a^n \\ &= \cdots=a^{n-1}D_1+(n-1)a^n=2a^n+(n-1)a^n=(n+1)a^n. \end{aligned}$$

9. (10 分) 设 $A=\begin{bmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{bmatrix}$, 求一个可逆矩阵 P，使得 PA 为行最简形矩阵。

解:

$$[A,E_3]=\begin{bmatrix}3&1&0&2&1&0&0\\1&-1&2&-1&0&1&0\\1&3&-4&4&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1<->r_2}\begin{bmatrix}1&-1&2&-1&0&1&0\\3&1&0&2&1&0&0\\1&3&-4&4&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-e_1]{r_2-3r_1}\begin{bmatrix}1&-1&2&-1&0&1&0\\0&4&-6&5&1&-3&0\\0&4&-6&5&0&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&-1&2&-1&0&1&0\\0&4&-6&5&1&-3&0\\0&0&0&0&-1&2&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{4}}\begin{bmatrix}1&-1&2&-1&0&1&0\\0&1&-\frac{3}{2}&\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}&0\\0&0&0&0&-1&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&1&-\frac{3}{2}&\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}&0\\0&0&0&0&-1&2&1\end{bmatrix}.$$

故

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}&0\\-1&2&1\end{bmatrix},\quad PA=\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\0&1&-\frac{3}{2}&\frac{5}{4}\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

10. (1) (5 分) 设 A 为 n 阶方阵，E_n 为 n 阶单位矩阵。若 $A^2=E_n$ 且 $|A|\neq(-1)^n$，证明: $A-E$ 不可逆;

证明:

$$|A||A-E_n|=|A(A-E_n)|=|A^2-A|=|E_n-A|=|-(A-E_n)|=(-1)^n|A-E_n|.$$

因而，$(|A|-(-1)^n)|A-E_n|=0$. 由于 $|A|\neq(-1)^n$，故 $|A-E_n|=0$，因此，$A-E$ 不可逆。

(2) (5 分) 设 A 为 $p\times q$ 矩阵，B 为 $q\times p$ 矩阵, E_n 为 n 阶单位矩阵，证明: $|E_p-AB|=|E_q-BA|$.

证明: 因 $\begin{bmatrix}E_p&-A\\O&E_q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_p&A\\B&E_q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_p-AB&0\\B&E_q\end{bmatrix}$，故

$$|E_p-AB|=\begin{vmatrix}E_p-AB&0\\B&E_q\end{vmatrix}=\left|\begin{bmatrix}E_p&-A\\O&E_q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_p&A\\B&E_q\end{bmatrix}\right|$$
$$=\begin{vmatrix}E_p&-A\\O&E_q\end{vmatrix}\begin{vmatrix}E_p&A\\B&E_q\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}E_p&A\\B&E_q\end{vmatrix}.$$

另一方面，因 $\begin{bmatrix} E_p & O \\ -B & E_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_p & A \\ B & E_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_p & A \\ 0 & E_q - BA \end{bmatrix}$，故

$$\begin{aligned} |E_q - BA| &= \begin{vmatrix} E_p & A \\ 0 & E_q - BA \end{vmatrix} = \left| \begin{bmatrix} E_p & O \\ -B & E_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_p & A \\ B & E_q \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} E_p & O \\ -B & E_q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_p & A \\ B & E_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_p & A \\ B & E_q \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

因此，$|E_q - BA| = \begin{vmatrix} E_p & A \\ B & E_q \end{vmatrix} = |E_p - AB|$.