一、　单项选择题（每小题 **2** 分，共 **20** 分）

CBBCA　BDBCB

二、填空题（每题 **3** 分，共 **15** 分）

1. 3
2. $\left(\mathbf{1},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)^{T}$
3. -5
4. $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$
5. 2

三、计算题（共 55 分）

1. （15 分）

解：该二次型对应的对称矩阵$A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}$（1 分），

由$|A-\lambda E|=0$求得特征值$\lambda_1=8,\ \lambda_2=\lambda_3=-1$.（2 分）

7. (1) 当$\lambda_1=8$时，解方程$(\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

$$\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-5&2&4\\2&-8&2\\4&2&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

2分　　1分

解得基础解系$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$，单位化得$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

当$\lambda_2=\lambda_3=-1$时，解方程$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

2分

解得基础解系$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$. 将$\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$正交化得

$$\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\eta}_2,\quad \boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\eta}_3-\frac{[\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\xi}_2]}{[\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2]}\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\2\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

2分

将$\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$单位化得

1分　　1分

$$\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\frac{\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\2\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

因此正交矩阵为

1分

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}\\\frac{1}{3}&0&\frac{2\sqrt{2}}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

2分

(2) 利用(1)中的正交矩阵$\boldsymbol{P}$，作正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，则二次型化为$f=8y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

2. （12 分）

解：(1) 设 A 的属于特征值 3 的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1,x_2,x_3)^T.$$

因为实对称矩阵属于不同特征值的特征向量相互正交，所以有

$$\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_3=0 \quad 和 \quad \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_3=0.$$

即 x_1,x_2,x_3 是齐次线性方程组 2分

$$\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=0,\\ x_1-2x_2-x_3=0\end{cases}$$

的非零解。解上述方程组，得其基础解系为 $(1,0,1)^T$。因此 A 的属于特征值 3 的特征向量为

2分 $k(1,0,1)^T$， k 为任意非零常数。

1分

(2) 令 $P=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，则有

1分

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}，\quad 即 \quad A=P\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}P^{-1}.$$

由于 4分

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

所以

$$A=P\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}13 & -2 & 5\\ -2 & 10 & 2\\ 5 & 2 & 13\end{bmatrix}.$$ 2分

（2）解法 2：先把各特征向量单位化（3 分）

$$p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}, p_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ -1\end{pmatrix}, p_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

再得到正交矩阵 $P=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & 1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{2} & -2 & 0\\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$（1 分），

利用 $P^{-1}=P^T=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 1 & -2 & -1\\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$（1 分），

又 $\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$（1 分），

可得 $A=P\Lambda P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}13 & -2 & 5\\ -2 & 10 & 2\\ 5 & 2 & 13\end{pmatrix}$。（2 分）

3. （8 分）

解：$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&0&3&1\\-1&3&0&-2\\2&1&7&2\\4&2&14&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，（3 分）

向量组的秩为 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，（1 分）

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$为一个极大线性无关组（2 分），且$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.（2 分）

或者 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$为一个极大线性无关组（2 分），且$\boldsymbol{\alpha}_2=-3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$.（2 分）

4. （10 分）

解：$\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&m+2&4&n+2\\3&5&1&m+8&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&m+1&0&n-1\\0&0&0&m+1&0\end{pmatrix}$，（3 分）

当 $m\neq-1$ 时，方程组有唯一解；（1 分）
当 $m=-1,n\neq1$ 时，方程组无解；（1 分）
当 $m=-1,n=1$时，方程组有无穷多解，（1 分）此时通解为

$$\mathbf{x}=(0,1,0,0)^{\boldsymbol{T}}+\boldsymbol{k}_1(-2,1,1,0)^{\boldsymbol{T}}+\boldsymbol{k}_2(1,-2,0,1)^{\boldsymbol{T}},\boldsymbol{k}_{1,},\boldsymbol{k}_2\text{ 为任意常数}.$$（4 分）

5. （10 分）

解：由 $|A|=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3&a\\a&3\end{vmatrix}=2(9-a^2)=1\times2\times5$，得 $a^2=4$，$a=2$.（3 分）

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-2\\0&-2&\lambda-3\end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda_1=1$，解 $(\lambda E-A)x=0$：

$\lambda E-A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{cases}x_1=0\\x_2=-x_3\\x_3=\quad x_3\end{cases}$，取 $p_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$；（2 分）

对于 $\lambda_2=2$，解 $(\lambda E-A)x=0$：

$\lambda E-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{cases}x_1=x_1\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}$，取 $p_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$；（2 分）

对于 $\lambda_3=5$，解 $(\lambda E-A)x=0$：

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{cases}x_1=0\\x_2=x_3\\x_3=x_3\end{cases}，取\ p_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.（2分）$$

令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$（1分），则 P 是可逆矩阵，使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$.

四、 证明题（每题 5 分，共 10 分）

1. 设 A 为 n 阶正交矩阵，且 $|A|=-1$，证明：$-E-A$ 不可逆。

证：$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，

$$|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|-\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}|=|-\boldsymbol{A}^T-\boldsymbol{E}||\boldsymbol{A}|=-|(-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^T|=-|-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|,$$

$$|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0,$$

所以 $-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆.

2. 设矩阵 A 为 n 阶正定矩阵，证明：$|A+E|>1$。

证法一 因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$. 则由 $\lambda_i>0$，知 $\lambda_i+1>1$ $(i=1,2,\cdots,n)$，所以

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1.$$

证法二 由 $\boldsymbol{A}$ 正定知 $\boldsymbol{A}$ 必对称，故存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},$$

因此

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|&=|\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{QQ}^{\mathrm{T}}|\\&=|\boldsymbol{Q}||\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{E}||\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{E}|\\&=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1.\end{aligned}$$