厦门大学《线性代数I》课程试卷

________学院______系______年级_______专业

主考教师：______ 试卷类型：期中考解答卷 考试日期：2023.11.12

1. (10分) 计算行列式

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解: -40（过程3分，结果2分）

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} \xlongequal[(k=2,3,\cdots,n)]{c_1 - c_k} \begin{bmatrix} 1-\sum\limits_{k=2}^{n} k & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

$$= \left[2 - \frac{1}{2}n(n+1)\right]n!.$$

（过程3分，结果2分）

2. (10分) 设$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$的第$i$行第$j$列元素$a_{ij}$的代数余子式记作$A_{ij}$.

求

(a) $A_{11} + 2A_{12} + 3A_{13} + 4A_{14}$.

(b) $-2M_{12} + M_{22} - 2M_{32} + 3M_{42}$.

解：

(a) (6分) $A_{11} + 2A_{12} + 3A_{13} + 4A_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15.$

（写出$A_{11} + 2A_{12} + 3A_{13} + 4A_{14}$的行列式2分，行列式计算过程2分，结果2分。）

(b) (4分) $-2M_{12} + M_{22} - 2M_{32} + 3M_{42} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$ （写出$-2M_{12} + M_{22} - 2M_{32} + 3M_{42}$的行列式2分，结果2分。）

3. (a) (5分) 设A为3阶矩阵，$|A|=2$. 记A^*为矩阵A的伴随矩阵。求$|(2A)^{-1}-\frac{5}{4}A^*|$.

解. 由$|A|=2\neq 0$, 故A可逆。于是由$A^*=|A|A^{-1}=2A^{-1}$及$(2A)^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1}$得

$$(2A)^{-1}-\frac{5}{4}A^*=\frac{1}{2}A^{-1}-\frac{5}{2}A^{-1}=-2A^{-1},$$

两边取行列式可得

$$|(2A)^{-1}-\frac{5}{4}A^*|=|-2A^{-1}|=(-2)^3|A|^{-1}=-4.$$

（结果2分，过程3分）

(b) (5分) 设$B=P^{-1}AP$, 其中$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, P为可逆矩阵。求$B^{2024}-2A^2$.

解. 直接计算可得$A^2=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 因此，$A^{2024}=E$. 从而，

$$B^{2024}-2A^2=\left(P^{-1}AP\right)^{2024}-2A^2=P^{-1}A^{2024}P-2A^2=E-2A^2=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

（结果2分，过程3分）

4. (10分) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} -3 & 3 & 9 \\ -2 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. 求 A^{100}.

解：注意到矩阵 A 可以分解为：$A=\begin{bmatrix} -3 & 3 & 9 \\ -2 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

由 $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}=2$, 我们可得：

$$A^{100}=\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right)^{100}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)^{99}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}=2^{99}\cdot A.$$

（结果3分，过程7分）

5. (10分) 用克拉默法则求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & -x_2 & -3x_3 & = & 1, \\ 3x_1 & +2x_2 & -5x_3 & = & 0. \end{cases}$$

解 （1）用克拉默法则.因方程组的系数矩阵的行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -3\\ 3 & 2 & -5\end{vmatrix}=3\neq 0$,由克拉默法则,它有惟一解,并且

$$x_1=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -3\\ 0 & 2 & -5\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\frac{1}{3}\begin{vmatrix}1 & -1 & -3\\ 2 & -1 & -1\\ 0 & 2 & -5\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-2r_2]{r_2-2r_1}-\frac{1}{3}\begin{vmatrix}1 & -1 & -3\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & -15\end{vmatrix}=5,$$

$$x_2=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -3\\ 3 & 0 & -5\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\frac{1}{3}\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -3 & -1\\ 0 & -6 & -2\end{vmatrix}=0,$$

$$x_3=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\frac{1}{3}\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 5 & -6\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 5 & -6\end{vmatrix}=3.$$

（结果3分，过程7分）

6. (10分) 设矩阵X满足$XA = X + BB^T$, 其中$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. 求矩阵$X$.

解. 由$XA = X + BB^T$可知$X(A-E) = BB^T$. 易验证$A-E$是可逆矩阵，从而

$$X = BB^T(A-E)^{-1} = \cdots = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(写出$X = BB^T(A-2E)^{-1}$得3分，计算逆矩阵得4分，结果3分。)

7. 设$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\\3&5&1&7\end{bmatrix}$, 已知$R(A)=3$. 试求$a,b$的值。

解 由于

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\\3&5&1&7\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_3-2r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\0&1&a-2&2\\0&2&-2&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-4_2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\0&0&a-1&2-b\\0&0&0&4-2b\end{bmatrix},$$

又已知 $R(\boldsymbol{A})=3$,故必 $|\boldsymbol{A}|=2(a-1)(2-b)=0$. 解得 $a=1$,或者 $b=2$.
但 $R(\boldsymbol{A})=3$ 也使得 $a=1$ 与 $b=2$ 不能同时成立.
因此,①$a=1$,且 $b\neq 2$;或者 ②$b=2$,且 $a\neq 1$ 是所求的条件.

(过程6分，结果4分）

8. (10分) 设有非齐次线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & -2 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & \lambda \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & \lambda^2 \end{cases}$$

当λ取何值时方程组有解？并求出它的通解。

解.

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2+2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & -3 & 3 & -2+2\lambda \\ 0 & 3 & -3 & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix} \underset{r_3-3r_2}{\overset{r_2\div(-3)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{2}{3}(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2) \end{pmatrix}.$$

因 $R(\boldsymbol{A})=2$，故当 $R(\boldsymbol{B})=2$，即当 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$ 时，方程组有解.

(4分)

当 $\lambda=1$ 时,

$$B \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_1+2r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

选 x_3 为自由未知数,得同解方程组 $\begin{cases} x_1 = x_3+1, \\ x_2 = x_3, \end{cases}$ 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R});$$

当 $\lambda=-2$ 时,

$$B \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_1+2r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

选 x_3 为自由未知数,得 $\begin{cases} x_1 = x_3+2, \\ x_2 = x_3+2, \end{cases}$ 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

(两种情形各3分)

9. (10分) 已知n阶方阵

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&1&0&\cdots&0\\1&1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&1\end{bmatrix}.$$

求$|A|$中所有元素的代数余子式的和$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}$.

解 利用公式 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，先求出 $|\boldsymbol{A}|$ 及 $\boldsymbol{A}^{-1}$，再计算所求和.
显然$|\boldsymbol{A}|=1$，又

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccccc:ccccc}1&0&0&\cdots&0&1&&&&\\1&1&0&\cdots&0&&1&&&\\1&1&1&\cdots&0&&&1&&\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&&&&\ddots&\\1&1&1&\cdots&1&&&&&1\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccccc:ccccc}1&&&&&1&&&&\\&1&&&&-1&1&&&\\&&1&&&&-1&1&&\\&&&\ddots&&&&\ddots&\ddots&\\&&&&1&&&&-1&1\end{array}\right)$$

可见

$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&&\\-1&1&&&\\&-1&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&-1&1\end{pmatrix},$$

因此，$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}=n-(n-1)=1$.（结果3分，过程7分）

10. (a) (5分) 设矩阵$B=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$. 是否存在可逆矩阵$A$满足$A^4=ABA^2+2A^3$?

解. 假设A是可逆矩阵，则

$$\begin{aligned} A &= A^{-1}A^4A^{-2} \\ &= A^{-1}\left(ABA^2+2A^3\right)A^{-2} \\ &= B+2E \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

但易算得$|A|=0$,这与A是可逆矩阵矛盾。因此，不存在满足$A^4=ABA^2+2A^3$的可逆矩阵A.

（结果2分，过程3分）

(b) (5分) 设$\vec{\alpha}$是$n\times 1$阶列矩阵，满足$\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}=1$. 设$A=E-\vec{\alpha}\vec{\alpha}^T$, 其中$E$是$n$阶单位矩阵。求矩阵$A$的秩$R(A)$.

解. 由$A^2=\left(E-\vec{\alpha}\vec{\alpha}^T\right)\left(E-\vec{\alpha}\vec{\alpha}^T\right)=E-\vec{\alpha}\vec{\alpha}^T=A$ 可得$A(E-A)=O$. 从而$R(A)+R(E-A)\le n$.
又$R(A)+R(E-A)\ge R(A+(E-A))=R(E)=n$, 因此，$R(A)+R(E-A)=n$.
由$A=E-\vec{\alpha}\vec{\alpha}^T$, 得$E-A=\vec{\alpha}\vec{\alpha}^T$. 于是，$R(E-A)=R(\vec{\alpha}\vec{\alpha}^T)=R(\vec{\alpha})=1$. 因此，$R(A)=n-1$.
（结果2分，过程3分）