厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷解答

试卷类型：理工类　　A 卷（ √ ）B 卷（　）

学年学期：2024-2025 第一学期 考试时间：2024.11.16

一、选择题：（每小题 4 分，共 20 分）

1. 关于函数 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，$x\in(0,1]$，下列说法错误的是（　　）。

（A）为无界函数；　　（B）为连续函数；

（C）为可导函数；　　（D）当 $x\to0^+$ 时为无穷大。

2. 当 $x\to0$ 时，$\sqrt[3]{8+x^3}-2$ 是 $(x-x^2)(x^2+x^3)$ 的（　　）。

（A）等价无穷小；（B）同阶但非等价无穷小；（C）高阶的无穷小；（D）低阶的无穷小。

3. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-2}{(x-1)^2}=3$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处（　　）。

（A）不可导；　　（B）可导但 $f'(1)\neq0$；

（C）取得极小值；　　（D）取得极大值。

4. 函数 $y=\frac{x\ln|x|}{x^2-3x+2}$ 的可去间断点的个数为（　　）。

（A）0；　（B）1；　（C）2；　（D）3。

5. 设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ $(0\le t\le2\pi)$ 所确定，则（　　）。

（A）该函数的图形是凸的；　　（B）该函数的图形是凹的；

（C）该函数无最大值；　　（D）该函数的图形上有拐点。

二、填空题：（每小题 4 分，共 20 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{x^2+1}\arctan x=$________　__________。

2. 设 $y=\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$，则 $\mathrm{d}y|_{x=\frac{1}{3}}=$__________。

3. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{ax^2}-\cos x}{x^4}=b$，其中 a、b 均为实数，则 $a=$________，$b=$________。

4. 设 $f(x)=x^2\ln(1-x)$，则 $f^{(5)}(0)=$________。

5. 已知方程 $\mathrm{e}^x-2x+a=0$ 有实根，则常数 a 应满足的条件是__________。

三、求下列函数极限：（每小题 7 分，共 14 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$；

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$；

四、（本题 10 分）证明数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n(1+2+\cdots+n)}{n!}$存在，并求其极限值。

五、（本题 10 分）讨论 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x} & x>0\\ \mathrm{e}^{-x+x^2} & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的可导性。

六、（本题 10 分）设方程 $x^3+3xy+y^3=1$ 确定了隐函数 $y=y(x)$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\big|_{x=0}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\big|_{x=0}$。

七、（本题 8 分）证明：当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，成立不等式 $1<\frac{\tan x}{x}<\frac{4}{\pi}$。

八、（本题 8 分）设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上二阶可导且满足 $f(2)=0$。令 $g(x)=(x-1)^2f(x)$，证明：在 $(1,2)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $g''(\xi)=0$。