厦门大学《线性代数I》课程试卷

________学院______系______年级________专业

主考教师：______ 试卷类型：期末考解答A卷 考试日期：2024.1.3

1. (10分)已知3阶方阵A的特征值为$1,2,3$.

(1) 求行列式$|A|$;

(2) 求矩阵A^*+3A-E的特征值；

(3) 求方阵 $B=A^3-6A+2E$ 的行列式 $|B|$ 和迹 $\mathrm{Tr}(B)$.

解. (1) 由行列式与特征值的关系可得$|A|=1\cdot 2\cdot 3=6$; (2分)

(2) 由$|A|\neq 0$可知A 是可逆矩阵。又$A^*=|A|A^{-1}=6A^{-1}$. 设λ为A的特征值，则A^*+3A-E有特征值$\frac{6}{\lambda}+3\lambda-1$. 故$A^*+3A-E$的特征值为8, 8, 10. (3分)

(3) 定义多项式 $\varphi(x)=x^3-6x+2$，则 $\mathbf{B}=\varphi(\mathbf{A})$, 进而 $\varphi(\lambda)$ 是 $\mathbf{B}$ 的特征值 $(\lambda=1,2,3)$. 这样 $\varphi(1)=-3$, $\varphi(2)=-2$ 和 $\varphi(3)=11$ 是 $\mathbf{B}$ 的特征值。(3分) 由此可得， $|\mathbf{B}|=(-3)(-2)11=66$ 以及 $\mathrm{tr}(\mathbf{B})=(-3)+(-2)+11=6$. (2分)

2. (10分) 已知$\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$是$\begin{bmatrix}a&-1&2\\5&b&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}$的一个特征向量。试求常数$a,b$的值。

解. 因为$\vec{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$是$A=\begin{bmatrix}a&-1&2\\5&b&3\\-1&0&2\end{bmatrix}$的一个特征向量，则存在数$\lambda$, 使得$A\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}$,

即$\begin{bmatrix}a&-1&2\\5&b&3\\-1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$, 解得$\begin{cases}a-3=\lambda\\2+b=\lambda\\1=-\lambda\end{cases}$, 即$\begin{cases}a=2\\b=-3\\\lambda=-1\end{cases}$.

(过程7分，结果3分)

3. (10分) 问a取什么值时下列向量线性相关?

$$\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix},\vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\a\\-1\end{bmatrix},\vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\a\end{bmatrix}.$$

解. 方法一：设$A=[\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2\ \vec{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&-1\\1&-1&a\end{bmatrix}$, 则

$$A\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&-1&a\\1&a&-1\\a&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-ar_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&-1&a\\0&a+1&-1+a\\0&1+a&1-a^2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&-1&a\\0&a+1&-1+a\\0&0&-(a-2)(a+1)\end{bmatrix}.$$

由此可知当$a=-1$或$a=2$时，$R(A)<3$, 此时向量组$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$线性相关。

方法二：设$A=[\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2\ \vec{\alpha}_3]$, 则

$$|A|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&-1\\1&-1&a\end{vmatrix}=(a+1)^2(a-2).$$

于是当$a=-1$或$a=2$时，$R(A)<3$, 此时向量组$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$线性相关。

(过程8分，结果2分)

4. (10分)已知$\mathbb{R}^3$的两个基为

$$\vec{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\vec{a}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\vec{a}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix};\vec{b}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\vec{b}_2=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix},\vec{b}_3=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}.$$

(1) 求由基$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$到基$\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$的过渡矩阵$P$;

(2) 设向量$\vec{x}$在基$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$中的坐标为$[1,1,3]^T$. 求它在基$\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$中的坐标。

解 (1) 记矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$.因$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$与$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$均为$\mathbb{R}^3$的基,故$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$均为3阶可逆矩阵.由过渡矩阵定义,

(过程4分，结果2分)

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{P} \text{ 或 } \boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}.$$

利用第 3 章介绍的方法可求 $\boldsymbol{P}$ 如下：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&3\\1&0&0&2&3&4\\1&-1&1&1&4&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&2&3&4\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&-1&0&-1\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$;

(2) 由 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,这里 y_1,y_2,y_3 是 $\boldsymbol{x}$ 在后一基中的坐标,得

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)^{-1}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

因 $\boldsymbol{P}^{-1}=-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&3&4\\0&2&0\\-1&-3&-2\end{pmatrix}$,故 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&3&4\\0&2&0\\-1&-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-1\\5\end{pmatrix}$.

(过程2分，结果2分)

5. (10分) 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&1\\3&1&t\\4&0&5\end{bmatrix}$.

(1) (3分) 求A的所有特征值；

(2) (7分) 问常数 t 取何值时，矩阵 $\mathbf{A}$ 可对角化？

解：(1)由

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&1\\3&1-\lambda&t\\4&0&5-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\4&5-\lambda\end{vmatrix}=(6-\lambda)(1-\lambda)^2$$

知，$\mathbf{A}$ 的特征值为 $6,1,1$. (过程2分，结果1分)

(2) $\mathbf{A}$ 可对角化当且仅当方程组 $(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X}=0$ 有两个线性无关的解，从而当且仅当系数矩阵 $\mathbf{A}-\mathbf{E}$ 的秩是 1。

注意到

$$\mathbf{A}-\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1&0&1\\3&0&t\\4&0&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-4r_1]{r_3-3r_1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&t-3\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

故当 $t=3$ 时，$\mathbf{A}$ 可对角化。

(过程6分，结果1分)

6. (15分) 设有对称矩阵 $\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$.

(1) 写出这个矩阵对应的二次型。

(2) 用正交替换法化这个二次型为标准形，写出标准形及求所用的变换矩阵。

解. (1) $f=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$. (2分)

(2) 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&-1&1\\-1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2),$$

可得，$\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$. (特征值过程2分，结果1分)

当$\lambda_1=-2$时，解方程$(A+2E)\vec{x}=\vec{0}$, 得

$$A+2E=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

从而，$\vec{\xi}_1=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$. 单位化$\vec{\xi}_1$, 得$\vec{p}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$. (2分)

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时，解方程$(A-E)\vec{x}=\vec{0}$, 由

$$A-E=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

可得$\vec{\xi}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \vec{\xi}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$. (2分)

正交化$\vec{\xi}_2,\vec{\xi}_3$: 令$\vec{\eta}_2=\vec{\xi}_2$, $\vec{\eta}_3=\vec{\xi}_3-\frac{\langle\vec{\eta}_2,\vec{\xi}_3\rangle}{\langle\vec{\eta}_2,\vec{\eta}_2\rangle}\vec{\eta}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$. (2分)

单位化$\vec{\eta}_2,\vec{\eta}_3$, 得$\vec{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \vec{p}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$. (1分)

设$P=[\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$, (2分) 则$P^{-1}AP=P^TAP=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. 从而，我们有如下正交线性替换

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix},$$

因此，二次型的标准型为$f=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2$. (1分)

7. (10分) 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3, 已知$\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\vec{\eta}_3$是它的三个解向量，且

$$\vec{\eta}_1=[2,3,4,5]^T,\ \ \vec{\eta}_2+\vec{\eta}_3=[1,2,3,4]^T.$$

求该方程组的通解。

解 记该非齐次方程组为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,对应齐次方程组为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$.因$R(\boldsymbol{A})=3$,由教材定理 7 知此齐次方程组的基础解系由 1 个非零解构成,也即它的任一非零解都是它的基础解系.另一方面,记向量$\boldsymbol{\xi}=2\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A\xi}&=\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3)\\&=2\boldsymbol{A\eta}_1-\boldsymbol{A\eta}_2-\boldsymbol{A\eta}_3=2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},\end{aligned}$$

且直接计算得$\boldsymbol{\xi}=(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$.这样,$\boldsymbol{\xi}$ 就是它的一个基础解系.根据非齐次方程组解的结构知,原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}_1=k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\quad k\in\mathbb{R}.$$

(过程8分，结果2分)

8. (10分) 设A为三阶方阵，$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$为$A$的分别是对应于特征值-1, 1的特征向量，又$A\vec{\alpha}_3=2\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3$. 证明：$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$线性无关。

证明. 由已知条件可知有$A\vec{\alpha}_1=-\vec{\alpha}_1, A\vec{\alpha}_2=\vec{\alpha}_2$. (2分) 设有

$$k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+k_3\vec{\alpha}_3=0 \tag{1}$$

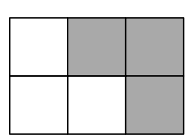
两边同时左乘A, $k_1A\vec{\alpha}_1+k_2A\vec{\alpha}_2+k_3A\vec{\alpha}_3=0$. (2分)即$-k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+k_3(2\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3)=0$,

$$-k_1\vec{\alpha}_1+(k_2+2k_3)\vec{\alpha}_2+k_3\vec{\alpha}_3=0 \tag{2}$$

由$(2)-(1)$可得$-2k_1\vec{\alpha}_1+2k_3\vec{\alpha}_2=0$. (2分) 因为$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$是对应于不同特征值的特征向量，它们线性无关，因此，$k_1=k_3=0$. (2分) 代入(1)得到$k_2\vec{\alpha}_2=0$. 又由$\vec{\alpha}_2\neq 0$ 得$k_2=0$. (2分)从而$k_1=k_2=k_3=0$, 因此$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$线性无关。

9. (15分) 如下左图所示有6个房间，每个房间有1盏灯和1个开关，但是每个房间的开关只能改变相邻房间的灯光状态（把“开”变成“关”、“关”变成“开”）。比如，房间1 的开关只能改变房间2和4的灯光状态。如下右图给出了每个房间的初始灯光状态：房间1、4、5开灯而房间2、3、6关灯。利用房间中的开关来随机改变灯光状态，并以如下规则对各个房间进行计数：在初始状态下关灯的房间计数为0，而开灯的计数为1，随后房间灯光状态每改变一次，相应的计数+1。同时用列向量$\vec{u}=[a_1,a_2,\ldots,a_6]^T$来描述所有房间的计数（$a_i$ 代表房间i的计数）。

1	2	3
4	5	6



(1) 写出初始状态时的计数列向量$\vec{u}_0$和全部房间都处于关灯状态时的可能计数列向量$\vec{u}_1$.

(2) 对$i=1,2,\ldots,6$，记使用一次房间i中的开关带来的计数列向量的改变量为$\vec{v}_i$. 试写出这些列向量$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_6$.

(3) 如何找到最快的开关方法，把灯光状态全部变成关闭？（注意：考核重点不是答案，而是使用线性代数知识解决问题的方法）

解. (1) $\vec{u}_0=[1,0,0,1,1,0]^T,\vec{u}_1=[a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6]^T$, 其中$a_i$都是偶数。(4分)

(2)

$$\vec{v}_1=[0,1,0,1,0,0]^T,\quad \vec{v}_2=[1,0,1,0,1,0]^T,\vec{v}_3=[0,1,0,0,0,1]^T,$$

$$\vec{v}_4=[1,0,0,0,1,0]^T,\quad \vec{v}_5=[0,1,0,1,0,1]^T,\quad \vec{v}_6=[0,0,1,0,1,0]^T.\text{(6分)}$$

(3)设每个开关使用x_i次，于是有$\vec{u}_0+x_1\vec{v}_1+x_2\vec{v}_2+x_3\vec{v}_3+x_4\vec{v}_4+x_5\vec{v}_5+x_6\vec{v}_6=\vec{u}_1$，即

$$x_1\vec{v}_1+x_2\vec{v}_2+x_3\vec{v}_3+x_4\vec{v}_4+x_5\vec{v}_5+x_6\vec{v}_6=\vec{u}_1-\vec{u}_0,\text{(2分)}$$

解该线性方程组得

$$x_1=a_2-a_6,\quad x_2=a_1+a_3-a_5,\quad x_3=a_2-a_4+1,\quad x_4=a_5-a_3-1,$$

$$x_5=a_6+a_4-a_2-1,\quad x_6=a_5-a_1\quad \text{(2分)}$$

由于a_i都是偶数，开关两次等于不动，因此最快方法是房间3、4、5各开关一次。(1分)