如果$\mathbf{A}$是n阶方阵，则有

$$R(\mathbf{A}) = n \Leftrightarrow |\mathbf{A}| \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}\text{可逆}$$

$$R(\mathbf{A}) < n \Leftrightarrow |\mathbf{A}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}\text{不可逆}$$

矩阵秩的性质

- $R(\mathbf{A}^T) = R(\mathbf{A})$
- $0 \leq R(\mathbf{A}_{m\times n}) \leq m$
- $R(k\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}), \quad k \neq 0$
- $R(\mathbf{PAQ}) = R(\mathbf{A}), \quad \mathbf{P}, \mathbf{Q}$可逆
- 若$R(\mathbf{A}) = r$，则存在可逆矩阵$\mathbf{P}, \mathbf{Q}$，使得$\mathbf{PAQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$

矩阵秩的性质

- $R(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B})$
- $R(\mathbf{A}) \leq R(\mathbf{A},\mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B})$
- $R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B}) - n \leq R(\mathbf{AB}) \leq R(\mathbf{A})$

<table>
<tr><td rowspan="2">$R(\mathbf{AB})$</td><td>$R(\mathbf{A})$</td><td rowspan="3">$R(\mathbf{A},\mathbf{B})$</td><td rowspan="3">$R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B})$</td><td rowspan="3">$n + R(\mathbf{AB})$</td></tr>
<tr><td>$R(\mathbf{B})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$R(\mathbf{A}+\mathbf{B})$</td></tr>
</table>

- $R(\mathbf{AB}) \leq R(\mathbf{A})$:

  设$R(\mathbf{A}) = r$，则存在可逆矩阵$\mathbf{P}, \mathbf{Q}$，使得

$$\mathbf{PAQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

  令$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$，则

$$R(\mathbf{AB}) = R(\mathbf{PAB}) = R(\mathbf{PAQ}\,\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}) = R(\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}) = R(\mathbf{B}_1) \leq r = R(\mathbf{A})$$

$$R(\mathbf{AB}) = R((\mathbf{AB})^T) = R(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T) \leq R(\mathbf{B}^T) = R(\mathbf{B})$$

- $R(\mathbf{A}) \le R(\mathbf{A},\mathbf{B}) \le R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B})$:

$$R(\mathbf{A}) = R([\mathbf{A},\mathbf{B}]\begin{bmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{O}\end{bmatrix}) \le R(\mathbf{A},\mathbf{B})$$

$$R(\mathbf{A},\mathbf{B}) = R([\mathbf{E},\mathbf{E}]\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \\ & \mathbf{B}\end{bmatrix}) \le R(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \\ & \mathbf{B}\end{bmatrix}) = R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B})$$

- $R(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \le R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B})$:

$$R(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = R([\mathbf{A},\mathbf{B}]\begin{bmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{E}\end{bmatrix}) \le R(\mathbf{A},\mathbf{B}) \le R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B})$$

- $R(\mathbf{A})+R(\mathbf{B})\leq n+R(\mathbf{AB})$:

  设$R(\mathbf{A})=r$，则存在可逆矩阵$\mathbf{P},\mathbf{Q}$，使得

$$\mathbf{PAQ}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_r & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}$$

令$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{B}_2\end{bmatrix}$，其中$\mathbf{B}_2$是$n-r$行，则

$R(\mathbf{B})=R(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B})\leq R(\mathbf{B}_1)+R(\mathbf{B}_2)\leq R(\mathbf{B}_1)+n-r=R(\mathbf{B}_1)+n-R(\mathbf{A})$

又

$$R(\mathbf{AB})=R(\mathbf{PAB})=R(\mathbf{PAQ}\,\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B})=R(\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{O}\end{bmatrix})=R(\mathbf{B}_1)$$

于是

$$n+R(\mathbf{AB})=n+R(\mathbf{B}_1)\geq R(\mathbf{A})+R(\mathbf{B})$$

例 (1.7.5)

设$\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$，证明：$R(\mathbf{A}+\mathbf{E}) + R(\mathbf{A}-\mathbf{E}) = n$

证明： 因为

$$R(\mathbf{A}+\mathbf{E}) + R(\mathbf{A}-\mathbf{E}) \leq n + R((\mathbf{A}+\mathbf{E})(\mathbf{A}-\mathbf{E})) = n + R(\mathbf{A}^2 - \mathbf{E}) = n$$

且

$$R(\mathbf{A}+\mathbf{E})+R(\mathbf{A}-\mathbf{E}) = R(\mathbf{A}+\mathbf{E})+R(\mathbf{E}-\mathbf{A}) \geq R((\mathbf{A}+\mathbf{E})+(\mathbf{E}-\mathbf{A})) = R(2\mathbf{E}) = n$$

所以得证

例 (1.7.6)

设$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times l}=\mathbf{C}$，且$R(\mathbf{A})=n$，求证$R(\mathbf{B})=R(\mathbf{C})$

证明： 由

$$n+R(\mathbf{C})=n+R(\mathbf{AB})\geq R(\mathbf{A})+R(\mathbf{B})=n+R(\mathbf{B})$$

得$R(\mathbf{B})\leq R(\mathbf{C})$；同时

$$R(\mathbf{C})=R(\mathbf{AB})\leq R(\mathbf{B})$$

因此得证

作业

第67页练习1.7:

B3, B4, B6

线性控制系统

设航天飞机状态由下述关系决定：$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$，其中$\mathbf{A}_{n\times n}$描述系统自行运转方式，$\mathbf{B}_{n\times m}$描述外部指令影响系统方式。若矩阵$[\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$行满秩，则该系统为可控制系统，即从初始状态$\mathbf{0}$到任意状态$\mathbf{v}$，最多下达$n$步指令$\mathbf{u}_k$即可实现。

以$n = 4, m = 2$为例，初始状态为$\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$，下达第一个指令后系统状态为$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A0} + \mathbf{B}\mathbf{u}_1 = \mathbf{B}\mathbf{u}_1$，第二个指令后为$\mathbf{x}_2 = \mathbf{AB}\mathbf{u}_1 + \mathbf{B}\mathbf{u}_2$，此后依次为$\mathbf{x}_3 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}_1 + \mathbf{AB}\mathbf{u}_2 + \mathbf{B}\mathbf{u}_3$，$\mathbf{x}_4 = \mathbf{A}^3\mathbf{B}\mathbf{u}_1 + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}_2 + \mathbf{AB}\mathbf{u}_3 + \mathbf{B}\mathbf{u}_4$，然后达到状态$\mathbf{v}$，于是有

$$[\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \mathbf{A}^3\mathbf{B}]\begin{bmatrix}\mathbf{u}_4\\ \mathbf{u}_3\\ \mathbf{u}_2\\ \mathbf{u}_1\end{bmatrix} = \mathbf{v}$$

在$R(\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \mathbf{A}^3\mathbf{B}) = 4$的条件下，这个方程组必然有解（参看下一章），因此系统可控制。