矩阵相似

定义

如果存在可逆矩阵$\mathbf{P}$满足$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}$，则称矩阵$\mathbf{A}$与矩阵$\mathbf{B}$相似，记为$\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$

性质

- 矩阵相似是一种等价关系，

  (1) 自返性: $\mathbf{A}\sim\mathbf{A}$

  (2) 对称性: 如果$\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$，则$\mathbf{B}\sim\mathbf{A}$

  (3) 传递性: 如果$\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$，$\mathbf{B}\sim\mathbf{C}$，则$\mathbf{A}\sim\mathbf{C}$
- 如果$\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$，则$f(\mathbf{A})\sim f(\mathbf{B})$
- 相似矩阵有相同的特征值

矩阵对角化

定义

如果矩阵$\mathbf{A}$相似于对角矩阵$\mathbf{\Lambda}$，则称$\mathbf{A}$可对角化。

定理

n阶方阵可对角化的充要条件为方阵有n个线性无关的特征向量。

- n阶方阵有n个互异特征值（即所有特征值重数都是1），则必然可对角化
- 方阵可对角化当且仅当求特征向量的齐次线性方程组的基础解系向量个数等于特征值重数

矩阵对角化的计算流程

- 由特征方程$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=0$求出所有的特征值$\lambda_i$
- 对每一个特征值λ_i，解线性方程组$(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})\mathbf{x}=\mathbf{0}$，从基础解系向量个数是否等于特征值重数判断是否可对角化
- 选取所有解出的基础解系向量$\{\xi_i\}$构成可逆矩阵$\mathbf{P}=[\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n]$，于是有$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda}$

例 (3.3.1)

判断矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 2 & 3\end{bmatrix}$是否可对角化。

解： 特征多项式为

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

所以特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-1$。

对$\lambda_1=\lambda_2=2$，由于

$$\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & 2 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

因此线性方程组$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\mathbf{x}=\mathbf{0}$的基础解系只有$3-2=1$个向量。所以矩阵不可对角化。

例 (3.3.2)

判断矩阵$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$是否可对角化，并求$\mathbf{A}^n$。

解：特征多项式为

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

所以特征值为$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$。

对$\lambda_1 = -2$，解线性方程组$(\mathbf{A} + 2\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$得基础解系$\xi_1 = [-1, 1, 1]^T$；

对$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$，解线性方程组$(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$得基础解系$\xi_2 = [-2, 1, 0]^T$，$\xi_3 = [0, 0, 1]^T$。

所以矩阵可以对角化。

令

$$\mathbf{P}=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$$

则$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{\Lambda}$，于是$\mathbf{A}^n=(\mathbf{P\Lambda P}^{-1})^n=\mathbf{P\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}$。因为$\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}$，所以

$$\mathbf{A}^n=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^n2^n & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(-1)^{n+1}2^n+2 & (-1)^{n+1}2^{n+1}+2 & 0\\ (-1)^n2^n-1 & (-1)^n2^{n+1}-1 & 0\\ (-1)^n2^n-1 & (-1)^n2^{n+1}-2 & 1\end{bmatrix}$$

例 (3.3.3)

已知矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}$与矩阵$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$相似，*(1)*求$x$与$y$；*(2)*求可逆矩阵$\mathbf{P}$，使得$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{B}$。

解：*(1)* 由于$\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$，因此$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=|\mathbf{B}-\lambda\mathbf{E}|$，即

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&-\lambda&1\\0&1&x-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&y-\lambda&0\\0&0&-1-\lambda\end{vmatrix}$$

于是由

$$-\lambda^3+(2+x)\lambda^2+(1-2x)\lambda-2=-\lambda^3+(1+y)\lambda^2+(2-y)\lambda-2y$$

得$x=0,y=1$

（由于相似矩阵有相同的特征值，因此由$|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|, tr\mathbf{A}=tr\mathbf{B}$得$x=0,y=1$）

(2) 由于$\mathbf{B}$是对角矩阵，因此$\mathbf{A}$的特征值为$2, 1, -1$。

对$\lambda_1 = 2$，解线性方程组$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$得基础解系$\xi_1 = [1, 0, 0]^T$；

对$\lambda_2 = 1$，解线性方程组$(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$得基础解系$\xi_2 = [0, 1, 1]^T$；

对$\lambda_3 = -1$，解线性方程组$(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$得基础解系$\xi_3 = [0, 1, -1]^T$；

于是令

$$\mathbf{P} = [\xi_1, \xi_2, \xi_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

则$\mathbf{P}$为可逆矩阵且$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$。

注：

如果矩阵$\mathbf{B}$不是对角矩阵，该如何找到$\mathbf{P}$？

作业

第144页练习3.3：

A3, A4, A5, B1, B3

马尔可夫链

前面人口迁移模型中的迁移矩阵，一般情况下称为随机矩阵，它有个稳态向量（平衡向量），即

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{p}$$

如

$$\begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.625 \end{bmatrix}$$

随机矩阵是正规的，如果所有元素都是正数。于是对于马尔可夫链$\{\mathbf{x}_k\}$，其中$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k$，有

正规随机矩阵必有唯一的稳态向量$\mathbf{p}$，且无论初始情况如何，马尔可夫链$\{\mathbf{x}_k\}$收敛于$\mathbf{p}$

假设森林中有一群猫头鹰，只以老鼠为食。$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} O_k \\ R_k \end{bmatrix}$表示第$k$个月猫头鹰数量（只）与老鼠的数量（千只），且变化趋势遵循

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ -0.104 & 1.1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

该矩阵有特征值1.02和0.58，对应特征向量为$\mathbf{v}_1 = [10, 13]^T$，$\mathbf{v}_2 = [5, 1]^T$。给定初始状态$\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$，有

$$\mathbf{x}_k = c_1(1.02)^k\mathbf{v}_1 + c_2(0.58)^k\mathbf{v}_2 \approx c_1(1.02)^k\mathbf{v}_1 \quad (k\text{值很大时})$$

因此长期预测猫头鹰与老鼠数量都在增长，且数量趋于$1 : 1300$

生存模型

三个阶段的猫头鹰（幼年，半成年和成年）的数量描述为$\mathbf{x}_k = [j_k, s_k, a_k]^T$，变化趋势为

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

该矩阵特征值为$0.98, -0.02 \pm 0.21i$，设特征向量分别为$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$，于是给定初始状态$\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$，有

$$\mathbf{x}_k = c_1(0.98)^k\mathbf{v}_1 + c_2(-0.02 + 0.21i)^k\mathbf{v}_2 + c_3(-0.02 - 0.21i)^k\mathbf{v}_3$$

于是预测猫头鹰种群将消亡