



厦门大学《线性代数 I》课程试卷

学院 系 年级 专业

主考教师： 试卷类型：期末 A 卷 考试日期：2024.12.31

注意：所有行列式化简和矩阵初等变换必须标出每一步骤！

1. (10 分) 设 A 为三阶矩阵，且其特征值为 $1, -2, -1$ ，求：

- (1) $|A|$ ；
- (2) $(A^* + 3E)$ 的特征值；
- (3) $(A^{-1})^2 + 2E$ 的特征值；
- (4) $|A^2 - A + E|$.

解：

- (1) $|A| = 1 \times (-2) \times (-1) = 2.$ (2 分)
- (2) A^* 的特征值分别为 $\frac{|A|}{1}, \frac{|A|}{-2}, \frac{|A|}{-1}$ ，即 $2, -1, -2$. 故 $A^* + 3E$ 的特征值为 $5, 2, 1.$ (2 分)
- (3) 由 A^{-1} 的特征值分别为 $1, -\frac{1}{2}, -1$ ，得 $(A^{-1})^2 + 2E$ 的特征值分别为 $1^2 + 2, (-\frac{1}{2})^2 + 2, (-1)^2 + 2$ ，即 $3, \frac{9}{4}, 3.$ (3 分)
- (4) 因为 $A^2 - A + E$ 的特征值分别为 $1^2 - 1 + 1, (-2)^2 - (-2) + 1, (-1)^2 - (-1) + 1$ ，即 $1, 7, 3$ ，所以 $|A^2 - A + E| = 1 \times 7 \times 3 = 21.$ (3 分)

2. (10 分) 利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的一个最大无关组，并把其余列向量用最大无关组线性表示：

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}.$$

解：记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ ，因

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (5 \text{ 分})$$

从 A 的行最简形可知: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 A 的列向量组的一个最大无关组, (3 分)且

$$\alpha_4 = \frac{8}{5}\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3. \quad (2 \text{ 分})$$

3. (10 分) 设向量 γ 在基 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 下的坐标为 $(2, 1, 1)$. 求向量 γ 在基 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的坐标。

解. 因为向量 γ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $(2, 1, 1)$, 所以

$$\gamma = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad (3 \text{ 分}) = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad (2 \text{ 分})$$

设 γ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为 (x_1, x_2, x_3) , 即 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = \gamma$. (1 分) 由

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3 | \gamma) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \quad (3 \text{ 分}) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

因此, 向量 γ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为 $(-1, 5, -1)$. (1 分)

4. (15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

(1) 求矩阵 A 的特征值及线性无关的特征向量;

(2) 求正交矩阵 Q , 使得 $Q^\top A Q$ 为对角矩阵。

解:

(1) 由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)^2(\lambda - 1) = 0$. 得 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$. (3 分)

由 $-2E - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 得, $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ 的线性无关的

特征向量为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2 分) 由 $E - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 得 $\lambda_3 = 1$ 对应的线性无关的特征向量为 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (1 分)

(2) 令

$$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{(3 分)}$$

单位化得 $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\gamma_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (3 分) 令 $Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, (2 分) 则

$$Q^\top A Q = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{(1 分)}$$

5. (10 分) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。记

$$\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \beta_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3.$$

判断向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的线性相关性并给出证明。

解: 令

$$k_1(\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3) + k_2(2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) + k_3(3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3) = 0,$$

整理得: $(k_1 + 2k_2 + 3k_3)\alpha_1 + (-k_1 + k_2 + k_3)\alpha_2 + (-2k_1 - k_2 + 2k_3)\alpha_3 = 0$. 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 所以

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0, \\ -k_1 + k_2 + k_3 = 0, \\ -2k_1 - k_2 + 2k_3 = 0. \end{cases}$$

该方程组的系数矩阵的行列式为 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$. 因此, $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 即向量组 $\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$ 线性无关。

6. (10 分) 设 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + ax_3^2$ 和 $g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ 是两个实二次型。试问：

- (i) 常数 a 取何值时, 二次型 f 是正定的。
- (ii) 常数 a 取何值时, 二次型 f 与 g 有相同的规范形。

解:(i)(5 分) 对二次型 f 进行配方:

$$f = (\sqrt{2}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2)^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + ax_3^2.$$

则由替换 $\sqrt{2}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 = y_1, x_2 = y_2$ 和 $x_3 = y_3$ 可得 f 的标准形为 $y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2 + ay_3^2$. 由此知当 $a > 0$ 时, 二次型 f 是正定的。

(ii) (5 分) 方法 1: 对二次型 g 进行配方:

$$g = 2(x_1 - x_2)^2 - (x_2 + 2x_3)^2 + 4x_3^2.$$

则由替换 $y_1 = \sqrt{2}(x_1 - x_2), y_2 = 2x_3$, 和 $y_3 = x_2 + 2x_3$ 和 可得 g 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$. 由于二次型 f 与 g 有相同的规范形, 故有 $a < 0$.

方法 2: 对应二次型 g 的对称矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. 得其特征值为 $1, 4, -2$.(3 分)

从而 g 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$. 得 $a < 0$.(2 分)

7. (10 分) 四元非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 的三个解向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 且 $R(A) = 3$.

设 $\alpha_1 + \alpha_2 = (2, 0, -3, 5)^\top, \alpha_2 + \alpha_3 = (1, 2, -5, 7)^\top$, 求方程组 $AX = \beta$ 的通解。

解: 因为 $R(A) = 3$, 所以方程组 $AX = 0$ 的基础解系只有含有一个线性无关的解向量。(2 分)

$$(\alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_1 + \alpha_2) = (-1, 2, -2, 2)^\top \quad (3 \text{ 分})$$

为 $AX = 0$ 的一个基础解系, 又

$$\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 = \left(1, 0, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)^\top \quad (3 \text{ 分})$$

为方程组 $AX = \beta$ 的一个特解, 故方程组 $AX = \beta$ 的通解为

$$k(-1, 2, -2, 2)^\top + \left(1, 0, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)^\top \quad (\text{其中 } k \text{ 为任意常数}) \quad (2 \text{ 分})$$

8. (15 分) 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ c \end{pmatrix}$, 问: 当 a, b, c 满足什么条件时,

- (1) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一线性表示?
- (2) β 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?
- (3) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示方法不唯一? 并求出一般的表达式。

解. 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$, 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 即 $AX = \beta$. (2 分)

(1) 若 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一线性表示, 即 $AX = \beta$ 有唯一解, 此时应有 $R(A) = 3, |A| \neq 0$. 由

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -(a+4) \neq 0.$$

即 $a \neq -4$ 时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一线性表出。 (3 分)

(2) β 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 即 $AX = \beta$ 无解, $r(A) < r(A|\beta)$.

由 (1) 得 $a = -4$, 则

$$(A|\beta) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -b-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & c-3b+1 \end{array} \right).$$

当 $c-3b+1 \neq 0$ 时, $R(A|\beta) = 3 > R(A) = 2$. 因此, $a = -4$ 且 $c-3b+1 \neq 0$ 时, β 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出。 (5 分)

(3) 综合上, 当 $a = -4$ 且 $c-3b+1 = 0$ 时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 且表示方法不唯一。 (2 分)

此时 $(A|\beta) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -b-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$. 则 $AX = \beta$ 的解为 $X = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -b-1 \\ 2b+1 \end{pmatrix}$, 即

$$\beta = k\alpha_1 + (-2k-b-1)\alpha_2 + (2b+1)\alpha_3 \quad (\text{其中 } k \text{ 为任意常数}). \quad (3 \text{ 分})$$

9. (10 分) 设 A 为 n 阶实矩阵。证明: A 对称正定的充分必要条件为存在可逆 n 阶实下三角矩阵 L 使得 $A = LL^T$.

证明:

(a) 充分性：因为 $A = LL^T$, 所以

$$A^T = (LL^T)^T = (L^T)^T L^T = LL^T = A.$$

故而, A 对称。(1 分)

对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 且 $x \neq 0$, 因为 L 可逆, 所以 L^T 可逆且 $L^T x \neq 0$ 。进而,

$$x^T A x = x^T LL^T x = (L^T x)^T (L^T x) > 0. \quad \text{(1 分)}$$

因此, A 正定。

综上, A 对称正定。(1 分)

(b) 必要性：用归纳法证明。

(i) 当 $n=1$ 时, $A=a_{11}$ 。因为 A 正定, 所以 $a_{11}>0$ 。故而, 取 $L=\sqrt{a_{11}}$ 有 $A=LL^T$ 。
所以, 当 $n=1$ 时结论成立。

(ii) 假设 $n-1$ 时结论成立。下证 n 时结论成立。设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \alpha & A_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}^{n-1}$ 且 $A_1 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ 。

因为 A 对称正定, 所以 $a_{11}=e_1^T A e_1 > 0$ 且 A_1 对称(正定)。令 $l_{11}=\sqrt{a_{11}}(>0)$ 且

$$L_1 = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{11}^{-1}\alpha & E_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

注意到 L 可逆且

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} l_{11}^{-1} & 0 \\ -a_{11}^{-1}\alpha & E_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

因此

$$\begin{aligned} L_1^{-1} A L_1^{-T} &= \begin{pmatrix} l_{11}^{-1} & 0 \\ -a_{11}^{-1}\alpha & E_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \alpha & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11}^{-1} & -a_{11}^{-1}\alpha^T \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} l_{11} & l_{11}^{-1}\alpha^T \\ 0 & A_1 - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11}^{-1} & -a_{11}^{-1}\alpha^T \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^T \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

因为 A 对称正定且 L_1 可逆, 所以对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, 有 $L_1^{-T} x \neq 0$,

$$x^T L_1^{-1} A L_1^{-T} x = (L_1^{-T} x)^T A (L_1^{-T} x) > 0.$$

故而 $L_1^{-1}AL_1^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^T \end{pmatrix}$ 对称正定。进而，对于任意 $X_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$ 且 $X_1 \neq 0$, 有

$$X_1^T(A_1 - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^T)X_1 = (0, X_1^T) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ X_1 \end{pmatrix} > 0$$

所以 $A_1 - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^T \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ 对称正定。由归纳假设，存在可逆 $n-1$ 阶实下三角矩阵 $L_2 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ 使得

$$A_1 - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^T = L_2 L_2^T.$$

令 $L = L_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}$, 则 L 为可逆 n 阶实下三角矩阵且 $A = LL^T$ 。

故而，当 n 时结论成立。(7 分)