惯性定理

定理

- 给定二次型f，它的规范形$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2$是唯一确定的
- 给定实对称矩阵$\mathbf{A}$，它合同于唯一确定的对角矩阵

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_p & & \\ & -\mathbf{E}_q & \\ & & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

其中p称为正惯性指数，q称为负惯性指数

定理

两个实对称矩阵合同当且仅当它们有相同的正负惯性指数

定义

设实二次型$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$对任意$\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$都有$f(\mathbf{X}) > 0$，则称二次型$f$为正定二次型，实对称矩阵$\mathbf{A}$为正定矩阵；

若对任意$\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$都有$f(\mathbf{X}) < 0$，则称二次型$f$为负定二次型，实对称矩阵$\mathbf{A}$为负定矩阵（或：$-f$是正定二次型，$-\mathbf{A}$是正定矩阵）

定理 (赫尔维茨定理)

实对称矩阵正定当且仅当各阶顺序主子式全正。

正定的判别

- 定义：函数$f(\mathbf{X}) > 0$对任意$\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$都成立
- 二次型标准形系数全正（或规范形是n个平方和）
- 矩阵$\mathbf{A}$特征值全正数
- 矩阵$\mathbf{A}$合同于$\mathbf{E}$（存在可逆矩阵$\mathbf{P}$满足$\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{E}$或者$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{P}$）
- 正惯性指数$p = n$
- 赫尔维茨定理

例 (4.3.2)

判断二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+7x_2^2+5x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3$是否正定

解： 由于

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)=&(x_1-x_2+2x_3)^2+7x_2^2+5x_3^2-(x_2-2x_3)^2\\=&(x_1-x_2+2x_3)^2+6x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\=&(x_1-x_2+2x_3)^2+(x_3+2x_2)^2+2x_2^2\end{aligned}$$

因此原二次型是正定的

例 (4.3.4)

设$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$，问$t$取何值时，二次型正定

解： 由于

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3)=&(x_1+tx_2-x_3)^2+x_2^2+5x_3^2+4x_2x_3-(tx_2-x_3)^2\\
=&(x_1+tx_2-x_3)^2+(1-t^2)x_2^2+(4+2t)x_2x_3+4x_3^2\\
=&(x_1+tx_2-x_3)^2+(2x_3+\frac{2+t}{2}x_2)^2+x_2^2(1-t^2-\frac{(2+t)^2}{4})\\
=&(x_1+tx_2-x_3)^2+(2x_3+\frac{2+t}{2}x_2)^2-\frac{t(4+5t)}{4}x_2^2
\end{aligned}
$$

因此二次型正定当且仅当$t(4+5t)<0$，即$-\frac{4}{5}<t<0$

作业

第176页练习4.3:

A1, A2, A3