厦门大学《线性代数》课程试卷

________学院______系______年级_______专业

主考教师：______ 试卷类型：期中考解答卷 考试日期：2022.04.09

1. (10分) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解: -42（过程8分，结果2分）

2. (10分) 设$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$的第$i$行第$j$列元素$a_{ij}$的代数余子式记作$A_{ij}$.

求$A_{11} + 2A_{12} + 3A_{13} + 4A_{14}$.

解：$A_{11} + 2A_{12} + 3A_{13} + 4A_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15.$

（写出$A_{11} + 2A_{12} + 3A_{13} + 4A_{14}$的行列式3分，行列式计算过程5分，结果2分。）

3. (10分) 设A,B是n阶方阵，A^*是A的伴随矩阵，B^{-1}是B的逆矩阵，且$|A| = 2$, $|B| = 3$. 求行列式$|2A^*B^{-1}|$.

解：$|2A^*B^{-1}| = \left|2A^*B^{-1}\right| = 2^n \left|A^*B^{-1}\right| = 2^n |A^*| \cdot \left|B^{-1}\right| = 2^n |A|^{n-1} |B|^{-1} = 2^n \cdot 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3} = 2^{2n-1}/3.$

（过程8分，结果2分）

4. (10分) 用<u>克拉默法则</u>求解线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ ax_1+bx_2+cx_3=0, \\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0, \end{cases}$ 其中a,b,c两两不等。

解：方程组的系数行列式为$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(c-a)(c-b)(b-a)$.（3分）

由于a,b,c互不相同，$|A|\neq 0$. 由克拉默法则可知，方程有唯一解。（1分）

由$B_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & c \\ 0 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(c-b)bc$,（1分）

$B_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & c \\ a^2 & 0 & c^2 \end{vmatrix}=\overset{(a-c)}{\cancel{(c-a)}}ac$,（1分）

$B_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & 0 \\ a^2 & b^2 & 0 \end{vmatrix}=(b-a)ab$,（1分）

可得

$$x_1=\frac{B_1}{|A|}=\frac{(c-b)bc}{(c-a)(c-b)(b-a)}=\frac{bc}{(c-a)(b-a)},\text{（1分）}$$
$$x_2=\frac{B_2}{|A|}=\frac{(a-c)\cancel{(c-a)}ac}{(c-a)(c-b)(b-a)}=\frac{ac}{(c-b)\cancel{(b-a)}}\,(a-b),\text{（1分）}$$
$$x_3=\frac{B_3}{|A|}=\frac{(b-a)ab}{(c-a)(c-b)(b-a)}=\frac{ab}{(c-a)(c-b)}.\text{（1分）}$$

5. (10分) 设$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, 且$R(A)=3$. 求常数$a,b$的值。

解：由于$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & a-2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & 4-2b \end{bmatrix}$ （4分）

又由$R(A)=3$,可知$|A|=2(a-1)(2-b)=0$. 从而$a=1$或$b=2$.（3分）

但$R(A)=3$说明$a=1$和$b=2$不能同时成立。因此，我们得到所求的条件为：(1) $a=1$ 且$b\neq 2$; (2) $a\neq 1$且$b=2$.（3分）

6. (10分) 求n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

解：

$$\begin{aligned} D_n &= 2D_{n-1}+2\text{（2分）} \\ &= 2(D_{n-2}+2)+2\text{（2分）} \\ &= 2^2D_{n-2}+2^2+2 \\ &= \cdots = 2^n+\cdots+2^2+2\text{（3分）} \\ &= \frac{2(1-2^n)}{1-2} \\ &= 2^{n+1}-2\text{（3分）} \end{aligned}$$

7. (15分) 问常数k为何值时方程组$\begin{cases} x_1+kx_2+x_3=k \\ x_1+x_2+kx_3=k^2 \\ kx_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$

(1) 无解？(2)有唯一解？(3)有无穷多解?

并在方程组有无穷多解时，求出原方程组的通解。

解：对方程组的增广矩阵做行初等变换可得：

$$[A\ \beta]=\begin{bmatrix} 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k^2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & k & 1 & k \\ 0 & 1-k & k-1 & k^2-k \\ 0 & 1-k^2 & 1-k & 1-k^2 \end{bmatrix}\text{（3分）}$$

若$k=1$, 则$[A\ \beta]\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.（2分）

从而$R(A)=R(A,\beta)=1<3$. 此时方程有无穷多个解。（2分）

由$x_1+x_2+x_3=1$可得方程组通解为：$x_1=1-x_2-x_3$, 其中x_2,x_3是任意常数。（2分）

若$k\neq 1$, 则$[A\ \beta]\rightarrow\begin{bmatrix}1 & k & 1 & k\\ 0 & 1 & -1 & -k\\ 0 & 0 & k+2 & (k+1)^2\end{bmatrix}$ （2分）

(1) 如果$k+2\neq 0$, 则$R(A)=R\left(A,\beta\right)=3$. 此时方程组有唯一解。（2分）

(2) 如果$k+2=0$, 则$R(A)=2$, $R\left(A,\beta\right)=3$. 此时方程组无解。（2分）

8. (15分) 设$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$, 且$AXA+BXB=AXB+BXA+A(A-B)$. 求矩阵$X$. (逆矩阵必须使用初等变换计算)

解：由$AXA+BXB=AXB+BXA+A(A-B)$可得$(A-B)X(A-B)=A(A-B)$. （3分）

因为$A-B=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $|A-B|=1\neq 0$, 所以$A-B$是可逆矩阵.（3分）

从而$(A-B)X=A$且$X=(A-B)^{-1}A$. （3分）

X的解法一：由

$$[A-B\ \ E]=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\left[E\ \ (A-B)^{-1}\right]$$

可得$(A-B)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.（3分）

所以，$X=(A-B)^{-1}A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$.（3分）

X的解法二：$[A-B\ \ A]=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\left[E\ \ (A-B)^{-1}A\right]$.

从而$X=(A-B)^{-1}A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$.（6分）

9. (10分) 设A是一个n阶矩阵，$R(A)=1$. 试证：

(1) A可表成$A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}[b_1\ b_2\ \cdots b_n]$.

(2) $A^2=kA$, 其中k是某个常数。

证明：(1) 因为$R(A)=1$, 所以A经过初等行变换后为$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 其中$b_1,b_2,\cdots,b_n$不全为零，即矩阵$A$的任意两行元素成比例。（3分）

设A的各行分别为向量$[b_1,b_2,\cdots,b_n]$的$a_1,a_2,\cdots,a_n$倍，则可得$A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}[b_1\ b_2\ \cdots b_n]$.（2分）

(2) 由(1)可得：

$$A^2=\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}[b_1\ b_2\ \cdots b_n]\right)^2=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\left([b_1\ b_2\ \cdots b_n]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right)[b_1\ b_2\ \cdots b_n]$$

$$=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)[b_1\ b_2\ \cdots b_n]=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}[b_1\ b_2\ \cdots b_n]=kA,$$

其中$k=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$. （5分）