厦门大学《线性代数 I》课程试卷

________学院______系______年级________专业

主考教师：____ 试卷类型：期末 A 卷 考试日期：2024.06.14

注意：所有行列式化简和矩阵初等变换必须标出每一步骤！

1. (10 分)

   (1) 设 3 阶矩阵 B, $B-E$ 和 $B+2E$ 均不可逆，求 $|B+E|$.

   (2) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 1, -1, 2，求 $A^*+3A-2E$ 的全部特征值。

   解.

   (1) 因矩阵 $B, B-E, B+2E$ 均不可逆，则有 $|B|=0, |B-E|=0, |B+2E|=0$. 又因 B 为 3 阶方阵，故 0, 1, -2 为 B 的全部特征值。进而，矩阵 $B+E$ 的全部特征值为 1, 2, -1. (3 分)于是，$|B+E|=1\times 2\times(-1)=-2$. (2 分)

   (2) 因 A 的特征值全不为 0，知 A 可逆，故 $A^*=|A|A^{-1}$, 而 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2$, (1 分)所以

   $$A^*+3A-2E=-2A^{-1}+3A-2E.\text{(1 分)}$$

   把上述式记作 $\varphi(A)$, 有 $\varphi(\lambda)=\frac{-2}{\lambda}+3\lambda-2$. 从而可得 $\varphi(A)$ 的特征值为 $\varphi(1)=-1$, $\varphi(-1)=-3$, $\varphi(2)=3$.(3 分)

2. (10 分) 已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}, \quad \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$.

   (1) 判断向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性相关性。

   (2) 判断向量组 α_1,α_2 的线性相关性。

   解. 由

   $$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&5&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-\frac{5}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix},\text{(4 分)}$$

   可见 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；(3 分) 同时可见 $R(\alpha_1,\alpha_2)=2$，故向量组 α_1,α_2 线性无关。(3 分)

3. (10 分) 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_5=0, \\ x_1+x_2-x_3=0, \\ x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$$

的基础解系。

解. 对齐次线性方程组的系数矩阵 A 作初等行变换，将 A 化为行简化梯形矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{(4 分)}$$

$\Rightarrow R(A)=3<5.$ (1 分) 由此得到方程组的一般解 (主元为 x_1,x_3,x_4)：

$$\begin{cases} x_1=-x_2-x_5, \\ x_3=-x_5, \\ x_4=0, \end{cases}$$

其中 x_2,x_5 为自由未知量。(3 分) 依次令 $x_2=1,x_5=0$ 和 $x_2=0,x_5=1$，得到方程组的一个基础解系：

$$\eta_1=(-1,1,0,0,0)^T, \quad \eta_2=(-1,0,-1,0,1)^T. \text{(2 分)}$$

4. (10 分) 设 $\mathbb{R}^3$ 的两个基 I 和 II 为:

$$\mathrm{I}:\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{II}:\beta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \beta_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求由基 I 到基 II 的过渡矩阵；

(2) 设向量 γ 在基 I 中的坐标为 $(-2,1,2)^T$，求 γ 在基 II 中的坐标。

解：(1) 由基 I 到基 II 的过渡矩阵 $P=A^{-1}B$，其中 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$. 用矩阵的初等行变换把矩阵 (A,B) 中的 A 变成 E，则 B 相应地变成 $A^{-1}B$.

$$(A,B)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

于是，过渡矩阵 $P=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. (5 分)

(2) 易求得 $P^{-1}=\begin{pmatrix}-18&-11&-6\\5&3&2\\3&2&1\end{pmatrix}$，故向量 γ 在基 II 中的坐标（向量）为

$$P^{-1}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18&-11&-6\\5&3&2\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\-3\\-2\end{pmatrix}$$

即向量 γ 在基 II 中的坐标为 $(13,-3,-2)^T$. (5 分)

5. (10 分) 设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&t\\1&0&0\end{pmatrix}$.

(1) 求矩阵 A 的所有特征值;

(2) 问 t 为何值时，矩阵 A 能对角化?

解. (1) 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&1\\1&1-\lambda&t\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}=-(1-\lambda)^2(\lambda+1),$$

得 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$. (3 分)

(2) 当 $\lambda_1=-1$ 时，可求得线性无关的特征向量恰有 1 个，故矩阵 A 可对角化的充分必要条件是对应重根 $\lambda_2=\lambda_3=1$，有 2 个线性无关的特征向量，即方程 $(A-E)x=0$ 有 2 个线性无关的解，亦即系数矩阵 $A-E$ 的秩 $R(A-E)=1$. (2 分)

由

$$A-E=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&t\\1&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&t+1\\0&0&0\end{pmatrix},\text{(2 分)}$$

要 $R(A-E)=1$，得 $t+1=0$，即 $t=-1$. 因此，当 $t=-1$ 时，矩阵 A 能对角化。(3 分)

6. (15 分) 设有向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}a\\2\\10\end{pmatrix};\beta=\begin{pmatrix}1\\b\\-1\end{pmatrix}.$$

问 a,b 为何值时:

(1) 向量 β 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示式唯一；

(2) 向量 β 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；

(3) 向量 β 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示式不唯一，并求一般表示式。

解. 记矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 那么方程 $A\vec{x}=\beta$ 有解当且仅当 β 可由向量组 A 线性表示，因此本题可以归结为含参数的非齐次线性方程组的求解：

对增广矩阵作行初等变换化简可得

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -4 & 1\\ 1 & 1 & 2 & b\\ 4 & 5 & 10 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}-1 & 0 & -a-4 & -1-2b\\ 0 & -1 & 2+a & b+1\\ 0 & 0 & 4+a & -3b\end{pmatrix}\ (3\text{ 分})$$

因此,

(1) 当 $4+a\neq 0$，即 $a\neq -4$ 时，方程组有唯一解；(3 分)

(2) 当 $a=-4$ 且 $b\neq 0$ 时，方程组无解。(3 分)

(3) 当 $a=-4,b=0$ 时，增广矩阵为：

$$(A,\beta)\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

此时 $R(A)=R(A,\beta)=2<3$, 方程 $AX=\beta$ 有无穷多解, 从而向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示式不唯一。(3 分)

因为方程 $AX=\beta$ 的通解为

$$X=c\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix},\forall c\in\mathbb{R}.$$

故 β 由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示的一般表示式为

$$\beta=AX=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\ -(2c+1)\\ c\end{pmatrix}=\alpha_1+(-2c-1)\alpha_2+c\alpha_3,\quad c\in\mathbb{R}.(3\text{ 分})$$

7. (15 分) 求一个<u>**正交线性替换**</u> $X=PY$，把二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$$

化为标准形。

解　依题设知，所给的二次型 f 的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix},$$

其特征方程为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&-2\\-2&1-\lambda&-2\\-2&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&-2\\-2&1-\lambda&-2\\0&-3+\lambda&3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-3)^2(\lambda+3)=0,$$

故矩阵 A 特征值为 $3,3,-3$. (2 分)

当 $\lambda_1=3$ 时，因

$$A-3E=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\text{(1 分)}$$

解得方程组 $(A-3E)X=0$ 的一个基础解系为 $\xi_1=(1,-1,0)^\top,\xi_2=(1,0,-1)^\top$. (2 分)

当 $\lambda_2=-3$ 时，因

$$A+3E=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},\text{(1 分)}$$

解得方程组 $(A+3E)X=0$ 的一个基础解系为 $\xi_3=(1,1,1)^\top$.(1 分)

将向量组 ξ_1,ξ_2 正交化，可得

$$\beta_1=\xi_1=(1,-1,0)^\top,\text{(1 分)}$$

$$\beta_2=\xi_2-\frac{(\xi_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,0,-1)^\top-\frac{1}{2}(1,-1,0)^\top=\frac{1}{2}(1,1,-2)^\top;\text{(1 分)}$$

再将向量组 β_1,β_2,ξ_3 单位化，可得

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^\top,\text{(1 分)}\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^\top,\text{(1 分)},\gamma_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^\top.\text{(1 分)}$$

令

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\text{(1 分)}$$

则经正交线性替换 $X=PY$，原二次型 f 可化为标准形 $3y_1^2+3y_2^2-3y_3^2$.(2 分)

8. (10 分) 设 A 是 5×4 矩阵，矩阵 A 的秩为 $R(A)=2$. 若已知 $\alpha_1=(1,2,0,1)^T$，$\alpha_2=(2,1,1,3)^T$ 是方程组 $AX=\beta$ 的两个解，$\alpha_3=(1,0,1,0)^T$ 是对应齐次方程组 $AX=0$ 的一个解，试求 $AX=\beta$ 的一般解。

解. 首先，$AX=0$ 的基础解系是由 $4-R(A)=2$ 个解组成，(2 分) $\alpha_4=\alpha_2-\alpha_1=(1,-1,1,2)^T$ 与 α_3 是 $AX=0$ 的两个线性无关的解 (即基础解系)，(4 分) 所以 $AX=\beta$ 的一般解为

$$X=k_1\alpha_3+k_2(\alpha_2-\alpha_1)+\alpha_1=k_1(1,0,1,0)^T+k_2(1,-1,1,2)^T+(1,2,0,1)^T,$$

其中 k_1,k_2 为任意常数。(4 分)

9. (10 分) 设 A 是 n 阶实对称矩阵，满足 $A^2=A$, 且矩阵 A 的秩 $R(A)=r$, 其中 $0<r\le n$.

(a) 证明：存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=\mathrm{diag}(1,1,\dots,1,0,\dots,0)$（其中含 r 个 1）;

(b) 求 $|A-2E|$ 的值。

证. (1) 设 $AX=\lambda X$，因为 $A^2=A$，则

$$(A^2-A)X=A^2X-AX=\lambda^2X-\lambda X=(\lambda^2-\lambda)X=0,$$

因为 $X\neq 0$，所以 $\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)=0$，故 A 的特征值是 0 或 1. (2 分) 又因 A 是实对称矩阵，所以存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \text{(3 分)}$$

其中 r 是矩阵 A 的秩。因此，结论成立。

(2) 方法一: 由 (1) 可知存在正交矩阵 P 使得 $A=P\Lambda P^{-1}$. (1 分) 从而

$$\begin{aligned}|A-2E| &= \left|P\Lambda P^{-1}-2E\right| = \left|P(\Lambda-2E)P^{-1}\right|\\ &= |P|\,|\Lambda-2E|\,\left|P^{-1}\right| = |\Lambda-2E|\\ &= \left|\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2E_r & 0\\ 0 & 2E_{n-r}\end{pmatrix}\right|\\ &= \left|\begin{pmatrix}-E_r & 0\\ 0 & -2E_{n-r}\end{pmatrix}\right|\\ &= (-1)^n2^{n-r}.\text{(4 分)}\end{aligned}$$

方法二: 因为 $|A-\lambda E|=(1-\lambda)^r(-1)^{n-r}\lambda^{n-r}$, (2 分) 所以

$$|A-2E|=(1-2)^r(-1)^{n-r}2^{n-r}=(-1)^n\cdot 2^{n-r}.\text{(3 分)}$$