行列式

- 矩阵行列式是定义在矩阵上一个函数，记为$|\mathbf{A}|$或者$det\mathbf{A}$；例如

$$|a|, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \cdots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 余子式M_{ij}，代数余子式$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$

注：

行列式本质是一个数字，矩阵代表着一堆数字

行列式计算规则

按行（列）展开原则：

$$
\begin{aligned}
D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \\
= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}
\end{aligned}
$$

例

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = ad + c(-b) = b(-c) + da = c(-b) + da$$

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -3(-1 \cdot 0 - 3 \cdot 3) - 2(2 \cdot 0 - 3 \cdot 1) + (2 \cdot 3 + 1 \cdot 1) = 40$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(2 + 9) + (6 + 1) = 40$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

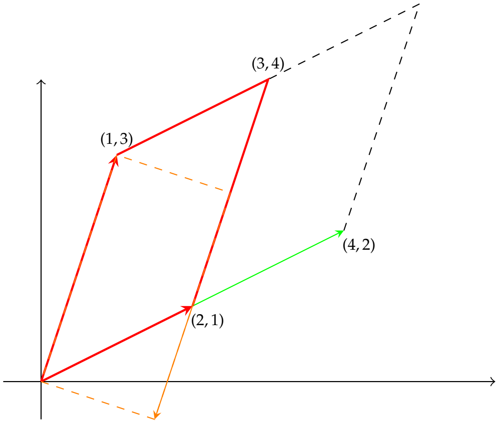
$$= 3\left(4\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right) + \cdots$$

$$= \cdots$$

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ & a_{22} & * & \cdots & * \\ & & a_{33} & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ * & a_{22} & & & \\ * & * & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & * & * & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

行列式$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$的几何含义：



$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix}$$

行列式性质

- 两行互换变符号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

  推论：两行相同值为0

- 一行公因子可提出

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 3a_2 & 3b_2 & 3c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

  推论：两行成比例值为0

- 一行加另一行倍数值不变

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+2a_1 & b_2+2b_1 & c_2+2c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

行列式性质

- 一行拆为两组数之和，行列式可按该两组数分拆

$$\begin{vmatrix} a_1+x & b_1+y & c_1+z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- 转置行列式值不变

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

注：

1. 性质1, 4和5足以决定行列式的定义
2. 性质2和4说明行列式运算对单个行满足线性性

行列式化简

- 任何行列式总能利用性质化为上三角形或下三角形行列式；尤其是可以只利用行的性质化为上（下）三角形行列式，同时还能保持值不变；
- 行列式计算原则就是利用性质化出尽可能多的0，然后展开计算。因此方式灵活而不唯一。

如果$a_{11} \neq 0$，则

$$\begin{vmatrix} {\color{red}a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & {\color{red}a'_{22}} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{vmatrix}$$

如果$a_{11} = 0$，则将第一列不为0的，如a_{31}那一行加到第一行

例 (1.4.12)

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -160$$

例 (1.4.12)

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} = -160$$

例 (1.4.16)

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & a_2 & & & b_2 & \\ & & a_3 & b_3 & & \\ & & c_3 & d_3 & & \\ & c_2 & & & d_2 & \\ c_1 & & & & & d_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ c_1 & & & & & d_1 \\ & & a_3 & b_3 & & \\ & & c_3 & d_3 & & \\ & c_2 & & & d_2 & \\ & a_2 & & & b_2 & \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_1 & d_1 & & & & \\ & & a_3 & b_3 & & \\ & & c_3 & d_3 & & \\ & & & & d_2 & c_2 \\ & & & & b_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1d_1 - b_1c_1)(a_2d_2 - b_2c_2)(a_3d_3 - b_3c_3)$$

例 (1.4.16)

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & & & b_2 & \\ & a_3 & b_3 & & \\ & c_3 & d_3 & & \\ c_2 & & & d_2 & \\ & & & & d_1 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} & & & & b_1 \\ a_2 & & & b_2 & \\ & a_3 & b_3 & & \\ & c_3 & d_3 & & \\ c_2 & & & d_2 & \end{vmatrix} \\
&= a_1 d_1 \begin{vmatrix} a_2 & & & b_2 \\ & a_3 & b_3 & \\ & c_3 & d_3 & \\ c_2 & & & d_2 \end{vmatrix} - c_1 b_1 \begin{vmatrix} a_2 & & & b_2 \\ & a_3 & b_3 & \\ & c_3 & d_3 & \\ c_2 & & & d_2 \end{vmatrix} \\
&= (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2)(a_3 d_3 - b_3 c_3)
\end{aligned}
$$

例 (1.4.15)

证明 $\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

证明： 可通过行性质将**A**化为下三角形同时行列式值不变，然后通过列性质将**B**化为下三角形同时行列式值不变。于是，

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & & & \\ a'_{21} & a'_{22} & & & \\ c_{11} & c_{12} & b'_{11} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & b'_{21} & b'_{22} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & b'_{31} & b'_{32} & b'_{33} \end{vmatrix} = (a'_{11}a'_{22})(b'_{11}b'_{22}b'_{33}) = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

注：

分块上（下）三角矩阵的行列式等于对角块的行列式之积（前提是对角块都是方阵），即

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & * & \cdots & * \\ & \mathbf{A}_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mathbf{A}_{ss} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}_{11}||\mathbf{A}_{22}|\cdots|\mathbf{A}_{ss}|$$

除此之外，一般分块矩阵的行列式是无法计算的。

作业

第38页练习1.4：

A4(1,2,3,4), A5, A6（留意A6中分块矩阵行列式计算）