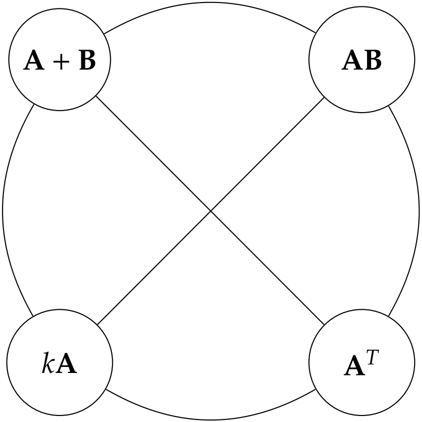
矩阵的运算性质



- $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}_{ij}+\mathbf{B}_{ij}=\mathbf{B}_{ij}+\mathbf{A}_{ij}$$

- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ij}+\mathbf{C}_{ij}=\mathbf{A}_{ij}+\mathbf{B}_{ij}+\mathbf{C}_{ij}$$

- $k(\mathbf{A}+\mathbf{B})=k\mathbf{A}+k\mathbf{B}$, $(k_1+k_2)\mathbf{A}=k_1\mathbf{A}+k_2\mathbf{A}$:

$$k(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ij}=k(\mathbf{A}_{ij}+\mathbf{B}_{ij})$$

- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$, $\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{CA}+\mathbf{CB}$:

$$((\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C})_{ij}=\sum(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ik}\mathbf{C}_{kj}=\sum(\mathbf{A}_{ik}\mathbf{C}_{kj}+\mathbf{B}_{ik}\mathbf{C}_{kj})$$

- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$:

$$((\mathbf{A}+\mathbf{B})^T)_{ij}=(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ji}=\mathbf{A}_{ji}+\mathbf{B}_{ji}=(\mathbf{A}^T)_{ij}+(\mathbf{B}^T)_{ij}$$

- $k_1(k_2\mathbf{A})=(k_1k_2)\mathbf{A}$:

$$k_1(k_2\mathbf{A})_{ij}=k_1k_2\mathbf{A}_{ij}$$

- $k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$:

$$k(\mathbf{AB})_{ij} = k\sum \mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}$$

- $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$:

$$((k\mathbf{A})^T)_{ij} = (k\mathbf{A})_{ji} = k\mathbf{A}_{ji} = k(\mathbf{A}^T)_{ij}$$

- $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$:

$$((\mathbf{AB})\mathbf{C})_{ij} = \sum_k (\mathbf{AB})_{ik}\mathbf{C}_{kj} = \sum_k (\sum_s \mathbf{A}_{is}\mathbf{B}_{sk})\mathbf{C}_{kj} = \sum_{k,s} \mathbf{A}_{is}\mathbf{B}_{sk}\mathbf{C}_{kj}$$

- $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$:

$$((\mathbf{AB})^T)_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = \sum \mathbf{A}_{jk}\mathbf{B}_{ki} = \sum (\mathbf{A}^T)_{kj}(\mathbf{B}^T)_{ik}$$

- $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$:

$$((\mathbf{A}^T)^T)_{ij} = (\mathbf{A}^T)_{ji} = \mathbf{A}_{ij}$$

例 (1.2.7)

设$\mathbf{A} = [1, 2, 3], \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, 求$(\mathbf{BA})^{11}$

解:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{BA})^{11} &= \overbrace{(\mathbf{BA})(\mathbf{BA})\cdots(\mathbf{BA})}^{11} \\
&= \mathbf{B}\,\overbrace{(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})\cdots(\mathbf{AB})}^{10}\,\mathbf{A} \\
&= \mathbf{B}\cdot 14^{10}\cdot \mathbf{A} \\
&= 14^{10}(\mathbf{BA}) \\
&= 14^{10}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

例 (1.2.3)

设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&5\end{bmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1&4&5\\2&5&3\end{bmatrix}$，求满足条件$2\mathbf{A}+3(2\mathbf{B}-4\mathbf{X})=5\mathbf{B}$的矩阵$\mathbf{X}$

解： 因为

$$2\mathbf{A}+3(2\mathbf{B}-4\mathbf{X})=2\mathbf{A}+6\mathbf{B}-12\mathbf{X}=5\mathbf{B},$$

所以$12\mathbf{X}=2\mathbf{A}+\mathbf{B}$，即$\mathbf{X}=\frac{1}{12}(2\mathbf{A}+\mathbf{B})=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}1&8&11\\2&1&13\end{bmatrix}$

- 见例1.2.9
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{A}^2+\mathbf{AB}+\mathbf{BA}+\mathbf{B}^2\neq\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2$,
  $(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B})=\mathbf{A}^2+\mathbf{BA}-\mathbf{AB}-\mathbf{B}^2\neq\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2$

例 (1.2.10)

设矩阵$\mathbf{A}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T$满足$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=1$，$\mathbf{E}$为$n$阶单位矩阵，$\mathbf{B}=\mathbf{E}-2\mathbf{A}\mathbf{A}^T$。证明：$\mathbf{B}$是对称矩阵，且$\mathbf{B}\mathbf{B}^T=\mathbf{E}$

证明： 由条件知，

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^T&=(\mathbf{E}-2\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{E}^T-(2\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{E}-2(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^T\\&=\mathbf{E}-2(\mathbf{A}^T)^T\mathbf{A}^T=\mathbf{E}-2\mathbf{A}\mathbf{A}^T=\mathbf{B}\end{aligned}$$

因此$\mathbf{B}$是对称矩阵。同时可以验证

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\mathbf{B}^T&=(\mathbf{E}-2\mathbf{A}\mathbf{A}^T)(\mathbf{E}-2\mathbf{A}\mathbf{A}^T)=(\mathbf{E}-2\mathbf{A}\mathbf{A}^T)-2\mathbf{A}\mathbf{A}^T(\mathbf{E}-2\mathbf{A}\mathbf{A}^T)\\&=\mathbf{E}-2\mathbf{A}\mathbf{A}^T-2\mathbf{A}\mathbf{A}^T-2\mathbf{A}\mathbf{A}^T(-2\mathbf{A}\mathbf{A}^T)=\mathbf{E}-4\mathbf{A}\mathbf{A}^T+(-2)(-2)(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)\\&=\mathbf{E}-4\mathbf{A}\mathbf{A}^T+4(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)=\mathbf{E}-4\mathbf{A}\mathbf{A}^T+4\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{A}^T\\&=\mathbf{E}-4\mathbf{A}\mathbf{A}^T+4\mathbf{A}\cdot1\cdot\mathbf{A}^T=\mathbf{E}-4\mathbf{A}\mathbf{A}^T+4\mathbf{A}\mathbf{A}^T=\mathbf{E}\end{aligned}$$

错误!

因为$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=1$，所以$\mathbf{B}=\mathbf{E}-2\mathbf{A}\mathbf{A}^T=\mathbf{E}-2\cdot1=-\mathbf{E}$。于是结论成立。

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
\boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \cdots & \boxed{a_{1n}} \\
\boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & \cdots & \boxed{a_{2n}} \\
\hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\boxed{a_{m1}} & \boxed{a_{m2}} & \cdots & \boxed{a_{mn}}
\end{array}\right)
$$

分块矩阵的运算

分块矩阵只是矩阵的一种表达方式。在这种表达方式下的矩阵加法，数乘，乘法和转置，在保证运算有意义的条件下，运算规则和数字表达时候基本一致。

例 (1.3.1以具体矩阵为例)

若
$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \end{bmatrix}$$

则
$$\mathbf{A}^T=\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{A}_{21}^T \\ \mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{A}_{22}^T \\ \mathbf{A}_{13}^T & \mathbf{A}_{23}^T \end{bmatrix}$$

例 (1.3.3)

设$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc|ccc}2&0&1&-2&0\\0&2&3&1&2\\\hline 1&0&1&0&3\\0&0&-1&1&0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}&\mathbf{A}_{12}\\\mathbf{A}_{21}&\mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\left[\begin{array}{cc|cc}3&0&1&0\\0&2&3&5\\\hline 0&0&5&2\\0&0&6&7\\0&0&-1&8\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}&\mathbf{B}_{12}\\\mathbf{B}_{21}&\mathbf{B}_{22}\end{bmatrix}$,

求$\mathbf{AB}$

解:

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21}&\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22}\\\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21}&\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}6&0&-5&-12\\0&4&25&39\\\hline 3&0&3&26\\0&0&1&5\end{array}\right]$$

见教材例1.3.4，1.3.5和1.3.6体会分块矩阵乘法。

注:

具体问题中矩阵的分块方式要灵活地选择合适的分法

分块矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & & & \\ & \mathbf{A}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_{ss}\end{bmatrix}$称为分块对角矩阵；

而$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & * & \cdots & * \\ & \mathbf{A}_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mathbf{A}_{ss}\end{bmatrix}$则称为分块上三角矩阵。

作业

第12页练习1.2：

A8, B2, B4, B5（留意A8, B4归纳法的使用方法；B2,B5如何利用定义证明）

第18页练习1.3：

B4