厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷答案

________学院________系________年级________专业

试卷类型:(理工类 A 卷)　　　　考试时间:2022.11.26

一、填空题:(每小题 4 分,共 24 分)

1. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\sin x}{x}=2$,则 $f'(0)=$________。

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$________。

3. 设 $y+\dfrac{\pi}{4}e^{x\tan y}=\ln|\sec x|$,则 $dy|_{x=0}=$________。

4. 曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为________。

5. 设 $y=(x-1)^3(x-2)^4(x-3)^5$,则 $y^{(5)}|_{x=2}=$________。

6. 函数 $y=\ln x-\dfrac{x}{e}+1$ 在 $(0,+\infty)$ 内有____个零点。

二、求下列函数极限(每小题 8 分,共 16 分):

1. $\lim\limits_{x\to +\infty}x(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x\sin x}{\sqrt{1+x^4}-1}$。

三、（本题 10 分）讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x>1 \\ e^{-1} & x\le 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处的连续性和可导性，并求其导数 $f'(x)$。

四、（本题 8 分）求由参数方程 $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的一阶导数和二阶导数。

五、（本题 12 分）求函数 $y=(x+9)x^5$ 的极值以及该函数图形的凹凸区间和拐点。

六、（本题 12 分）(1) 证明当 $x>0$ 时，不等式 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ 成立；(2) 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项为 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$，证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在。

(2) 用单调有界准则。先证数列 $\{x_n\}$ 的单调性。注意到

七、（本题 8 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)-f(0)=1$，证明存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi$。

八、（本题 10 分）设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有二阶导数且 $f''(x)<0$。(1) 证明：对于区间 I 上任意两个不相等的点 x_0 和 x，不等式 $f(x)<f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 成立；

(2) 取函数 $f(x)=\ln x$ 证明：任给 m 个正数 $a_1, a_2,\cdots, a_m$，不等式 $\sqrt[m]{a_1\cdot a_2\cdots a_m}\le\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}$ 成立，并且该等号只在 $a_1=a_2=\cdots=a_m$ 条件下成立。