



厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷解答

_____学院_____系_____年级_____专业

试卷类型:(理工类 A 卷)

考试时间:2023. 11. 18

一、选择题:(每小题 4 分, 共 16 分)

1. $x=0$ 是函数 $f(x)=\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}$ 的 ()。
(A) 可去间断点; (B) 跳跃间断点; (C) 无穷间断点; (D) 振荡间断点。
2. 用数列极限的定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{n^2+1}=1$, 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 可取 $N = ()$ 。
(A) $\frac{1}{\varepsilon}$; (B) $\frac{2}{\varepsilon}$; (C) $[\frac{1}{2\varepsilon}]$; (D) $[\frac{1}{\varepsilon}]+1$ 。
3. 设 $f(x)=2^x+3^x-2+2x^2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ ()。
(A) 与 x 是等价无穷小; (B) 与 x 同阶但非等价无穷小;
(C) 是比 x 高阶的无穷小; (D) 是比 x 低阶的无穷小。
4. 函数 $y=(x^2+x-2)|x^3-x|$ 的不可导点的个数为 ()。
(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3。

二、填空题:(每小题 4 分, 共 24 分)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+ax^2-x+4}{1+x}$ 具有极限 b , 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arccot} x}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin ax}{2x} & x > 0 \\ b & x = 0 \\ (1-2x)^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 设 $f(x)=\sqrt{\frac{(2x+2)\sqrt{x}}{e^{2x-2}}}$, 则 $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 设 $y=f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 可导且满足 $\frac{d}{dx} f(\sec^2 x) = \cot x$, 则 $dy|_{x=2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
6. 设 $y=x^2 \sin 2x$, 则 $y^{(5)}|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、求下列函数极限：（每小题 6 分，共 18 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\arcsin(x^2 - 1)}$;

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x\right)^x$;

3. 已知 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) - \sin x}{x^3} = \frac{2}{3}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x^2}$ 。

四、（本题 8 分）求曲线 $\begin{cases} x = \arcsin \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程。

五、（本题 8 分）求由方程 $y = \tan(x + y)$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的一阶导数和二阶导数。

六、（本题 10 分）设数列 $\{x_n\}$ 满足： $x_1 = 2$ ， $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$ 。证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在，并求其极限。

七、（本题 8 分）证明函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ 除在 $x = 0$ 处可导外，在其它点处均不可导的。

八、(本题8分)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $0 < f(x) < 1$ ，在 $(0,1)$ 内可导且 $f'(x) \neq 1$ 。证明 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内存在唯一的不动点，即在 $(0,1)$ 内有且只有一个点 ξ ，使得 $f(\xi) = \xi$ 。