

$$(1) \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 = 1 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & -3x_5 = 0 \\ & x_2 & +2x_3 & +2x_4 & +6x_5 = 3 \\ 5x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +3x_4 & -x_5 = 2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 = 0 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & -3x_5 = 0 \\ & x_2 & +2x_3 & +2x_4 & +6x_5 = 0 \\ 5x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +3x_4 & -x_5 = 0 \end{cases}$$

解：分别对方程组的增广矩阵和系数矩阵化行最简形，

$$[A, \beta] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得同解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 & -x_4 & -5x_5 = -2 \\ & x_2 & +2x_3 & +2x_4 & +6x_5 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 & -x_3 & -x_4 & -5x_5 = 0 \\ & x_2 & +2x_3 & +2x_4 & +6x_5 = 0 \end{cases}$$

令 $x_3 = c_1, x_4 = c_2, x_5 = c_3$, 得方程组通解为

$$\begin{cases} x_1 = -2 + c_1 + c_2 + 5c_3 \\ x_2 = 3 - 2c_1 - 2c_2 - 6c_3 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \\ x_5 = c_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = c_1 + c_2 + 5c_3 \\ x_2 = -2c_1 - 2c_2 - 6c_3 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \\ x_5 = c_3 \end{cases}$$

即,

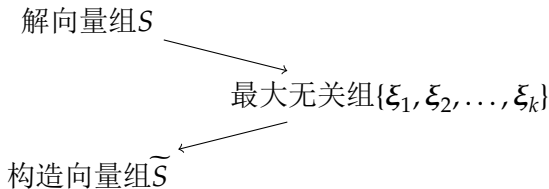
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_i \in R \quad \mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_i \in R$$

齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 解的结构

性质

若 ξ_1, ξ_2 是齐次方程组的解, 则 $c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ 也是方程组的解

证: $\mathbf{A}(c_1\xi_1 + c_2\xi_2) = c_1\mathbf{A}\xi_1 + c_2\mathbf{A}\xi_2 = \mathbf{0}$



其中 $\tilde{S} = \{c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_k\xi_k | c_i \in R\}$

定义

齐次线性方程组解向量组的最大无关组称为基础解系

思考下述问题

- 向量组 S 和 \widetilde{S} 的关系如何?
- $k = ?$
- 如何获得所有的基础解系?

定理

若齐次方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 有 $R(\mathbf{A}_{m \times n}) = r$, 则解向量组的秩为 $n - r$, 即基础解系由 $n - r$ 个线性无关解组成

例 (2.4.2)

\mathbf{A} 是 $m \times n$ 实矩阵, 证明 $R(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = R(\mathbf{A})$

证: 设方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解向量组为 S_1 , 方程组 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解向量组为 S_2 。则对任意的 $\alpha \in S_1$, 有 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}\alpha = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\alpha) = \mathbf{0}$, 即 $\alpha \in S_2$ 。反之, 对任意的 $\alpha \in S_2$, 有 $\alpha^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}\alpha) = (\mathbf{A}\alpha)^T (\mathbf{A}\alpha) = 0$, 即实向量 $\mathbf{A}\alpha$ 所有分量的平方和等于零。于是 $\mathbf{A}\alpha = \mathbf{0}$, 也就是说 $\alpha \in S_1$ 。因此 $S_1 = S_2$, 即两个方程组同解, 进而基础解系相同, 于是有 $R(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = R(\mathbf{A})$

第112页练习2.4: A1, A2, A3, B1, B4