厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷解答

试卷类型：理工类　　A 卷（ √ ）B 卷（　）

学年学期：2024-2025 第一学期 考试时间：2024.11.16

一、选择题：（每小题 4 分，共 20 分）

1．关于函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$，$x\in(0,1]$，下列说法错误的是（ D ）。

（A）为无界函数；　　（B）为连续函数；

（C）为可导函数；　　（D）当 $x\to 0^+$ 时为无穷大。

2．当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[3]{8+x^3}-2$ 是 $(x-x^2)(x^2+x^3)$ 的（ B ）。

（A）等价无穷小；（B）同阶但非等价无穷小；（C）高阶的无穷小；（D）低阶的无穷小。

3．设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{(x-1)^2}=3$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处（ C ）。

（A）不可导；　　（B）可导但 $f'(1)\neq 0$；

（C）取得极小值；　　（D）取得极大值。

4．函数 $y=\dfrac{x\ln|x|}{x^2-3x+2}$ 的可去间断点的个数为（ C ）。

（A）0；　（B）1；　（C）2；　（D）3。

5．设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 所确定，则（ A ）。

（A）该函数的图形是凸的；　　（B）该函数的图形是凹的；

（C）该函数无最大值；　　（D）该函数的图形上有拐点。

二、填空题：（每小题 4 分，共 20 分）

1．$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{x^2+1}\arctan x=$ ____0____。

2．设 $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$，则 $\mathrm{d}y|_{x=\frac{1}{3}}=$ __$-\dfrac{9}{8}\mathrm{d}x$__。

3．已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{ax^2}-\cos x}{x^4}=b$，其中 a、b 均为实数，则 $a=$ __$-\dfrac{1}{2}$__，$b=$ __$\dfrac{1}{12}$__。

4．设 $f(x)=x^2\ln(1-x)$，则 $f^{(5)}(0)=$ __-40__。

5．已知方程 $\mathrm{e}^x-2x+a=0$ 有实根，则常数 a 应满足的条件是 __$a\le 2\ln 2-2$__。

三、求下列函数极限：（每小题 7 分，共 14 分）

1. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$；

解： $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{\ln\cos x}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$。

2. $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2})$；

解： $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2})=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin 2x}{12x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cdot 2x}{12x}=\frac{1}{3}$。

四、（本题 10 分）证明数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n(1+2+\cdots+n)}{n!}$ 存在，并求其极限值。

证明：令 $x_n=\frac{3^n(1+2+\cdots+n)}{n!}$，注意到当 $n\ge4$ 时，$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\frac{3^{n+1}(n+2)}{2\cdot n!}}{\frac{3^n(n+1)}{2\cdot(n-1)!}}=\frac{3(n+2)}{n(n+1)}<1$，所以当 $n\ge4$ 时，数列 $\{x_n\}$ 单调递减。又显然有 $x_n>0$，因此由单调有界准则，数列 $\{x_n\}$ 的极限存在。最后求该极限，令 $a=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n(1+2+\cdots+n)}{n!}$，由 $x_{n+1}=\frac{3(n+2)}{n(n+1)}x_n$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3(n+2)}{n(n+1)}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，因此有 $a=0\cdot a$，即有 $a=0$。

证法二：注意到当 $n>6$ 时，$0<x_n=\frac{3^n(1+2+\cdots+n)}{n!}=\frac{3^n\frac{n(n+1)}{2}}{n!}=\frac{3^n(n+1)}{2\cdot(n-1)!}\le\frac{3^n}{(n-2)!}$

$=3^2\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{n-3}\cdot\frac{3}{n-2}\le\frac{3^5}{n-2}$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^5}{n-2}=0$，由夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n(1+2+\cdots+n)}{n!}=0$。

五、（本题 10 分）讨论 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{x} & x>0\\ \mathrm{e}^{-x+x^2} & x\le0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的可导性。

解：由 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2}$，

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\mathrm{e}^{-x+x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-x+x^2}{x}=-1$，从而 $f_+'(0)\ne f_-'(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导。

六、（本题 10 分）设方程$x^3+3xy+y^3=1$确定了隐函数$y=y(x)$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=0}$和$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}|_{x=0}$。

解：方程$x^3+3xy+y^3=1$两边对x求导，得$3x^2+3y+3xy'+3y^2y'=0$，解得

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x^2+y}{x+y^2}$，继续两边对$x$求导, 得$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{(2x+y')(x+y^2)-(x^2+y)(1+2yy')}{(x+y^2)^2}$。

又当$x=0$时，$y=1$，因此$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=0}=-\frac{0+1}{0+1}=-1$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}|_{x=0}=-\frac{(0-1)(0+1)-(0+1)(1-2)}{(0+1^2)^2}=0$。

七、（本题 8 分）证明：当$0<x<\frac{\pi}{4}$时，成立不等式$1<\frac{\tan x}{x}<\frac{4}{\pi}$。

证明：令$f(x)=\begin{cases}\frac{\tan x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$，则$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{4}]$连续，在$(0,\frac{\pi}{4})$可导。又当$x\in(0,\frac{\pi}{4})$时，

$f'(x)=\frac{x\sec^2x-\tan x}{x^2}$。再令$g(x)=x\sec^2x-\tan x$，$x\in[0,\frac{\pi}{4}]$，则$g(x)$在$[0,\frac{\pi}{4}]$可导且当

$x\in(0,\frac{\pi}{4})$时，$g'(x)=\sec^2x+2x\sec^2x\tan x-\sec^2x=2x\sec^2x\tan x>0$，故$g(x)$在$[0,\frac{\pi}{4}]$上单

调增加，即当$x\in(0,\frac{\pi}{4})$时，有$g(x)>g(0)=0$。进一步的，有当$x\in(0,\frac{\pi}{4})$时，$f'(x)>0$，因

此$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{4}]$上单调增加，故有当$x\in(0,\frac{\pi}{4})$时，$1=f(0)<f(x)=\frac{\tan x}{x}<f(\frac{\pi}{4})=\frac{4}{\pi}$，得证。

八、（本题 8 分）设$f(x)$在$[1,2]$上二阶可导且满足$f(2)=0$。令$g(x)=(x-1)^2f(x)$，证明：在

$(1,2)$内至少存在一点ξ，使得$g''(\xi)=0$。

证法一：由题设，$g(x)$在$[1,2]$上具有二阶导数，且$g'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2f'(x)$。

注意到$g(1)=0$，$g(2)=f(2)=0$，由罗尔定理，知存在$\xi_1\in(1,2)$，使得$g'(\xi_1)=0$。又$g'(1)=0$，

故由罗尔定理，知存在$\xi\in(1,\xi_1)\subset(1,2)$，使得$g''(\xi)=0$。

证法二：由题设，$g(x)$在$[1,2]$上具有二阶导数，且$g(1)=0$，$g(2)=0$，$g'(1)=0$。由泰勒中

值定理，知存在$\xi\in(1,2)$，使得$g(2)=g(1)+g'(1)\cdot 1+g''(\xi)\cdot 1^2$，因此$g''(\xi)=0$。