逆矩阵

定义：

如果对于方阵$\mathbf{A}$，存在矩阵$\mathbf{B}$满足$\mathbf{AB} = \mathbf{E}$，则称$\mathbf{A}$为可逆矩阵，$\mathbf{B}$为$\mathbf{A}$的逆矩阵，记为$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$。

问题：

- 如果$\mathbf{AB} = \mathbf{E}$，那么$\mathbf{BA} = \mathbf{E}$？
- 是否任意矩阵$\mathbf{A}$都存在这样的$\mathbf{B}$？
- 如果对于$\mathbf{A}$存在这样的$\mathbf{B}$，那么有多少这样的$\mathbf{B}$？
- 如果存在，$\mathbf{B} =$？

由于$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$,因此

- 如果$|\mathbf{A}| \neq 0$，则有$\mathbf{A}(\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*) = \mathbf{E}$，而且$(\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*)\mathbf{A} = \mathbf{E}$
- 如果$|\mathbf{A}| = 0$，则对任意矩阵$\mathbf{B}$，有$|\mathbf{A}\mathbf{B}| = 0$，从而判断出$\mathbf{A}$不可逆
- 如果有$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{E}$，则两边左乘$\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*$得，$\mathbf{B} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*$

例 (1.5.2)

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$可逆，求$\mathbf{A}^{-1}$

解： 由伴随矩阵定义知$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. $\mathbf{A}$可逆意味着$|\mathbf{A}| = ad - bc \neq 0$. 于是

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

例 (1.5.3)

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$，求$\mathbf{A}^{-1}$

解： 因为$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix}=5$, 所以$\mathbf{A}$可逆。由

$$
\begin{array}{lll}
A_{11}=3, & A_{12}=-5, & A_{13}=1\\
A_{21}=4, & A_{22}=-5, & A_{23}=-2\\
A_{31}=-2, & A_{32}=5, & A_{33}=1
\end{array}
$$

得$\mathbf{A}^{*}=\begin{bmatrix}3 & 4 & -2\\ -5 & -5 & 5\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$. 因此，$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5}\\ -1 & -1 & 1\\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$

例 (1.5.4)

设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&1&-1\\3&2&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&3\\3&5\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&0\\2&-1\\0&2\end{bmatrix}$, 求矩阵方程$\mathbf{AXB}=\mathbf{C}$的解

解： 因为$|\mathbf{A}|=5$, $|\mathbf{B}|=1$, 所以$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$均可逆。则方程$\mathbf{AXB}=\mathbf{C}$左右两边同时左乘$\mathbf{A}^{-1}$右乘$\mathbf{B}^{-1}$得，

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}&-\frac{2}{5}\\-1&-1&1\\\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&-1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-3\\-3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{79}{5}&-\frac{49}{5}\\-24&15\\-\frac{27}{5}&\frac{17}{5}\end{bmatrix}$$

思考

如果$\mathbf{A}$或者$\mathbf{B}$不可逆，甚至不是方阵，又该如何处理？

逆矩阵的混合运算

- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$: $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$
- $(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$: $\mathbf{A}^{T}(\mathbf{A}^{-1})^{T} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^{T} = \mathbf{E}$
- $(k\mathbf{A})^{-1} = k^{-1}\mathbf{A}^{-1}$: $(k\mathbf{A})(k^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$
- $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$: $(\mathbf{A}\mathbf{B})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{E}$
- $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$: $|\mathbf{A}||\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}| = 1$
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1} =?$

$$\frac{1}{a+b} \neq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

例 (1.5.6)

设$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 2\mathbf{E} = \mathbf{O}$, 证明$\mathbf{A}$和$\mathbf{A} - 3\mathbf{E}$都可逆

证明： 因为$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 2\mathbf{E} = \mathbf{A}(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}) + 2\mathbf{E} = \mathbf{O}$, 所以由

$$\mathbf{A}\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\right) = \left(-\frac{1}{2}\mathbf{A}\right)(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}) = \mathbf{E}$$

及可逆矩阵定义得证。

例 (练习1.5:A5)

设$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&2\\1&4\end{bmatrix}$, $\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$, 若$\mathbf{AP}=\mathbf{P\Lambda}$，求$\mathbf{A}^n$

解: 因为$|\mathbf{P}|=2$，所以$\mathbf{P}$可逆。由$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P^{-1}}$得

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^n &= (\mathbf{P\Lambda P^{-1}})^{\mathbf{n}} = (\mathbf{P\Lambda P^{-1}})(\mathbf{P\Lambda P^{-1}})\cdots(\mathbf{P\Lambda P^{-1}})\\ &= \mathbf{P\Lambda(P^{-1}P)\Lambda(P^{-1}P)}\cdots\mathbf{(P^{-1}P)\Lambda P^{-1}} = \mathbf{P\Lambda^{n}P^{-1}}\\ &= \begin{bmatrix}1&2\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\\&2^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}2-2^n&-1+2^n\\2-2^{n+1}&-1+2^{n+1}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

例 (1.5.7)

设$\mathbf{A}_{n\times n}$和$\mathbf{B}_{m\times m}$都可逆，证明$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{C} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$可逆，并求$\mathbf{D}^{-1}$

证明： 由$|\mathbf{D}|=\begin{vmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{C} & \mathbf{B}\end{vmatrix}=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\neq 0$可知$\mathbf{D}$可逆。

设$\mathbf{D}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2\\ \mathbf{X}_3 & \mathbf{X}_4\end{bmatrix}$，由$\mathbf{D}\mathbf{D}^{-1}=\mathbf{E}_{n+m}$得

$$\begin{cases}\mathbf{A}\mathbf{X}_1=\mathbf{E}\\ \mathbf{A}\mathbf{X}_2=\mathbf{O}\\ \mathbf{C}\mathbf{X}_1+\mathbf{B}\mathbf{X}_3=\mathbf{O}\\ \mathbf{C}\mathbf{X}_2+\mathbf{B}\mathbf{X}_4=\mathbf{E}\end{cases}$$

解得$\mathbf{X}_1=\mathbf{A}^{-1},\mathbf{X}_2=\mathbf{O},\mathbf{X}_3=-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1},\mathbf{X}_4=\mathbf{B}^{-1}$. 因此

$$\mathbf{D}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O}\\ -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{B}^{-1}\end{bmatrix}$$

若$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & & & \\ & \mathbf{A}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_{ss} \end{bmatrix}$可逆，则

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & & & \\ & \mathbf{A}_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_{ss}^{-1} \end{bmatrix}$$

作业

第46页练习1.5：

A3, A4, A6, A7, B2, B3

投入产出模型

假设经济部门由三部门组成：工业，农业，服务业。各自生产一个单位价值的消耗为

	工业	农业	服务业
工业	0.5	0.4	0.2
农业	0.2	0.3	0.1
服务业	0.1	0.1	0.3

则消耗矩阵为$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$。制定生产计划为$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$，则应满足

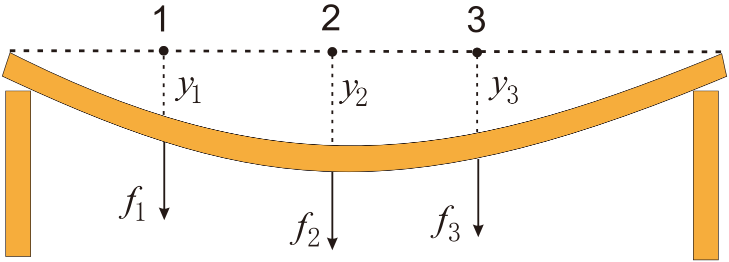
$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}$$

若可逆，可得：$\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{d}$

设$\mathbf{C}, \mathbf{d}$数字非负，且$\mathbf{C}$每一列数字和小于1，则$\mathbf{E} - \mathbf{C}$可逆，且$\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{d}$数字也非负

弹性梁

一根弹性均匀薄板横梁，中间三处受力产生形变如图所示，



用$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$分别表示受力矩阵和形变矩阵，则根据胡克定律有

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{f}$$

其中$\mathbf{D}$称为弹性矩阵，$\mathbf{D}^{-1}$称为刚性矩阵。