初等矩阵

初等矩阵由单位矩阵做一次初等变换得到；

- **E**(i,j)：单位矩阵做i,j两行（列）互换$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$
- **E**$(i(k))$：单位矩阵做第i行（列）乘$k(\neq 0)$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

- **E**$(i,j(k))$：单位矩阵做第i行加上第j行乘k（第j列加上第i列乘k）

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

初等矩阵乘法效果

- $\mathbf{E}(i,j)$：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_3&b_3&c_3\\a_2&b_2&c_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&c_1&b_1\\a_2&c_2&b_2\\a_3&c_3&b_3\end{bmatrix}$$

- $\mathbf{E}(i(k))$：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\2a_2&2b_2&2c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 2b_1 & c_1 \\ a_2 & 2b_2 & c_2 \\ a_3 & 2b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{E}(i, j(k))$：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + 3a_3 & b_2 + 3b_3 & c_2 + 3c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + 3b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + 3b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + 3b_3 \end{bmatrix}$$

初等矩阵与初等变换

矩阵做一次初等变换等同于和一个初等矩阵相乘，左乘行变换，右乘列变换

思考

- 初等矩阵的行列式等于多少？初等矩阵的逆矩阵是什么？
- 利用初等矩阵解释矩阵变换的次序重要性
- 利用初等矩阵解释行列式最重要的三条性质

给定一个方阵$\mathbf{A}$，经过若干次初等变换化为等价标准形，即有

$$\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k-1}\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

两边取行列式，可得：可逆矩阵的标准形是单位矩阵。于是，

$$\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k-1}\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A} = (\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_l)^{-1}$$

进而，

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_l\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k-1}\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \mathbf{E}$$

因此，

- 可逆矩阵的行最简形矩阵是单位矩阵
- 可逆矩阵可分解为有限个初等矩阵乘积

例 (1.6.6)

设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}$, 求$\mathbf{A}^{-1}$，并将$\mathbf{A}$表示为初等矩阵的乘积

解:

$$[\mathbf{A},\mathbf{E}]=\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\2&3&4&0&1&0\\3&4&5&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&1&-1&-3&0&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&2&3&-1&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&1&1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&-3&2\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&1&1&-1\end{bmatrix}$$

所以$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-3&2\\-2&1&0\\1&1&-1\end{bmatrix}$

由于$\mathbf{E}(1,3(-2))\mathbf{E}(1,2(-1))\mathbf{E}(3(-1))\mathbf{E}(3,2(-1))\mathbf{E}(3,1(-3))\mathbf{E}(2,1(-2))\mathbf{A}=\mathbf{E}$，因此

$$\mathbf{A}=\mathbf{E}(2,1(2))\mathbf{E}(3,1(3))\mathbf{E}(3,2(1))\mathbf{E}(3(-1))\mathbf{E}(1,2(1))\mathbf{E}(1,3(2))$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

解:

$$[\mathbf{A},\mathbf{E}]=\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\2&3&4&0&1&0\\3&4&5&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\2&3&4&0&1&0\\1&1&1&0&-1&1\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}0&0&1&1&1&-1\\0&1&2&0&3&-2\\1&1&1&0&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&1&1&1&-1\\0&1&2&0&3&-2\\1&0&-1&0&-4&3\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}0&0&1&1&1&-1\\0&1&0&-2&1&0\\1&0&0&1&-3&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&-3&2\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&1&1&-1\end{bmatrix}$$

所以$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$

由于$\mathbf{E}(1,3)\mathbf{E}(2,1(-2))\mathbf{E}(3,1(1))\mathbf{E}(3,2(-1))\mathbf{E}(2,3(-2))\mathbf{E}(1,3(-1))\mathbf{E}(3,2(-1))\mathbf{A}=\mathbf{E}$，因此

$$\begin{aligned}\mathbf{A}&=\mathbf{E}(3,2(1))\mathbf{E}(1,3(1))\mathbf{E}(2,3(2))\mathbf{E}(3,2(1))\mathbf{E}(3,1(-1))\mathbf{E}(2,1(2))\mathbf{E}(1,3)\\&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

LU分解

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2&3&-4&1&0&6\\2&-3&5&0&-1&-7\\-4&6&-8&3&1&2\\-8&12&-15&7&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-4r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-2r_1}}\begin{bmatrix}-2&3&-4&1&0&6\\0&0&1&1&-1&-1\\0&0&0&1&1&-10\\0&0&1&3&1&-21\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-r_2}\begin{bmatrix}-2&3&-4&1&0&6\\0&0&1&1&-1&-1\\0&0&0&1&1&-10\\0&0&0&2&2&-20\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-2r_3}\begin{bmatrix}-2&3&-4&1&0&6\\0&0&1&1&-1&-1\\0&0&0&1&1&-10\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\mathbf{U}$$

则

$$\mathbf{E}(4,3(-2))\mathbf{E}(4,2(-1))\mathbf{E}(4,1(-4))\mathbf{E}(3,1(-2))\mathbf{E}(2,1(1))\mathbf{A}=\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{U}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{E}(2,1(-1))\mathbf{E}(3,1(2))\mathbf{E}(4,1(4))\mathbf{E}(4,2(1))\mathbf{E}(4,3(2))$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

因此

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

作业

第59页练习1.6:

A4, B2, B3