

## 线性代数超强总结

$$|A|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{不可逆} \\ r(A) < n \\ Ax = 0 \text{有非零解} \\ 0 \text{是 } A \text{的特征值} \\ A \text{的列(行)向量线性相关} \end{cases} \quad |A| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{可逆} \\ r(A) = n \\ Ax = 0 \text{只有零解} \\ A \text{的特征值全不为零} \\ A \text{的列(行)向量线性无关} \\ A^T A \text{是正定矩阵} \\ A \text{与同阶单位阵等价} \\ A = p_1 p_2 \cdots p_s, p_i \text{是初等阵} \\ \forall \beta \in \mathbf{R}^n, Ax = \beta \text{总有唯一解} \end{cases}$$

向量组等价  
相似矩阵  
矩阵合同

具有  
反身性、对称性、传递性

✓ 关于  $e_1, e_2, \dots, e_n$ :

① 称为  $\mathbb{C}^n$  的标准基,  $\mathbb{C}^n$  中的自然基, 单位坐标向量;

②  $e_1, e_2, \dots, e_n$  线性无关;

③  $|e_1, e_2, \dots, e_n| = 1$ ;

④  $\text{tr}(E) = n$ ;

⑤ 任意一个  $n$  维向量都可以用  $e_1, e_2, \dots, e_n$  线性表示.

✓ 行列式的计算:

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} A & * \\ O & B \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} A & O \\ * & B \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} A & O \\ O & B \end{array} \right| = |A||B| \\ \text{① 若 } A \text{ 与 } B \text{ 都是方阵 (不必同阶), 则} & \left| \begin{array}{cc} * & A \\ B & O \end{array} \right| = (-1)^{mn} |A||B| \end{aligned}$$

② 上三角、下三角行列式等于主对角线上元素的乘积.

$$\text{③ 关于副对角线: } \left| \begin{array}{cccc} * & & a_{1n} & \\ & \ddots & a_{2n-1} & \\ & & \ddots & a_{2n-1} \\ a_{n1} & & & O \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} O & & & a_{1n} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{2n-1} \\ a_{n1} & & & O \end{array} \right| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n} \dots a_{n1}$$

✓ 逆矩阵的求法:

$$\text{① } A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

$$\text{② } (A : E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E : A^{-1})$$

$$\text{③ } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$$

$$\text{④ } \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} & & a_1 & & \\ & & & & \frac{1}{a_n} \\ & & \ddots & & \\ & & & & \frac{1}{a_2} \\ a_n & & & & \frac{1}{a_1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \ddots \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{5} \quad \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^{-1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} & & A_1 & \\ & & & A_2 \\ & \ddots & & \\ A_n & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_n^{-1} \\ & & & \ddots \\ & & A_2^{-1} & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$$

✓ 方阵的幂的性质:  $A^m A^n = A^{m+n}$        $(A^m)^n = (A)^{mn}$

✓ 设  $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , 对  $n$  阶矩阵  $A$  规定:  $f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \dots + a_1 A + a_0 E$  为  $A$  的一个多项式.

✓ 设  $A_{m \times n}, B_{n \times s}$ ,  $A$  的列向量为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ,  $B$  的列向量为  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ ,  $AB$  的列向量为

则:  $r_i = A\beta_i, i=1, 2, \dots, s$ , 即  $A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = (A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_s)$

若  $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ , 则  $A\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_n\alpha_n$

$r_1, r_2, \dots, r_s$ , 即:  $AB$  的第  $i$  个列向量  $r_i$  是  $A$  的列向量的线性组合, 组合系数就是  $\beta_i$  的各分量;

$AB$  的第  $i$  个行向量  $r_i$  是  $B$  的行向量的线性组合, 组合系数就是  $\alpha_i$  的各分量.

} 用  $A, B$  中简单的一个提高运算速度

✓ 用对角矩阵  $\Lambda$  左乘一个矩阵, 相当于用  $\Lambda$  的对角线上的各元素依次乘此矩阵的行向量;

用对角矩阵  $\Lambda$  右乘一个矩阵, 相当于用  $\Lambda$  的对角线上的各元素依次乘此矩阵的列向量.

✓ 两个同阶对角矩阵相乘只用把对角线上的对应元素相乘,

$$\text{与分块对角阵相乘类似, 即: } A = \begin{bmatrix} A_{11} & & & o \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ o & & & A_{kk} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & & & o \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ o & & & B_{kk} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & & & o \\ & A_{22}B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ o & & & A_{kk}B_{kk} \end{bmatrix}$$

✓ 矩阵方程的解法：设法化成(I)  $AX = B$  或 (II)  $XA = B$

当  $|A| \neq 0$  时，

(I) 的解法：构造  $(A:B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E:X)$  (当  $B$  为一列时，即为克莱姆法则)

(II) 的解法：将等式两边转置化为  $A^T X^T = B^T$ ，  
用(I)的方法求出  $X^T$ ，再转置得  $X$

✓  $Ax = o$  和  $Bx = o$  同解 ( $A, B$  列向量个数相同)，则：

- ① 它们的极大无关组相对应，从而秩相等；
- ② 它们对应的部分组有一样的线性相关性；
- ③ 它们有相同的内在线性关系.

✓ 判断  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$  是  $Ax = 0$  的基础解系的条件：

- ①  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$  线性无关；
- ②  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$  是  $Ax = 0$  的解；
- ③  $s = n - r(A) =$  每个解向量中自由变量的个数.

- ① 零向量是任何向量的线性组合, 零向量与任何同维实向量正交.
- ② 单个零向量线性相关; 单个非零向量线性无关.
- ③ 部分相关, 整体必相关; 整体无关, 部分必无关.
- ④ 原向量组无关, 接长向量组无关; 接长向量组相关, 原向量组相关.
- ⑤ 两个向量线性相关 $\Leftrightarrow$ 对应元素成比例; 两两正交的非零向量组线性无关.
- ⑥ 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  中任一向量  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 都是此向量组的线性组合.

⑦ 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关 $\Leftrightarrow$ 向量组中至少有一个向量可由其余  $n-1$  个向量线性表示.

向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关 $\Leftrightarrow$ 向量组中每一个向量  $\alpha_i$  都不能由其余  $n-1$  个向量线性表示.

⑧  $m$  维列向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关 $\Leftrightarrow r(A) < n$ ;

$m$  维列向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关 $\Leftrightarrow r(A) = n$ .

⑨  $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = o$ .

⑩ 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关, 而  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$  线性相关, 则  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 且表示法惟一.

⑪ 矩阵的行向量组的秩等于列向量组的秩.

阶梯形矩阵的秩等于它的非零行的个数.

⑫ 矩阵的行初等变换不改变矩阵的秩, 且不改变列向量间的线性关系.

矩阵的列初等变换不改变矩阵的秩, 且不改变行向量间的线性关系.

**向量组等价**  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  和  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  可以相互线性表示. 记作:  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \tilde{=} \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$

**矩阵等价**  $A$  经过有限次初等变换化为  $B$ . 记作:  $A \tilde{=} B$

⑬ 矩阵  $A$  与  $B$  等价  $\Leftrightarrow r(A) = r(B) \neq A, B$  作为向量组等价, 即: 秩相等的向量组不一定等价.

矩阵  $A$  与  $B$  作为向量组等价  $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Rightarrow$

矩阵  $A$  与  $B$  等价.

⑭ 向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示  $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \Rightarrow r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$

⑮ 向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 且  $s > n$ , 则  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性相关.

向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性无关, 且可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 则  $s \leq n$ .

⑯ 向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 且  $r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , 则两向量组等价;

⑰ 任一向量组和它的极大无关组等价.

⑱ 向量组的任意两个极大无关组等价, 且这两个组所含向量的个数相等.

⑲ 若两个线性无关的向量组等价, 则它们包含的向量个数相等.

⑳ 若  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 则  $r(A) \leq \min\{m, n\}$ , 若  $r(A) = m$ ,  $A$  的行向量线性无关;

若  $r(A) = n$ ,  $A$  的列向量线性无关, 即:

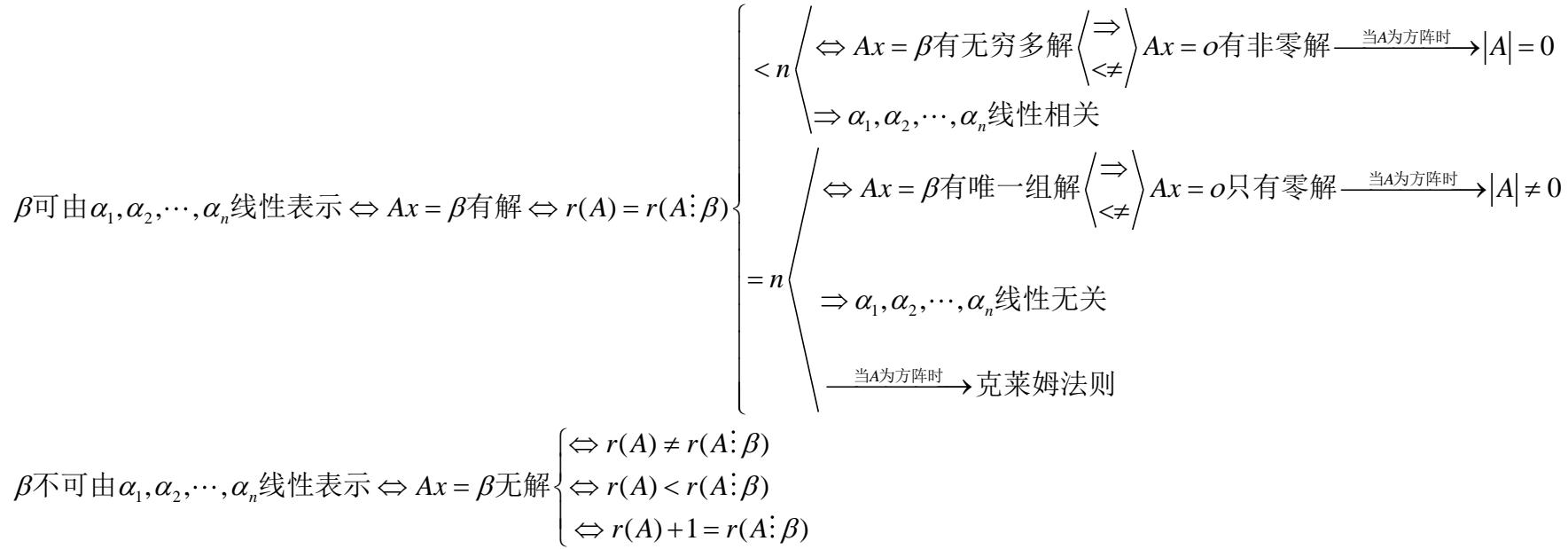
$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关.

线性方程组的矩阵式  $Ax = \beta$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

向量式  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{bmatrix}, j = 1, 2, \dots, n$$



矩阵转置的性质:	$(A^T)^T = A$	$(AB)^T = B^T A^T$	$(kA)^T = kA^T$	$ A^T  =  A $	$(A+B)^T = A^T + B^T$			
矩阵可逆的性质:	$(A^{-1})^{-1} = A$	$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$	$(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$	$ A^{-1}  =  A ^{-1}$	$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$	$(A^{-1})^k = (A^k)^{-1} = A^{-k}$		
伴随矩阵的性质:	$(A^*)^* =  A ^{n-2} A$	$(AB)^* = B^* A^*$	$(kA)^* = k^{n-1} A^*$	$ A^*  =  A ^{n-1}$	$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = \frac{A}{ A }$ $(A^T)^* = (A^*)^T$	$(A^*)^k = (A^k)^*$	$AA^* = A^*A =  A E$	
$r(A^*) = \begin{cases} n & \text{若 } r(A) = n \\ 1 & \text{若 } r(A) = n-1 \\ 0 & \text{若 } r(A) < n-1 \end{cases}$	$ AB  =  A  B $	$ kA  = k^n  A $	$ A^k  =  A ^k$					

$$\left. \begin{array}{l}
(1) \quad \eta_1, \eta_2 \text{ 是 } Ax = 0 \text{ 的解}, \eta_1 + \eta_2 \text{ 也是它的解} \\
(2) \quad \eta \text{ 是 } Ax = 0 \text{ 的解, 对任意 } k, k\eta \text{ 也是它的解} \\
(3) \quad \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k \text{ 是 } Ax = 0 \text{ 的解, 对任意 } k \text{ 个常数} \\
\quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \dots + \lambda_k\eta_k \text{ 也是它的解}
\end{array} \right\} \text{齐次方程组}$$

线性方程组解的性质:

$$\left. \begin{array}{l}
(4) \quad \gamma \text{ 是 } Ax = \beta \text{ 的解, } \eta \text{ 是其导出组 } Ax = 0 \text{ 的解, } \gamma + \eta \text{ 是 } Ax = \beta \text{ 的解} \\
(5) \quad \eta_1, \eta_2 \text{ 是 } Ax = \beta \text{ 的两个解, } \eta_1 - \eta_2 \text{ 是其导出组 } Ax = 0 \text{ 的解} \\
(6) \quad \eta_2 \text{ 是 } Ax = \beta \text{ 的解, 则 } \eta_1 \text{ 也是它的解} \Leftrightarrow \eta_1 - \eta_2 \text{ 是其导出组 } Ax = 0 \text{ 的解} \\
(7) \quad \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k \text{ 是 } Ax = \beta \text{ 的解, 则} \\
\quad \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \dots + \lambda_k\eta_k \text{ 也是 } Ax = \beta \text{ 的解} \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1 \\
\quad \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \dots + \lambda_k\eta_k \text{ 是 } Ax = 0 \text{ 的解} \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 0
\end{array} \right.$$

✓ 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 若  $r(A) = m$ , 则  $r(A) = r(A : \beta)$ , 从而  $Ax = \beta$  一定有解.

当  $m < n$  时, 一定不是唯一解.  $\Rightarrow \frac{\text{方程个数}}{\text{向量维数}} < \frac{\text{未知数的个数}}{\text{向量个数}}$ , 则该向量组线性相关.

$m$  是  $r(A)$  和  $r(A : \beta)$  的上限.

✓ 矩阵的秩的性质:

$$\textcircled{1} \quad r(A) = r(A^T) = r(A^T A)$$

$$\textcircled{2} \quad r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$$

$$\textcircled{3} \quad r(AB) \leq \min \{r(A), r(B)\}$$

$$\textcircled{4} \quad r(kA) = \begin{cases} r(A) & \text{若 } k \neq 0 \\ 0 & \text{若 } k = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad r \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$$

$$\textcircled{6} \quad \text{若 } A \neq 0, \text{ 则 } r(A) \geq 1$$

$$\textcircled{7} \quad \text{若 } A_{m \times n}, B_{n \times s}, \text{ 且 } r(AB) = 0, \text{ 则 } r(A) + r(B) \leq n$$

$$\textcircled{8} \quad \text{若 } P, Q \text{ 可逆, 则 } r(PA) = r(AQ) = r(A)$$

$$\textcircled{9} \quad \text{若 } A \text{ 可逆, 则 } r(AB) = r(B)$$

$$\text{若 } B \text{ 可逆, 则 } r(AB) = r(A)$$

$$\textcircled{10} \quad \text{若 } r(A) = n, \text{ 则 } r(AB) = r(B), \text{ 且 } A \text{ 在矩阵乘法中有左消去律:}$$

$$\begin{cases} AB = 0 \Rightarrow B = o \\ AB = AC \Rightarrow B = C \end{cases}$$

**标准正交基**  $n$  个  $n$  维线性无关的向量, 两两正交, 每个向量长度为 1.

**$\alpha$ 与 $\beta$ 正交**  $(\alpha, \beta) = 0$ .

**$\alpha$ 是单位向量**  $\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = 1$ .

✓ 内积的性质: ① 正定性:  $(\alpha, \alpha) \geq 0$ , 且  $(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = o$

② 对称性:  $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$

③ 双线性:  $(\alpha, \beta_1 + \beta_2) = (\alpha, \beta_1) + (\alpha, \beta_2)$

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = (\alpha_1, \beta) + (\alpha_2, \beta)$$

$$(c\alpha, \beta) = (c\alpha, \beta) = (\alpha, c\beta)$$

**施密特**  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关,

$$\text{正交化} \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 \\ \beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 \end{array} \right.$$

$$\text{单位化: } \eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} \quad \eta_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} \quad \eta_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$$

**正交矩阵**  $AA^T = E$ .

✓  $A$  是正交矩阵的充要条件:  $A$  的  $n$  个行 (列) 向量构成  $\mathbb{C}^n$  的一组标准正交基.

✓ 正交矩阵的性质: ①  $A^T = A^{-1}$ ;

②  $AA^T = A^T A = E$ ;

③  $A$  是正交阵, 则  $A^T$  (或  $A^{-1}$ ) 也是正交阵;

④ 两个正交阵之积仍是正交阵;

⑤ 正交阵的行列式等于 1 或 -1.

**$A$ 的特征矩阵**  $\lambda E - A$ .

$A$  的特征多项式  $|λE - A| = f(λ)$ .

$A$  的特征方程  $|λE - A| = 0$ .  $Ax = λx \rightarrow Ax$  与  $x$  线性相关

- ✓ 上三角阵、下三角阵、对角阵的特征值就是主对角线上的  $n$  各元素.
- ✓ 若  $|A| = 0$ , 则  $λ = 0$  为  $A$  的特征值, 且  $Ax = 0$  的基础解系即为属于  $λ = 0$  的线性无关的特征向量.

$$\checkmark |A| = λ_1 λ_2 \cdots λ_n \quad \sum_1^n λ_i = \text{tr} A$$

✓ 若  $r(A) = 1$ , 则  $A$  一定可分解为  $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1, b_2, \dots, b_n]$ 、 $A^2 = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)A$ , 从而  $A$

的特征值为:  $λ_1 = \text{tr} A = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$ ,  $λ_2 = λ_3 = \cdots = λ_n = 0$ .

- ✓ 若  $A$  的全部特征值  $λ_1, λ_2, \dots, λ_n$ ,  $f(x)$  是多项式, 则:

①  $f(A)$  的全部特征值为  $f(λ_1), f(λ_2), \dots, f(λ_n)$ ;

② 当  $A$  可逆时,  $A^{-1}$  的全部特征值为  $\frac{1}{λ_1}, \frac{1}{λ_2}, \dots, \frac{1}{λ_n}$ ,

$A^*$  的全部特征值为  $\frac{|A|}{λ_1}, \frac{|A|}{λ_2}, \dots, \frac{|A|}{λ_n}$ .

✓  $λ$  是  $A$  的特征值, 则:  $\begin{cases} kA & kλ \\ aA + bE & aλ + b \\ A^{-1} & \frac{1}{λ} \\ A^2 & λ^2 \\ A^m & λ^m \\ A^* & \frac{|A|}{λ} \end{cases}$  分别有特征值

✓  $x$  是  $A$  关于  $λ$  的特征向量, 则  $x$  也是  $\begin{cases} kA & kλ \\ aA + bE & aλ + b \\ A^{-1} & \frac{1}{λ} \\ A^2 & λ^2 \\ A^m & λ^m \\ A^* & \frac{|A|}{λ} \end{cases}$  关于  $\frac{1}{λ}$  的特征向量.

$A$  与  $B$  相似  $B = P^{-1}AP$  ( $P$  为可逆阵) 记为:  $A \square B$

- ✓  $A$  相似于对角阵的充要条件:  $A$  恰有  $n$  个线性无关的特征向量. 这时,  $P$  为  $A$  的特征向量拼成

的矩阵,  $P^{-1}AP$  为对角阵, 主对角线上的元素为  $A$  的特征值.

✓  $A$  可对角化的充要条件:  $n - r(\lambda_i E - A) = k_i$        $k_i$  为  $\lambda_i$  的重数.

✓ 若  $n$  阶矩阵  $A$  有  $n$  个互异的特征值, 则  $A$  与对角阵相似.

A 与 B 正交相似     $B = P^{-1}AP$       (  $P$  为正交矩阵)

✓ 相似矩阵的性质: ①  $A^{-1} \square B^{-1}$       若  $A, B$  均可逆

$$\textcircled{2} \quad A^T \square B^T$$

$$\textcircled{3} \quad A^k \square B^k \quad (k \text{ 为整数})$$

④  $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$ , 从而  $A, B$  有相同的特征值, 但特征向量不一定相同.

即:  $x$  是  $A$  关于  $\lambda_0$  的特征向量,  $P^{-1}x$  是  $B$  关于  $\lambda_0$  的特征向量.

$$\textcircled{5} \quad |A| = |B| \quad \text{从而 } A, B \text{ 同时可逆或不可逆}$$

$$\textcircled{6} \quad r(A) = r(B)$$

$$\textcircled{7} \quad \text{tr}(A) = \text{tr}(B)$$

✓ 数量矩阵只与自己相似.

✓ 对称矩阵的性质:

① 特征值全是实数, 特征向量是实向量;

② 与对角矩阵合同;

③ 不同特征值的特征向量必定正交;

④  $k$  重特征值必定有  $k$  个线性无关的特征向量;

⑤ 必可用正交矩阵相似对角化 (一定有  $n$  个线性无关的特征向量,  $A$  可能有重的特征值, 重数 =  $n - r(\lambda E - A)$ ).

A 可以相似对角化     $A$  与对角阵  $\Lambda$  相似.    记为:  $A \square \Lambda$       (称  $\Lambda$  是  $A$  的相似标准型)

✓ 若  $A$  为可对角化矩阵, 则其非零特征值的个数 (重数重复计算) =  $r(A)$ .

✓ 设  $\alpha_i$  为对应于  $\lambda_i$  的线性无关的特征向量, 则有:

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \dots, \lambda_n\alpha_n) = [\underbrace{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}_P] \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\Lambda}.$$

✓ 若  $A \square B, C \square D$ , 则:  $\begin{bmatrix} A & o \\ o & C \end{bmatrix} \square \begin{bmatrix} B & o \\ o & D \end{bmatrix}$ .

✓ 若  $A \square B$ , 则  $f(A) \square f(B)$ ,  $|f(A)| = |f(B)|$ .

**二次型**  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T AX$   $A$  为对称矩阵  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

**$A$  与  $B$  合同**  $B = C^T AC$ . 记作:  $A \square B$  ( $A, B$  为对称阵,  $C$  为可逆阵)

✓ 两个矩阵合同的充分必要条件是: 它们有相同的正负惯性指数.

✓ 两个矩阵合同的充分条件是:  $A \square B$

✓ 两个矩阵合同的必要条件是:  $r(A) = r(B)$

✓  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T AX$  经过  $\begin{cases} \text{正交变换} \\ \text{合同变换} \\ \text{可逆线性变换} \end{cases}$  化为  $X = CY$   $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_1^n d_i y_i^2$  标准型.

✓ 二次型的标准型不是惟一的, 与所作的正交变换有关, 但系数不为零的个数是由  $r(A)$

正惯性指数+负惯性指数

惟一确定的.

✓ 当标准型中的系数  $d_i$  为 1, -1 或 0 时, 则为**规范形**.

✓ 实对称矩阵的正(负)惯性指数等于它的正(负)特征值的个数.

✓ 任一实对称矩阵  $A$  与惟一对角阵  $\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$  合同.

✓ 用正交变换法化二次型为标准形：

- ① 求出  $A$  的特征值、特征向量；
- ② 对  $n$  个特征向量单位化、正交化；
- ③ 构造  $C$  (正交矩阵),  $C^{-1}AC = \Lambda$ ;

④ 作变换  $X = CY$ , 新的二次型为  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_1^n d_i y_i^2$ ,  $\Lambda$  的主对角上的元素  $d_i$  即为  $A$  的特征值.

**正定二次型**  $x_1, x_2, \dots, x_n$  不全为零,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ .

**正定矩阵** 正定二次型对应的矩阵.

✓ 合同变换不改变二次型的正定性.

✓ 成为正定矩阵的充要条件 (之一成立):

- ① 正惯性指数为  $n$ ;
- ②  $A$  的特征值全大于 0;
- ③  $A$  的所有顺序主子式全大于 0;
- ④  $A$  合同于  $E$ , 即存在可逆矩阵  $Q$  使  $Q^T A Q = E$ ;
- ⑤ 存在可逆矩阵  $P$ , 使  $A = P^T P$  (从而  $|A| > 0$ );

⑥ 存在正交矩阵, 使  $C^T A C = C^{-1} A C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$  ( $\lambda_i$  大于 0).

✓ 成为正定矩阵的必要条件:  $a_{ii} > 0$  ;  $|A| > 0$ .