实对称矩阵的特殊性

对于一般实矩阵

- 矩阵特征值可能为复数
- 不同特征值的特征向量之间线性无关
- 如果可对角化，存在可逆矩阵使其相似于对角形

对于实对称矩阵

- 矩阵特征值一定是实数
- 不同特征值的特征向量之间正交
- 必然可对角化，存在正交矩阵使其相似于对角形

实对称矩阵正交相似对角形的计算流程

- 由特征方程$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=0$求出所有的特征值$\lambda_i$
- 对每一个特征值λ_i，解线性方程组$(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})\mathbf{x}=\mathbf{0}$，得到基础解系向量
- 对得到的基础解系向量做单位正交化，得到每个线性方程组的单位正交的基础解系
- 选取所有的单位正交基础解系向量$\{\xi_i\}$构成正交矩阵$\mathbf{P}=[\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n]$，于是有$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{\Lambda}$

例 (3.4.1)

设矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$，求正交矩阵$\mathbf{P}$，使$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$为对角矩阵。

解： 特征多项式为

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(3-\lambda)$$

所以特征值为$\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=0$。

对$\lambda_1=3$，由于解线性方程组$(\mathbf{A}-3\mathbf{E})\mathbf{x}=\mathbf{0}$得基础解系$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1]^T$，将其单位化得$\boldsymbol{\gamma}_1=[\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]^T$；

对$\lambda_2=\lambda_3=0$，解线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$得基础解系$\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,1,0]^T,\boldsymbol{\alpha}_3=[-1,0,1]^T$。将其正交化得

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,1,0]^T$$
$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=[-1,0,1]^T-\frac{1}{2}[-1,1,0]^T=[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1]^T$$

再单位化得,

$$\gamma_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0]^T, \quad \gamma_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|} = [-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}]^T$$

令

$$\mathbf{P} = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$

则$\mathbf{P}$为正交矩阵，且

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

例 (3.4.2)

设3阶实对称矩阵$\mathbf{A}$的特征值为$5,-1,-1$，且$\mathbf{A}$的对应于特征值5的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1]^T$，求矩阵$\mathbf{A}$。

解： 因为对称矩阵可对角化，所以$\mathbf{A}$有2个线性无关的对应于特征值-1的特征向量，记为ξ_1,ξ_2，它们与$\boldsymbol{\alpha}_1$正交。

设与$\boldsymbol{\alpha}_1$正交的向量为$\mathbf{x}=[x_1,x_2,x_3]^T$，于是由线性方程组

$$\boldsymbol{\alpha}_1^T\mathbf{x}=x_1+x_2+x_3=0$$

得基础解系$\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,1,0]^T,\boldsymbol{\alpha}_3=[-1,0,1]^T$。由于$\xi_1,\xi_2$也满足上面线性方程组，因此$\xi_1,\xi_2$也是方程组的两个线性无关解，即基础解系。于是有

$\boldsymbol{\alpha}_2=c_1\xi_1+c_2\xi_2,\boldsymbol{\alpha}_3=c_3\xi_1+c_4\xi_2$。验证得

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{A}(c_1\xi_1+c_2\xi_2)=-\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{A}(c_3\xi_1+c_4\xi_2)=-\boldsymbol{\alpha}_3$$

所以，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$也是对应于特征值$-1$的两个线性无关的特征向量。

将α_2,α_3正交化得

$$\beta_2=\alpha_2,\quad \beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta 2,\beta 2)}\beta_2=[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1]^T$$

再将α_1,β_2,β_3单位化得

$$\gamma_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=[\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]^T,\quad \gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0]^T,\quad \gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=[-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}]^T$$

于是令$\mathbf{P}=[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$, 有$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}=\begin{bmatrix}5&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}$。因此，

$$\begin{aligned}\mathbf{A}&=\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^T\\&=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

于是令

$$\mathbf{P} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

于是由$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$得

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

作业

第150页练习3.4:

A1(2,4), A3, A4, B2