矩阵等价的性质

- 自返性：$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$
- 对称性：$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$，则$\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$
- 传递性：$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$，$\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$，则$\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$

矩阵的秩

k阶子式：

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & -1 & -7 \\ -4 & 6 & -8 & 3 & 1 & 2 \\ -8 & 12 & -15 & 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

定义

矩阵$\mathbf{A}_{m\times n}$中有一个r阶子式不为零，且所有$r+1$阶子式都为零，则该子式称为最高阶非零子式，r称为矩阵$\mathbf{A}$的秩，记为$R(\mathbf{A})=r$

观察下面矩阵例子，

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以得到什么结论？

性质

矩阵初等变换不改变矩阵的秩

利用上面性质，将矩阵化为行阶梯形矩阵，然后可得原始矩阵的秩

例 (1.7.2)

设$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$，求$\mathbf{A}$的秩和一个最高阶非零子式。

解：

$$\mathbf{A} \xrightarrow[r_4-4r_3]{\substack{r_1-3r_3 \\ r_2-2r_3}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -10 & 10 & -6 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & -10 & 10 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-\frac{10}{3}r_2]{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 4\\0 & -3 & 3 & -1 & -6\\0 & 0 & 0 & 3 & -9\\0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 8\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4+\frac{8}{9}r_3}\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 4\\0 & -3 & 3 & -1 & -6\\0 & 0 & 0 & 3 & -9\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

故$R(\mathbf{A})=3$，且第1,2,4列中存在3阶非零子式。尝试可得一个最高阶非零子式

$$\begin{vmatrix}3 & 6 & 7\\2 & -1 & 1\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

例 (1.7.3)

设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 2 & a & 1 & 3\\ 3 & 4 & b+1 & 3\end{bmatrix}$，且$R(\mathbf{A})=2$，求$a$和$b$的值

解：

$$\mathbf{A}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & a-4 & 3 & 3\\ 0 & -2 & b+4 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -2 & b+4 & 3\\ 0 & a-4 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2\times\frac{a-4}{2}}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -2 & b+4 & 3\\ 0 & 0 & 3+\frac{(b+4)(a-4)}{2} & 3+\frac{3(a-4)}{2}\end{bmatrix}$$

作业

第66页练习1.7：

A2, A3, A9, B1