# 向量空间与向量子空间

## 定义

所有$n$维向量的集合，$R^n$，称为$n$维实向量空间；它的非空子集$V$如果对向量运算保持封闭（对任意$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，有$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}\in V$），则称$V$为$R^n$的一个向量子空间

## 例

- $V=\{\mathbf{0}\}$称为零子空间；
- $V=\{[x,y,0]^T|x,y\in R\}$是$R^3$的一个子空间，而$V=\{[x,y,1]^T|x,y\in R\}$不是$R^3$的一个子空间；
- 齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的解向量组称为该方程组的解空间，而非齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的解向量组不是一个子空间

# 向量空间的基本概念

$$
\begin{tikzcd}
\text{向量组} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \text{向量（子）空间} \arrow[d] \\
\text{向量组的秩} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & \text{向量（子）空间的维数} \arrow[d] \\
\text{最大无关组} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & \text{向量（子）空间的基} \arrow[d] \\
\text{向量在最大无关组下的表示系数} \arrow[r, leftrightarrow] & \text{向量在基下的坐标}
\end{tikzcd}
$$

## 例 (2.5.6)

设$\boldsymbol{\beta}_1=[1,0,1]^T$，$\boldsymbol{\beta}_2=[0,1,0]^T$，$\boldsymbol{\beta}_3=[1,2,2]^T$，证明：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是$R^3$的一个基，并求向量$\boldsymbol{\beta}=[2,6,0]^T$在这个基下的坐标

**证明：** 由于

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&0&2\end{vmatrix}=1\neq 0$$

因此$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关，且方程组$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}$对任意的向量$\boldsymbol{\alpha}\in R^3$都有解，于是$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是$R^3$的一个基。

解线性方程组$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\beta}$得坐标$x_1=4,x_2=10,x_3=-2$

## 定义

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$和$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$是向量空间$V$ 的两个基，且

$$[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k] = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]\mathbf{P}$$

称矩阵$\mathbf{P}$为基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$到基$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$的过渡矩阵，上式称为基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$到基$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$的基变换。

$V$中某个向量$\eta$在基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$和基$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$下的坐标分别为$\mathbf{x}, \mathbf{y}$，则

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$$

称为坐标变换公式。

## 例 (2.5.8)

设$R^3$的两个基为$\alpha_1 = [1,0,1]^T$，$\alpha_2 = [1,1,0]^T$，$\alpha_3 = [0,1,1]^T$ 和 $\beta_1 = [1,0,0]^T$，$\beta_2 = [1,1,0]^T$，$\beta_3 = [1,1,1]^T$，求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵，以及$\eta = [1,3,6]^T$在这两个基下的坐标。

**解：** 由于

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

因此由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

设$\eta$在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$和基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$下的坐标分别为$\mathbf{x}, \mathbf{y}$，则由

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3, \eta] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

得$\mathbf{y} = [-2, -3, 6]^T$。进而由坐标变换公式得

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

# 作业

**第118页练习2.5:**

A1, A2, A3, B1