# 线性代数

第一章：矩阵

- **成绩计算：**通常期末，期中，平时成绩占比为70%，20%，10%
- **作业要求：**自己完成，无论对错
- **课堂要求：**有疑问当场提问，课件不给，自己记笔记
- **参考辅导书：**无特别要求，任何线性代数资料皆可
- **答疑：**助教答疑通常第二周开始，课间休息时间可以答疑，其他时间依赖网络联系但无法即时
- **课程基本方法，难度，内容介绍：**
  概念定义理解 > 计算方法 > 推导技巧
  其余见教学大纲及进度表

# 矩阵的定义

由$m\times n$个数字$a_{ij}$排成的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为$m$行$n$列矩阵，$\underline{m\times n\text{矩阵}}$，记为$\mathbf{A}_{m\times n}=[a_{ij}]$；例如

$$a, \quad [0,2], \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

见练习1.1：A5

# 特殊矩阵及记号

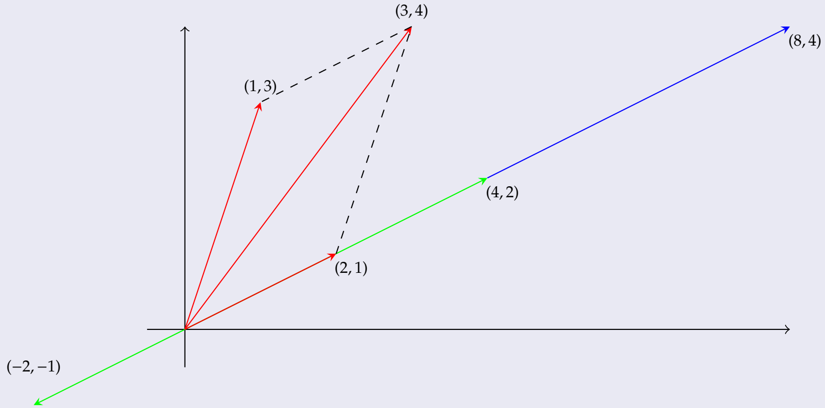
- 实（复）矩阵：$a_{ij}$是实（复）数
- 零矩阵：$a_{ij} = 0$，记为$\mathbf{O}$
- 负矩阵：$-\mathbf{A} = [-a_{ij}]$
- 行（列）矩阵：$m = 1$（$n = 1$）
- $n$阶方阵：$m = n$
- 对称矩阵：$a_{ij} = a_{ji}$，如$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 2 \end{bmatrix}$
- 反称矩阵：$a_{ij} = -a_{ji}$，如$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & -7 \\ -6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

- 上（下）三角矩阵：$a_{ij}=0$，如果$i>j$（$i<j$）如

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 对角矩阵：$a_{ij}=0$，$i\neq j$，如$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，记为diag(1,5,2)
- 数量矩阵：$a_{ii}=a_{jj}$且$a_{ij}=0$，$i\neq j$
- 单位矩阵：$a_{ii}=1$且$a_{ij}=0$，$i\neq j$，记为$\mathbf{E}_n=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

# 例 (向量的组合或者力的合成)



## 例

若学生成绩如下：

| 期末 | 语文 | 数学 | 英语 | 期中 | 语文 | 数学 | 英语 | 平时 | 语文 | 数学 | 英语 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 甲 | 90 | 86 | 95 | 甲 | 94 | 90 | 97 | 甲 | 90 | 80 | 90 |
| 乙 | 78 | 80 | 70 | 乙 | 83 | 85 | 76 | 乙 | 80 | 80 | 70 |
| 丙 | 92 | 93 | 96 | 丙 | 98 | 95 | 97 | 丙 | 90 | 90 | 100 |
| 丁 | 66 | 74 | 75 | 丁 | 60 | 70 | 72 | 丁 | 70 | 80 | 80 |

则该如何表达计算学生的期中期末成绩之和？三门成绩平均值？如果期末期中和平时成绩占比为70%，20%，10%，如何计算最终成绩？

# 矩阵的运算

- 矩阵相等：$\mathbf{A}=\mathbf{B} \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$

**例 (1.2.1)**

设矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$与矩阵$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} b+1 & 2 & 4-a \\ 3 & c-2 & 5 \end{bmatrix}$相等，求$a,b,c$的值。

**解**：由定义知$a=4-a$，$1=b+1$，$-1=c-2$。解得$a=2,b=0,c=1$。

- 矩阵常用运算：

  加法$\mathbf{A}+\mathbf{B}$，数乘$k\mathbf{A}$，乘法$\mathbf{AB}$，转置$\mathbf{A}^T$，行列式$|\mathbf{A}|$，逆矩阵$\mathbf{A}^{-1}$

- 矩阵加法：$\mathbf{A}+\mathbf{B}=[a_{ij}]+[b_{ij}]=\mathbf{C}=[c_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]$
- 矩阵数乘：$k\mathbf{A}=k[a_{ij}]=\mathbf{B}=[b_{ij}]=[ka_{ij}]$

## 例 (1.2.2)

设矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -\sin 1 & 0\\ \pi & 5 & 0.2 & 8\\ -6 & \sqrt{2} & 3 & 9\end{bmatrix}$，矩阵$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -\sin 1 & 10\\ -2\pi & 3 & 0.2 & -8\\ -6 & -3\sqrt{2} & -6 & 9\end{bmatrix}$，求$2\mathbf{A}+\mathbf{B}$

**解：**

$$\begin{aligned}2\mathbf{A}+\mathbf{B}&=2\begin{bmatrix}2 & 1 & -\sin 1 & 0\\ \pi & 5 & 0.2 & 8\\ -6 & \sqrt{2} & 3 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1 & -\sin 1 & 10\\ -2\pi & 3 & 0.2 & -8\\ -6 & -3\sqrt{2} & -6 & 9\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}4 & 2 & -2\sin 1 & 0\\ 2\pi & 10 & 0.4 & 16\\ -12 & 2\sqrt{2} & 6 & 18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1 & -\sin 1 & 10\\ -2\pi & 3 & 0.2 & -8\\ -6 & -3\sqrt{2} & -6 & 9\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}5 & 3 & -3\sin 1 & 10\\ 0 & 13 & 0.6 & 8\\ -18 & -\sqrt{2} & 0 & 27\end{bmatrix}\end{aligned}$$

- 矩阵乘法：$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times l} = [a_{ij}][b_{ij}] = \mathbf{C}_{m\times l} = [c_{ij}] = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}]$

## 例 (1.2.4)

设矩阵$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$，$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，求$\mathbf{AB}$

**解**：由定义知$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 3 + 2\times 2 + 3\times 1 \\ 4\times 3 + 5\times 2 + 6\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 28 \end{bmatrix}$.

思考：如果矩阵$\mathbf{B}$中都是未知数，上述表达会让人联想到什么？

## 例 (1.2.5)

设矩阵$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$，$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，求$\mathbf{AB}, \mathbf{BA}$

**解**：由定义知$\mathbf{AB} = 14$，$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$.

（由此可知，$\mathbf{AB}$和$\mathbf{BA}$甚至连形状都可以不同）

## 注：

1. 由例1.2.5，1.2.6可知，矩阵乘法没有交换律
2. 矩阵数乘与乘法的关系：$k\mathbf{A}_{m\times n} = (k\mathbf{E}_m)\mathbf{A} = \mathbf{A}(k\mathbf{E}_n)$
3. 由乘法可定义矩阵的幂运算，即$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}, \mathbf{A}^k = \mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}$，以及矩阵多项式，比如：如果有多项式$f(x) = x^2 + 2x + 3$，则有对应的矩阵多项式$f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + 3\mathbf{E}$；特别的，当$\mathbf{A}$是对角矩阵时，如$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$，有

$$f(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}^2 + 2\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(1) & & \\ & f(2) & \\ & & f(3) \end{bmatrix}$$

思考：对于一般多项式，对应的矩阵多项式应如何？对角矩阵的又如何？

- 矩阵转置：$\mathbf{A}_{m\times n}^T = [a_{ij}]^T = [b_{st}]_{n\times m} = [a_{ts}]$

## 例 (1.2.8)

若$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 6 \end{bmatrix}$，$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$，$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$，求$\mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{C}^T$

**解：** 由定义知$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$，$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$，$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

思考：$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$的转置是什么？

## 例 (1.2.3)

设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 5\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 3\end{bmatrix}$, 求满足条件$2\mathbf{A}+3(2\mathbf{B}-4\mathbf{X})=5\mathbf{B}$的矩阵$\mathbf{X}$

**解：** 由条件可知$\mathbf{X}$为$2\times 3$矩阵，则可设$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_4 & x_5 & x_6\end{bmatrix}$，于是

$$
\begin{aligned}
&2\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 5\end{bmatrix}+3\left(2\begin{bmatrix}-1 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 3\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_4 & x_5 & x_6\end{bmatrix}\right)\\
=&\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & -4 & 10\end{bmatrix}+3\left(\begin{bmatrix}-2-4x_1 & 8-4x_2 & 10-4x_3\\ 4-4x_4 & 10-4x_5 & 6-4x_6\end{bmatrix}\right)\\
=&\begin{bmatrix}-4-12x_1 & 28-12x_2 & 36-12x_3\\ 12-12x_4 & 26-12x_5 & 28-12x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 20 & 25\\ 10 & 25 & 15\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

因此可得$\mathbf{X}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}1 & 8 & 11\\ 2 & 1 & 13\end{bmatrix}$

- 矩阵的共轭：$\overline{\mathbf{A}} = \overline{[a_{ij}]} = [\bar{a}_{ij}]$
- 矩阵的迹：$tr\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

**例**

若$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$，求$tr(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$

**解：** 因为

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2 + 2^2 + 3^2 & * \\ * & 0^2 + (-2)^2 + 5^2 \end{bmatrix}$$

所以，$tr(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 0^2 + (-2)^2 + 5^2 = 43$

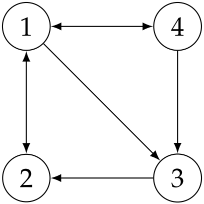
# 作业

**第12页练习1.2：**

A1, A3, A7 （留意A1(4)最后表达式是什么）

# 关联矩阵

四个城市间的航线连接如图所示




可用矩阵$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$来表示，则$\mathbf{A}^2$，$\mathbf{A}^3 \cdots$有什么含义？

大写字母N可表示为矩阵:$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0 & 0.5 & 0.5 & 6 & 6 & 5.5 & 5.5 & 0\\ 0 & 0 & 6.42 & 0 & 8 & 8 & 1.58 & 8\end{bmatrix}$，利

用$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0.25\\ 0 & 1\end{bmatrix}$可变倾斜，即$\mathbf{AD}=\begin{bmatrix}0 & 0.5 & 2.105 & 6 & 8 & 7.5 & 5.895 & 2\\ 0 & 0 & 6.42 & 0 & 8 & 8 & 1.58 & 8\end{bmatrix}$。

觉得有点太宽，还可以经由$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0.75 & \\ & 1\end{bmatrix}$将其变窄一点。

# 图形变换

平面绕原点旋转：$(x,y) \mapsto (x\cos\phi - y\sin\phi, x\sin\phi + y\cos\phi)$

平面平移：$(x,y) \mapsto (x+h, y+k)$

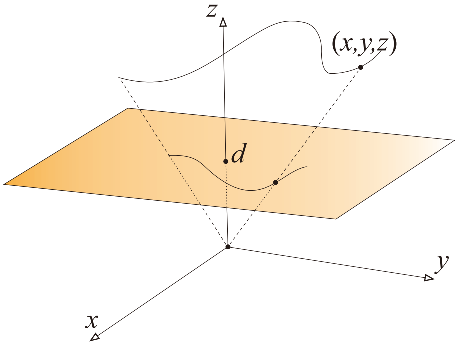
引入齐次坐标$(x,y) := (x,y,1)$后，则有

$$\begin{bmatrix} 1 & & h \\ & 1 & k \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+h \\ y+k \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & \\ \sin\phi & \cos\phi & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\phi - y\sin\phi \\ x\sin\phi + y\cos\phi \\ 1 \end{bmatrix}$$

类似有$\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s & & \\ & t & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ & 1 \end{bmatrix}$

# 透视投影

将一个三维影像投射到一个二维屏幕上，




变换过程为$(x,y,z) \mapsto \frac{d}{z}(x,y,z) = (\frac{d}{z}x, \frac{d}{z}y, d) \mapsto (\frac{d}{z}x, \frac{d}{z}y)$，于是有

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & \frac{1}{d} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ \frac{z}{d} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{d}{z}x \\ \frac{d}{z}y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$