厦门大学《线性代数I》课程试卷

________学院_____系_____年级_______专业

主考教师：______ 试卷类型：期中考卷 考试日期：2022.04.09

1. （10分）计算行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. （10分）设$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$的第$i$行第$j$列元素$a_{ij}$的代数余子式记作$A_{ij}$.

   求$A_{11}+2A_{12}+3A_{13}+4A_{14}$.

3. （10分）设A,B是n阶方阵，A^*是A的伴随矩阵，B^{-1}是B的逆矩阵，且$|A|=2$, $|B|=3$. 求行列式$|2A^*B^{-1}|$.

4. （10分）用<u>克拉默法则</u>求解线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ ax_1+bx_2+cx_3=0, \\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0, \end{cases}$ 其中a,b,c两两不等。

5. （10分）设$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, 且$R(A)=3$. 求常数$a,b$的值。

6. （10分）求n阶行列式$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

7. （15分）问常数k为何值时方程组$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = k \\ x_1 + x_2 + kx_3 = k^2 \\ kx_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

(1) 无解？(2) 有唯一解？(3) 有无穷多解?

并在方程组有无穷多解时，求出原方程组的通解。

8. （15分）设$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

若矩阵X满足$AXA + BXB = AXB + BXA + A(A - B)$. 求矩阵$X$.

(<u>逆矩阵必须使用初等变换计算</u>)

9. （10分）设A是一个n阶矩阵，$R(A) = 1$. 试证：

(1) A可表成$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1\ b_2\ \cdots b_n]$.

(2) $A^2 = kA$, 其中k是某个常数。