

# 厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷解答



学院 \_\_\_\_\_ 系 \_\_\_\_\_ 年级 \_\_\_\_\_ 专业 \_\_\_\_\_

试卷类型:(理工类 A 卷)

考试时间:2023.11.18

## 一、选择题: (每小题 4 分, 共 16 分)

1.  $x=0$  是函数  $f(x)=\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}$  的 ( ) 。
 

(A) 可去间断点; (B) 跳跃间断点; (C) 无穷间断点; (D) 振荡间断点。
2. 用数列极限的定义证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{n^2+1}=1$ , 对于  $\forall \varepsilon > 0$ , 可取  $N=$  ( ) 。
 

(A)  $\frac{1}{\varepsilon}$ ; (B)  $\frac{2}{\varepsilon}$ ; (C)  $[\frac{1}{2\varepsilon}]$ ; (D)  $[\frac{1}{\varepsilon}]+1$ 。
3. 设  $f(x)=2^x+3^x-2+2x^2$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  ( ) 。
 

(A) 与  $x$  是等价无穷小; (B) 与  $x$  同阶但非等价无穷小;  
 (C) 是比  $x$  高阶的无穷小; (D) 是比  $x$  低阶的无穷小。
4. 函数  $y=(x^2+x-2)|x^3-x|$  的不可导点的个数为 ( ) 。
 

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3。

## 二、填空题: (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 设  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+ax^2-x+4}{1+x}$  具有极限  $b$ , 则  $a=$  \_\_\_,  $b=$  \_\_\_。
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arccot x}{x} =$  \_\_\_。
3. 函数  $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin ax}{2x} & x>0 \\ b & x=0 \\ (1-2x)^{\frac{1}{x}} & x<0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 则  $a=$  \_\_\_,  $b=$  \_\_\_。
4. 设  $f(x)=\sqrt{\frac{(2x+2)\sqrt{x}}{e^{2x-2}}}$ , 则  $f'(1)=$  \_\_\_。
5. 设  $y=f(x)$  在  $(1, +\infty)$  可导且满足  $\frac{d}{dx} f(\sec^2 x) = \cot x$ , 则  $dy|_{x=2}=$  \_\_\_。
6. 设  $y=x^2 \sin 2x$ , 则  $y^{(5)}|_{x=0}=$  \_\_\_。

三、求下列函数极限：（每小题 6 分，共 18 分）

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\arcsin(x^2-1)};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x\right)^x;$$

$$3. \text{已知 } f(x) \text{ 满足 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) - \sin x}{x^3} = \frac{2}{3}, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x^2}.$$

四、(本题 8 分) 求曲线  $\begin{cases} x = \arcsin \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$  在  $(0,0)$  处的切线方程。

五、(本题 8 分) 求由方程  $y = \tan(x + y)$  所确定的隐函数  $y = y(x)$  的一阶导数和二阶导数。

六、(本题 10 分) 设数列  $\{x_n\}$  满足:  $x_1 = 2$ ,  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$ 。证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求其极限。

七、(本题 8 分) 证明函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$  除在  $x=0$  处可导外, 在其它点处均不可导的。

八、(本题8分)设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续且  $0 < f(x) < 1$ ，在  $(0,1)$  内可导且  $f'(x) \neq 1$ 。证明  $f(x)$  在  $(0,1)$  内存在唯一的不动点，即在  $(0,1)$  内有且只有一个点  $\xi$ ，使得  $f(\xi) = \xi$ 。