矩阵初等变换

定义:

矩阵初等变换为:

- 两行（列）互换;
- 某行（列）乘非零数;
- 某行（列）加上另一行（列）倍数

矩阵**A**经过有限次初等变换变为矩阵**B**，则称两矩阵等价。

问题:

对任意给定矩阵，经过初等变换所能变成的最简单样子的矩阵是什么?

经过初等行变换所能变成的最简单样子是什么?

行最简形矩阵和等价标准形

行最简形：

- 行阶梯形矩阵；
- 拐角是1；
- 拐角上方是0

等价标准形：$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$

例 (1.6.3; 1.6.4)

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & -1 & -7 \\ -4 & 6 & -8 & 3 & 1 & 2 \\ -8 & 12 & -15 & 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，求$\mathbf{A}$的行阶梯形矩阵和行最简形矩阵，以及等价标准形

解：

$$\mathbf{A} \xrightarrow[r_4-4r_1]{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-2r_1}} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -21 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4-r_2} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-2r_3} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{9}{2} & -26 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例 (1.6.6)

设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}$, 求$\mathbf{A}^{-1}$

解:

$$[\mathbf{A},\mathbf{E}]=\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\2&3&4&0&1&0\\3&4&5&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&1&-1&-3&0&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&2&3&-1&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&1&1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&-3&2\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&1&1&-1\end{bmatrix}$$

所以$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-3&2\\-2&1&0\\1&1&-1\end{bmatrix}$

初等矩阵

初等矩阵由单位矩阵做一次初等变换得到;

- **E**(i,j)：单位矩阵做i,j两行（列）互换$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$
- **E**$(i(k))$：单位矩阵做第i行（列）乘$k(\neq 0)$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

- **E**$(i,j(k))$：单位矩阵做第i行加上第j行乘k（第j列加上第i列乘k）

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

作业

第59页练习1.6:

A3, A5, A6