厦门大学《线性代数 I》课程试卷

__________ 学院______ 系 _____ 年级________ 专业

主考教师：_____ 试卷类型：期中解答卷 考试日期：2024.11.09

注意：所有行列式化简和矩阵初等变换必须标出每一步骤！

1. (10 分) 设

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix},$$

D 的 (i,j) 元的余子式和代数余子式依次记作 M_{ij} 和 A_{ij}，求:

(1) $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$.

(2) $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$.

解由定义，$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ 等于用 1,1,1,1 代替 D 的第 1 行所得的行列式，即

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}\text{(2 分)}\overset{r_4+r_3}{\underset{r_3-r_1}{=}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}\overset{c_2+c_1}{=}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4.\text{(3 分)}$$

由定义可得

$$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}\qquad\text{(2 分)}$$

$$\overset{r_4+r_3}{=}\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}\overset{r_1-2r_3}{=}\begin{vmatrix} -1 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0.\text{(3 分)}$$

2. (10 分) 用**克拉默法则**求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

解. 因为方程组的系数矩阵的行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$，由克拉默法则，它有唯一解，并且

$$x_1 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 5, x_2 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0, x_3 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3.$$

（结果 3 分，过程 7 分。没有用克拉默法则、但结果正确给 4 分。）

3. (10 分) 设

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad AP = P\Lambda,$$

求 $\varphi(A) = A^3 + 2A^2 - 3A$.

解

$$|P| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6,$$

故 P 可逆，从而

$$A = P\Lambda P^{-1}, \quad \varphi(A) = P\varphi(\Lambda)P^{-1}.$$

而 $\varphi(1) = 0, \varphi(2) = 10, \varphi(-3) = 0$，故 $\varphi(\Lambda) = \mathrm{diag}(0, 10, 0)$. 因此，

$$\varphi(A) = P\varphi(\Lambda)P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{|P|}P^* = \frac{10}{6}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{5}{3} \cdot \begin{pmatrix} A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \end{pmatrix},$$

其中

$$A_{12}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0,\quad A_{32}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3.$$

于是

$$\varphi(A)=5\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(结果 3 分，过程 7 分)

4. (1) (7 分) 设 A 为四阶矩阵，且 $|A|=\frac{1}{2}$，求 $\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-2A^*\right|$.

解. 由 $A^*=|A|A^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1}$, 得

$$\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-2A^*\right|=\left|3A^{-1}-A^{-1}\right|=\left|2A^{-1}\right|=2^4\cdot\left|A^{-1}\right|=\frac{16}{|A|}=32.$$

(结果 2 分，过程 5 分)

(2) (8 分) 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3k\\ -1 & 2k & -3\\ k & -2 & 3\end{pmatrix}$ 的秩 $R(A)$, 这里 k 是常数。

解: 由行初等变换，矩阵 A 可化为 $\begin{bmatrix}1 & -2 & 3k\\ 0 & 2(k-1) & 3(k-1)\\ 0 & 0 & -3(k-1)(k+2)\end{bmatrix}$. 故

$$R(A)=\begin{cases}1 & \text{若 } k=1;\\ 2 & \text{若 } k=-2;\\ 3 & \text{若 } k\neq 1 \text{ 和 } k\neq -2.\end{cases}$$

(结果 3 分，过程 5 分)

5. (15 分) 讨论 a,b 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2-2x_3+3x_4=0,\\ x_1-3x_2-6x_3+2x_4=-1,\\ x_1+5x_2+10x_3-x_4=b,\\ 3x_1+x_2+ax_3+4x_4=1\end{cases}$$

无解，有唯一解，有无穷多解。当方程组有无穷多解时，试求其通解。

解. 对线性方程组的增广矩阵作行初等变换

$$[A,\beta]=\begin{pmatrix}1&-1&-2&3&0\\1&-3&-6&2&-1\\1&5&10&-1&b\\3&1&a&4&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_2-r_1,r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&-2&3&0\\0&-2&-4&-1&-1\\0&6&12&-4&b\\0&4&a+6&-5&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_3+3r_2,r_4+2r_2}\begin{pmatrix}1&-1&-2&3&0\\0&-2&-4&-1&-1\\0&0&a-2&-7&-1\\0&0&0&-7&b-3\end{pmatrix}=B.$$

(1) 当 $a=2$，且 $b\neq 2$ 时，$B\xrightarrow{r_4-r_3}\begin{pmatrix}1&-1&-2&3&0\\0&-2&-4&-1&-1\\0&0&0&-7&-1\\0&0&0&0&b-2\end{pmatrix}$ 故 $R(A)=3,R(A,\beta)=4$，因此，原线性方程组无解。(4 分)

(2) 当 $a\neq 2$ 时，$R(A)=R(A,\beta)=4$，故原线性方程组有唯一解。(4 分)

(3) 当 $a=2$ 且 $b=2$ 时，$R(A)=R(A,\beta)=3$，故原线性方程组有无穷多解，(3 分)因 $B\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&2&0&\frac{3}{7}\\0&0&0&1&\frac{1}{7}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.(2 分) 令 $x_3=c$，得原方程组的通解为 $\begin{cases}x_1=0,\\x_2=\frac{3}{7}-2c,\\x_3=c,\\x_4=\frac{1}{7}.\end{cases}$ 其中 c 为任意常数。(2 分)

6. (10 分) 设 $A=[1,2,-3]$，$B=\begin{pmatrix}0\\5\\6\end{pmatrix}$，求矩阵 $(BA)^{10}$.

解. 首先，$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\5\\6\end{pmatrix}=1\cdot 0+2\cdot 5+(-3)\cdot 6=10-18=-8.$(3 分) 因此，

$$(BA)^{10}=B(AB)\cdots(AB)A=(-8)^9(BA)\text{(3 分)}=-8^9\begin{pmatrix}0\\5\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

$$=-8^9\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\5 & 10 & -15\\6 & 12 & -18\end{pmatrix}.\text{(4 分)}$$

7. (10 分) 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 6\\1 & 6 & 1\end{pmatrix}.$$

满足 $AX+E=A^2+X$，求矩阵 X.

解. 化简矩阵方程为

$$(A-E)X=A^2-E.\text{(1 分)}$$

由于

$$A-E=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 6\\1 & 6 & 0\end{pmatrix},\quad |A-E|=-1\neq 0,$$

可知 $A-E$ 可逆。(3 分) 在等式两端左乘 $(A-E)^{-1}$，得

$$X=(A-E)^{-1}(A^2-E)=(A-E)^{-1}(A-E)(A+E).\text{(3 分)}$$

因此，

$$X=A+E=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\0 & 3 & 6\\1 & 6 & 2\end{pmatrix}.\text{(3 分)}$$

8. (10 分) 证明：$D_n=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\-1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0\\0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1\\0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2\end{vmatrix}=n+1.$

证明: 当 $n=1$ 时，$D_1=2=1+1$，结论成立；(2 分)

设当 $n=k$ 时，结论成立，即 $D_k=k+1$；当 $n=k+1$ 时，

$$D_{k+1}=2D_k+(-1)^{1+2}\times(-1)\times(-1)D_{k-1}=2D_k-D_{k-1}.\text{(4 分)}$$

由于 $D_k=k+1$ 且 $D_{k-1}=k$, (2 分) 因此

$$D_{k+1}=2(k+1)-k=(k+1)+1.\text{(2 分)}$$

由数学归纳法，对一切的 n 有 $D_n=n+1$.

9. (10 分) 设 A 为 n 阶矩阵，且矩阵 A 的秩 $R(A)<n$. 记 A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵。

(1) (4 分)证明：$R(A^*)=0$ 或 1.

(2) (6 分)记 A_{11} 为矩阵 A 的第一行第一列的对应的代数余子式，且 $A_{11}\neq 0$. 证明：存在常数 k，使得 $(A^*)^2=kA^*$.

证明.

(1) 若 $R(A)=n-1$，则 A 中至少有一个 $n-1$ 阶子式不等于零，即 A^* 中至少有一个元素不为零，故 $R(A^*)\geq 1$. (1 分)注意到 $|A|=0$，故 $AA^*=|A|E=O$. 于是，$R(A)+R(A^*)\leq n$. (2 分) 从而，$R(A^*)\leq n-(n-1)=1$. 因此，$R(A^*)=1$.

若 $R(A)<n-1$，则 A 的所有 $n-1$ 阶子式全为 0. 从而，A^* 的所有元素全为 0. 因此，$A^*=O$, 故 $R(A^*)=0$. (1 分)

(2) 由 (1) $R(A^*)=0$ 或 $R(A^*)=1$. 因为 $A_{11}\neq 0$，所以 $R(A^*)=1$, (1 分) 于是存在非零列向量 α,β，使得 $A^*=\alpha\beta^\top$，(2 分)故

$$(A^*)^2=\alpha\beta^\top\cdot\alpha\beta^\top=k\alpha\beta^\top=kA^*,\text{(3 分)}$$

其中常数 $k=\beta^\top\alpha$.